РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ В МАШИНОСТРОЕНИИ

С. Д. ПОНОМАРЕВ, В. Л. БИДЕРМАН,
К. К. ЛИХАРЕВ, В. М. МАКУШИН,
Н. Н. МАЛИНИН, В. И. ФЕОДОСЬЕВ

II

МАШГИЗ

С. Д. ПОНОМАРЕВ, В. Л. БИДЕРМАН, К. К. ЛИХАРЕВ,
В. М. МАКУШИН, Н. Н. МАЛИНИН, В. И. ФЕОДОСЬЕВ

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ В МАШИНОСТРОЕНИИ

ТОМ II

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. РАСЧЕТЫ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ. РАСЧЕТЫ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ

Под редакцией
д-ра техн. наук проф. С. Д. ПОНОМАРЕВА

МАШГИЗ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1958

Во II томе книги рассматриваются некоторые задачи прикладной теории упругости, а также расчеты с учетом пластических деформаций и ползучести материала. Приводятся методы расчета круглых и прямоугольных пластин, оболочек вращения и толстостенных труб. Излагаются теория контактных напряжений, расчет резиновых и резино-кордных элементов конструкций, расчеты в области малых упруго-пластических деформаций, а также расчеты при установившейся и неустановившейся ползучести.

Книга предназначена для инженеров-конструкторов и производственников, работающих в области машиностроения и сталкивающихся с вопросами прочности. Она может быть использована студентами, аспирантами и научными работниками.

Редакция литературы по тяжелому машиностроению.
Зав. редакцией инж. С. Я. ГОЛОВИН

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как уже отмечалось в предисловии к I тому, задачи, выдвигаемые практикой машиностроения в области прочности, многообразны, сложны и ответственны.

Инженеры-механики должны владеть методами расчета на прочность деталей самой разнообразной формы, с учетом различных условий их службы (см. предисловие к I тому).

Квалификация инженеров-машиностроителей в области прочности имеет для нашей социалистической промышленности огромное значение.

Учитывая сказанное, авторы книги «Расчеты на прочность в машиностроении» поставили перед собой задачу изложить в удобной для практического применения форме современные методы расчета на прочность, жесткость, устойчивость и вибрацию применительно к запросам машиностроения.

Этот труд в трех томах составлен на базе предшествующей работы того же коллектива авторов, опубликованной под названием «Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении»: I том в 1950 г.; II том в 1952 г. (Машгиз).

Новая книга значительно расширена в сравнении с упомянутыми выше «Основами». В нее включен ряд новых глав, многие главы полностью переработаны и пополнены справочным материалом и расчетными примерами из практики машиностроения.

В книге получили отражение результаты исследований в области прочности, проведенные авторами за последнее время.

I том включает два раздела: «Теоретические основы расчетов на прочность и экспериментальные методы исследований напряжений и деформаций» и «Расчеты на прочность и жесткость стержневых элементов конструкций при статической нагрузке».

II том содержит четыре раздела: «Расчеты пластин и оболочек», «Расчет толстостенных труб, контактные напряжения, расчеты резиновых деталей», «Расчеты за пределами упругости» и «Расчеты на ползучесть».

В III томе излагаются расчеты при динамических нагрузках и расчеты на устойчивость элементов машиностроительных конструкций.

Рассмотрим более детально содержание II тома:

Первый раздел «Расчеты пластин и оболочек» содержит четыре главы.

В главе I изложена теория изгиба круглых пластин и ее технические приложения.

Большое внимание уделяется рациональным методам интегрирования дифференциального уравнения осесимметричной задачи для пластин как постоянной, так и переменной толщины.

Излагается графоаналитический способ расчета пластин, весьма эффективный в инженерной практике.

Изучаются некоторые случаи асимметричного изгиба круглых пластин.

Глава II посвящена общей теории изгиба прямоугольных пластин и ее техническим приложениям.

В частности, рассматриваются неразрезные пластины, а также пространственные системы, составленные из прямоугольных плит.

В главе III приведены расчеты тонкостенных оболочек вращения. Помимо безмоментной теории изложены расчеты цилиндрической, конической, сферической, торообразной и составных оболочек по изгибной теории.

В главе IV рассмотрены осесимметричные гибкие оболочки, широко применяемые в приборостроении как упругие элементы приборов; исследованы плоские, малоподъемистые сферические и гофрированные мембраны различной конструкции, а также сильфоны.

Второй раздел «Расчет толстостенных труб; контактные напряжения; расчет резиновых деталей» содержит три главы: V, VI и VII.

В главе V «Расчет симметрично нагруженных цилиндрических деталей» рассматривается расчет толстостенных труб, нагруженных внутренним и внешним давлениями как постоянными, так и изменяющимися по длине, а также расчет прессовых посадок при различной длине сопрягаемых деталей.

В главе VI исследуется напряженное и деформированное состояние в местах контакта упругих тел, ограниченных криволинейными поверхностями. Эта теория лежит в основе учения о контактной прочности зубчатых и червячных передач, шариковых и роликовых опор и ряда других деталей машин.

В главе VII излагаются методы расчета резиновых и резино-кордных элементов конструкций, получающих все бо́льшее применение в самых разнообразных отраслях техники.

Третий раздел «Расчеты за пределами упругости» включает четыре главы: VIII, IX, X и XI.

Несмотря на то что теория пластичности является сравнительно молодой отраслью науки о прочности, в этой области за последние годы достигнуты большие успехи.

Методы теории пластичности получили широкое применение в машиностроительной практике. Они используются при проектировании новых конструкций, когда последние рассчитываются по несущей способности. Многие расчеты, связанные с выполнением различных технологических операций, также основываются на теории пластичности.

В главе VIII изложена теория малых упруго-пластических деформаций. Рассмотрены основные гипотезы этой теории и приведены результаты их экспериментальной проверки.

В главе IX рассматриваются упруго-пластические деформации элементов конструкций, имеющих форму бруса.

В главе X приведены расчеты тел вращения (трубы, шайбы) с учетом упруго-пластических деформаций.

В главе XI освещаются графоаналитические методы расчета за пределами упругости элементов конструкций, выполненных из материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Четвертый раздел «Расчеты на ползучесть» также включает четыре главы: XII, XIII, XIV и XV.

Использование в современной технике высоких температур застав-

ляет исследователей в последние годы серьезно заниматься проблемой ползучести и решать вопросы возможной продолжительности сроков службы агрегатов, детали которых в условиях эксплуатации длительное время находятся под нагрузкой в нагретом состоянии.

В частности, необходимо путем расчета устанавливать величину монтажных напряжений упругих соединений, которые в нагретом состоянии обеспечили бы полноценную службу конструкций в течение заранее предусмотренного длительного срока.

В главе XII изложены основные результаты экспериментального изучения ползучести при одноосном растяжении, являющиеся базой современной теории ползучести.

В главе XIII рассматриваются гипотезы ползучести, устанавливающие зависимости между деформацией, напряжением, скоростями их изменения и временем при ползучести. Эти гипотезы сопоставляются с результатами экспериментов и подвергаются критическому анализу.

В главе XIV приведены расчеты элементов конструкций при установившейся ползучести.

В главе XV рассмотрены вопросы неустановившейся ползучести.

Расчеты на ползучесть лопаток и дисков турбомашин, ввиду особой их практической важности, изложены в самостоятельных главах III тома.

Для выполнения расчетов за пределами упругости знания отдельных показателей механических свойств материалов недостаточно.

Необходимо располагать полными механическими характеристиками, функционально определяющими поведение материала от начала нагружения вплоть до разрушения.

В связи с этим в приложении приведены графики механических характеристик некоторых машиностроительных материалов при их растяжении и сжатии. Они получены в лаборатории кафедры «Сопротивление материалов» Московского высшего технического училища имени Баумана.

Таково вкратце содержание тома II книги «Расчеты на прочность в машиностроении».

В книге использованы результаты исследований авторов в области прочности, полученные и опубликованные ими за последние годы. В частности, к ним относятся рациональный метод расчета круглых пластин постоянного и ступенчатого профиля, графоаналитический метод расчета круглых пластин, расчет пространственных систем, составленных из прямоугольных плит, расчет осесимметричных гибких оболочек, расчет толстостенных труб и прессовых посадок, расчет резиновых и резино-кордных конструкций, расчеты на ползучесть, а также ряд расчетов с учетом упруго-пластических деформаций.

Общее редактирование книги проведено С. Д. Пономаревым, им же написана глава I.

Главы V и VII написаны В. Л. Бидерманом. Глава XI написана К. К. Лихаревым, им же получены и обработаны характеристики материалов, приведенные в «Приложении». Автором глав VIII, IX и X, а также XII, XIII, XIV и XV является Н. Н. Малинин. Глава VI написана В. М. Макушиным, а главы II, III и IV — В. И. Феодосьевым.

Необходимо отметить, что каждая тема, включенная во II том, может быть изучена самостоятельно и не требует проработки всей книги в целом.

В конце каждой главы приведена основная литература по излагаемому вопросу.

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ
РАСЧЕТ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ ИЗГИБА КРУГЛЫХ ПЛАСТИН И ЕЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В томе I книги рассмотрены расчеты деталей, имеющих форму бруса.

Напомним, что под брусом понимается тело, одно из измерений которого значительно больше двух других.

Второй основной формой, представляющей многие детали машиностроительных конструкций, является оболочка.

Под оболочкой понимается тело, одно из измерений которого значительно меньше двух других.

Стенки котлов и баков, тонкостенные своды различных строительных сооружений представляют собой оболочки.

(Расчет оболочек изложен в гл. III и IV, т. II.)

Геометрическое место точек, равноотстоящих от обеих внешних поверхностей оболочки, называется срединной поверхностью.

Если срединная поверхность является плоскостью, то соответствующее плоское тело представляет собой пластину.

Размеры пластины в направлении, нормальном ее срединной плоскости (толщина h), малы по сравнению с габаритными размерами пластины в ее плоскости.

Толщина h пластины, вообще говоря, может быть переменной, но и в этом случае предполагается, что геометрическое место точек, делящих толщину пластины в любом ее месте пополам, представляет собой плоскость. Таким образом, срединная плоскость пластины всегда является плоскостью ее симметрии.

В инженерной практике широко применяются пластины различного очертания.

Простейшими в смысле расчета являются пластины, контур которых представляет собой окружность. С них и целесообразно начать изложение инженерных методов расчета пластин.

(Расчет прямоугольных пластин рассмотрен в гл. II т. II.)

В машиностроении часто встречаются элементы конструкций, имеющих форму круглой сплошной или кольцевой пластины.

Плоские днища резервуаров, плоские крышки цилиндров, фланцы труб, различного рода диафрагмы и уплотняющие устройства могут служить примерами круглых пластин.

Рассчитывать пластины методами, применяемыми для расчета брусьев, недопустимо, так как при изгибе пластин их напряженное состояние, в отличие от напряженного состояния изгибаемого бруса, не является одноосным.

Математически строгая теория расчета пластин, удовлетворяющая всем уравнениям теории упругости, исключительно сложна.

В такой постановке рассмотрены лишь отдельные простейшие задачи [23].

В связи с этим при решении многочисленных вопросов по расчету круглых пластин, выдвигаемых инженерной практикой, приходится довольствоваться приближенной теорией, опирающейся на ряд гипотез, справедливых только для тонких пластин.

Эти методы могут быть практически используемы, когда наибольшая толщина пластины не превышает $^1/_5$ ее диаметра, что в большинстве случаев, однако, удовлетворяет запросам машиностроения.

При рассмотрении изгиба круглых пластин весьма существенна также относительная величина прогибов срединной плоскости.

Пластины, наибольший прогиб которых не превышает $^1/_5$ их толщины, называются жесткими. При их изгибе радиальными перемещениями точек срединной плоскости можно пренебречь.

В связи с этим можно не считаться и с напряжениями растяжения, возникающими в срединной плоскости при ее искривлении, когда края пластины закреплены.

Это в значительной степени упрощает анализ деформированного и напряженного состояния жестких пластин.

В настоящей главе будут рассмотрены инженерные методы расчета на изгиб круглых (сплошных и кольцевых) тонких жестких пластин в предположении осесимметричной их деформации в пределах упругости. Лишь в конце главы исследуются некоторые важные для практики случаи изгиба круглых пластин при асимметричном их нагружении.

Расчет гибких пластин [16], [25], прогибы которых значительны и превышают величину $\frac{h}{5}$, будут рассмотрены в гл. IV т. II.

§ 1. ВЫВОД РАСЧЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ИЗГИБА СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ КРУГЛЫХ ТОНКИХ, ЖЕСТКИХ ПЛАСТИН ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

А. Общие положения и гипотезы

Рассмотрим круглую пластину постоянной толщины h, закрепленную каким-либо образом по длине одного или нескольких соосных круговых контуров и нагруженную:

а) нормальным давлением, распределенным по некоторому осесимметричному закону $p=p(r)$ (фиг. 1, *а*).

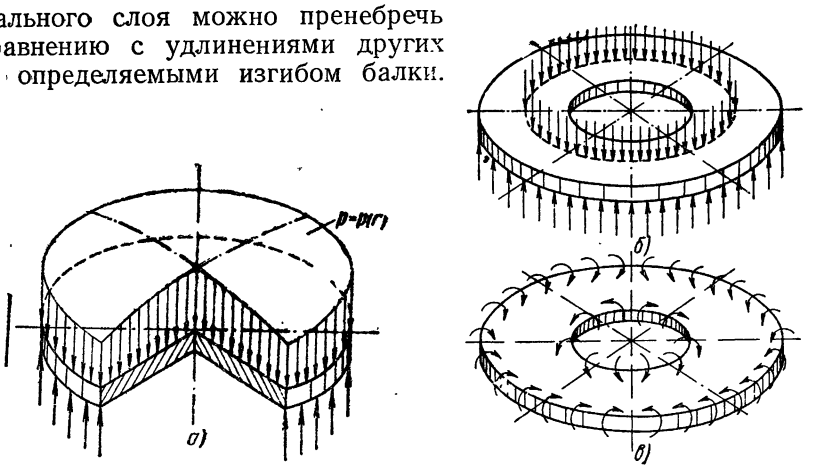
б) силами, перпендикулярными к плоскости пластины, равномерно распределенными по соосным круговым контурам (фиг. 1, *б*), а также

в) моментами, действующими в радиальных плоскостях пластины и равномерно распределенными по соосным окружностям (фиг. 1, *в*).

В этом случае деформированное и напряженное состояния пластины будут симметричными относительно ее центральной оси z, а срединная плоскость обращается в некоторую поверхность вращения, которая называется упругой поверхностью пластины (фиг. 2, *а*).

Предположим, что перемещения w в направлении оси z точек срединной плоскости пластины в любом ее месте значительно меньше толщины h пластины $\left(\frac{w}{h} \leqslant \frac{1}{5}\right)$. В связи с этим будем считать, что срединная плоскость пластины только искривляется и не растягивается, а радиальными перемещениями ее точек можно пренебречь (гипотеза первая) (фиг. 2, *а*).

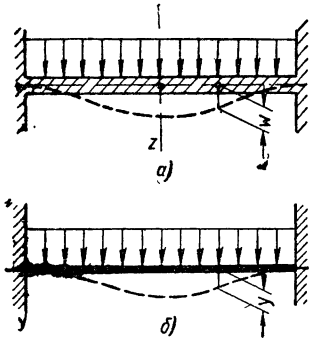
Подобное предположение делается и при расчете балок, закрепленных по концам и работающих на изгиб (фиг. 2, *б*). Искривленная ось балки (фиг. 2, *б*) длиннее ее оси в недеформированном состоянии; поэтому при изгибе балки в ее срединном (нейтральном) слое, вообще говоря, возникают растягивающие напряжения. Однако при прогибах значительно меньших высоты поперечного сечения балки удлинением нейтрального слоя можно пренебречь по сравнению с удлинениями других слоев, определяемыми изгибом балки.



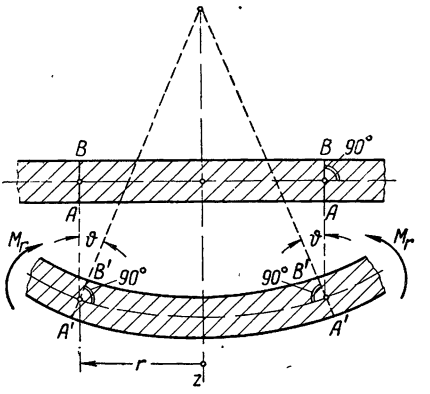
Фиг. 1.

Вторая гипотеза, принимаемая в инженерном методе расчета круглых пластин, аналогична по характеру известной гипотезе о сохранении плоских сечений у балок и состоит в следующем.

Соосные с контуром цилиндрические сечения ненагруженной пластины при осесимметричной деформации обращаются в конические поверхности. Таким образом, точки, лежавшие на образующих любого



Фиг. 2.



Фиг. 3.

цилиндрического сечения, при изгибе пластины располагаются на образующих соответствующего кругового конуса, вершина которого находится на оси пластины (фиг. 3).

(Линия пересечения исходного цилиндрического сечения и соответствующей конической поверхности лежит на упругой поверхности пластины.)

Подобный характер деформированного состояния пластины, строго говоря, имеет место в действительности только при осесимметричном изгибе пластины моментной нагрузкой (при чистом изгибе).

При изгибе пластины силами, нормальными к поверхности пластины (при поперечном изгибе), образующие цилиндрических сечений не только поворачиваются, но и несколько искривляются вследствие сдвигов, имеющих место в сечениях, параллельных срединной плоскости. Однако с достаточной для практики точностью вторая гипотеза может быть положена в основу инженерной теории не только чистого, но и поперечного изгиба круглых пластин.

Следует заметить, что эта гипотеза может быть высказана и вне связи с контуром пластины, в более общей форме, следующим образом: точки, лежащие до деформации пластины на какой-либо нормали к средней плоскости пластины, после ее деформации по-прежнему остаются на прямой, нормальной к деформированной срединной плоскости (к упругой поверхности).

Сформулированная гипотеза неискривляемости нормалей и лежит в основе технической теории расчета пластин любого очертания, а также расчета тонкостенных оболочек (см. гл. II и III т. II).

Она основана на том, что сдвиги, сопровождающие изгиб пластин и оболочек, не влияют заметным образом на относительные перемещения точек изгибаемых элементов.

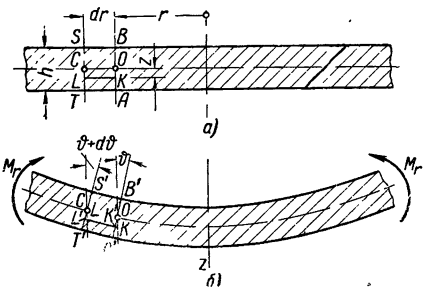
Примем, наконец, допущение, относящееся к характеру напряженного состояния пластин.

Будем считать, что нормальные напряжения в сечениях, параллельных срединной плоскости, пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями в сечениях, перпендикулярных к срединной плоскости (третья гипотеза). Гипотеза об отсутствии взаимодействия слоев пластины аналогична допущению, принимаемому при расчете на изгиб брусьев, где, как правило, также пренебрегают взаимодействием волокон.

Гипотеза об отсутствии взаимодействия слоев приемлема только для тонких пластин.

Б. Определение деформации и напряжений

Первая и вторая гипотезы, сформулированные выше, дают точное и четкое представление о геометрии деформированного состояния симметрично нагруженной пластины и позволяют относительно просто подойти к определению интенсивности деформаций в любой точке пластины.



Фиг. 4.

Рассмотрим элемент $ABST$ радиального сечения пластины, размер которого в направлении радиуса равен dr (фиг. 4,*а*).

При деформации (фиг. 4,*б*) в соответствии с первой гипотезой точки элемента O и C, принадлежащие срединной плоскости, по-прежнему останутся на расстояниях r и $r+dr$ от оси z.

Нормаль AOB до нагружения пластины, параллельная оси z, в результате деформации элемента поворачивается к этой оси на угол ϑ, оставаясь прямой и нормальной к искривленной срединной плоскости (вторая гипотеза).

Нормаль SCT поворачивается соответственно на угол $\vartheta+d\vartheta$.

Радиально расположенное волокно KL элемента, находящееся на расстоянии z от срединной плоскости, заняв в результате деформации элемента положение $K'L'$, удлиняется на величину

$$K'L' - KL = LL' - KK' = z(\vartheta + d\vartheta) - z\vartheta = zd\vartheta.$$

Относительная деформация ε_r этого волокна в радиальном направлении будет

$$\varepsilon_r = z\frac{d\vartheta}{dr}. \tag{1}$$

Относительное удлинение кольцевого волокна в точке K в окружном направлении может быть установлено из сравнения длин окружностей, на которых располагается точка K до и после деформации пластины.

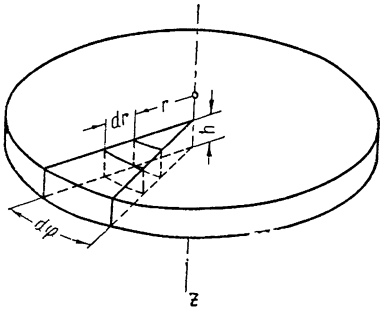
До деформации точка K располагалась на окружности радиуса r; длина этой окружности $2\pi r$.

Вследствие деформации пластины точка K переходит в новое положение K' и располагается на окружности радиуса $r+z\vartheta$ длиной $2\pi(r+z\vartheta)$. Удлинение окружности составляет $2\pi z\vartheta$.

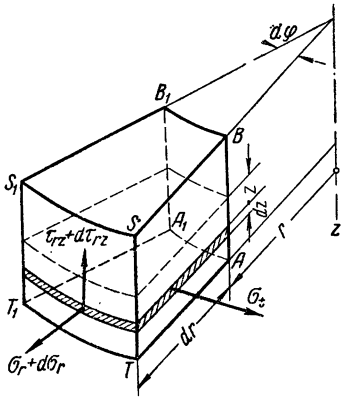
Таким образом, относительная деформация ε_t в точке K в окружном направлении будет

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r + z\vartheta) - 2\pi r}{2\pi r} = z\frac{\vartheta}{r}. \tag{2}$$

Для изучения напряженного состояния выделим из пластины (фиг. 5) двумя радиальными сечениями с углом раствора $d\varphi$ и двумя



Фиг. 5.



Фиг. 6.

центральными цилиндрическими сечениями радиусов r и $r+dr$ элементарную призму (фиг. 6) $ABSTT_1S_1B_1A_1$.

По условиям геометрической и силовой симметрии в радиальных сечениях, т. е. на гранях $ABST$ и $A_1B_1S_1T_1$, возможны только нормальные напряжения σ_z, касательные напряжения в них отсутствуют.

В окружных сечениях возможны как нормальные σ_r, так и касательные напряжения τ_{rz}.

Последние могут быть направлены только параллельно оси z. Окружные составляющие касательных напряжений τ_{rt} должны быть равны нулю, так как парные им напряжения τ_{tr} в радиальных сечениях по условиям симметрии отсутствуют.

Напряжения σ_r, так же как и τ_{rz}, во всех точках окружности при $z=\text{const}$ имеют одинаковые значения, так как предположение о неравномерности распределения этих напряжений противоречило бы осевой симметрии.

Таким образом, на гранях элемента симметрично нагруженной круглой пластины возможно возникновение только напряжений σ_r, σ_t, τ_{rz}, показанных на фиг. 6.

Напряжения σ_r и σ_t по направлению соответствуют установленным ранее деформациям ε_r и ε_t.

В соответствии с принятой выше (третьей) гипотезой об отсутствии нормальных напряжений в сечениях, параллельных срединной плоскости ($\sigma_z=0$), зависимость Гука между деформациями ε_r и ε_t и напряжениями σ_r и σ_t можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}(\sigma_r-\mu\sigma_t);$$

$$\varepsilon_t=\frac{1}{E}(\sigma_t-\mu\sigma_r),$$

где E — модуль упругости первого рода;

μ — коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) материала пластины.

Решение этих двух равенств относительно напряжений дает

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r+\mu\varepsilon_t);$$

$$\sigma_t=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t+\mu\varepsilon_r).$$

После подстановки значений деформаций по формулам (1) и (2) выражения для напряжений получают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{d\vartheta}{dr}+\mu\frac{\vartheta}{r}\right);\\ \sigma_t&=\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\vartheta}{r}+\mu\frac{d\vartheta}{dr}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Из уравнений (3) следует, что в срединной плоскости ($z=0$) нормальные напряжения равны нулю.

Эти напряжения растут пропорционально расстоянию от нейтрального слоя (пропорционально координате z) и по одну сторону от срединной плоскости являются напряжениями растяжения, а по другую — напряжениями сжатия.

В. Внутренние силовые факторы и уравнения равновесия элемента пластины

Прежде чем рассматривать условия равновесия элементарной призмы $ABSTT_1S_1B_1A_1$ (см. фиг. 6 или 7), необходимо найти равнодействующие внутренних сил в ее гранях.

На грани ABB_1A_1 элементарные касательные силы дают равнодействующую (поперечную силу), направленную параллельно оси z. Вели-

чину этой силы, приходящейся на единицу длины дуги $rd\varphi$, назовем интенсивностью поперечной силы и обозначим через Q; ее размерность *(кг/см)*.

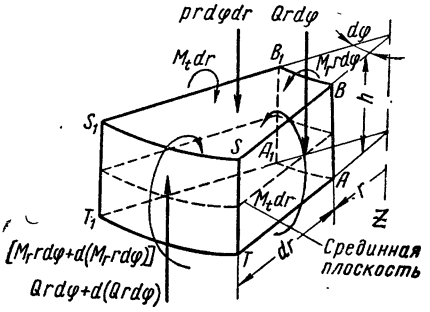
Поперечная сила на грани ABB_1A_1 равна $Qrd\varphi$; на грани STT_1S_1 поперечная сила получает приращение и соответственно равна $Qrd\varphi+d(Qrd\varphi)$.

Поперечная сила считается положительной, когда она, будучи приложенной ко внутренней цилиндрической поверхности кольцевого элемента на радиус r (см. фиг. 8), направлена в положительную сторону оси z.

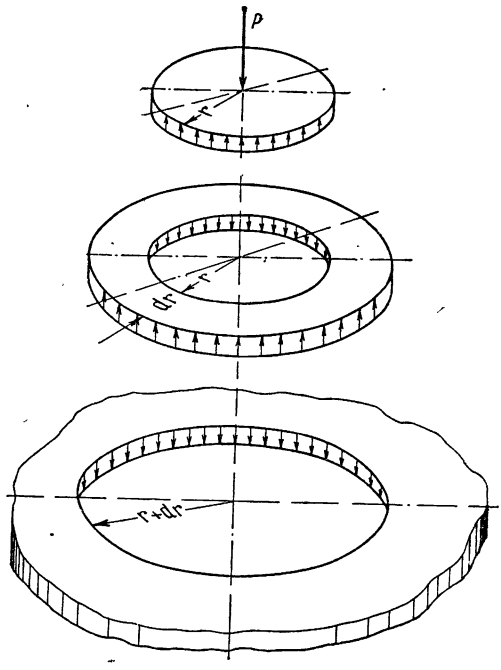
Поскольку сила действия и противодействия всегда направлены во взаимно противоположные стороны, то на внешней цилиндрической поверхности кольцевого элемента (фиг. 8) (на радиусе $r+dr$) положительная поперечная сила будет направлена в сторону, противоположную направлению оси z.

На фиг. 7 и 8 поперечные силы представлены положительными.

Элементарные нормальные силы в каждой из боковых граней элемента (фиг. 7) могут быть приведены, вообще говоря, к равнодействующей нормальной силе и изгибающему моменту, действующему в плоскости, нормальной рассматриваемой грани и перпендикулярной срединной плоскости пластины.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Можно показать, что при найденном законе распределения напряжений σ_r и σ_t [см. формулы (3)] в боковых гранях выделенного элемента (см. фиг. 7), нормальные силы равны нулю.

Действительно, для граней $ABST$ (или $A_1B_1S_1T_1$)

$$N_{ABST}=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\sigma_t dr dz=\frac{Edr}{1-\mu^2}\left(\frac{\vartheta}{r}+\mu\frac{d\vartheta}{dr}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}z dz=0.$$

Аналогично для грани ABB_1A_1 (или STT_1S_1)

$$N_{ABB_1A} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r r d\varphi dz = \frac{E r d\varphi}{1-\mu^2}\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z dz = 0.$$

Величина момента, приходящегося на единицу длины в радиальном или окружном направлениях, называется интенсивностью изгибающего момента и обозначается через M_t или M_r соответственно; размерность интенсивности моментов [*кгсм/см*].

Изгибающие моменты в гранях $ABST$ и ABB_1A_1 равны соответственно $M_t dr$ и $M_r r d\varphi$, а в грани STT_1S_1 $M_r r d\varphi + d(M_r r d\varphi)$. Зная напряжения [см. формулы (3)], интенсивность изгибающих моментов M_r и M_t легко вычислить Для этого умножаем, например, элементарную силу $\sigma_r r d\varphi dz$ на плечо z и интегрируем по толщине.

Тогда

$$M_r r d\varphi = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r r d\varphi z dz,$$

откуда, учитывая первую формулу (3), получим

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r z dz = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz =$$

$$= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right).$$

Аналогично

$$M_t dr = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_t r d\varphi z dz.$$

Откуда, используя вторую формулу (3), имеем

$$M_t = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\vartheta}{r} + \mu\frac{d\vartheta}{dr}\right).$$

Введем обозначение

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = D \text{ кгсм}. \tag{4}$$

Величина D называется жесткостью пластины при изгибе. Теперь окончательно можно написать

$$\left.\begin{aligned} M_r &= D\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right); \\ M_t &= D\left(\frac{\vartheta}{r} + \mu\frac{d\vartheta}{dr}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Удельные изгибающие моменты считаются положительными, когда по толщине пластины в точках, соответствующих положительным значениям координаты z, имеют место напряжения растяжения.

На фиг. 7 изгибающие моменты представлены положительными. Заметим, что из формул (5) вытекает следующая зависимость, непосредственно связывающая интенсивность изгибающих моментов M_r и M_t с углом поворота ϑ нормали:

$$\vartheta = \frac{(M_t - \mu M_r)\, r}{D(1-\mu^2)} = \frac{12r}{Eh^3}(M_t - \mu M_r). \tag{6}$$

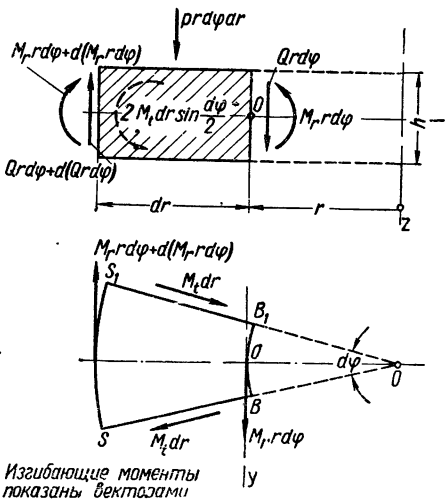
Кроме рассмотренных внутренних сил и изгибающих моментов, к выделенному элементу пластины могут быть приложены и внешние силы, например силы давления, нормальные к внешней поверхности пластины.

В пределах бесконечно малых размеров элемента давление p *кг/см*^{2} поверхностных сил может считаться постоянным, что, конечно, не исключает возможности изменения его по радиусу пластины.

Величина усилия, возникающего за счет давления, будет $prd\varphi dr$.

Обратимся теперь к рассмотрению условий равновесия выделенной из пластины элементарной призмы $ABSTT_1S_1B_1A_1$ (см. фиг. 7).

Проектируя все силы на ось z, получим



Фиг. 9.

$$Qrd\varphi - [Qrd\varphi + d(Qrd\varphi)] + prd\varphi dr = 0,$$

откуда

$$\frac{d(Qrd\varphi)}{dr} = prd\varphi.$$

Поскольку величина $d\varphi$ по радиусу постоянна, можно первое уравнение равновесия написать окончательно в следующем виде:

$$\frac{d(Qr)}{dr} = pr. \tag{7}$$

Составим теперь сумму моментов всех сил, приложенных к элементу $ABSTT_1S_1B_1A_1$ (см. фиг. 7) относительно оси y, касательной к дуге круга радиуса r в срединной плоскости (фиг. 9):

$$M_r rd\varphi - [M_r rd\varphi + d(M_r rd\varphi)] + prd\varphi dr\frac{dr}{2} +$$
$$+ 2M_t dr \sin\frac{d\varphi}{2} - [Qrd\varphi + d(Qrd\varphi)]\, dr = 0.$$

Пренебрегая величинами $prd\varphi dr\frac{dr}{2}$ и $d(Qrd\varphi)\, dr$ как малыми высшего порядка, получим

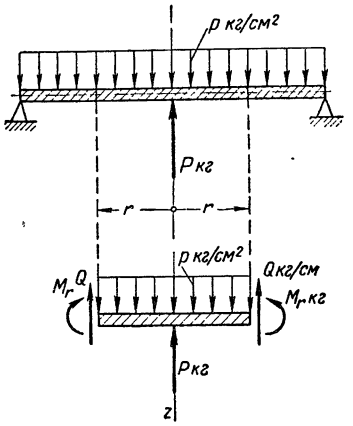
$$M_t - \frac{d(M_r r)}{dr} = Qr. \tag{8}$$

Остальные уравнения равновесия, как это следует из условий симметрии, удовлетворяются тождественно.

Г. Дифференциальное уравнение задачи и его решение

Интегрированием первого уравнения равновесия (7) можно, по заданной нагрузке $p=p(r)$, установить интенсивность поперечной силы Q в функции от радиуса $[Q=Q(r)]$.

Однако практически интенсивность поперечной силы Q гораздо удобнее определить из рассмотрения равновесия центральной части пластины, выделенной цилиндрическим сечением текущего радиуса r.



Фиг. 10.

Действительно, рассмотрим, например, случай, представленный на фиг. 10.

Составим сумму проекций на ось z всех сил, действующих на выделенную центральную часть пластины (касательные силы в окружном сечении всегда предполагаются направленными снизу вверх):

$$2\pi rQ - \int_0^{2\pi}\int_0^{r} prd\varphi dr + P = 0,$$

откуда

$$Q = \frac{\pi r^2 p - P}{2\pi r} \text{ кг/см}.$$

Следует заметить, что при определении интенсивности поперечной силы Q указанным способом она непосредственно получает знак, соответствующий установленному выше правилу.

(Примеры по применению указанного способа вычисления Q см. разд. Ж этой главы.)

Таким образом, поскольку функцию $Q=Q(r)$ можно всегда установить независимо, уравнение равновесия (8) содержит две неизвестные величины M_r и M_t. Заменяя последние согласно формулам (5), получим дифференциальное уравнение с одной лишь неизвестной функцией ϑ, выражающей в зависимости от радиуса угол поворота нормали к срединной плоскости пластины при деформации последней.

Считая, что толщина пластины h, а следовательно и ее жесткость D [см. формулу (4)], постоянны, после преобразований получим

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r^2} = -\frac{Q}{D}, \tag{9}$$

или

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d(\vartheta r)}{dr}\right] = -\frac{Q}{D}. \tag{9а}$$

Тождественность выражений (9) и (9а) легко проверить, выполнив дифференцирование в левой части формулы (9а).

Зависимости (9) и (9а) и представляют в различных формах дифференциальное уравнение, определяющее угол ϑ и тем разрешающее задачу.

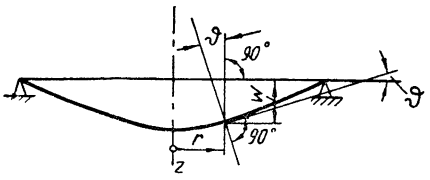
Двукратное интегрирование уравнения (9а) дает для угла ϑ выражение

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{Dr}\int\left[r\int Q dr\right]dr, \qquad (10)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий отдельно в каждом частном случае.

Граничными условиями могут служить заданные значения углов на краевых радиусах (в центре пластины $\vartheta=0$) или заданные значения интенсивности изгибающего момента M_r на контурах пластины (см. разд. Д).

В тех случаях, когда у пластины имеется несколько участков, на каждом из которых функция $Q=Q(r)$ определяется самостоятельным выражением, интегрирование приходится проводить по этим отдельным участкам, в пределах которых функция $Q(r)$ и ее производные непрерывны. В связи с этим количество постоянных резко возрастает, так как при изложенном способе решения задачи выражение для угла ϑ на каждом из участков содержит по две независимые постоянные интегрирования, и поэтому общее количество постоянных, подлежащих определению, достигает числа, равного удвоенному количеству участков. Для их определения используются условия неразрывности деформаций и условия равновесия элементов пластины на радиусах сопряжения участков (см. разд. Д).



Фиг. 11.

(В § 2 этой главы изложен более рациональный метод интегрирования, обеспечивающий уменьшение числа постоянных интегрирования, подлежащих определению, при вычислении угла ϑ до двух вне зависимости от количества участков.)

Располагая выражением (10) для угла поворота нормалей $\vartheta=\vartheta(r)$, не представляет труда получить и выражение для прогиба $w=w(r)$ как функции радиуса r. Для этого достаточно проинтегрировать зависимость (10) по радиусу.

Действительно, как видно из фиг. 11, для пластин большой жесткости

$$\frac{dw}{dr} = \operatorname{tg}(\pi - \vartheta) \approx -\vartheta.$$

(Знак минус берется в соответствии с выбранным правилом отсчета прогибов w по схеме, представленной на фиг. 11.)

Таким образом,

$$w = C_3 - \int \vartheta dr, \qquad (11)$$

где C_3 — постоянная интегрирования, определяемая из условий отсутствия линейных перемещений на опорных контурах пластины (см. разд. Д).

Если угол поворота ϑ выражается рядом уравнений по участкам, то количество различных по величине постоянных C_{3i} равно числу участков i.

В таком случае для определения всех этих постоянных интегрирования помимо условий на опорных контурах приходится использовать условия неразрывности перемещений на контурах сопряжения участков.

[При рациональном методе интегрирования (см. § 2) постоянные интегрирования C_{3i} для всех участков получаются одинаковыми.]

Функция (10) для угла поворота ϑ нормалей позволяет также получить формулы, определяющие интенсивности изгибающих моментов M_r и M_t [см. зависимости (5)], а зная последние, можно найти и величину напряжений.

Вычисление последних практически удобно производить по формулам

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{12M_r z}{h^3};\\ \sigma_t &= \frac{12M_t z}{h^3},\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

которые могут быть легко получены путем сопоставления выражений (3) и (5).

Наибольшие нормальные напряжения $\sigma_{r\,\max}$ и $\sigma_{t\,\max}$ имеют место у поверхности пластины при $z = \pm\frac{h}{2}$:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{r\,\max} &= \frac{6M_r}{h^2},\\ \sigma_{t\,\max} &= \frac{6M_t}{h^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (12a)$$

Д. Граничные условия, определяющие постоянные интегрирования

Для составления уравнений, определяющих постоянные интегрирования C_{1i}, C_{2i} и C_{3i} (под i подразумеваются номера участков, начиная с центрального, принимаемого за первый), необходимо рассмотреть условия закрепления пластины и характер ее нагружения по свободным контурам, а также учесть неразрывность напряженного и деформированного состояния пластины на радиусах сопряжения смежных участков.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что две первые постоянные C_{1i} и C_{2i}, входящие в уравнение (10), определяются независимо от третьего C_{3i} [см. зависимость (11)].

Для их определения используются следующие условия.

1. На защемленном крае (фиг. 12,*а*) $\vartheta = 0$.

Следует также иметь в виду, что согласно формуле (6) на защемленном контуре, где $\vartheta = 0$, интенсивности изгибающих моментов M_r и M_t связаны соотношением

$$M_t = \mu M_r. \qquad 13$$

2. На крае, свободном от опор, или на шарнирно опертом крае (фиг. 12,*б*).

$$M_r = \pm m,$$

где $\pm m$ *кг/см* интенсивность внешней моментной нагрузки на рассматриваемом крае; при отсутствии внешней моментной нагрузки надо положить $M_r = 0$.

Заметим, что у пластин без центрального отверстия постоянная C_2 (или постоянная C_{21} для участка, содержащего центральную точку)

равна нулю. Это вытекает из того, что вычисляемый по формуле (10) угол поворота в центральной точке должен иметь нулевое значение.

На радиусе r_{i+1} при сопряжении участков i и $i+1$ (фиг. 12,*в*) из условия неразрывности перемещений

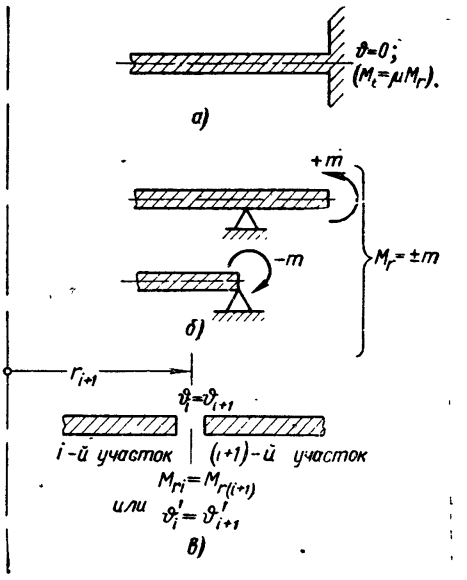
$$\vartheta_i = \vartheta_{i+1},$$

а из условия равенства внутренних сил в цилиндрических сечениях на границах участков

$$M_{ri} = M_{r(i+1)}.$$

Из первого условия, а также из первой зависимости (5) следует, что второе условие равносильно равенству производных от углов поворота нормалей на контурах сопряжения

$$\vartheta_i' = \vartheta_{i+1}'.$$



Фиг. 12.

Для составления уравнений, определяющих постоянные интегрирования C_{3i}, используются следующие условия.

1. Отсутствие прогибов на опорных контурах.

2. Равенство прогибов на радиусах сопряжения участков.

В табл. 1 указаны условия, используемые для определения постоянных интегрирования в ряде характерных случаев.

Учитывая, что определение постоянных является весьма трудоемкой задачей, особенно при большом числе участков, целесообразно применить такой метод интегрирования (см. § 2), при котором было бы обеспечено выравнивание соответствующих постоянных, т. е. были удовлетворены равенства

$$C_{11} = C_{12} = \ldots = C_1;$$
$$C_{21} = C_{22} = \ldots = C_2;$$
$$C_{31} = C_{32} = \ldots = C_3.$$

В этом случае общее число постоянных интегрирования, подлежащих определению, в конечном счете не будет превышать трех (см. § 2).

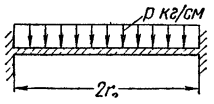
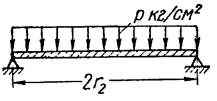
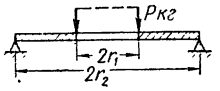
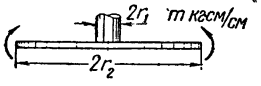
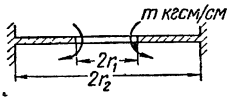
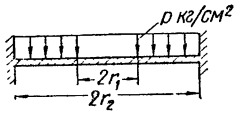
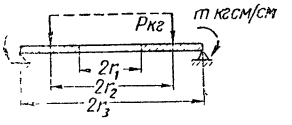
Е. Исследование напряженного состояния пластины

Проведенный выше анализ позволил выяснить законы распределения нормальных напряжений по толщине пластины в окружных и радиальных ее сечениях [см. формулу (12)]. Однако полное представление о напряженном состоянии пластины может быть получено лишь в том случае, если будет установлен закон распределения касательных напряжений τ_{rz} по толщине пластины в окружных ее сечениях.

(В радиальных сечениях, как уже отмечалось, касательные напряжения по условиям симметрии отсутствуют.)

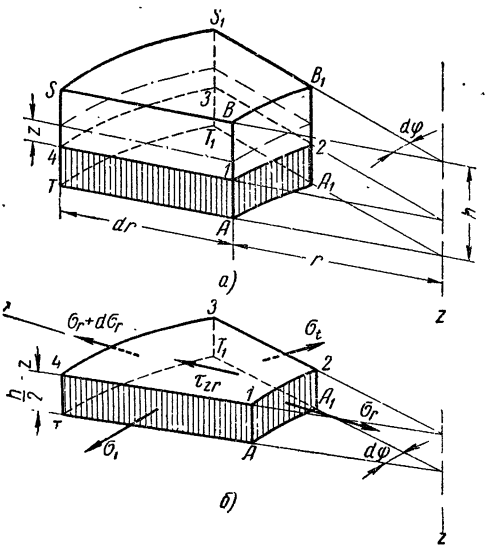
Таблица 1

Краевые условия, определяющие постоянные интегрирования для различным образом закрепленных и нагруженных пластин

Схемы закрепления и нагружения пластин	Условия для определения C_1 и C_2	Условия для определения C_3
	1) $C_2 = 0$; 2) $r = r_2$; $\vartheta = 0$	$r = r_2$; $w = 0$
	1) $C_2 = 0$; 2) $r = r_2$; $M_r = 0$	$r = r_2$; $w = 0$
	1) $r = r_1$; $M_r = 0$; 2) $r = r_2$; $M_r = 0$	$r = r_2$; $w = 0$
	1) $r = r_1$; $\vartheta = 0$; 2) $r = r_2$; $M_r = +m$	$r = r_1$; $w = 0$
	1) $r = r_1$; $M_r = -m$; 2) $r = r_2$; $\vartheta = 0$	$r = r_2$; $w = 0$
	$C_{21} = 0$; 1) $r = r_1$; $\vartheta_1 = \vartheta_2$; 2) $r = r_1$; $\vartheta_1' = \vartheta_2'$; 3) $r = r_2$; $\vartheta_2 = 0$	$r = r_1$; $w_1 = w_2$; $r = r_2$; $w_2 = 0$
	1) $r = r_1$; $M_r = 0$; 2) $r = r_2$; $\vartheta_1 = \vartheta_2$; 3) $r = r_2$; $\vartheta_1' = \vartheta_2'$; 4) $r = r_3$; $M_r = -m$	$r = r_2$; $w_1 = w_2$; $r = r_3$; $w_2 = 0$

Для определения величины напряжения τ_{rz} воспользуемся приемом, аналогичным тому, который применяется при исследовании касательных напряжений в теории поперечного изгиба балок.

Выделим из элементарного объема $ABSTT_1S_1B_1A_1$ его часть AA_1TT_11234 (фиг. 13,*а*) плоскостью *1234*, параллельной срединной плоскости и отстоящей от последней на расстоянии z.



Фиг. 13.

Составим сумму проекций на ось x (фиг. 13,*б*) всех сил, действующих на выделенную часть элемента. Тогда получим

$$\tau_{zr}rd\varphi dr+\int_z^{\frac{h}{2}}(\sigma_r+d\sigma_r)(r+$$

$$+dr)\,d\varphi dz-\int_z^{\frac{h}{2}}\sigma_r rd\varphi dz-$$

$$-2\int_z^{\frac{h}{2}}\sigma_t dr\sin\frac{d\varphi}{2}\,dz=0.$$

После приведения подобных членов и сокращения общих множителей, имеем

$$\tau_{zr}r+\int_z^{\frac{h}{2}}\left(\sigma_r+\frac{d\sigma_r}{dr}r-\sigma_t\right)dz=0.$$

Используя уравнения (3) и выполняя интегрирование, получаем

$$\tau_{zr}+\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left[\frac{h^2}{4}-z^2\right]\left[\frac{d^2\vartheta}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d\vartheta}{dr}-\frac{\vartheta}{r^2}\right]=0.$$

Уравнение (9) позволяет выразить напряжение τ_{zr} через интенсивность поперечной силы Q. Тогда

$$\tau_{zr}=\tau_{rz}=\frac{6Q\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)}{h^3}. \qquad (14)$$

Полученное выражение показывает, что касательные напряжения τ_{rz} по толщине пластины распределяются по параболе (фиг. 14), т. е. в точности так же, как по высоте балок прямоугольного поперечного сечения при их поперечном изгибе.

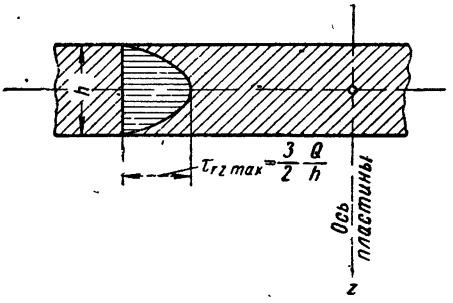
В окружных сечениях у верхней и нижней поверхностей пластины они обращаются в ноль. Наибольшего значения касательные напряжения достигают в срединной плоскости:

$$\tau_{rz\,\max}=\frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{h}. \qquad (14а)$$

Рассмотрим теперь напряженное состояние в ряде характерных точек по толщине пластины.

В точках у поверхностей пластины, а также в срединной ее плоскости имеет место двухосное напряженное состояние.

В частности, в срединной плоскости это двухосное напряженное состояние является чистым сдвигом. Во всех остальных точках пластины при наличии касательных напряжений в окружных сечениях имеет место трехосное (объемное) напряженное состояние.



Фиг. 14.

Если на поверхность пластины действует внешнее давление, то, строго говоря, в этом случае напряженное состояние у нагруженной поверхности пластины будет тоже трехосным.

Радиальные сечения во всех точках пластины представляют собой одну из главных площадок. Поэтому в соответствии со второй формулой (12) напряжение

$$\sigma_t = \frac{12M_t z}{h^3}$$

всегда является главным напряжением.

Два других главных напряжения могут быть определены по известной формуле (см. гл. I, т. I)

$$\sigma_{гл} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_r^2 + 4\tau_{rz}^2}. \qquad (15)$$

У ненагруженной поверхности пластины

$$\sigma'_{гл} = \sigma_t;$$
$$\sigma''_{гл} = \sigma_r;$$
$$\sigma'''_{гл} = 0.$$

У поверхности пластины, нагруженной давлением p кг/см^2:

$$\sigma'_{гл} = \sigma_t;$$
$$\sigma''_{гл} = \sigma_r;$$
$$\sigma'''_{гл} = -p.$$

При расчете пластины на прочность необходимо предварительно установить величину главных напряжений в точках, лежащих у поверхности в тех местах, где интенсивности изгибающих моментов достигают экстремальных значений, затем, воспользовавшись соответствующей теорией прочности, следует в избранных точках подсчитать величину эквивалентного напряжения.

Та точка, в которой эквивалентное напряжение $\sigma_{экв}$ будет наибольшим, и должна быть признана самой опасной. Эквивалентное напряжение в ней не должно превышать допускаемого напряжения на растяжение, устанавливаемого для материала пластины применительно к рассматриваемым условиям (см. примеры расчета).

Ж. Примеры расчета

Пример 1. Днище бака (фиг. 15,*а*) находится под воздействием внутреннего давления p *кг/см*^{2}.

Пренебрегая изгибом цилиндрической части бака и фланца, подобрать необходимую толщину h днища так, чтобы она удовлетворяла условиям прочности.

Найти максимальный прогиб днища.

Допускаемое напряжение растяжения $[\sigma]_z = 1500$ *кг/см*^{2}.

Отношение предела текучести материала при растяжении σ_{sz} к пределу текучести при сжатии σ_{sd} равно

$$\nu = \frac{\sigma_{sz}}{\sigma_{sd}} = 0{,}8.$$

Модуль упругости материала пластины $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}.

Коэффициент поперечной деформации $\mu = 0{,}28$.

Условия задачи позволяют рассматривать днище как пластину, защемленную по внешнему контуру и нагруженную постоянным давлением.

Будем считать, что днище защемлено по контуру установки болтов (фиг. 15, *а*) $R = 20$ *см*.

Принятая расчетная схема представлена на фиг. 15, *б*.

Из условия равновесия центральной части пластины текущего радиуса r (фиг. 15, *в*) находим интенсивность поперечной силы (см. разд. Г):

$$Q = \frac{\pi r^2 p}{2\pi r} = \frac{pr}{2} \text{ кг/см}.$$

Эта зависимость справедлива при $0 \leqslant r \leqslant R$, т. е. для всех значений радиуса r пластины.

Дифференциальное уравнение задачи по формуле (9а)

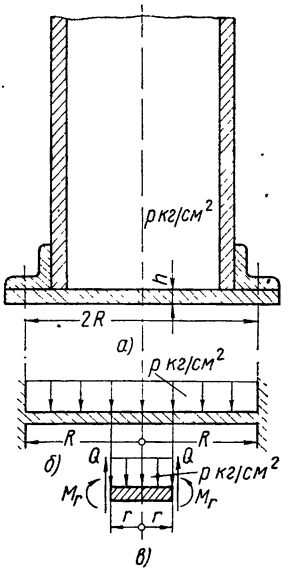
$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d(\vartheta r)}{dr}\right] = -\frac{Q}{D} = -\frac{pr}{2D}.$$

Интегрирование дает

$$\frac{d(\vartheta r)}{dr} = -\frac{pr^3}{4D} + C_1' r$$

и [см. формулу (10)]

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{pr^3}{16D}. \qquad (16)$$



Фиг. 15.

Поскольку пластина не имеет центрального отверстия, то $C_2 = 0$ (при C_2, отличном от нуля, угол ϑ в центре пластины обращался бы в бесконечность).

Постоянная C_1 определится из граничных условий на наружном крае.

При $r = R$ $\vartheta = 0$. Следовательно,

$$C_1 R - \frac{pR^3}{16D} = 0$$

и

$$C_1 = \frac{pR^2}{16D},$$

окончательно

$$\vartheta = \frac{pr}{16D}(R^2 - r^2). \qquad (16а)$$

По формулам (5) определяем интенсивности изгибающих моментов:

$$M_r = \frac{p}{16}[R^2(1+\mu) - r^2(3+\mu)];$$

$$M_t = \frac{p}{16}[R^2(1+\mu) - r^2(1+3\mu)].$$

По этим уравнениям построены эпюры интенсивностей изгибающих моментов, представленные на фиг. 16.

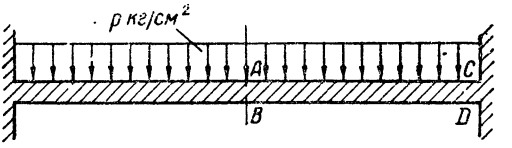
Рассмотрим напряженное состояние точек, лежащих у поверхности пластины в ее центре и вблизи наружного контура (фиг. 17).

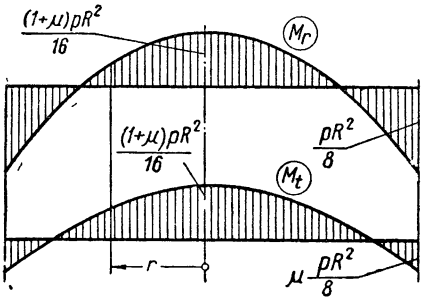
Для точек, расположенных у поверхности, напряжения вычисляются по формулам (12а).

Эквивалентное напряжение будем вычислять по теории прочности Мора (см. гл. VI т. I).

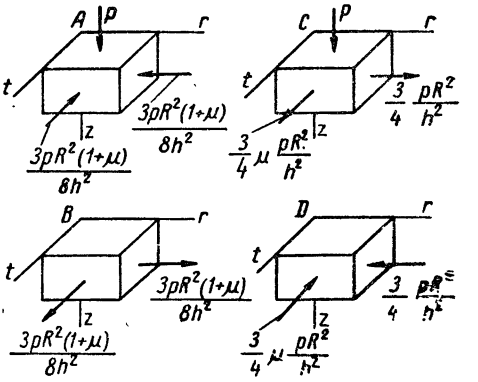
$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \nu\sigma_3.$$

(Формула эквивалентности Мора справедлива при $\sigma_1 \geqslant 0$ и $\sigma_3 \leqslant 0$.)





Фиг. 16.



Фиг. 17.

В точке A

$$\sigma_1 = -p;$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{3}{8}(1+\mu)\frac{pR^2}{h^2}.$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае $|\sigma_1|$ значительно меньше $|\sigma_3|$, примем $\sigma_1 \approx 0$. Тогда

$$\sigma_{экв} \approx 0 - 0{,}8\left[-\frac{3}{8}(1+\mu)\frac{pR^2}{h^2}\right] = 0{,}384\,\frac{pR^2}{h^2}.$$

В точке B

$$\sigma_1 = \sigma_2 = +\frac{3}{8}(1+\mu)\frac{pR^2}{h^2};$$

$$\sigma_3 = 0.$$

$$\sigma_{экв} = \frac{3}{8}(1+\mu)\frac{pR^2}{h^2} = 0{,}48\,\frac{pR^2}{h^2}.$$

В точке C

$$\sigma_1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{pR^2}{h^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{3}{4}\mu\frac{pR^2}{h^2}.$$

Считая приближенно, что $\sigma_3 \approx 0$, имеем

$$\sigma_{экв} = \frac{3}{4}\cdot\frac{pR^2}{h^2}.$$

В точке D

$$\sigma_1 = 0;$$

$$\sigma_2 = -\frac{3}{4}\mu\frac{pR^2}{h^2};$$

$$\sigma_3 = -\frac{3}{4}\cdot\frac{pR^2}{h^2}.$$

$$\sigma_{экв} = 0 - 0{,}8\left[-\frac{3}{4}\cdot\frac{pR^2}{h^2}\right] = 0{,}6\,\frac{pR^2}{h^2}.$$

Наиболее опасной будет точка C.
Теперь из расчета на прочность можно получить толщину h:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{pR^2}{h^2} \leqslant 1500;$$

$$h^2 \geqslant \frac{0{,}75\cdot 20\cdot 20^2}{1500}; \quad h \geqslant 2\ см.$$

Переходим к определению прогибов пластины.
Согласно выражениям (11) и (16а) имеем

$$w = C_3 - \frac{p}{16D}\int r\,(R^2 - r^2)\,dr = C_3 - \frac{p}{16D}\left(\frac{R^2r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right).$$

Постоянную C_3 определяем из условия, что прогиб на наружном контуре равен нулю, т. е. при $r = R$ $w = 0$, откуда

$$C_3 = \frac{pR^4}{64D},$$

тогда

$$w = \frac{p}{64D}(R^2 - r^2)^2.$$

Полученная формула показывает, что упругая поверхность пластины представляет собой поверхность четвертого порядка.

Максимальный прогиб w_{max} имеет место в центре пластины при $r = 0$:

$$w_{max} = \frac{pR^4}{64D},$$

тогда, учитывая выражение (4), имеем

$$w_{max} = \frac{3}{16}\cdot\frac{(1-\mu^2)}{E}\cdot\frac{pR^4}{h^3} = \frac{3}{16}\cdot\frac{(1-0{,}28^2)}{2\cdot 10^6}\cdot\frac{20\ 20^4}{2^3} = 0{,}0346\ см.$$

Таким образом, окончательно $w_{max} = 0{,}346$ *мм*.

Пример 2 Произвести поверочный расчет на прочность и жесткость тарелки поршня, представленного на фиг. 18.
Избыточное давление в цилиндре p *кг/см*^{2}
Усилие по штоку $P = \pi pR^2$ *кг*, где R — радиус цилиндра.

Внешний радиус тарелки r_2; радиус ступицы r_1. Интенсивность поперечной силы на радиусе r

$$Q = \frac{\pi pr^2 - P}{2\pi r} = \frac{pr}{2} - \frac{pR^2}{2r}\ кг/см.$$

Подставим значение интенсивности поперечной силы в формулу (10). Тогда

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{Dr}\int\left[r\int\frac{p\,(r^2 - R^2)\,dr}{2r}\right]dr.$$

В целях облегчения в дальнейшем отыскания постоянных интегрирования рационально (см. § 2) рассматривать интегралы, входящие в составленное по формуле (10) выражение, как определенные интегралы с переменным верхним пределом.

В этом случае

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{Dr}\int_{r_1}^{r}\left[r\int_{r_1}^{r}\frac{p(r^2-R^2)}{2r}\,dr\right]dr.$$

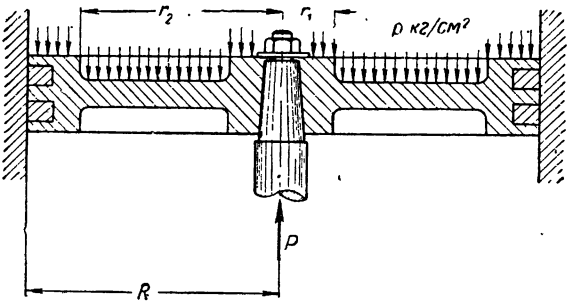
Такое преобразование связано всего лишь с изменением постоянных C_1 и C_2. Выполняя теперь интегрирование и подставляя пределы, получим

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{p}{16D}\left[r^3 - 2rr_1^2 + \frac{r_1^4}{r}\right] + \frac{pR^2}{4D}\left[r\ln\frac{r}{r_1} - \frac{r}{2} + \frac{r_1^2}{2r}\right]$$

и

$$\vartheta' = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{p}{16D}\left[3r^2 - 2r_1^2 - \frac{r_1^4}{r^2}\right] + \frac{pR^2}{4D}\left[\ln\frac{r}{r_1} + \frac{1}{2} - \frac{r_1^2}{2r^2}\right].$$

Следует заметить, что если результат интегрирования включает логарифм, то последний непременно должен быть логарифмом отвлеченного числа.



Фиг. 18.

При применении определенных интегралов это достигается автоматически, сразу получается логарифм отношения. Вообще же логарифм отвлеченного числа в этих случаях всегда может быть получен искусственно, за счет изменения постоянных интегрирования.

Постоянные интегрирования определяются из следующих граничных условий: при $r=r_1$ $\vartheta=0$ и при $r=r_2$ $\vartheta=0$.

Используя эти условия, получим два уравнения:

$$C_1 r_1 + \frac{C_2}{r_1} = 0 \quad \text{или} \quad C_1 = -\frac{C_2}{r_1^2}$$

и

$$C_1 + \frac{C_2}{r_2^2} = \frac{pr_2^2}{16D}\left[1 - 2\frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{r_1^4}{r_2^4}\right] - \frac{pR^2}{8D}\left[2\ln\frac{r_2}{r_1} - 1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right],$$

из которых не представляет труда определить постоянные C_1 и C_2.

Принимая, что $R \approx r_2$ и $\frac{r_2}{r_1} = \alpha$, имеем

$$C_1 = -\frac{pr_1^2}{16D}\cdot\frac{[4\alpha^4\ln\alpha - 3\alpha^4 + 4\alpha^2 - 1]}{(\alpha^2-1)};$$

$$C_2 = \frac{pr_1^4}{16D}\cdot\frac{[4\alpha^4\ln\alpha - 3\alpha^4 + 4\alpha^2 - 1]}{(\alpha^2-1)}.$$

Интенсивности изгибающих моментов M_r и M_t могут быть подсчитаны по формулам (5).

Полученные уравнения позволяют построить эпюры изменения интенсивностей моментов по радиусу пластины.

Однако практика решения задач показывает, что во многих случаях проще предварительно вычислять значения углов ϑ и их производных ϑ' в ряде точек по радиусу, а уже затем, руководствуясь формулами (5), определять конкретные значения M_r и M_t в избранных точках и по ним строить эпюры интенсивностей моментов

На фиг. 19 представлены эпюры интенсивностей изгибающих моментов; при построении принято, что $\mu = 0{,}3$ и $\alpha = 4$.

Для определения прогибов пластины следует воспользоваться уравнением (11), рассматривая входящий в него интеграл как определенный с переменным верхним пределом:

$$w = -\int_{r_1}^{r} \vartheta dr + C_3.$$

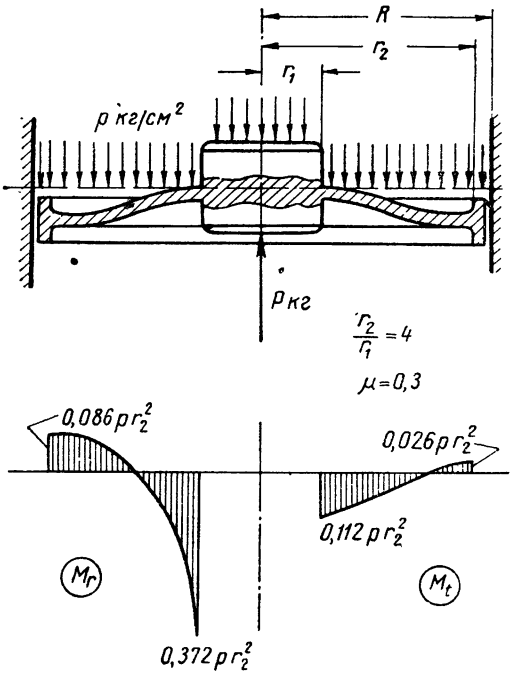
Принимая внутренний край пластины за неподвижный, при $r = r_1$ имеем $w = 0$. В этом случае $C_3 = 0$.

Наибольший относительный прогиб имеет место при $r = r_2$.

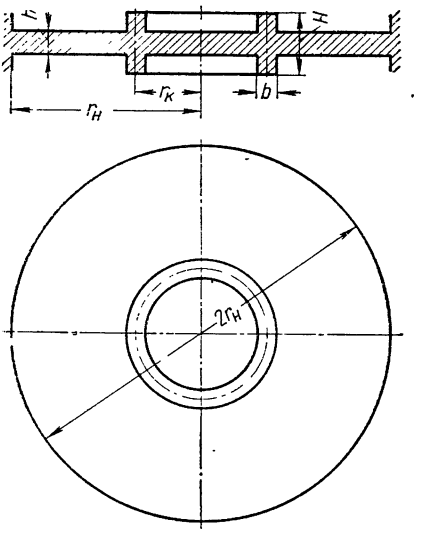
Примерный вид меридионального сечения упругой поверхности пластины показан на фиг. 19.

Пример 3. Исследовать прочность и жесткость днища, рассчитанного в первом примере, если последнее усилено коротким концентричным ребром, имеющим радиус $r_к = \kappa r_н$, где $r_н$ — наружный радиус пластины, а $k < 1$.

Размеры и форма ребра показана на фиг. 20.



Фиг. 19.



Фиг. 20.

Для внутренней части пластины при $r < r_к$ в соответствии с зависимостью (16)

$$\vartheta_1 = C_{11} r + \frac{C_{21}}{r} - \frac{pr^3}{16D};$$

тогда

$$\vartheta_1' = C_{11} - \frac{C_{21}}{r^2} - \frac{3}{16} \cdot \frac{pr^2}{D}$$

и

$$w_1 = C_{31} - \frac{C_{11} r^2}{2} - C_{21} \ln \frac{r}{r_н} + \frac{pr^4}{64D}.$$

Для наружной части пластины при $r > r_к$ аналогично

$$\vartheta_{II} = C_{12} r + \frac{C_{22}}{r} - \frac{pr^3}{16D};$$

$$\vartheta'_{II} = C_{12} - \frac{C_{22}}{r^2} - \frac{3}{16} \cdot \frac{pr^2}{D};$$

$$w_{II} = C_{32} - \frac{C_{12} r^2}{2} - C_{22} \ln \frac{r}{r_н} + \frac{pr^4}{64D}.$$

Для определения постоянных C_{11}, C_{21}, C_{12} и C_{22} можно составить следующие четыре зависимости:

1) при $r = 0$ $\vartheta_I = 0$;

2) при $r = r_н$ $\vartheta_{II} = 0$;

3) и 4) при $r = r_к$ $\vartheta_{I\,к} = \vartheta_{II\,к} = \theta$,

где θ — угол поворота поперечного сечения кругового бруса в связи с деформацией сопряженной с ним пластины (фиг. 21).

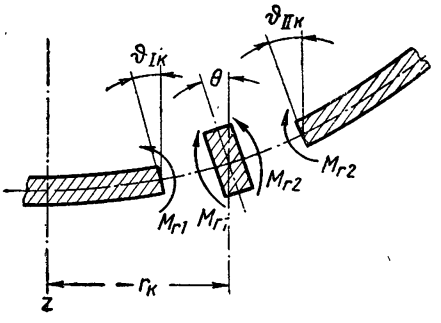
Как следует из фиг. 22, *а* кольцо нагружено равномерно распределенной моментной нагрузкой с интенсивностью

$$m = M_{r2} - M_{r1}$$

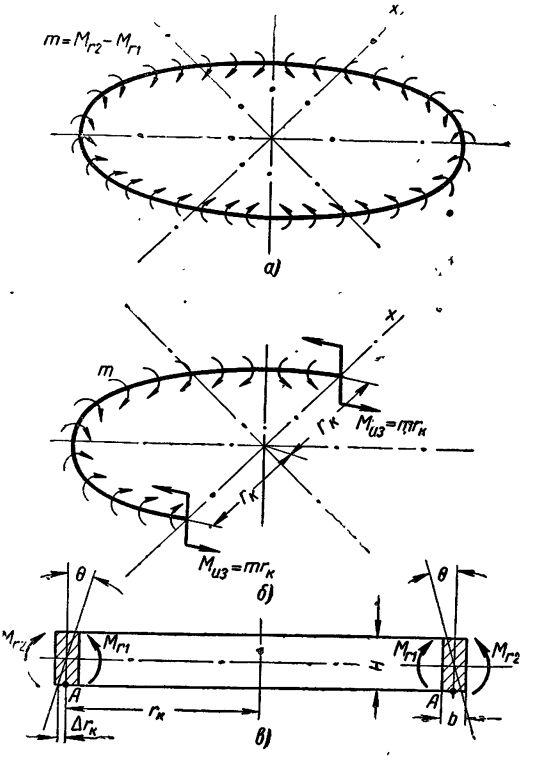
В этом случае, как легко установить из условий равновесия, в любом поперечном сечении кольца (фиг. 22, *б*) возникает только изгибающий момент относительно оси x, лежащей в срединной плоскости. Этот изгибающий момент равен

$$M_{из} = mr_к = kr_н (M_{r2} - M_{r1}).$$

Угол поворота θ легко определить из следующих соображений.



Фиг. 21.



Фиг. 22.

В связи с изгибом нормальное напряжение в крайней нижней точке A любого поперечного сечения кольца (фиг. 22, *в*) равно

$$\sigma_{max} = \frac{M_{из}}{W_x} = \frac{6kr_н (M_{r2} - M_{r1})}{bH^2}.$$

Относительное удлинение в той же точке

$$\varepsilon = \frac{6kr_н (M_{r2} - M_{r1})}{EbH^2}.$$

Изменение радиуса $r_к$ окружности, на которой до деформации кольца располагались точки A,

$$\Delta r_к = \varepsilon k r_н = \frac{6\,(kr_н)^2\,(M_{r2} - M_{r1})}{EbH^2}\,,$$

тогда угол поворота θ сечения (фиг. 22, *в*) равен

$$\theta = \frac{\Delta r_к}{\left(\frac{H}{2}\right)} = \frac{12\,(kr_н)\,(M_{r2} - M_{r1})}{EbH^3}\,,$$

откуда

$$M_{r2} - M_{r1} = \frac{EJ_x}{(kr_н)^2}\,\theta, \tag{17}$$

где $J_x = \dfrac{bH^3}{12}$ (см. фиг. 22, *в*).

Третье и четвертое граничные условия можно теперь записать следующим образом: при $r = r_к$

$$\vartheta_{\text{I}\,к} = \vartheta_{\text{II}\,к} = \frac{(kr_н)^2\,(M_{r2} - M_{r1})}{EJ_x}\,. \tag{18}$$

Из первого граничного условия следует, что $C_{21} = 0$.

Второе, третье и четвертое условия дают возможность составить относительно неизвестных постоянных C_{11}, C_{12} и C_{22} следующие три уравнения:

$$C_{12} r_н + \frac{C_{22}}{r_н} = \frac{pr_н^3}{16D}\,;$$

$$C_{11} kr_н - C_{12} kr_н - \frac{C_{22}}{kr_н} = 0;$$

$$C_{11}\left[(1+\mu) + \frac{EJ_x}{Dkr_н}\right] - C_{12}(1+\mu) + \frac{1-\mu}{(kr_н)^2} C_{22} = \frac{pkr_н EJ_x}{16D^2}\,.$$

Решая составленную систему уравнений, получаем

$$C_{11} = \frac{pr_н^2\,[2kr_н D + k^2(1-k^2)\,EJ_x]}{16D\,[2kr_н D + (1-k^2)\,EJ_x]}\,;$$

$$C_{12} = \frac{pr_н^2\,[2kr_н D + (1-k^4)\,EJ_x]}{16D\,[2kr_н D + (1-k^2) EJ_x]}\,;$$

$$C_{22} = \frac{pr_н^4\,k^2\,(k^2-1)\,EJ_x}{16D\,[2kr_н D + (1-k^2)\,EJ_x]}\,.$$

Теперь, используя зависимости (5), можно выразить величину интенсивности изгибающих моментов:

для внутреннего участка

$$M_{r1} = \frac{pr_н^2}{16}\left[(1+\mu)\frac{2kr_н D + k^2(1-k^2)\,EJ_x}{2kr_н D + (1-k^2)\,EJ_x} - (3+\mu)\left(\frac{r}{r_н}\right)^2\right];$$

$$M_{t1} = \frac{pr_н^2}{16}\left[(1+\mu)\frac{2kr_н D + k^2(1-k^2)\,EJ_x}{2kr_н D + (1-k^2)\,EJ_x} - (1+3\mu)\left(\frac{r}{r_н}\right)^2\right];$$

для внешнего участка

$$M_{r2} = \frac{pr_н^2}{16}\left[(1+\mu)\frac{2kr_н D + (1-k^4)\,EJ_x}{2kr_н D + (1-k^2)\,EJ_x} + \right.$$

$$\left. + (1-\mu)\frac{k^2(1-k^2)\,EJ_x}{2kr_н D + (1-k^2)\,EJ_x}\left(\frac{r_н}{r}\right)^2 - (3+\mu)\left(\frac{r}{r_н}\right)^2\right];$$

$$M_{t2} = \frac{pr_н^2}{16}\left[(1+\mu)\frac{2kr_нD + (1-k^4)EJ_x}{2kr_нD + (1-k^2)EJ_x} - \right.$$
$$\left. - (1-\mu)\frac{k^2(1-k^2)EJ_x}{2kr_нD + (1-k^2)EJ_x}\left(\frac{r_н}{r}\right)^2 - (1+3\mu)\left(\frac{r}{r_н}\right)^2\right].$$

Для определения прогибов пластины необходимо найти постоянные C_{31} и C_{32}. Для этого воспользуемся следующими условиями: при $r = r_к$ $w_1 = w_2$ и при $r = r_н$ $w = 0$.

Написанные условия приводят к двум уравнениям:

$$C_{31} - \frac{C_{11}k^2r_н^2}{2} = C_{32} - \frac{C_{12}k^2r_н^2}{2} - C_{22}\ln k$$

и

$$C_{32} - \frac{C_{12}r_н^2}{2} + \frac{pr_н^4}{64D} = 0,$$

решая которые, имеем

$$C_{31} = \frac{pr_н^4}{64D}\left[1 + \frac{4k^2(1-k^2)EJ_x\ln k}{2kr_нD + (1-k^2)EJ_x}\right];$$

$$C_{32} = \frac{pr_н^4}{64D}\left[1 + \frac{2k^2(1-k^2)EJ_x}{2kr_нD + (1-k^2)EJ_x}\right].$$

Подставляя значения C_{31} и C_{32} в уравнения для прогибов, окончательно получаем

$$w_1 = \frac{pr_н^4}{64D}\left[1 + \frac{4k^2(1-k^2)EJ_x\ln k}{2kr_нD + (1-k^2)EJ_x} - \right.$$
$$\left. - \frac{2[2kr_нD + k^2(1-k^2)EJ_x}{2kr_нD + (1-k^2)EJ_x}\left(\frac{r}{r_н}\right)^2 + \left(\frac{r}{r_н}\right)^4\right];$$

$$w_2 = \frac{pr_н^4}{64D}\left\{1 + \frac{2k^2(1-k^2)EJ_x}{2kr_нD + (1-k^2)EJ_x} - \frac{2[2kr_нD + (1-k^4)EJ_x]}{2kr_нD + (1-k^2)EJ_x}\left(\frac{r}{r_н}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{4k^2(1-k^2)EJ_x}{2kr_нD + (1-k^2)EJ_x}\ln\frac{r}{r_н} + \left(\frac{r}{r_н}\right)^4\right\}.$$

Приведенная задача рассмотрена в работе [32] с целью выявления наивыгоднейшей конструкции плоского днища, подкрепленного кольцевым ребром.

Заметим, что эту задачу можно решить проще методом начальных параметров (см. пример 3 в разд. В § 3 этой главы).

3. Инженерные приемы расчета пластин методом наложения готовых решений, полученных для простейших задач

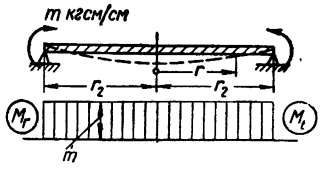
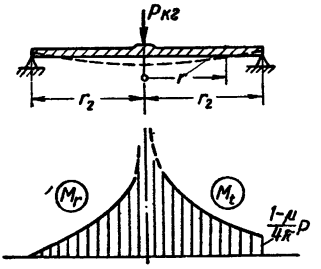
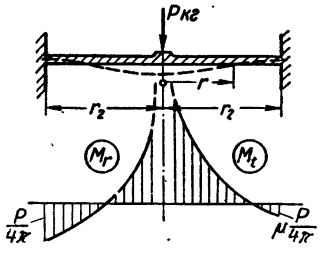
Из приведенных выше относительно простых примеров уже видна трудоемкость практических расчетов пластин.

Естественно, что при более сложных нагрузках, когда приходится проводить расчет по участкам, трудоемкость аналитического расчета круглых пластин возрастает еще в большей степени. В связи с этим в инженерной практике предпочитают пользоваться уже имеющимися готовыми решениями, полученными для ряда простейших задач (табл. 2 и 3). Используя эти результаты, путем наложения можно получить нужные расчетные величины для более сложных случаев.

В табл. 2—5 приведены некоторые готовые решения, заимствованные главным образом из работ [18], [24]. Значения необходимых расчетных коэффициентов подсчитаны при $\mu = 0{,}3$.

Таблица 2

Справочные данные по расчету сплошных круглых пластин при осесимметричных нагрузках простейшего вида

Схемы закрепления и нагружения пластин. Эпюры интенсивностей изгибающих моментов	Уравнения интенсивностей изгибающих моментов $M_r(r)$ и $M_t(r)$ и меридионального сечения упругой поверхности $w = w(r)$
	$M_r = +m;$ $M_t = +m;$ $w = \frac{m}{2(1+\mu)D}\left(r_2^2 - r^2\right);$ $w_{max} = \frac{mr_2^2}{2(1+\mu)D}.$
	$M_r = \frac{P}{4\pi}(1+\mu)\ln\frac{r_2}{r};$ $M_t = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{r_2}{r} + (1-\mu)\right];$ уравнения справедливы при $r > 0$. $w = \frac{Pr^2}{8\pi D}\ln\frac{r}{r_2} + \frac{P(3+\mu)}{16\pi D(1+\mu)}\left(r_2^2 - r^2\right);$ $w_{max} = \frac{Pr_2^2(3+\mu)}{16\pi D(1+\mu)}.$ При $r = 0$ наибольшее напряжение растяжения [24] $\sigma_r = \sigma_t = \frac{P}{h^2}\left[(1+\mu)\left(0{,}485\ln\frac{r_2}{h} + 0{,}52\right) + 0{,}48\right],$ где h — толщина пластины.
	$M_r = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{r_2}{r} - 1\right];$ $M_t = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{r_2}{r} - \mu\right];$ уравнения справедливы при $r > 0$. $w = \frac{Pr^2}{8\pi D}\ln\frac{r}{r_2} + \frac{P}{16\pi D}\left(r_2^2 - r^2\right);$ $w_{max} = \frac{Pr_2^2}{16\pi D}.$ При $r = 0$ наибольшее напряжение растяжения [24] $\sigma_r = \sigma_t = \frac{P}{h^2}(1+\mu)\left(0{,}485\ln\frac{r_2}{h} + 0{,}52\right),$ где h — толщина пластины.

Продолжение табл. 2

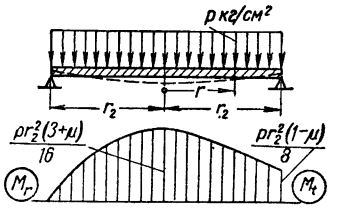
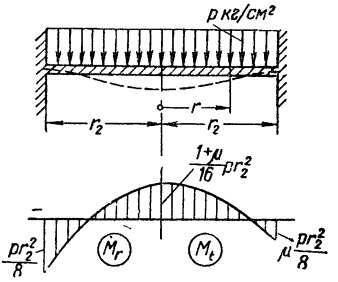
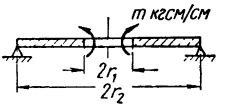
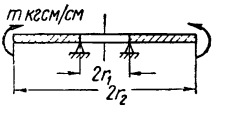
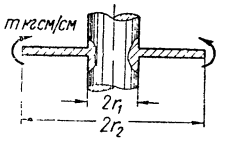
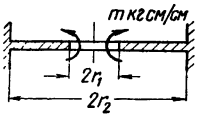
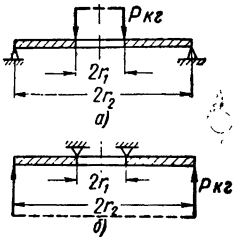
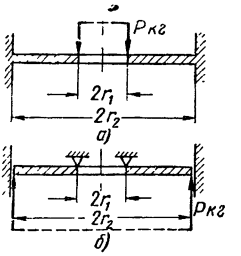
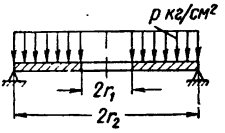
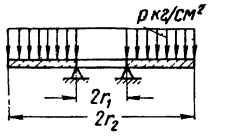
Схемы закрепления и нагружения пластин. Эпюры интенсивностей изгибающих моментов	Уравнения интенсивностей изгибающих моментов $M_r(r)$ и $M_t(r)$ и меридионального сечения упругой поверхности $w = w(r)$
	$M_r = \frac{p}{16}(3+\mu)\left(r_2^2 - r^2\right);$ $M_t = \frac{p}{16}\left[r_2^2(3+\mu) - r^2(1+3\mu)\right];$ $w = \frac{p\left(r_2^2 - r^2\right)}{64(1+\mu)D}\left[(1+\mu)\left(r_2^2 - r^2\right) + 4r_2^2\right];$ $w_{\max} = \frac{pr_2^4(5+\mu)}{64D(1+\mu)}.$
	$M_r = \frac{p}{16}\left[r_2^2(1+\mu) - r^2(3+\mu)\right];$ $M_t = \frac{p}{16}\left[r_2^2(1+\mu) - r^2(1+3\mu)\right];$ $w = \frac{p}{64D}\left(r_2^2 - r^2\right)^2;$ $w_{\max} = \frac{pr_2^4}{64D}.$

Таблица 3

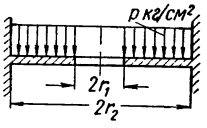
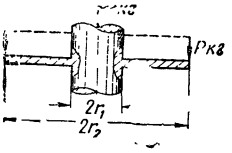
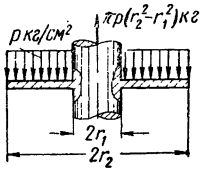
Уравнения для интенсивностей изгибающих моментов M_r и M_t у кольцевых пластин при осесимметричных нагрузках простейшего вида

Схемы закрепления и нагружения пластин	Уравнения для интенсивностей изгибающих моментов $M_r(x)$ и $M_t(x)$, где $x = \frac{r}{r_1}$. $\left(\alpha = \frac{r_2}{r_1}\right)$
	$M_r = \frac{m}{\alpha^2 - 1}\left(\frac{\alpha^2}{x^2} - 1\right);$ $M_t = -\frac{m}{\alpha^2 - 1}\left(\frac{\alpha^2}{x^2} + 1\right).$
	$M_r = \frac{m(x^2 - 1)}{(\alpha^2 - 1)}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2;$ $M_t = \frac{m(x^2 + 1)}{(\alpha^2 - 1)}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2.$
	$M_r = m\frac{(1+\mu)x^2 + (1-\mu)}{(1+\mu)\alpha^2 + (1-\mu)}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2;$ $M_t = m\frac{(1+\mu)x^2 - (1-\mu)}{(1+\mu)\alpha^2 + (1-\mu)}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2.$

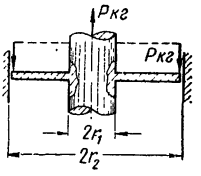
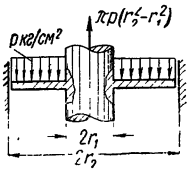
Продолжение табл. 3

Схемы закрепления и нагружения пластин	Уравнения для интенсивностей изгибающих моментов $M_r(x)$ и $M_t(x)$, где $x=\frac{r}{r_1}$. $\left(\alpha=\frac{r_2}{r_1}\right)$
	$M_r=\frac{m}{x^2}\frac{(1+\mu)x^2+(1-\mu)\alpha^2}{(1+\mu)+(1-\mu)\alpha^2};$ $M_t=\frac{m}{x^2}\frac{(1+\mu)x^2-(1-\mu)\alpha^2}{(1+\mu)+(1-\mu)\alpha^2}.$
	$M_r=\frac{P}{4\pi}\left[\frac{\alpha^2(1+\mu)(x^2-1)\ln\alpha}{x^2(\alpha^2-1)}-(1+\mu)\ln x\right];$ $M_t=\frac{P}{4\pi}\left[(1-\mu)+\frac{\alpha^2(1+\mu)(x^2+1)\ln\alpha}{x^2(\alpha^2-1)}-(1+\mu)\ln x\right].$
	$M_r=\frac{P}{4\pi}\left\{\frac{\alpha^2[\ln\alpha(1+\mu)-1](1-\mu)}{\alpha^2(1-\mu)+(1+\mu)}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)-(1+\mu)\ln x\right\};$ $M_t=\frac{P}{4\pi}\left\{\frac{\alpha^2[\ln\alpha(1+\mu)-1](1-\mu)}{\alpha^2(1-\mu)+(1+\mu)}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\right.$ $\left.-(1+\mu)\ln x+(1-\mu)\right\}.$
	$M_r=pr_2^2\left[\frac{1+\mu}{4x^2}\ln x-\frac{(1+\mu)\ln\alpha}{4(\alpha^2-1)x^2}(x^2-1)-\right.$ $\left.-\frac{3+\mu}{16}(x^2-1)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{x^2}\right)\right];$ $M_t=pr_2^2\left\{\frac{1+\mu}{4\alpha^2}\ln x-\frac{(1+\mu)\ln\alpha}{4(\alpha^2-1)x^2}(x^2+1)+\right.$ $\left.+\frac{1}{16\alpha^2}\left[(3+\mu)(x^2+1)\frac{\alpha^2}{x^2}+(5\mu-1)-(1+3\mu)x^2\right]\right\}.$
	$M_r=pr_2^2\left[\frac{3+\mu}{16}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)+\right.$ $\left.+\frac{1+\mu}{4}\left(\ln x-\frac{\alpha^2\ln\alpha\,(x^2-1)}{x^2(\alpha^2-1)}\right)\right];$ $M_t=pr_2^2\left[\frac{1+\mu}{4}\ln x-\left(\frac{\alpha^2\ln\alpha\,(x^2+1)}{x^2(\alpha^2-1)}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{5\mu-1}{16}+\frac{3+\mu}{16}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{(1+3\mu)x^2}{16\alpha^2}\right].$

Продолжение табл. 3

Схемы закрепления и нагружения пластин	Уравнения для интенсивностей изгибающих моментов $M_r(x)$ и $M_t(x)$, где $x=\frac{r}{r_1}$. $\left(\alpha=\frac{r_2}{r_1}\right)$
	$M_r=\frac{pr_2^2}{16}\left\{\frac{1}{\alpha^2}\left[2(1-\mu)+4(1+\mu)\ln x-(3+\mu)x^2+\frac{1+3\mu}{x^2}\right]+\right.$ $\left.+\frac{\left[(1-\mu)^2(\alpha^2-4\ln\alpha+2)+\frac{1+4\mu+3\mu^2}{\alpha^2}\right]\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\alpha^2(1-\mu)+(1+\mu)}\right\};$ $M_t=\frac{pr_2^2}{16}\left\{\frac{1}{\alpha^2}\left[(1+3\mu)x^2+4(1+\mu)\ln x-2(1-\mu)-\frac{1+3\mu}{x^2}\right]+\right.$ $\left.+\frac{\left[(1-\mu^2)(\alpha^2-4\ln\alpha+2)+\frac{1+4\mu+3\mu^2}{\alpha^2}\right]\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\alpha^2(1-\mu)+(1+\mu)}\right\}.$
	$M_r=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln x-\frac{(1+\mu)^2\ln\alpha+(1+\mu)}{1+\mu+\frac{1-\mu}{\alpha^2}}-\right.$ $\left.-\frac{(1-\mu)\ln\alpha+(1-\mu)}{\left(1+\mu+\frac{1-\mu}{\alpha^2}\right)x^2}+1\right];$ $M_t=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln x-\frac{(1+\mu)^2\ln\alpha+(1+\mu)}{1+\mu+\frac{1-\mu}{\alpha^2}}+\right.$ $\left.+\frac{(1-\mu)^2\ln\alpha+(1-\mu)}{\left(1+\mu+\frac{1-\mu}{\alpha^2}\right)x^2}+\mu\right].$
	$M_r=pr_2^2\left\{\frac{1+(1+\mu)\ln x}{4}-\frac{(3+\mu)x^2-(1+\mu)}{16\alpha^2}-\right.$ $-\frac{1}{16}\frac{\left(\frac{1-\mu}{x^2}+1+\mu\right)}{1-\mu+(1+\mu)\alpha^2}[\alpha^2(1-\mu)+$ $\left.+4(1+\mu)\alpha^2\ln\alpha+(1+\mu)]\right\};$ $M_t=pr_2^2\left\{\frac{\mu+(1+\mu)\ln x}{4}-\frac{(3+\mu)x^2-(1+\mu)}{16\alpha^2}+\right.$ $+\frac{1}{16}\frac{\left[\frac{1-\mu}{x^2}-(1+\mu)\right]}{1-\mu+(1+\mu)\alpha^2}[\alpha^2(1-\mu)+$ $\left.+4(1+\mu)\alpha^2\ln x+(1+\mu)]\right\}.$

Продолжение табл. 3

Схемы закрепления и нагружения пластин	Уравнения для интенсивностей изгибающих моментов $M_r(x)$ и $M_t(x)$, где $x=\frac{r}{r_1}$. $\left(\alpha=\frac{r_2}{r_1}\right)$
	$M_r=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln x-\frac{\alpha\ln\alpha}{\alpha^2-1}\left(1+\mu+\frac{1-\mu}{x^2}\right)+1\right];$ $M_t=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln x-\frac{\alpha^2\ln\alpha}{\alpha^2-1}\left(1+\mu-\frac{1-\mu}{x^2}\right)+\mu\right].$
	$M_r=pr_2^2\left[\frac{5+\mu}{16}+\frac{1+\mu}{4}\ln x-\frac{3+\mu}{16}\cdot\frac{x^2}{\alpha^2}+\right.$ $\left.+\frac{1+\mu}{8}\left(\frac{1}{2\alpha^2}-\frac{2\alpha^2\ln\alpha}{\alpha^2-1}\right)-\frac{1-\mu}{16x^2}\left(\frac{4\alpha^2\ln\alpha}{\alpha^2-1}-1\right)\right];$ $M_t=pr_2^2\left[\frac{(1+\mu)\ln x+\mu}{4}-\frac{1+3\mu}{16}\cdot\frac{x^2}{\alpha^2}+\right.$ $+\frac{(1+\mu)\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)}{16}-$ $\left.-\frac{\alpha^2\ln\alpha}{4(\alpha^2-1)}\left(1+\mu-\frac{1-\mu}{x^2}\right)-\frac{1-\mu}{16x^2}\right].$

Рассмотрим примеры применения приведенных табличных материалов.

Пример 1. Произвести поверочный расчет стального закрытого поршня [31], размеры которого указаны на фиг. 23.

Давление $p=6{,}5$ *кг/см²*.

Учитывая, что ободь, связывающий верхнее и нижнее днище, обладает очень большой жесткостью, можно рассматривать эти днища раздельно, как пластины, защемленные по внешнему радиусу ступицы, равному $r_1=6{,}75$ *см*, и заделанные по ободу радиуса $r_2=30{,}3$ *см*.

При деформации поршня обе пластины получают на внешнем радиусе одинаковые осевые перемещения.

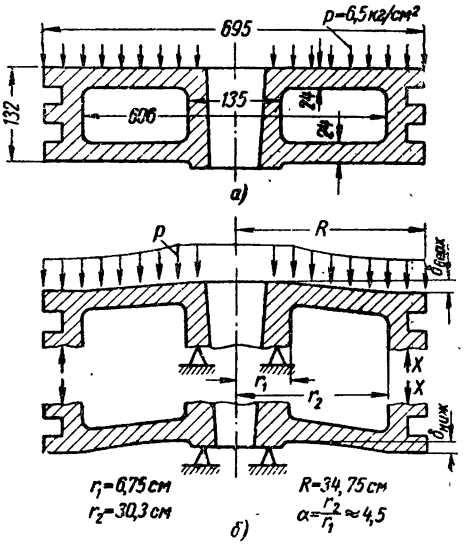
От верхней пластины на нижнюю (фиг. 23, *б*) передается нагрузка X *кг*, распределенная по ее внешнему периметру. В свою очередь, верхняя пластина, нагруженная заданным давлением p *кг/см²*, поддерживается силой X *кг*, передаваемой ободом.

Расчетная схема представлена на фиг. 23,*б*.

Неизвестная сила X взаимодействия пластин может быть определена из условия совместности перемещений на ободе (фиг. 23,*б*), т. е. из условия $\delta_{нижн}=\delta_{верх}$.

Для нижней пластины на внешнем ее радиусе перемещение $\delta_{нижн}$ по формуле табл. 4 равно
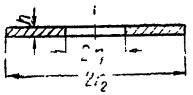
$$\delta_{нижн}=k\frac{Xr_2^2}{Eh^3}.$$



Фиг. 23.

Таблица 4

Обозначения, принятые при табличном методе расчета кольцевых пластин постоянной толщины

	Контурная моментная нагрузка интенсивности m в *кгсм/см*	Контурная нагрузка, суммарно равная P в *кг*	Равномерно распределенная нагрузка с давлением p в *кг/см²*
Напряжения на внутреннем контуре пластины радиуса r_1	$\sigma_{r1} = k^m_{r1} \frac{m}{h^2}$; $\sigma_{t1} = k^m_{t1} \frac{m}{h^2}$.	$\sigma_{r1} = k_{r1} \frac{P}{h^2}$; $\sigma_{t1} = k_{t1} \frac{P}{h^2}$.	$\sigma_{r1} = k^p_{r1} \frac{pr_2^2}{h^2}$; $\sigma_{t1} = k^p_{t1} \frac{pr^2}{h^2}$.
Напряжения на внешнем контуре пластины радиуса r_2	$\sigma_{r2} = k^m_{r2} \frac{m}{h^2}$; $\sigma_{t2} = k^m_{t2} \frac{m}{h^2}$.	$\sigma_{r2} = k_{r2} \frac{P}{h^2}$; $\sigma_{t2} = k_{t2} \frac{P}{h^2}$.	$\sigma_{r2} = k^p_{r2} \frac{pr_2^2}{h^2}$; $\sigma_{t2} = k^p_{t2} \frac{pr_2^2}{h^2}$.
Перемещение δ внешнего контура пластины относительно внутреннего контура	$\delta = k_m \frac{mr_2^2}{Eh^3}$	$\delta = k \frac{Pr_2^2}{Eh^3}$	$\delta = k_p \frac{pr_2^4}{Eh^3}$

Для верхней пластины осевое перемещение на ее внешнем радиусе может быть определено путем наложения решений трех задач (см. формулы в табл. 4). В этом случае

$$\delta_{верх} = k_p \frac{pr_2^4}{Eh^3} + k \frac{P_0 r_2^2}{Eh^3} - k \frac{Xr_2^2}{Eh^3}.$$

Первое слагаемое выражает перемещение внешнего края пластины за счет действия заданного давления p на участке $(r_1 \div r_2)$.

Второе слагаемое представляет перемещение, вызванное давлением на обод, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно r_2=30,3 *см*, R= =34,75 *см*.

Сила давления на обод P_0 распределена по периметру верхней пластины и равна

$$P_0 = \pi \left(R^2 - r_2^2\right) p = 3{,}14\,(34{,}75^2 - 30{,}3^2)\,6{,}5 = 5910 \text{ кг}.$$

Третье слагаемое отражает противодействие нижней пластины, передаваемое через обод.

Учитывая, что отношение радиусов внутренней и наружной пластин равно

$$\alpha = \frac{r_2}{r_1} = \frac{30{,}3}{6{,}75} = 4{;}5,$$

по табл. 5, интерполируя (см. случай 12), находим $k = 0{,}104$; для случая 13 $k_p = 0{,}207$.

Используя уравнение совместности перемещений, получаем

$$k \frac{Xr_2^2}{Eh^3} = k_p \frac{pr_2^4}{Eh^3} + k \frac{P_0 r_2^2}{Eh^3} - k \frac{Xr_2^2}{Eh^3}$$

или после сокращения и приведения подобных членов

$$2kX = k_p p r_2^2 + kP_0,$$

откуда, подставляя цифровые значения, имеем $X = 8950$ *кг*.

Располагая значением силы X, подсчитаем осевое перемещение обода:

$$\delta = \delta_{верхн} = \delta_{нижн} = k \frac{Xr_2^2}{Eh^3} = 0{,}104 \frac{8950 \cdot 30{,}3^2}{2 \cdot 10^6 \cdot 2{,}4^3} = 0{,}031 \text{ см}.$$

Используя формулы и коэффициенты, приведенные в табл. 4 и 5 (см. случаи 12 и 13), вычислим напряжения в характерных сечениях пластин.

Напряжение в нижней пластине:

у обода (при $r = r_2 = 30{,}3$ *см*)

$$\sigma_{r2} = k_{r2} \frac{X}{h^2} = 0{,}40 \frac{8950}{2{,}4^2} = 621 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{t2} = k_{t2} \frac{X}{h^2} = 0{,}12 \frac{8950}{2{,}4^2} = 186 \text{ кг/см}^2;$$

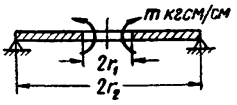
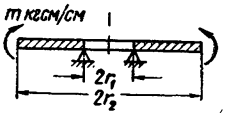
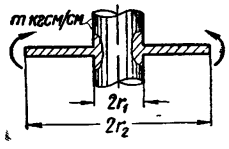
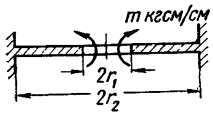
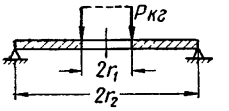
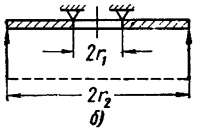
у ступицы (при $r = r_1 = 6{,}75$ *см*)

$$\sigma_{r1} = k_{r1} \frac{X}{h^2} = 1{,}027 \frac{8950}{2{,}4^2} = 1594 \text{ кг/см}^2;$$

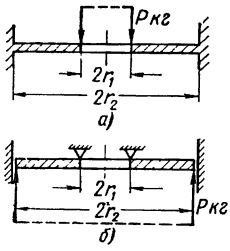
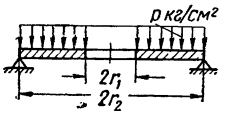
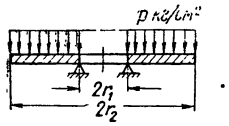
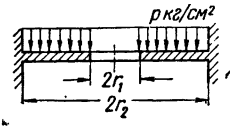
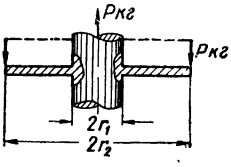
$$\sigma_{t1} = k_{t1} \frac{X}{h^2} = 0{,}308 \frac{8950}{2{,}4^2} = 478 \text{ кг/см}^2.$$

Таблица 5

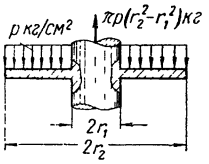
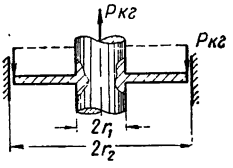
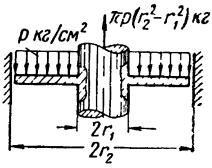
Значения коэффициентов для вычисления напряжений и перемещений у кольцевых пластин по формулам табл. 4 при $\mu = 0{,}3$

Схемы закрепления и нагружения пластин	k	$\alpha = \frac{r_2}{r_1}$				
		1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
	k_{r1}^m	6,0	6,0	6,0	6.0	6,0
	k_{t1}^m	−15,6	−10,0	−7,5	−6,8	−6,5
	k_{r2}^m	0	0	0	0	0
	k_{t2}^m	−9,6	−4,0	−1,5	−0,8	−0,5
	k_m	−6.93	−4,65	−2,61	−1,7	−1,21
	k_{r1}^m	0	0	0	0	0
	k_{t1}^m	21,6	16	13,5	12,8	12,5
	k_{r2}^m	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
	k_{t2}^m	15,6	10	7,5	6,8	6,5
	k_m	−9,27	−7,8	−6,34	−5.64	−5.25
	k_{r1}^m	7,45	8,13	8,71	8,93	9,04
	k_{t1}^m	2,23	2,44	2,61	2,68	2,71
	k_{r2}^m	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
	k_{t2}^m	3,68	4,58	5,32	5,6	5,74
	k_m	−0,661	−1,49	−2,55	−3,11	−3,42
	k_{r1}^m	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
	k_{t1}^m	−0,574	−2,20	−3,95	−4,75	−5,17
	k_{r2}^m	4,18	2,93	1,58	0,96	0,638
	k_{t2}^m	1,25	0,879	0,474	0.288	0,191
	k_m	−0,486	−0.847	−0,940	−0,802	−0.656
 а)	k_{r1}	0	0	0	0	0
	k_{t1}	1,24	1,48	1,87	2,17	2,42
	k_{r2}	0	0	0	0	0
 б)	k_{t2}	0,737	0,621	0,505	0,448	0,418
	k	0,518	0,672	0,734	0,724	0,703

Продолжение табл. 5

Схема закрепления и нагружения пластин	k	$\alpha=\frac{r_2}{r_1}$				
		1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
	k_{r1}	0	0	0	0	0
	k_{t1}	0,087	0,270	0,676	1,022	1,308
	k_{r2}	−0,32	−0,455	−0,531	−0,539	−0,536
	k_{t2}	−0,96	−0,136	−0,159	−0,162	−0,163
	k	0,024	0,081	0,172	0,217	0,238
	k^p_{r1}	0	0	0	0	0
	k^p_{t1}	0,976	1,44	1,88	2,08	2,19
	k^p_{r2}	0	0	0	0	0
	k^p_{t2}	0,596	0,656	0,624	0,592	0,572
	k_p	0,414	0,681	0,823	0,830	0,812
	k^p_{r1}	0	0	0	0	0
	k^p_{t1}	−1,19	−2,04	−3,34	−4,30	−5,09
	k^p_{r2}	0	0	0	0	0
	k^p_{t2}	−,0689	−0,807	−0,786	−0,730	−0,687
	k_p	0,491	0,902	1,225	1,30	1 31
	k^p_{r1}	0	0	0	0	0
	k^p_{t1}	0,0436	0,163	0,404	0,568	0,673
	k^p_{r2}	−0,259	−0,480	−0,657	−0,710	−0,730
	k^p_{t2}	−0,0777	−0,144	−0,197	−0,213	−0,219
	k_p	0,0144	0,0576	0,129	0,162	0,175
	k_{r1}	−0,428	−0,754	−1 21	−1,51	−1,74
	k_{t1}	−0,128	−0,226	−0,362	−0,454	−0,521
	k_{t2}	0	0	0	0	0
	k_{t2}	−0,0527	−0,119	−0,203	−0,247	−0,272
	k	0,0249	0,0878	0,209	0,294	0,351

Окончание табл. 5

Схемы закрепления и нагружения пластин	k	$\alpha = \frac{r_2}{r_1}$				
		1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
	k^p_{r1}	−,0410	−1,04	−2,15	−3,0	−3,69
	k^p_{t1}	−0,123	−0,312	−0,645	−0,9	−1,11
	k^p_{r2}	0	0	0	0	0
	k^p_{t2}	−0,0346	−0,113	−0,247	−0,330	−0,381
	k_p	0.0176	0.094	0,289	0,448	0,564
	k_{r1}	−0,220	−0,405	−0,703	−0,934	−1,12
	k_{t1}	−0,(659	−0,121	−0,211	−0,280	−0,337
	k_{r2}	0,168	0,257	0,346	0,389	0,413
	k_{t2}	0,0503	0,0771	0,104	0,117	0,124
	k	0,0064	0,0237	0,0622	0,0924	0,115
	k^p_{r1}	−0,273	−0,710	−1,54	−2,23	- 2,81
	k^p_{t1}	−0,0819	−0,213	−0,462	−0,670	−0,843
	k^p_{r2}	0,110	0,244	0,421	0,520	0,579
	k^p_{t2}	0,033	0,0733	0,126	0,156	0,174
	k_p	0,0035	0,033	0,110	0,180	0,234

Напряжение в верхней пластине:
у обода

$$\sigma_{r2} = k^p_{r2}\frac{pr_2^2}{h^2} - k_{r2}\frac{X - P_0}{h^2} = 0{,}55\frac{6{,}5\cdot 30{,}3^2}{2{,}4^2} - 0{,}4\frac{8950 - 5910}{2{,}4^2} = 360\ кг/см^2;$$

$$\sigma_{t2} = k^p_{t2}\frac{pr_2^2}{h^2} - k_{t2}\frac{X - P_0}{h^2} = 0{,}165\frac{6{,}5\cdot 30{,}3^2}{2{,}4^2} - 0{,}12\frac{8950 - 5910}{2{,}4^2} = 108\ кг/см^2;$$

у ступицы

$$\sigma_{r1} = k^p_{r1}\frac{pr_2^2}{h^2} - k_{r1}\frac{X - P_0}{h^2} = 2{,}52\frac{6{,}5\cdot 30{,}3^2}{2{,}4^2} - 1{,}027\frac{8950 - 5910}{2{,}4^2} = 2070\ кг/см^2;$$

$$\sigma_{t1} = k^p_{t1}\frac{pr_2^2}{h^2} - k_{t1}\frac{X - P_0}{h^2} = 0{.}75\frac{6{,}5\cdot 30{,}3^2}{2{,}4^2} - 0{,}308\frac{8950 - 5910}{2{,}4^2} = 621\ кг/см^2.$$

Наиболее напряженной является внутренняя кромка верхней пластины (у ступицы), где для верхней наружной точки главные напряжения равны:

$$\sigma_1 = 2070\ кг/см^2;\quad \sigma_2 = 621\ кг/см^2;\quad \sigma_3 = -6{,}5\ кг/см^2.$$

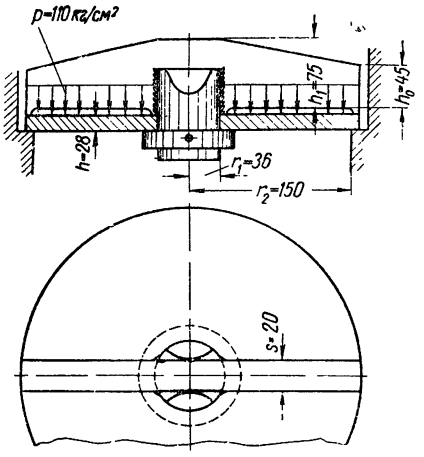
По энергетической теории прочности

$$\sigma_{экв\ max} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = 1840\ кг/см^2.$$

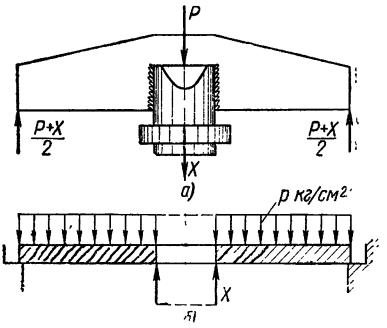
Пример 2. Произвести поверочный расчет крышки люка (фиг. 24).

Крышка представляет собой кольцевую пластину толщиной $h=28$ *мм*, свободно опирающуюся по внешнему контуру радиуса $r_2=150$ *мм* на заплечики цилиндра.

По внутреннему контуру радиуса $r_1=36$ *мм* пластина поддерживается жестким центром, приваренным к упругой траверсе ($h_1=75$ *мм*, $h_0=45$ *мм*, толщина силового бруса $s=20$ *мм*) (фиг. 24).



Фиг. 24.



Фиг. 25.

Давление, воспринимаемое крышкой, $p=110$ *кг/см*^{2}.

Расчетная схема пластины и траверсы представлена на фиг. 25.

Сила давления, приходящаяся на жесткий центр,

$$P = \pi r_1^2 p = 3{,}14 \cdot 3{,}6^2 \cdot 110 = 4500 \text{ кг}.$$

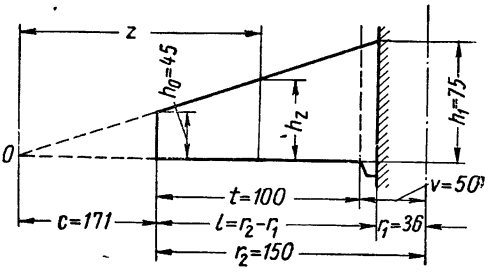
Поддерживающая сила X может быть определена из условия совместности перемещений пластины и жесткого центра. Это условие состоит в том, что прогиб δ_T средней части траверсы под действием сил P и X равен прогибу пластины на ее внутренней кромке под действием давления p и противодействующей силы X со стороны траверсы.

Для определения прогиба δ_T траверсы воспользуемся методом Мора (см. гл. X т. I).

Поскольку задача симметрична, то достаточно рассмотреть половину траверсы (фиг. 26).

Искомое перемещение δ_T определяется интегралом

$$\delta_T = \int_l \frac{MM_1 dz}{EJ_x},$$



Фиг. 26.

где M — изгибающий момент в текущем сечении от заданной нагрузки;

M_1 — изгибающий момент в том же сечении от единичной силы;

EJ_x — жесткость траверсы при изгибе.

Эта жесткость в рассматриваемом случае является переменной, так как высота траверсы меняется от $h_0=45$ *мм* на радиусе $r_2=150$ *мм* до $h_1=75$ *мм* на радиусе $r_1=36$ *мм*.

Принимаем за начало координат точку пересечения верхней и нижней кромки бруса (точку O на фиг. 26).

Расстояние c от начала координат до кромки бруса определяется из подобия треугольников (фиг. 26):

$$c = \frac{lh_0}{h_1 - h_0} = \frac{(r_2 - r_1)h_0}{h_1 - h_0} = \frac{(15{,}0 - 3{,}6)4{,}5}{7{,}5 - 4{,}5} = 17{,}1 \text{ см}.$$

Для текущего сечения при абсциссе z

$$M = \frac{P + X}{2}(z - c)$$

и

$$M_1 = 1\,(z - c).$$

Высота текущего сечения при координате z

$$h_z = \frac{z}{c} h_0.$$

Момент инерции этого сечения

$$J_x = \frac{sh_z^3}{12} = \frac{sh_0^3 z^3}{12c^3}.$$

Подставляя значения M, M_1 и J_x под знак интеграла и выполняя интегрирование по длине (в пределах изменения z от c до $c+l$, см. фиг. 26), получаем

$$\delta_T = \int_l \frac{MM_1 dz}{EJ_x} = \int_c^{c+l} \frac{\frac{P+X}{2}(z-c)^2\,dz}{E_T \frac{sh_0^3 z^3}{12c^3}} =$$

$$= \frac{6c^3(P+X)}{E_T s h_0^3}\left[\ln\frac{c+l}{c} - \frac{2l}{c+l} + \frac{l(2c+l)}{2(c+l)^2}\right].$$

Подстановка цифровых значений дает

$$\delta_T = \frac{6 \cdot 17{,}1^3 (P+X)}{E_T\, 2 \cdot 4{,}5^3}\left[\ln\frac{17{,}1 + 11{,}4}{17{,}1} - \frac{2 \cdot 11{,}4}{17{,}1 + 11{,}4} + \frac{11{,}4\,(2 \cdot 17{,}1 + 11{,}4)}{2\,(17{,}1 + 11{,}4)^2}\right] =$$

$$= 5{,}03 \frac{P+X}{E_T}.$$

В соответствии со схемой нагружения пластины, представленной на фиг. 25,*б*, ее прогиб может быть вычислен по принципу наложения с помощью табл. 4 и 5:

$$\delta_n = k_p \frac{pr_2^4}{E_n h^3} - k \frac{Xr_2^2}{E_n h^3}.$$

Первое слагаемое в правой части равенства выражает осевое перемещение внутренней кромки относительно внешней под действием давления p *кг/см*^{2} (случай 7).

Второе слагаемое представляет собой уменьшение осевого перемещения за счет противодействия траверсы (случай 5).

Учитывая, что при отношении радиусов

$$\alpha = \frac{r_2}{r_1} = \frac{150}{36} = 4{,}16$$

(см. табл. 5, случаи 7 и 5) $k_p = 0{,}827$; $k = 0{,}721$, имеем:

$$\delta_n = \frac{k_p p r_2^4}{E_n h^3} - \frac{kXr_2^2}{E_n h^3} = \frac{0{,}827 \cdot 110 \cdot 15^4 - 0{,}721X \cdot 15^2}{E_n\, 2{,}8^3} = \frac{46 \cdot 10^5 \quad 162X}{22E_n}.$$

Из условия совместности перемещений получаем

$$5{,}03 \frac{P+X}{E_T} = \frac{2{,}09 \cdot 10^5 - 7.36X}{E_n}.$$

Примем, что траверса и пластина выполнены из одинакового материала, т. е. $E_T = E_n$, тогда, окончательно $X = 16\,700$ *кг*.

Переходим к определению величины напряжений.

Опасное сечение траверсы находится на расстоянии $t=r_2-v=150-50=100$ *мм* от ее свободного конца (см. фиг. 26).

Высота траверсы в опасном сечении $h_1\approx 7{,}5$ *см*.

Момент сопротивления изгибу

$$W=\frac{sh_1^2}{6}=18{,}75\ см^3.$$

Изгибающий момент в опасном сечении

$$M=\frac{P+X}{2}t=\frac{4500+16\,700}{2}\,10=106\,000\ кгсм.$$

Наибольшее напряжение в опасном сечении траверсы

$$\sigma_{max}=\frac{M}{W}=\frac{106\,000}{18{,}75}=5680\ кг/см^2.$$

Напряжения в пластине у ее поверхности на внутренней кромке радиуса $r=r_1$ по цилиндрической поверхности

$$\sigma_{r1}=0;$$

в радиальном сечении

$$\sigma_{t1}=k_{t1}^p\frac{pr_2^2}{h^2}-k_{t1}\frac{X}{h^2}.$$

При $\alpha=\frac{r_2}{r_1}=4{,}16$ $k_{t1}^p=2{,}1$, а $k_{t1}=2{,}21$ (см. табл. 5, случаи 5 и 7), откуда

$$\sigma_{t1}=1940\ кг/см^2.$$

У внешней кромки на радиусе $r=r_2$ напряжение по цилиндрической поверхности

$$\sigma_{r2}=0;$$

в радиальном сечении

$$\sigma_{t2}=k_{t2}^p\frac{pr_2^2}{h^2}-k_{t2}\frac{X}{h^2},$$

где $k_{t2}^p=0{,}589$, а $k_{t2}=0{,}443$, тогда

$$\sigma_{t2}=925\ кг/см^2.$$

Таким образом, материал пластины на внутренней кромке напряжен в значительно большей степени, чем на внешнем контуре.

§ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ[1]

А. Основные положения

В § 1 было показано, что основной частью расчета круглых симметрично нагруженных пластин является определение функции $\vartheta=\vartheta(r)$. Последняя выражается зависимостью (10), представляющей закон изменения по радиусу угла поворота ϑ нормалей к срединной плоскости пластины.

В целях упрощения техники расчета и, в частности, для выравнивания постоянных интегрирования, число которых при наличии большого числа участков сильно возрастает (см. разд. Д § 1), целесообраз-

[1] Ниже излагается метод расчета, разработанный В. Л. Бидерманом [1]. Обобщенное решение для круглых и кольцевых пластин было дано еще ранее в несколько другом виде С. Н. Соколовым [21] (см. также работы [3], [9], [10], [17]).

но входящий в формулу (10), интеграл рассматривать как определенный, с переменным верхним пределом.

Поскольку зависимость (10) определяет угол поворота ϑ, который в свою очередь является производной от функции прогибов $w=w(r)$, ее удобно представить в следующем виде:

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \Phi'(r),$$

где

$$\Phi'(r) = \frac{1}{Dr}\int_{r_1}^{r}\left[r\int_{r_1}^{r} Q dr\right]dr. \qquad (19)$$

При такой форме записи в уравнение прогибов $w=w(r)$ будет входить функция $\Phi(r)$, а интенсивности изгибающих моментов будут выражаться через первую и вторую производные от этой функции.

Действительно, используя уравнения (10) и (11), получим:

$$\vartheta' = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \Phi''(r); \qquad (20а)$$

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \Phi'(r); \qquad (20б)$$

$$w = C_3 - \frac{C_1 r^2}{2} - C_2 \ln\frac{r}{r_н} + \Phi(r). \qquad (20в)$$

В последней зависимости $r_н$ (наружный радиус пластины) введен искусственно, за счет изменения постоянной интегрирования C_3, в целях получения под логарифмом отношения, т. е. отвлеченного числа.

У кольцевых пластин в ряде случаев целесообразно относить текущий радиус, стоящий под логарифмом, не к наружному, а внутреннему радиусу пластины.

Руководствуясь формулами (20), можно преобразовать зависимости (5), выражающие интенсивности изгибающих моментов M_r и M_t:

$$M_r = D\left(\vartheta' + \mu\frac{\vartheta}{r}\right) = D(1+\mu)C_1 - \frac{D(1-\mu)C_2}{r^2} - D\left[\Phi''(r) + \mu\frac{\Phi'(r)}{r}\right];$$

$$M_t = D\left(\frac{\vartheta}{r} + \mu\vartheta'\right) = D(1+\mu)C_1 + \frac{D(1-\mu)C_2}{r^2} - D\left[\frac{\Phi'(r)}{r} + \mu\Phi''(r)\right]$$

или, обозначая

$$D(1+\mu)C_1 = A \qquad (21)$$

и

$$D(1-\mu)C_2 = B, \qquad (21а)$$

имеем:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= A - \frac{B}{r^2} - D\left[\Phi''(r) + \mu\frac{\Phi'(r)}{r}\right];\\ M_t &= A + \frac{B}{r^2} - D\left[\frac{\Phi'(r)}{r^2} + \mu\Phi''(r)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Теперь, руководствуясь формулой (6), можно также записать, что

$$\vartheta = \frac{r}{D}\left[\frac{A}{1+\mu} + \frac{B}{r^2(1-\mu)}\right] - \Phi'(r). \qquad (23)$$

Выражение (23) практически совпадает с формулой (20б).

Использование в расчете круглых пластин функции $\Phi(r)$ и ее производных приводит к тому, что при наличии конечных разрывов у функции $Q(r)$, в связи с приложением кольцевых нагрузок или скачкообразного изменения давления по радиусу пластины, функция $\Phi(r)$ и ее производные $\Phi'(r)$ и $\Phi''(r)$, определяющие прогиб w, угол поворота ϑ, а также интенсивности моментов M_r и M_t, остаются при переходе от участка к участку непрерывными [1].

Это избавляет расчетчика от необходимости определять большое число постоянных интегрирования из условий сопряжения участков пластины (см. разд. Г § 1), если по характеру нагружения и закрепления пластины ее расчет приходится проводить по участкам.

При использовании функции $\Phi(r)$ и ее производных в расчете, вне зависимости от числа участков, приходится определять не более трех постоянных интегрирования C_1, C_2 и C_3, остающихся неизменными для всех участков пластины.

[Излагаемый метод аналогичен рациональному способу интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки (см. гл. X т. I).]

Кроме того, изложенный метод позволяет для ряда характерных случаев нагружения заранее вычислить значения функции $\Phi(r)$ и ее производных и тем значительно упростить решение конкретных задач.

Предварительно проведем некоторые преобразования введенных в рассмотрение определенных интегралов.

Обратимся к интегралу правой части зависимости (19).

Обозначим переменную интегрирования, стоящую под интегралом, через ρ и возьмем внешний интеграл по частям [$u=\int Q d\rho$; $dv=\rho d\rho$; $Q=Q(\rho)$] в пределах изменения переменной ρ от r_1 до r; тогда получим

$$\int_{r_1}^{r}\left[\int Q d\rho\right]\rho d\rho = \left[\frac{\rho^2}{2}\int Q d\rho - \int\frac{\rho^2}{2}\,Q d\rho\right]\Bigg|_{r_1}^{r} =$$

$$= \frac{r^2}{2}\int_{r_1}^{r} Q d\rho - \int_{r_1}^{r}\frac{\rho^2}{2}\,Q d\rho.$$

Таким образом,

$$\Phi'(r) = \frac{1}{2D}\int_{r_1}^{r} Q\left(r - \frac{\rho^2}{r}\right)d\rho, \qquad (24)$$

где $Q=Q(\rho)$.

---

[1] Исключение представляет лишь случай нагружения пластины осесимметрично распределенными моментами, когда на контуре приложения такой нагрузки производная ϑ', входящая в формулы (5), выражающие интенсивность изгибающих моментов M_r и M_t, имеет разрыв.

Заметим, что подынтегральная функция

$$f(r, \rho) = Q\left(r - \frac{\rho^2}{r}\right),$$

при $\rho = r$ обращается в ноль, т. е. $f(r, r) = 0$.

Для преобразования зависимостей ( ), выражающих интенсивности изгибающих моментов M_r и M_t, необходимо, как уже указывалось, составить выражение для второй производной функции $\Phi''(r)$ [см. формулы (22)].

Возьмем производную от обеих частей равенства (24) по верхнему пределу, руководствуясь правилом дифференцирования интеграла по параметру [1]; тогда, учитывая, что в рассматриваемом случае нижний предел от параметра не зависит, а $f(r, r) = 0$, получим

$$\Phi''(r) = \frac{d}{dr}\int_{r_1}^{r} f(\rho)\, d\rho = \int_{r_1}^{r} \frac{\partial f(r, \rho)}{\partial r}\, d\rho.$$

или окончательно

$$\Phi''(r) = \frac{1}{2D}\int_{r_1}^{r} Q\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) d\rho, \tag{25}$$

где $Q = Q(\rho)$.

Наконец, для рационального определения прогибов необходимо составить выражение самой функции $\Phi(r)$.

Учитывая зависимость (24) и заменяя обозначения r на ρ, а ρ на s, имеем

$$\Phi(r) = \frac{1}{2D}\left\{\int_{r_1}^{r}\left[\int_{r_1}^{\rho} Q\,ds\right]\rho\, d\rho - \int_{r_1}^{r}\left[\int_{r_1}^{\rho} Qs^2\, ds\right]\frac{d\rho}{\rho}\right\},$$

где $Q = Q(s)$.

Проведем в правой части последней зависимости интегрирование по частям, тогда

$$\Phi(r) = \frac{1}{2D}\left[\frac{r^2}{2}\int_{r_1}^{r} Q\,d\rho - \int_{r_1}^{r}\frac{\rho^2}{2} Q\,d\rho - \ln r\int_{r_1}^{r} Q\rho^2 d\rho + \int_{r_1}^{r} Q \ln\rho\cdot\rho^2 d\rho\right],$$

где $Q = Q(s)$. Отсюда окончательно

$$\Phi(r) = \frac{1}{2D}\int_{r_1}^{r} Q\left[\frac{r^2 - \rho^2}{2} - \rho^2 \ln\frac{r}{\rho}\right] d\rho. \tag{26}$$

Формулы (24) — (26) позволяют однократным интегрированием устанавливать необходимые для расчета функции $\Phi''(r)$, $\Phi'(r)$ и $\Phi(r)$.

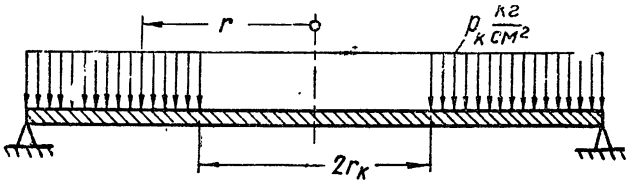
---

[1] См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, Гостехиздат, 1957.

Б. Определение функции $\Phi(r)$ и ее производных для некоторых характерных случаев нагружения пластин

Случай 1. Пластина нагружена равномерным давлением $p_к$, распределенным по поверхности пластины вне круга радиуса $r_к$ (фиг. 27).

Выделим, как обычно (см. раздел Ж § 1), цилиндрической поверхностью радиуса $r > r_к$ часть пластины.



Фиг. 27.

Из условия равновесия выделенной центральной части пластины следует: при $r \leqslant r_к$ $Q=0$, поэтому, согласно формулам (25), (24) и (26), имеем:

$$\Phi''(r) = 0; \quad \Phi'(r) = 0; \quad \Phi(r) = 0.$$

При $r > r_к$

$$Q = \frac{\pi(r^2 - r_к^2)p_к}{2\pi r} = \frac{p_к}{2}\left(r - \frac{r_к^2}{r}\right),$$

тогда по уравнению (24) после интегрирования имеем

$$\Phi'(r) = \frac{p_к r^3}{16D}\left[\left(1 - \frac{r_к^4}{r^4}\right) - 4\frac{r_к^2}{r^2}\ln\frac{r}{r_к}\right].$$

Выражение, стоящее в скобках, зависит только от отношения $\frac{r}{r_к} = \zeta$ и является величиной отвлеченной. Обозначим эту величину $K_1(\zeta)$, тогда

$$K_1(\zeta) = 1 - \zeta^{-4} - 4\zeta^{-2}\ln\zeta \tag{27}$$

и окончательно при $r > r_к$

$$\Phi'(r) = \frac{p_к r^3}{16D} K_1\left(\frac{r}{r_к}\right). \tag{28}$$

Дифференцируя зависимость (28), выражающую функцию $\Phi'(r)$, получим

$$\Phi''(r) = \frac{3p_к r^2}{16D} K_2\left(\frac{r}{r_к}\right), \tag{29}$$

где

$$K_2\left(\frac{r}{r_к}\right) = K_2(\zeta) = 1 - \frac{4}{3}\zeta^{-2} + \frac{1}{3}\zeta^{-4} - \frac{4}{3}\zeta^{-2}\ln\zeta. \tag{30}$$

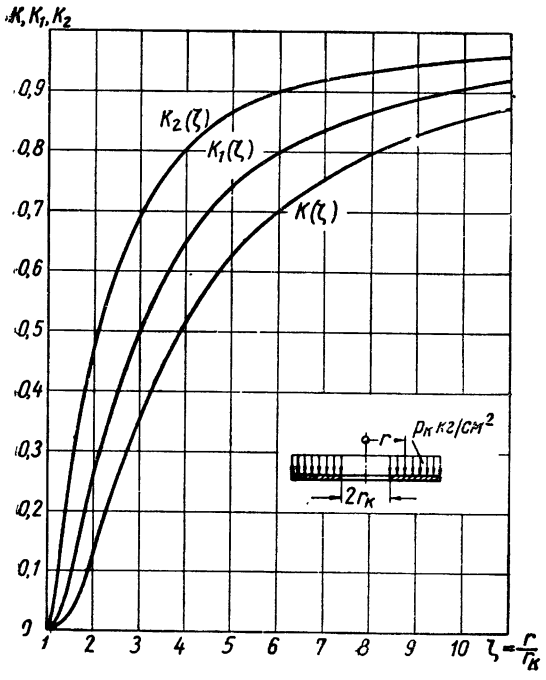
Зависимость (29) может быть непосредственно получена по формуле (25).

Функцию $\Phi(r)$, необходимую для вычисления прогибов, устанавливаем путем интегрирования зависимости $\Phi'(r)$ [см. формулу (28)]:

$$\Phi(r) = \frac{p_к r^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_к}\right), \tag{31}$$

где

$$K\left(\frac{r}{r_к}\right) = K(\zeta) = 1 + 4\zeta^{-2} - 5\zeta^{-4} - 4\zeta^{-2}(2 + \zeta^{-2})\ln\zeta. \tag{32}$$



Фиг. 28.

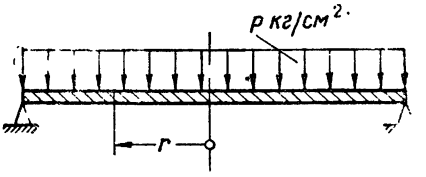
Зависимость (31) можно непосредственно получить и по формуле (26).

Для вычисления значений функций $K(\zeta)$, $K_1(\zeta)$ и $K_2(\zeta)$ удобно пользоваться графиками, представленными на фиг. 28.

В частном случае, при $r_к = 0$ (фиг. 29),

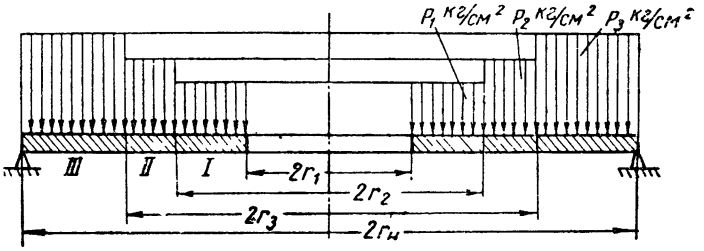
$$K(\infty) = K_1(\infty) = K_2(\infty) = 1.$$

Если пластина нагружена на нескольких участках давлениями различной интенсивности p_1, p_2, p_3 и т. д. (фиг. 30), то и в этом случае полученные



Фиг. 29.

выше соотношения позволяют построить расчетные зависимости для пластины наподобие универсального уравнения упругой линии балки.



Фиг. 30.

Рассмотрим пример, представленный на фиг. 30.

Для первого участка ($r_1 \leqslant r \leqslant r_2$) интенсивность поперечной силы

$$Q_1 = \frac{\pi\left(r^2 - r_1^2\right)p_1}{2\pi r} = \frac{p_1\left(r^2 - r_1^2\right)}{2r}.$$

Для второго участка ($r_2 \leqslant r \leqslant r_3$)

$$Q_2 = \frac{p_1\left(r^2 - r_1^2\right)}{2r} + \frac{(p_2 - p_1)\left(r^2 - r_2^2\right)}{2r}.$$

Для третьего участка ($r_3 \leqslant r \leqslant r_н$)

$$Q_3 = \frac{p_1\left(r^2 - r_1^2\right)}{2r} + \frac{(p_2 - p_1)\left(r^2 - r_2^2\right)}{2r} + \frac{(p_3 - p_2)\left(r^2 - r_2^2\right)}{2r}.$$

Легко заметить, что для любого последующего участка ($i+1$) формула, выражающая интенсивность поперечной силы Q_{i+1}, состоит из зависимости, представляющей поперечную силу Q_i на предыдущем участке, и дополнительных слагаемых, отражающих скачок давления. Поэтому в рассматриваемом примере можно записать, что

$$Q = \left.\frac{p_1\left(r^2 - r_1^2\right)}{2r}\right|_{\text{I}} + \left.(p_2 - p_1)\,\frac{r^2 - r_2^2}{2r}\right|_{\text{II}} + \left.(p_3 - p_2)\,\frac{r^2 - r_3^2}{2r}\right|_{\text{III}}.$$

В этом уравнении римскими цифрами указано, к какому участку пластины (см. фиг. 30) относятся все слагаемые, стоящие слева от соответствующей черты.

Теперь в соответствии с формулами (31), (28) и (29) имеем:

при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$

$$\Phi(r) = \frac{p_1 r^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_1}\right);$$

$$\Phi'(r) = \frac{p_1 r^3}{16D} K_1\left(\frac{r}{r_1}\right);$$

$$\Phi''(r) = \frac{3p_1 r^2}{16D} K_2\left(\frac{r}{r_1}\right);$$

при $r_2 \leqslant r \leqslant r_3$

$$\Phi(r) = \frac{p_1 r^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_1}\right) + \frac{(p_2 - p_1) r^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_2}\right);$$

$$\Phi'(r) = \frac{p_1 r^3}{16D} K_1\left(\frac{r}{r_1}\right) + \frac{(p_2 - p_1) r^3}{16D} K_1\left(\frac{r}{r_2}\right);$$

$$\Phi''(r) = \frac{3p_1 r^2}{16D} K_2\left(\frac{r}{r_1}\right) + \frac{3(p_2 - p_1) r^2}{16D} K_2\left(\frac{r}{r_2}\right);$$

при $r_3 \leqslant r \leqslant r_н$

$$\Phi(r) = \frac{p_1 r^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_1}\right) + \frac{(p_2 - p_1) r^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_2}\right) + \frac{(p_3 - p_2) r^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_3}\right);$$

$$\Phi'(r) = \frac{p_1 r^3}{16D} K_1\left(\frac{r}{r_1}\right) + \frac{(p_2 - p_1) r^3}{16D} K_1\left(\frac{r}{r_2}\right) + \frac{(p_3 - p_2) r^3}{16D} K_1\left(\frac{r}{r_3}\right);$$

$$\Phi''(r) = \frac{3p_1 r^2}{16D} K_2\left(\frac{r}{r_1}\right) + \frac{3(p_2 - p_1) r^2}{16D} K_2\left(\frac{r}{r_2}\right) + \frac{3(p_3 - p_2) r^2}{16D} K_2\left(\frac{r}{r_3}\right).$$

Поскольку $K(1) = K_1(1) = K_2(1) = 0$, то выражения на общей границе смежных участков совпадают, что и обеспечивает выравнивание соответствующих постоянных интегрирования.

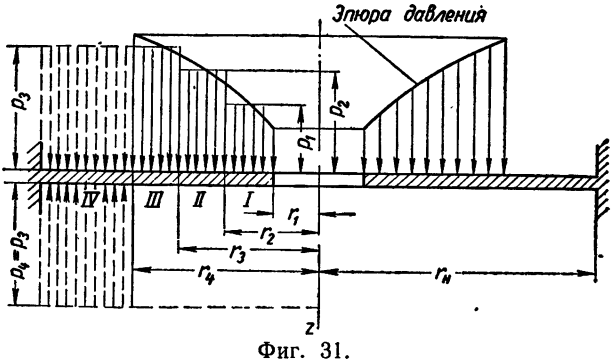
Для сокращения записи полученные выражения могут быть представлены в следующем виде, например:

$$\Phi(r) = \left.\frac{p_1 r^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_1}\right)_{\text{I}}\right| + \left.\frac{(p_2 - p_1) r^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_2}\right)_{\text{II}}\right| + \left.\frac{(p_3 - p_2) r^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_3}\right)_{\text{III}}\right|.$$

В этой зависимости римскими цифрами указано, к какому участку пластины (см. фиг. 8) относятся все слагаемые, стоящие слева от соответствующей черты.

Аналогично могут быть записаны выражения для $\Phi'(r)$ и $\Phi''(r)$.

Итак, если пластина нагружена ступенчатой нагрузкой, интенсивность которой на отдельных участках постоянна, или если нагрузка, оставаясь осесимметричной, изменяется по радиусу каким-либо другим



Фиг. 31.

образом, но может быть приближенно заменена ступенчатой нагрузкой (фиг. 31), то в этих случаях полученные выше соотношения позволяют построить расчетные формулы по способу, аналогичному приему, используемому при написании уравнений упругой линии балок.

В указанных случаях для i-го участка пластины в общем виде можно записать:

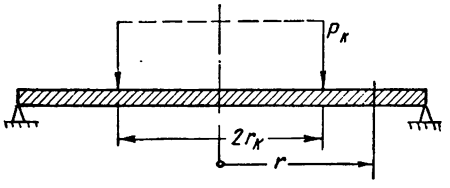
$$\left.\begin{aligned}
\Phi''(r) &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa=i} \frac{3(p_\kappa - p_{\kappa-1})r^2}{16D} K_2\left(\frac{r}{r_\kappa}\right);\\
\Phi'(r) &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa=i} \frac{(p_\kappa - p_{\kappa-1})r^3}{16D} K_1\left(\frac{r}{r_\kappa}\right);\\
\Phi(r) &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa=i} \frac{(p_\kappa - p_{\kappa-1})r^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_\kappa}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Предполагается, что $p_0 = 0$.

Для сплошной пластины $r_1 = 0$, а

$$K(\infty) = K_1(\infty) = K_2(\infty) = 1.$$

Случай 2. Пластина нагружена силой P_κ, равномерно распределенной по соосной окружности радиуса r_κ (фиг. 32).



Фиг. 32.

На участке при $r \leqslant r_\kappa$ $Q = 0$ и соответственно $\Phi''(r) = 0$; $\Phi'(r) = 0$; $\Phi(r) = 0$.

На участке при $r > r_\kappa$

$$Q = \frac{P_\kappa}{2\pi r},$$

тогда по уравнению (24), используя выражение для Q, имеем

$$\Phi'(r) = \frac{P_\kappa}{4\pi D}\int_{r_\kappa}^{r} \frac{1}{\rho}\left(r - \frac{\rho^2}{r}\right) d\rho = \frac{P_\kappa r}{8\pi D} L_1\left(\frac{r}{r_\kappa}\right), \qquad (34)$$

где

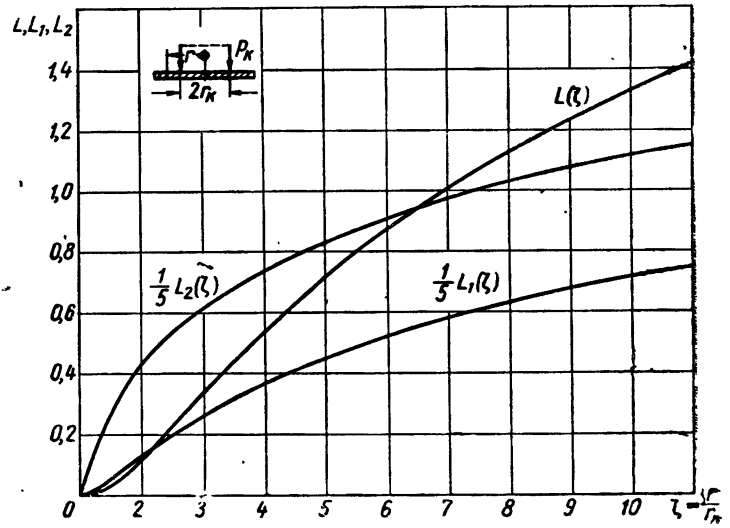
$$L_1\left(\frac{r}{r_к}\right) = L_1(\zeta) = 2\ln\zeta - 1 + \zeta^{-2}. \tag{35}$$

Дифференцируя зависимость (34), получим

$$\Phi''(r) = \frac{P_к}{8\pi D} L_2\left(\frac{r}{r_к}\right), \tag{36}$$

где

$$L_2\left(\frac{r}{r_к}\right) = L_2(\zeta) = 2\ln\zeta + 1 - \zeta^{-2}. \tag{37}$$



Фиг. 33.

Интегрирование зависимости (34) дает

$$\Phi(r) = \frac{P_к r^2}{8\pi D} L\left(\frac{r}{r_к}\right), \tag{38}$$

где

$$L\left(\frac{r}{r_к}\right) = L(\zeta) = (1 + \zeta^{-2})\ln\zeta - 1 + \zeta^{-2}. \tag{39}$$

На фиг. 33 приведены графики функций $L(\zeta)$, $\frac{1}{5} L_1(\zeta)$ и $\frac{1}{5} L_2(\zeta)$, которыми удобно пользоваться при решении конкретных задач.

В особом случае, когда пластина не имеет отверстия и сила приложена в ее центре (фиг. 34), характер построения функции $\Phi(r)$, а следовательно и ее производных, должен быть изменен.

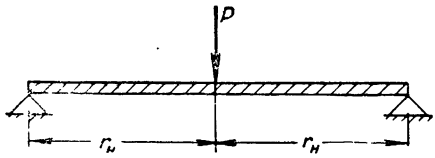
Чтобы исключить особую точку при $r = 0$, целесообразно интегралы, определяющие функции $\Phi(r)$, $\Phi'(r)$ и $\Phi''(r)$, вычислять не в пределах от $r_к < r$ до r, а в пределах от $r_н > r$ до r, где $r_н$ — наружный радиус пластины.

Учитывая, что интенсивность поперечной силы выражается зависимостью $Q=\frac{P_1}{2\pi r}$, по формуле (24) имеем

$$\Phi_0'(r)=\frac{P_1}{4\pi D}\int_{r_н}^{r}\frac{1}{\rho}\left(r-\frac{\rho^2}{r}\right)d\rho=\frac{P_1 r}{8\pi D}L_1^*\left(\frac{r}{r_н}\right), \qquad (34а)$$

где под функцией $L_1^*\left(\frac{r}{r_н}\right)$ понимается зависимость, представляемая формулой (35) при условии, что $\zeta=\frac{r}{r_н}$.

Аналогично на основании зависимостей (25) и (26) получим



Фиг. 34.

$$\Phi_0''(r)=\frac{P_1}{8\pi D}\,{}^{*}\left(\frac{r}{r_н}\right) \qquad (36а)$$

и

$$\Phi_0(r)=\frac{P_1 r^2}{8\pi D}L^*\left(\frac{r}{r_н}\right). \qquad (38а)$$

Функции $L_2^*\left(\frac{r}{r_н}\right)$ и $L^*\left(\frac{r}{r_н}\right)$ выражаются формулами (37) и (39) соответственно при $\zeta=\frac{r}{r_н}$.

Однако легко заметить, что зависимости (34а), (36а) и (38а), составляющие часть соотношений (20), включают выражения, которые по виду подобны другим слагаемым формул (20). В связи с этим целесообразно изменить функции $L^*\left(\frac{r}{r_н}\right)$, $L_1^*\left(\frac{r}{r_н}\right)$ и $L_2^*\left(\frac{r}{r_н}\right)$ [см. формулы (35), (37) и (39)] таким образом, чтобы необходимость в приведении подобных членов в формулах (20) была устранена заблаговременно путем изменения величин постоянных интегрирования, входящих в формулы (20). Это в свою очередь облегчит последующее определение этих постоянных.

В частности, после этого преобразования C_2 в формулах (20) можно положить равным нулю. (Это соответствует выполнению известного условия, что в центре пластины угол поворота нормали $\vartheta=0$).

Учитывая сказанное, взамен функций $L^*\left(\frac{r}{r_н}\right)$, $L_1^*\left(\frac{r}{r_н}\right)$ и $L_2^*\left(\frac{r}{r_н}\right)$ следует принять соответственно

$$L^\circ\left(\frac{r_н}{r}\right)=-\left(\ln\frac{r_н}{r}+\frac{1}{2}\right); \qquad (39а)$$

$$L^\circ_1\left(\frac{r_н}{r}\right)=-2\ln\frac{r_н}{r}; \qquad (35а)$$

$$L^\circ_2\left(\frac{r_н}{r}\right)=-2\left(\ln\frac{r_н}{r}-1\right), \qquad (37а)$$

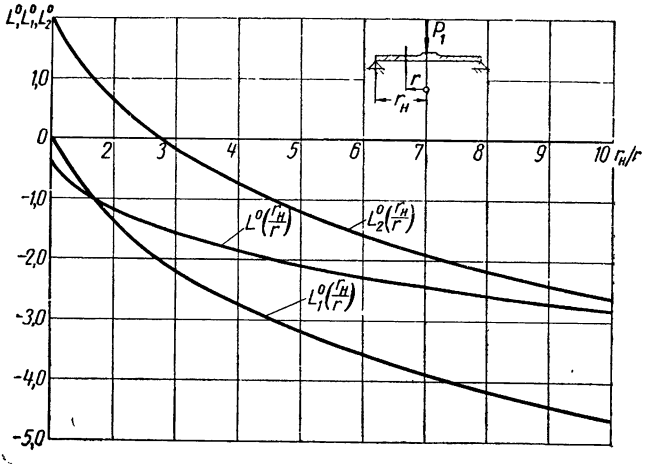
в результате чего получим

$$\Phi(r)=\frac{P_1 r^2}{8\pi D}L^\circ\left(\frac{r_н}{r}\right); \qquad (38б)$$

$$\Phi'(r) = \frac{P_1 r}{8\pi D} L^\circ_1\left(\frac{r_н}{r}\right); \tag{34б}$$

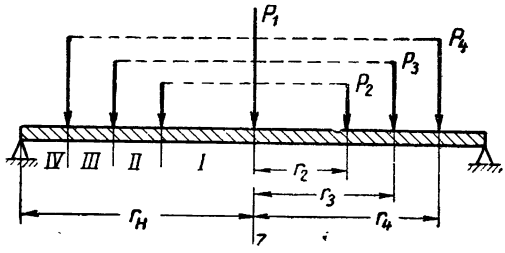
$$\Phi''(r) = \frac{P_1}{8\pi D} L^\circ_2\left(\frac{r_н}{r}\right). \tag{36б}$$

Функции $L^\circ\left(\frac{r_н}{r}\right)$, $L^\circ_1\left(\frac{r_н}{r}\right)$ и $L^\circ_2\left(\frac{r_н}{r}\right)$ представлены графиками на фиг. 35.



Фиг. 35.

При нагружении пластины силой, приложенной в ее центре, и одновременно силами, равномерно распределенными по соосным круговым



Фиг. 36.

контурам (фиг. 36), для i-го участка пластины в общем виде можно записать

$$\Phi(r) = \frac{P_1 r^2}{8\pi D} L^\circ\left(\frac{r_н}{r}\right) + \sum_{к=2}^{к=i} \frac{P_к r^2}{8\pi D} L\left(\frac{r}{r_к}\right);$$

$$\Phi'(r) = \frac{P_1 r}{8\pi D} L^\circ_1\left(\frac{r_н}{r}\right) + \sum_{к=2}^{к=i} \frac{P_к r}{8\pi D} L_1\left(\frac{r}{r_к}\right); \tag{40}$$

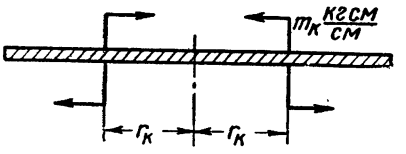
$$\Phi''(r) = \frac{P_1}{8\pi D} L^\circ_2\left(\frac{r_н}{r}\right) + \sum_{к=2}^{к=i} \frac{P_к}{8\pi D} L_2\left(\frac{r}{r_к}\right).$$

Случай 3. Пластина нагружена по контуру $r_к$ равномерно распределенными моментами (фиг. 37); интенсивность моментной нагрузки равна $m_к$ *кгсм/см*.

Для внутреннего участка при $r \leqslant r_к$ по формуле (10)

$$\vartheta_1 = C_{11} r + \frac{C_{21}}{r}; \qquad \vartheta_1' = C_{11} - \frac{C_{21}}{r^2}. \tag{а}$$

Для внешнего участка, при $r \geqslant r_к$



Фиг. 37.

$$\vartheta_2 = C_{12} r + \frac{C_{22}}{r}; \qquad \vartheta_2' = C_{12} - \frac{C_{22}}{r^2}. \tag{б}$$

Из условий сопряжения участков следует, что при $r = r_к$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2;$$
$$M_{r_1} = M_{r_2} + m_к$$

или, учитывая первую формулу (5),

$$\vartheta_1' = \vartheta_2' + \frac{m_к}{D}.$$

Теперь в соответствии с составленными ранее зависимостями получаем

$$C_{11} r_к + \frac{C_{21}}{r_к} = C_{12} r_к + \frac{C_{22}}{r_к}$$

и

$$C_{11} - \frac{C_{21}}{r_к^2} = C_{12} - \frac{C_{22}}{r_к^2} + \frac{m_к}{D}.$$

Решая составленные уравнения совместно, устанавливаем, что

$$C_{12} = C_{11} - \frac{m_к}{2D}$$

и

$$C_{22} = C_{21} + \frac{m_к r_к^2}{2D}.$$

Уравнение (б) для углов поворота ϑ_2 может быть записано теперь в следующем виде:

$$\vartheta_2 = C_{11} r + \frac{C_{21}}{r} - \frac{m_к r}{2D}\left(1 - \frac{r_к^2}{r^2}\right). \tag{в}$$

Сопоставляя уравнения (а)—(в), заключаем, что при наличии моментной нагрузки на границе участков постоянные C_1 и C_2 могут быть выравнены, если для внешнего участка уравнение углов поворота написать по формуле (20б), принимая

$$\Phi'(r) = \frac{m_к r}{2D} N_1\left(\frac{r}{r_к}\right), \tag{41}$$

где

$$N_1\left(\frac{r}{r_к}\right)=N_1(\zeta)=1-\zeta^{-2}. \tag{42}$$

Аналогично легко установить, что

$$\Phi''(r)=\frac{m_к}{2D}N_2\left(\frac{r}{r_к}\right), \tag{43}$$

где

$$N_2\left(\frac{r}{r_к}\right)=N_2(\zeta)=1+\zeta^{-2}, \tag{44}$$

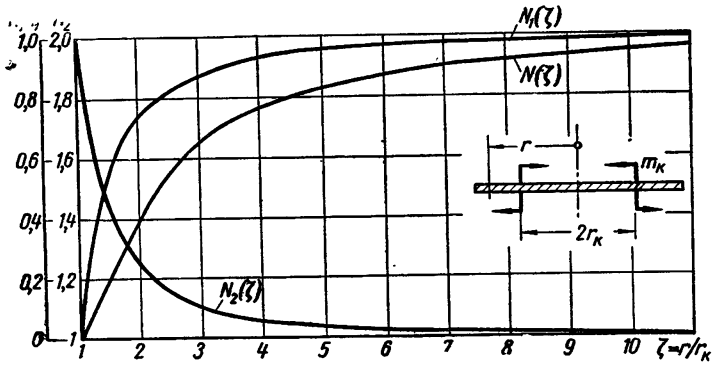
и, наконец,

$$\Phi(r)=\frac{m_к r^2}{4D}N\left(\frac{r}{r_к}\right), \tag{45}$$

где

$$N\left(\frac{r}{r_к}\right)=N(\zeta)=1-\zeta^{-2}-2\zeta^{-2}\ln\zeta. \tag{46}$$

На фиг. 38 проведены графики значений функций $N(\zeta)$, $N_1(\zeta)$ и $N_2(\zeta)$, которыми удобно пользоваться в расчетной практике.



Фиг. 38.

В табл. 6 дана сводка основных формул, определяющих функцию $\Phi(r)$ и ее первую и вторую производные для ряда характерных случаев нагружения пластины.

При наличии любой практически встречающейся нагрузки, выражения для функции $\Phi(r)$ и ее производных могут быть определены путем сложения результатов, полученных для типовых случаев нагружения (см. табл. 6).

Для иллюстрации изложенного метода рассмотрим ряд примеров.

В. Примеры расчета круглых пластин постоянной толщины изложенным методом

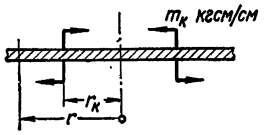
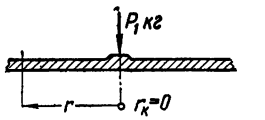
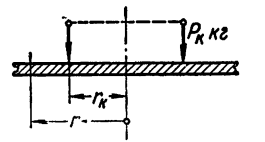
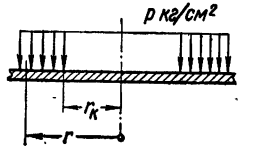
Пример 1. Для измерения расхода жидкости или газа (воздуха, воды, нефти и т. п.) по методу перепада давления применяют плоскую диафрагму, т. е. диск с центральным отверстием.

На фиг. 39 изображена схема установки плоской диафрагмы в трубопроводе большого диаметра (порядка 1—2 *м*).

Плоская диафрагма представляет собой тонкую круглую пластину с центральным отверстием, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой и заделанную по внешнему контуру (защемляющие фланцы считаем абсолютно жесткими).

Таблица 6

Таблица формул, выражающих функции $\Phi(r)$, $\Phi'(r)$ и $\Phi''(r)$ для основных случаев нагружения круглых пластин

Схемы нагружения пластин	$\Phi(r)$ при $r \geqslant r_к$	$\Phi'(r)$ при $r \geqslant r_к$	$\Phi''(r)$ при $r \geqslant r_к$
	$\Phi(r) = \frac{m_к r^2}{4D} N\left(\frac{r}{r_к}\right)$	$\Phi'(r) = \frac{m_к r}{2D} N_1\left(\frac{r}{r_к}\right)$	$\Phi''(r) = \frac{m_к}{2D} N_2\left(\frac{r}{r_к}\right)$
	Функции $N\left(\frac{r}{r_к}\right)$, $N_1\left(\frac{r}{r_к}\right)$ и $N_2\left(\frac{r}{r_к}\right)$ представлены графиками на фиг. 38		
	$\Phi(r) = \frac{P_1 r^2}{8\pi D} L^\circ\left(\frac{r_н}{r}\right)^*$	$\Phi'(r) = \frac{P_1}{8\pi D} L_1^\circ\left(\frac{r_н}{r}\right)$	$\Phi''(r) = \frac{P_1}{8\pi D} L_2^\circ\left(\frac{r_н}{r}\right)$
	Функции $L^\circ\left(\frac{r_н}{r}\right)$, $L_1^\circ\left(\frac{r_н}{r}\right)$ и $L_2^\circ\left(\frac{r_н}{r}\right)$ представлены графиками на фиг. 35		
	$\Phi(r) = \frac{P_к r^2}{8\pi D} L\left(\frac{r}{r_к}\right)$	$\Phi'(r) = \frac{P_к r}{8\pi D} L_1\left(\frac{r}{r_к}\right)$	$\Phi''(r) = \frac{P_к}{8\pi D} L_2\left(\frac{r}{r_к}\right)$
	Функции $L\left(\frac{r}{r_к}\right)$, $L_1\left(\frac{r}{r_к}\right)$ и $L_2\left(\frac{r}{r_к}\right)$ представлены графиками на фиг. 33		
	$\Phi(r) = \frac{p_к r^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_к}\right)$	$\Phi'(r) = \frac{p_к r^3}{16D} K_1\left(\frac{r}{r_к}\right)$	$\Phi''(r) = \frac{3p_к r^2}{16D} K_2\left(\frac{r}{r_к}\right)$
	Функции** $K\left(\frac{r}{r_к}\right)$, $K_1\left(\frac{r}{r_к}\right)$ и $K_2\left(\frac{r}{r_к}\right)$ представлены графиками на фиг. 28		

* $r_н$ — наружный радиус пластины.

** При $r_к = 0$ $K(\infty) = K_1(\infty) = K_2(\infty) = 1$.

Соответствующая расчетная схема изображена на фиг. 40.

Согласно формулам, приведенным в табл. 6, имеем:

$$\Phi(r) = \frac{pr^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_1}\right);$$

$$\Phi'(r) = \frac{pr^3}{16D} K_1\left(\frac{r}{r_1}\right);$$

$$\Phi''(r) = \frac{3pr^2}{16D} K_2\left(\frac{r}{r_1}\right),$$

тогда для ϑ и ϑ' по формулам (20) получим:

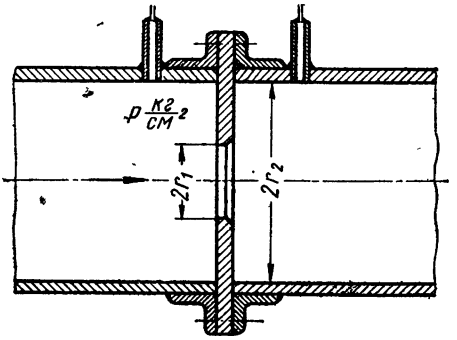
$$\vartheta' = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{3pr^2}{16D} K_2\left(\frac{r}{r_1}\right);$$

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{pr^3}{16D} K_1\left(\frac{r}{r_1}\right).$$

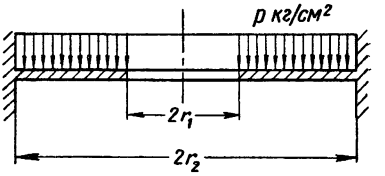
Постоянные C_1 и C_2 определим из следующих граничных условий:
при $r = r_1$ $M_{r_1} = 0$ и, следовательно [см. первую формулу (5)]

$$\left(\vartheta' + \mu\frac{\vartheta}{r}\right)_{r=r_1} = 0;$$

при $r = r_2$ $\vartheta = 0$.



Фиг. 39.



Фиг. 40.

В соответствии с указанными граничными условиями получим два уравнения относительно неизвестных C_1 и C_2:

$$C_1(1+\mu) - \frac{1-\mu}{r_1^2} C_2 = 0;$$

$$C_1 + \frac{C_2}{r_2^2} = \frac{pr_2^2}{16D} K_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

откуда

$$C_1 = \frac{pr_2^2}{16D} \cdot \frac{(1-\mu) K_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(1-\mu) + (1+\mu)\frac{r_1^2}{r_2^2}};$$

$$C_2 = \frac{pr_2^2 r_1^2}{16D} \cdot \frac{(1+\mu) K_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(1-\mu) + (1+\mu)\frac{r_1^2}{r_2^2}};$$

Уравнение прогибов $w(r)$ согласно формуле (20в) имеет вид

$$w(r) = C_3 - \frac{C_1 r^2}{2} - C_2 \ln \frac{r}{r_2} + \frac{pr^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_1}\right).$$

Постоянная C_3 определяется из условия равенства нулю прогиба на наружном контуре.

При $r = r_2$ $w = 0$, откуда

$$C_3 = C_1 \frac{r_2^2}{2} - \frac{pr_2^4}{64D} K\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Подставляя значение C_1, получим

$$C_3 = \frac{pr_2^4}{32D} \cdot \frac{(1-\mu) K_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(1-\mu) + (1+\mu)\frac{r_1^2}{r_2^2}} - \frac{pr_2^4}{64D} K\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Окончательно

$$w(r) = \frac{pr_2^4}{32D} \cdot \frac{(1-\mu) K_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(1-\mu) + (1+\mu)\frac{r_1^2}{r_2^2}} \left(1 - \frac{r^2}{r_2^2}\right) -$$

$$- \frac{pr_1^2 r_2^2}{16D} \frac{(1+\mu) K_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(1-\mu) + (1+\mu)\frac{r_1^2}{r_2^2}} - \ln \frac{r}{r_2} + \frac{pr_2^4}{64D} \left[\frac{r^4}{r_2^4} K\left(\frac{r}{r_1}\right) - K\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right].$$

Наибольший прогиб $w_{\max}$ имеет место на внутреннем контуре пластины при $r = r_1$:

$$w_{\max} = \frac{pr_1^2 r_2^2}{16D} \frac{K_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(1-\mu) + (1+\mu)\frac{r_1^2}{r_2^2}} \left[\frac{(1-\mu)}{2}\left(\frac{r_2^2}{r_1^2} - 1\right) + (1+\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}\right] -$$

$$- \frac{pr_2^4}{64D} K\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Интенсивности изгибающих моментов M_r и M_t согласно формулам (22), (21) и (21а) будут равны

$$M_r = D\left\{C_1(1+\mu) - \frac{C_2}{r^2}(1-\mu) - \frac{pr^2}{16D}\left[3K_2\left(\frac{r}{r_1}\right) + \mu K_1\left(\frac{r}{r_1}\right)\right]\right\};$$

$$M_t = D\left\{C_1(1+\mu) + \frac{C_2}{r^2}(1-\mu) - \frac{pr^2}{16D}\left[K_1\left(\frac{r}{r_1}\right) + 3\mu K_2\left(\frac{r}{r_1}\right)\right]\right\}.$$

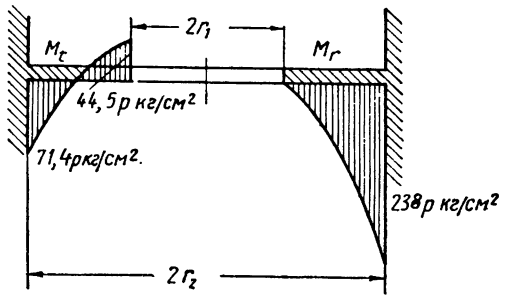
После подстановки значений C_1 и C_2 получим

$$M_r = \frac{pr_2^2}{16}\left\{\frac{(1-\mu^2) K_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right)}{(1-\mu) + (1+\mu)\frac{r_1^2}{r_2^2}} - \frac{r^2}{r_2^2}\left[3K_2\left(\frac{r}{r_1}\right) + \mu K_1\left(\frac{r}{r_1}\right)\right]\right\},$$

$$M_t = \frac{pr_2^2}{16}\left\{\frac{(1-\mu^2)K_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\left(1+\frac{r_1^2}{r^2}\right)}{(1-\mu)+(1+\mu)\frac{r_1^2}{r_2^2}} - \frac{r^2}{r_2^2}\left[K_1\left(\frac{r}{r_1}\right)+3\mu K_2\left(\frac{r}{r_1}\right)\right]\right\}.$$

В качестве числового примера проведем поверочный расчет диафрагмы, имеющей следующие размеры: внешний и внутренний радиусы соответственно $r_2=70$ *см*, $r_1=45$ *см*, толщина $h=0{,}6$ *см*; материал — сталь; модуль упругости $E=2\cdot10^6$ *кг/см*^{2}; коэффициент Пуассона $\mu=0{,}3$; интенсивность нагрузки $p=0{,}132$ *кг/см*^{2}, что соответствует перепаду давления 100 *мм* рт. ст.

Полученные при этих данных величины интенсивностей изгибающих моментов представлены соответствующими эпюрами на фиг. 41.



Фиг. 41.

Заметим, что графики функций $K(\zeta)$ и $L(\zeta)$ (см. фиг 28 и 33) не дают достаточной точности при значениях ζ, близких к единице. В этих случаях для облегчения вычислений можно пользоваться приведенными ниже зависимостями (47), полученными из формул (32), (27), (30), (39), (35) и (37) путем разложения $\ln\zeta$ в ряд, с пренебрежением слагаемыми, включающими отношения $\frac{(\zeta-1)}{(\zeta+1)}$ в степени выше третьей [1].

В этом случае преобразуемые формулы примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
K(\zeta) &= \frac{(\zeta-1)^4}{3\zeta^4(\zeta+1)^3}[3\zeta^3+21\zeta^2+23\zeta+17];\\
K_1(\zeta) &= \frac{(\zeta-1)^3}{\zeta^4(\zeta+1)}\left[\zeta^2+4\zeta+1-\frac{8}{3}\cdot\frac{\zeta^2}{(\zeta+1)^2}\right];\\
K_2(\zeta) &= \frac{(\zeta-1)^2}{3\zeta^4(\zeta+1)}[3\zeta^3+9\zeta^2+3\zeta+1]-\frac{8}{\zeta^2}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^3;\\
L(\zeta) &= \frac{(\zeta-1)^3}{3\zeta^2(\zeta+1)^3}(5\zeta^2+6\zeta+5);\\
L_1(\zeta) &= \frac{(\zeta-1)^2}{\zeta^2(\zeta+1)}(3\zeta+1)+\frac{4}{3}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^3;\\
L_2(\zeta) &= \frac{(\zeta-1)}{\zeta^2(\zeta+1)}(5\zeta^2+2\zeta+1)+\frac{4}{3}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^3.
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Формулы (47) дают достаточную точность при $1 \leqslant \zeta \leqslant 1{,}5$.

Из эпюр [см. фиг. (41)] следует, что наиболее напряженные точки пластины расположены у наружного края пластины на радиусе $r_2 = 70$ *см*.

Здесь имеют место следующие радиальные и окружные напряжения:

$$\sigma_r = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{6\cdot238\cdot0{,}132}{0{,}6^2} = 524 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_t = \frac{6M_t}{h^2} = \frac{6\cdot71{,}4\cdot0{,}132}{0{,}6^2} = 157 \text{ кг/см}^2.$$

Для точек, расположенных у верхней поверхности пластины, это — напряжения растяжения, а у нижней — сжатия.

В верхних точках главные напряжения равны

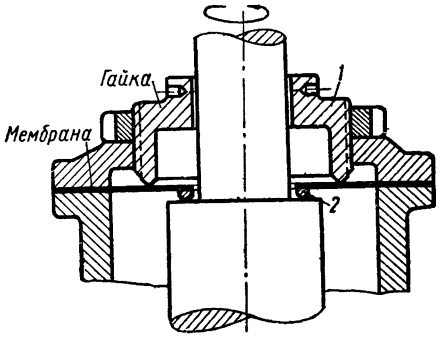
$$\sigma_1 = 524 \text{ кг/см}^2;\quad \sigma_2 = 157 \text{ кг/см}^2;\quad \sigma_3 = -0{,}132 \approx 0.$$

По теории прочности Мора при $\nu = 1$ (см. гл. VI т. I)

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \approx 524 \text{ кг/см}^2.$$

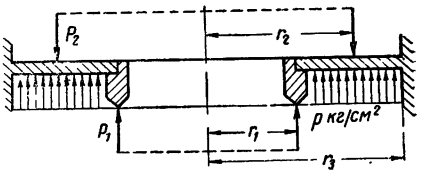
Заметим, что расчет является достаточно точным только в том случае, если прогиб пластины значительно меньше ее толщины, что в рассматриваемом примере имеет место (по выведенной выше формуле при h=0,6 см, w_{max} =0,133 см).

Пример 2. Уплотняющее устройство, представленное на фиг. 42, имеет целью не допускать утечки газа, находящегося внутри кожуха под давлением p кг/см^2.



Фиг. 42.

Подтягиванием гайки *1* достигается плотное прилегание кольцевого ножа *2* к торцу вращающегося вала, чем и обеспечивается герметичность соединения. По мере износа рабочей поверхности гайку необходимо периодически подтягивать.



Фиг. 43.

Для рассматриваемого уплотнения требуется определить усилие на ноже P_1 в зависимости от степени затяжки гайки.

Расчетная схема для поставленной задачи представлена на фиг. 43.

Согласно формулам (20б), (28) и (34) для такой пластины можно написать:

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{pr^3}{16D} K_1\left(\frac{r}{r_1}\right) + \frac{P_1 \cdot r}{8\pi D} L_1\left(\frac{r}{r_1}\right)_{\text{I}} \Big| - \frac{P_2 \cdot r}{8\pi D} L_1\left(\frac{r}{r_2}\right)_{\text{II}} \Big|.$$

В написанном выражении совмещены две самостоятельные зависимости, составленные для I и II участков. Слагаемые в правой части равенства, относящиеся к соответствующему участку, отделены чертой с указателем номера участка.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий:

при $r = r_1$ $\vartheta = 0$ (предполагается, что внутреннее кольцо *2* обладает очень большой жесткостью в сравнении с жесткостью пластины);

при $r = r_3$ $\vartheta = 0$

На основании указанных двух условий получаем два уравнения, определяющие постоянные интегрирования C_1 и C_2:

$$C_1 r_1 + \frac{C_2}{r_1} = 0;$$

$$C_1 r_3 + \frac{C_2}{r_3} = -\frac{pr_3^3}{16D} K_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) - \frac{P_1 r_3}{8\pi D} L_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) + \frac{P_2 r_3}{8\pi D} L_1\left(\frac{r_3}{r_2}\right).$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{r_3^2 - r_1^2}\left[-\frac{pr_3^4}{16D} K_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) - \frac{P_1 r_3^2}{8\pi D} L_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) + \frac{P_2 r_3^2}{8\pi D} L_1\left(\frac{r_3}{r_2}\right)\right];$$

$$C_2 = -\frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2}\left[-\frac{pr_3^4}{16D} K_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) - \frac{P_1 r_3^2}{8\pi D} L_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) + \frac{P_2 r_3^2}{8\pi D} L_1\left(\frac{r_3}{r_2}\right)\right].$$

Составим далее выражение для прогибов [см. формулу (20в)]:

$$w(r) = C_3 - C_1 \frac{r^2}{2} - C_2 \ln\frac{r}{r_1} - \frac{pr^4}{64D} K\left(\frac{r}{r_1}\right) - \frac{P_1 r^2}{8\pi D} L\left(\frac{r}{r_1}\right)_{\text{I}} \Big| + \frac{P_2 r^2}{8\pi D} L\left(\frac{r}{r_2}\right)_{\text{II}} \Big|.$$

При $r = r_3$ $w = 0$, откуда

$$C_3 = C_1 \frac{r_3^2}{2} + C_2 \ln \frac{r_3}{r_1} + \frac{pr_3^4}{64D} K\left(\frac{r_3}{r_1}\right) + \frac{P_1 r_3^2}{8\pi D} L\left(\frac{r_3}{r_1}\right) - \frac{P_2 r_3^2}{8\pi D} L\left(\frac{r_3}{r_2}\right).$$

Окончательно

$$w(r) = C_1 \frac{r_3^2 - r^2}{2} + C_2 \ln \frac{r_3}{r} + \frac{p}{64D}\left[r_3^4 K\left(\frac{r_3}{r_1}\right) - r^4 K\left(\frac{r}{r_1}\right)\right] +$$
$$+ \frac{P_1}{8\pi D}\left[r_3^2 L\left(\frac{r_3}{r_1}\right) - r^2 L\left(\frac{r}{r_1}\right)\right] - \frac{P_2 r_3^2}{8\pi D} L\left(\frac{r_3}{r_2}\right)_{\text{I}} + \frac{P_2 r^2}{8\pi D} L\left(\frac{r}{r_2}\right)_{\text{II}}.$$

В этих выражениях неизвестными остаются пока силы P_1 и P_2.

Перемещение гайки *1* обозначим через Δ_2, а заданное перемещение ножа *2* через Δ_1 (в общем случае $\Delta_1 \neq 0$). Таким образом, при $r = r_1$ $w = \Delta_1$, а при $r = r_2$ $w = \Delta_2$, тогда

$$\Delta_1 = C_1 \frac{r_3^2 - r_1^2}{2} + C_2 \ln \frac{r_3}{r_1} + \frac{p}{64D} r_3^4 K\left(\frac{r_3}{r_1}\right) + \frac{P_1 r_3^2}{8\pi D} L\left(\frac{r_3}{r_1}\right) -$$
$$- \frac{P_2 r_3^2}{8\pi D} L\left(\frac{r_3}{r_2}\right);$$

$$\Delta_2 = C_1 \frac{r_3^2 - r_2^2}{2} + C_2 \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{p}{64D}\left[r_3^4 K\left(\frac{r_3}{r_1}\right) - r_2^4 K\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right] +$$
$$+ \frac{P_1}{8\pi D}\left[r_3^2 L\left(\frac{r_3}{r_1}\right) - r_2^2 L\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right] - \frac{P_2 r_3^2}{8\pi D} L\left(\frac{r_3}{r_2}\right).$$

Подставив сюда значения C_1 и C_2, выраженные ранее через силы P_1 и P_2, имеем:

$$\Delta_1 = \frac{pr_3^4}{16D}\left[-\frac{1}{2} K_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) + \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} K_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) \ln \frac{r_3}{r_1} + \frac{1}{4} K\left(\frac{r_3}{r_1}\right)\right] +$$
$$+ \frac{P_1 r_3^2}{8\pi D}\left[-\frac{1}{2} L_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) + \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} L_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) \ln \frac{r_3}{r_1} + L\left(\frac{r_3}{r_1}\right)\right] +$$
$$+ \frac{P_2 r_3^2}{8\pi D}\left[\frac{1}{2} L_1\left(\frac{r_3}{r_2}\right) - \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} L_1\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \ln \frac{r_3}{r_1} - L\left(\frac{r_3}{r_2}\right)\right];$$

$$\Delta_2 = \frac{pr_3^4}{16D}\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} K_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) + \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} K_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) \ln \frac{r_3}{r_2} +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} K\left(\frac{r_3}{r_1}\right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{r_2^4}{r_3^4} K\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right] + \frac{P_1 r_3^2}{8\pi D}\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} L_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} L_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right) \ln \frac{r_3}{r_2} + L\left(\frac{r_3}{r_1}\right) - \frac{r_2^2}{r_3^2} L\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right] +$$
$$+ \frac{P_2 r_3^2}{8\pi D}\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} L_1\left(\frac{r_3}{r_2}\right) - \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} L_1\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \ln \frac{r_3}{r_2} - L\left(\frac{r_3}{r_2}\right)\right].$$

Искомая зависимость усилия P_1 от глубины затяжки Δ_2 определяется путем исключения из этих выражений величины P_2.

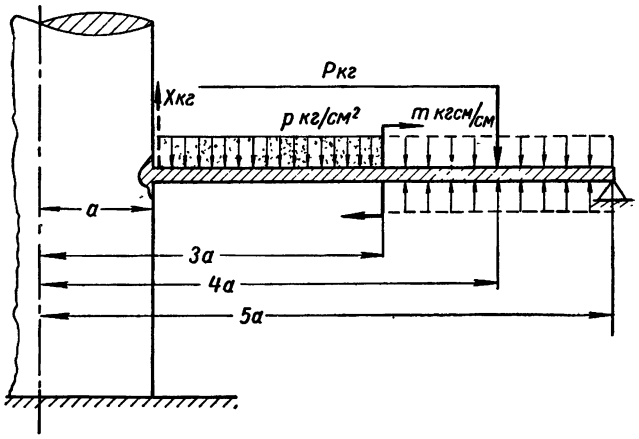
Так как указанное преобразование принципиально никаких трудностей не представляет, проделывать его здесь не будем.

Пример 3. Выполнить расчет пластины, схема которой представлена на фиг. 44, если задано $P=8\pi a^2 p$ кг; $m=pa^2$ кгсм/см; коэффициент Пуассона материала пластины $\mu=0{,}3$.

В рассматриваемом случае пластина оперта одновременно по наружному и внутреннему контурам, поэтому установить величину реакций при помощи одних лишь уравнений статики не представляется возможным.

Обозначим через X силу, воспринимаемую центральной жесткой опорой, в которую пластина заделана своей внутренней кромкой.

Воспользуемся формулой (20в) и составим уравнение прогибов в обобщенной форме, охватывая сразу все участки пластины.



Фиг. 44.

Для этой цели продолжим мысленно на внешнюю часть пластины заданное распределенное давление и уравновесим добавленную нагрузку таким же давлением, действующим снизу (см. фиг. 44).

[Здесь используется прием, который аналогичен способу, применяемому для выравнивания величины соответствующих постоянных интегрирования по участкам при определении прогибов у балок (см. гл. X, т. I).]

Теперь можно записать:

$$w(r)=C_3-\frac{C_1r^2}{2}-C_2\ln\frac{r}{a}-\frac{Xr^2}{8\pi D}L\left(\frac{r}{a}\right)+\frac{pr^4}{64D}K\left(\frac{r}{a}\right)_{\text{I}}\Bigg|-$$
$$-\frac{pr^4}{64D}K\left(\frac{r}{3a}\right)-\frac{mr^2}{4D}N\left(\frac{r}{3a}\right)_{\text{II}}\Bigg|+\frac{Pr^2}{8\pi D}L\left(\frac{r}{4a}\right)_{\text{III}}\Bigg|.$$

В написанном выражении совмещены три самостоятельные зависимости, составленные для I, II и III участков пластины.

Слагаемые в правой части равенства, относящиеся к каждому из участков, отделены чертой с указателем номера участка.

Уравнение содержит четыре неизвестные величины: три постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 и реакцию X со стороны центральной опоры.

Для определения указанных величин воспользуемся следующими граничными условиями:

1) при $r=a$ $w=0$;
2) при $r=a$ $\vartheta=0$;
3) при $r=5a$ $w=0$;
4) при $r=5a$ $M_r=0$.

Из первого условия, используя составленное ранее уравнение прогибов для участка I ($a \leqslant r \leqslant 3a$) и учитывая, что при $r=a$ $L(1)=0$ и $K(1)=0$, имеем

$$C_3-\frac{C_1a^2}{2}=0,$$

откуда

$$C_3=\frac{C_1a^2}{2}.$$

На основании второго условия, используя формулу (20б), можно записать:

$$C_1 a + \frac{C_2}{a} = 0.$$

[Напомним, что функция $\Phi'(r)$ в формуле (20б) включает коэффициенты $L_1\left(\frac{r}{r_к}\right)$, $K_1\left(\frac{r}{r_к}\right)$ и $N_1\left(\frac{r}{r_к}\right)$, которые при $r = r_к$ обращаются в ноль, т. е. $L_1(1) = K_1(1) = N_1(1) = 0$, в связи с этим $\Phi'(r_к) = 0$].

Таким образом,

$$C_2 = -C_1 a^2.$$

В соответствии с третьим граничным условием по уравнению прогибов для участка III имеем

$$C_3 - \frac{25a^2}{2} C_1 - C_2 \ln 5 - \frac{25a^2 X}{8\pi D} L(5) + \frac{625a^4 p}{64D}\left[K(5) - K\left(\frac{5}{3}\right)\right] - \frac{25a^2 m}{4D} N\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{25a^2 P}{8\pi D} L\left(\frac{5}{4}\right) = 0.$$

Значения необходимых коэффициентов устанавливаются по графикам, представленным на фиг. 28, 33 и 38, а также по формулам (47) и др.:

$$L(5) = 0{,}71; \quad K(5) = 0{,}63; \quad L\left(\frac{5}{4}\right) = 0{,}006; \quad K\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}06; \quad N\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}27,$$

тогда последняя зависимость принимает вид

$$\frac{25a^2}{2} C_1 + C_2 \ln 5 - C_3 + \frac{25a^2 X}{8\pi D} 0{,}71 = \frac{625a^4 p}{64D}[0{,}63 - 0{,}06] - \frac{25a^2 m}{4D} 0{,}27 + \frac{25a^2 P}{8\pi D} 0{,}006.$$

После подстановки заданных значений нагрузок, с учетом установленных ранее соотношений между постоянными, получим

$$10{,}39DC_1 + 0{,}707X = 3{,}876pa^2. \qquad (\text{А})$$

Теперь составим последнее недостающее уравнение. Используя формулы (22), (21) и (21а) на основании 4-го граничного условия имеем

$$DC_1(1+\mu) - \frac{DC_2(1-\mu)}{25a^2} = -\frac{X}{8\pi} L_2(5) + \frac{3 \cdot 25a^2 p}{16}\left[K_2(5) - K_2\left(\frac{5}{3}\right)\right] - \frac{m}{2} N_2\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{P}{8\pi} L_2\left(\frac{5}{4}\right) + \mu\left\{-\frac{X}{8\pi} L_1(5) + \frac{25a^2 p}{16}\left[K_1(5) - K_1\left(\frac{5}{3}\right)\right] - \frac{m}{2} N_1\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{P}{8\pi} L_1\left(\frac{5}{4}\right)\right\}.$$

Вспомогательные графики на фиг. 28, 33 и 38, а также формулы (43) и др. позволяют легко определить значения необходимых коэффициентов:

$$K_1(5) = 0{,}74; \qquad K_2(5) = 0{,}87;$$

$$K_1\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}136; \qquad K_2\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}32;$$

$$L_1(5) = 2{,}26; \qquad L_2(5) = 4{,}18;$$

$$L_1\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}086; \qquad L_2\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}806;$$

$$N_1\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}64; \qquad N_2\left(\frac{5}{3}\right) = 1{,}36.$$

Подставляя значения коэффициентов в последнее уравнение и учитывая установленную ранее зависимость между постоянными C_1 и C_2, имеем:

$$DC_1\left(1+\mu+\frac{1-\mu}{25}\right)+\frac{1}{8\pi}(4{,}18+2{,}26\,\mu)X=$$
$$=\frac{25a^2p}{16}[3(0{,}87-0{,}32)+\mu(0{,}74-0{,}136)]-$$
$$-\frac{m}{2}(1{,}36+0{,}64\,\mu)+\frac{P}{8\pi}(0{,}806+0{,}086\,\mu).$$

После подстановки значений заданных величин второе уравнение для определения неизвестных C_1 и X получает следующий вид:

$$1{,}33\,DC_1+0{,}194X=2{,}92pa^2. \qquad (B)$$

Совместное решение уравнений (А) и (В) дает:

$$DC_1=-1{,}22pa^2,$$
$$X=23{,}4pa^2.$$

Используя установленные выше соотношения между постоянными, имеем:

$$DC_2=1{,}22pa^4;$$
$$DC_3=-0{,}61pa^4.$$

Теперь, руководствуясь соотношениями (21), (21а) и формулами (22), не представляет затруднений подсчитать необходимые для расчета на прочность интенсивности изгибающих моментов M_r и M_t на любом радиусе пластины.

Подставляя найденные выше величины в уравнение прогибов, составленное в начале примера, можно получить окончательное выражение, определяющее величину прогибов пластины в любом ее месте.

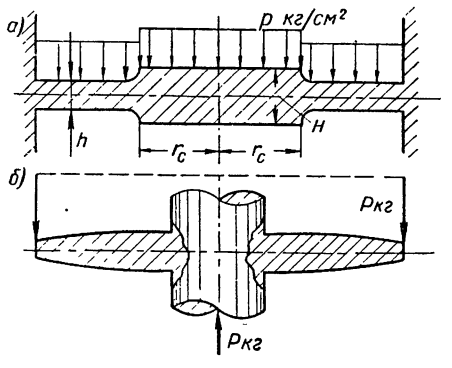
Таким образом, задача о расчете круглых пластин не представляет принципиальных трудностей, необходимо лишь рационально построить порядок выкладок, для того чтобы уменьшить трудоемкость вычислений.

Расчетные приемы, приведенные в § 2, по сравнению с обычными методами расчета (см. § 1) имеют с этой точки зрения значительные преимущества.

§ 3. РАСЧЕТ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

А. Общие соображения

В практике машиностроения часто встречаются случаи, когда целесообразно применять пластины, толщина которых по радиусу меняется. Чаще всего пластины переменной толщины применяются для облегчения элементов конструкций. Действительно, поскольку интенсивность изгибающих моментов по радиусу пластины является переменной, постольку, добиваясь равнопрочности, рационально делать и толщину пластины также переменной.



Фиг. 45.

В практике могут встретиться как пластины ступенчатые, как бы составленные из отдельных кольцевых пластин различной толщины (фиг. 45,*а*), так и пластины с плавно изменяющейся толщиной (фиг. 45,*б*). (Как уже отмечалось во введении, предполагается, что и в этих случаях срединная плоскость является плоскостью симметрии пластины.)

Если закон изменения толщины h по радиусу известен и достаточно прост, то можно рассчитывать на получение точного решения задачи. Если же закон изменения толщины по радиусу неизвестен и расчетчику не удается подобрать простую апроксимирующую функцию или если эта функция слишком сложна, то пластину плавно-переменной толщины при расчете приближенно заменяют ступенчатой пластиной таким образом, чтобы очертание ступенчатого профиля возможно лучше приближалось к заданному криволинейному профилю.

Ниже будет рассматриваться расчет пластин на основе предположений о большой жесткости пластины (о малости прогибов) и о малости ее наибольшей толщины по сравнению с наружным радиусом (см. введение в гл. I т. II).

Б. Расчет пластин ступенчатого профиля

В рассматриваемом случае на каждом из участков постоянной толщины расчет ведется так, как это было изложено выше.

Для получения решения на каждом из участков подлежат определению три постоянные интегрирования C_1, C_2 и C_3.

Для этого помимо учета контурных условий, связанных с характером закрепления и нагружения пластины в целом (см. разд. Д § 1), необходимо использовать уравнения совместности перемещений и условия равновесия на радиусах сопряжения кольцевых пластин различной толщины.

По окружным сечениям, делящим пластины на кольца (на радиусах сопряжения r_{ci}), должны соблюдаться следующие два условия.

1. Углы поворота образующих сопрягающей цилиндрической поверхности у наружного ϑ_H и внутреннего ϑ_B колец должны быть равны

$$\vartheta_H = \vartheta_B. \tag{48}$$

2. Интенсивности моментов в сопрягающем окружном сечении у наружного M_r^H и внутреннего M_r^B колец также должны быть равны между собой:

$$M_r^H = M_r^B. \tag{49}$$

В соответствии с этим по первой формуле (5) можно установить, что на любом радиусе сопряжения r_{ci} справедлива зависимость

$$\left[\left(\vartheta' + \mu\frac{\vartheta}{r}\right)h^3\right]_H = \left[\left(\vartheta' + \mu\frac{\vartheta}{r}\right)H^3\right]_B, \tag{50}$$

где h и H,— толщины наружного H и внутреннего B колец соответственно (фиг. 45, *а*).

Указанные два условия (48) и (49) или (48) и (50) на каждом из радиусов сопряжения r_{ci} совместно с другими краевыми условиями позволяют определить постоянные C_{1i} и C_{2i} для всех участков.

Для определения постоянных C_{3i} помимо условий закрепления пластины, используемых при расчете пластин постоянной толщины, необходимо дополнительно учесть равенство прогибов кольцевых пластин различной толщины на радиусах их сопряжения, т. е. учесть, что на каждом из радиусов r_{ci}

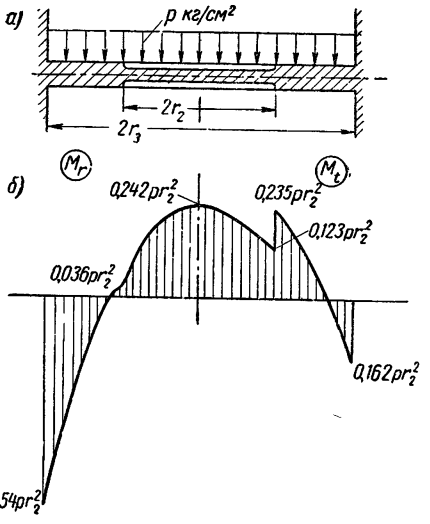
$$w_H = w_B. \tag{51}$$

Таким образом, изложенный способ расчета пластин ступенчатого очертания не содержит принципиальных трудностей, однако объем аналитических преобразований и вычислений, связанных с его применением, иногда настолько велик, что получение окончательного результата практически невозможно.

В связи с этим можно рекомендовать другой, более рациональный метод расчета. Такой метод изложен в следующем разд. В этого параграфа.

Предварительно рассмотрим пример расчета ступенчатой пластины способом, изложенным выше.

Пример. Допустим, что требуется рассчитать заделанную по периметру круглую пластину ступенчатого профиля, нагруженную постоянным давлением (фиг. 46,*а*)



Фиг. 46.

Жесткость D центральной тонкой части пластины вдвое меньше жесткости D периферийного, более толстого участка $\left(D_0 = \frac{D}{2}\right)$. Отношение радиусов $\frac{r_3}{r} = 2$.

Коэффициент Пуассона материала пластины $\mu = 0{,}3$.

В соответствии с зависимостью (16) уравнения для углов поворота имеют следующий вид:

для тонкой части пластины (участок I):

$$\vartheta_I = C_{11} r + \frac{C_{21}}{r} - \frac{pr^3}{16D_0};$$

для толстой части пластины (участок II):

$$\vartheta_{II} = C_{12} r + \frac{C_{22}}{r} - \frac{pr^3}{16D}.$$

Граничные условия и условия сопряжения участков позволяют составить необходимые уравнения для определения постоянных интегрирования:

1) при $r = 0$ $\vartheta_I = 0$, следовательно,

$$C_{21} = 0;$$

2) при $r = r_2$ $\vartheta_I = \vartheta_{II}$, следовательно,

$$C_{11} r_2 - \frac{pr_2^3}{16D_0} = C_{12} r_2 + \frac{C_{22}}{r_2} - \frac{pr_2^3}{16D},$$

откуда

$$C_{11} - C_{12} - \frac{C_{22}}{r_2^2} = \frac{pr_2^2}{16D}; \qquad (a)$$

3) при $r = r_2$ $M_{rI} = M_{rII}$.

Используя первое соотношение (5) и учитывая, что

$$\vartheta_I' = C_{11} - \frac{3}{16} \cdot \frac{pr^2}{D_0},$$

а

$$\vartheta_{II}' = C_{12} - \frac{C_{22}}{r^2} - \frac{3}{16} \cdot \frac{pr^2}{D},$$

получим

$$D_0\left[\left(C_{11}-\frac{3}{16}\cdot\frac{pr_2^2}{D_0}\right)+\mu\left(C_{11}-\frac{pr_2^2}{16D_0}\right)\right]=$$

$$=D\left[\left(C_{12}-\frac{C_{22}}{r_2^2}-\frac{3}{16}\cdot\frac{pr_2^2}{D}\right)+\mu\left(C_{12}+\frac{C_{22}}{r_2^2}-\frac{pr_2^2}{16D}\right)\right],$$

откуда при заданном соотношении жесткостей $D_0=\frac{D}{2}$ и $\mu=0{,}3$ окончательно имеем

$$1{,}3C_{11}-2{,}6C_{12}+1{,}4\frac{C_{22}}{r_2^2}=0; \qquad (б)$$

4) при $r=r_3$ $\vartheta_{II}=0$, следовательно,

$$C_{12}r_3+\frac{C_{22}}{r_3}-\frac{pr_3^3}{16D}=0;$$

из этой зависимости, учитывая что $r_3=2r_2$, получим

$$C_{12}+\frac{C_{22}}{4r_2^2}=\frac{pr_2^2}{4D}. \qquad (в)$$

Решая уравнения (а)—(в), совместно находим значения постоянных интегрирования:

$$C_{11}=0{,}372\frac{pr_2^2}{D};$$

$$C_{12}=0{,}23\frac{pr_2^2}{D};$$

$$C_{22}=0{,}08\frac{pr_2^4}{D}.$$

Соотношения (5) позволяют написать теперь выражения для интенсивности изгибающих моментов:

для первого участка

$$M_{rI}=D_0\left(\vartheta_I'+\mu\frac{\vartheta_I}{r}\right)=\left(0{,}242r_2^2-0{,}206r^2\right)p;$$

$$M_{tI}=D_0\left(\frac{\vartheta_I}{r}+\mu\vartheta_I'\right)=\left(0{,}242r_2^2-0{,}119r^2\right)p;$$

для второго участка

$$M_{rII}=\left(0{,}298r_2^2-0{,}056\frac{r_2^4}{r^2}-0{,}206r^2\right)p;$$

$$M_{tII}=\left(0{,}298r_2^2+0{,}056\frac{r_2^4}{r^2}-0{,}119r^2\right)p.$$

Эпюры интенсивкости изгибающих моментов представлены на фиг. 46,*б*.

Заданное соотношение жесткостей участков $\left(D_0=\frac{D}{2}\right)$ пластины определяет зависимость между толщинами H и h ее ступеней:

$$H=\sqrt[3]{2}\,h \quad \text{или} \quad H^2=1{,}58h^2.$$

В связи с этим можно установить, что наиболее напряженной является толстая часть пластины у заделки на радиусе r_3:

$$\sigma_{r3} = \frac{6M_{r\,II}}{H^2} = \frac{6 \cdot 0{,}54 p r_2^2}{1{,}58 h^2} = 2{,}04 \frac{p r_2^2}{h^2};$$

$$\sigma_{t3} = \frac{6M_{t\,II}}{H^2} = \frac{6 \cdot 0{,}162 p r_2^2}{1{,}58 h^2} = 0{,}61 \frac{p r_2^2}{h^2}.$$

В центре пластины

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{6 \cdot 0{,}242 p r_2^2}{h^2} = 1{,}45 \frac{p r_2^2}{h^2}.$$

Для определения прогибов воспользуемся формулой (11).

Для тонкой части пластины (участок I)

$$w_I = C_{31} - \int \vartheta_I \, dr = C_{31} - \frac{C_{11} r^2}{2} + \frac{p r^4}{64 D_0}.$$

Для толстой части пластины (участок II)

$$w_{II} = C_{32} - \frac{C_{12} r^2}{2} - C_{22} \ln \frac{r}{r_3} + \frac{p r^4}{64 D}.$$

Постоянные интегрирования C_{31} и C_{32} определяются на основании следующих граничных условий.

При $r = r_3$ $w_{II} = 0$, откуда следует:

$$C_{32} = C_{12} \frac{r_3^2}{2} - \frac{p r_3^4}{64 D}$$

или после подстановки цифровых значений имеем

$$C_{32} = 0{,}21 \frac{p r_2^2}{D}.$$

При $r = r_2$ $w_I = w_{II}$, откуда следует

$$C_{31} - C_{11} \frac{r_2^2}{2} + \frac{p r_2^4}{64 D_0} = C_{32} - C_{12} \frac{r_2^2}{2} - C_{22} \ln \frac{r_2}{r_3} + \frac{p r_2^4}{64 D}.$$

После подстановки цифровых значений окончательно получим

$$C_{31} = 0{,}32 \frac{p r_2^4}{D}.$$

Наибольший прогиб пластины имеет место при $r=0$:

$$w_{max} = C_{31} = 0{,}32 \frac{p r_2^4}{D}.$$

Всего в процессе решения оказалось необходимым вычислить шесть постоянных интегрирования.

В. Расчет ступенчатых пластин методом начальных параметров

Расчет ступенчатых пластин по методу, изложенному в предыдущем разд. Б, связан с необходимостью вычисления значительного числа постоянных интегрирования. (Для каждой ступени подлежат определению три постоянные).

Как видно из приведенного выше примера, уже при двух участках решение становится весьма трудоемким.

Излагаемый в этом разделе метод позволяет в большинстве случаев выразить все расчетные величины при любом числе ступеней всего лишь через один неизвестный параметр.

За начальный параметр следует принимать:

1) для пластин без центрального отверстия — интенсивность моментов $M_{r1}=M_{t1}=M_1$ в ее центре, где угол поворота нормалей равен нулю ($\vartheta_1=0$);

2) для кольцевых пластин следует принимать или угол поворота ϑ_1 нормалей по внутренней кромке (на радиусе r_1), где интенсивность радиального момента известна ($M_{r1}=\pm m$), или интенсивность радиального момента M_{r1}, если внутренняя кромка заделана и $\vartheta_1=0$.

Выразим теперь через избранный начальный параметр постоянные A_1 и B_1, руководствуясь первым уравнением (22) и зависимостью (23).

Учитывая, что для первого (внутреннего) участка пластины $\Phi_1'(r_1)=0$ и $\Phi_1''(r_1)=0$, имеем

$$A_1=\frac{1}{2}\left[\frac{D_1(1-\mu^2)\vartheta_1}{r_1}+(1+\mu)M_{r1}\right] \tag{52}$$

и

$$B_1=\frac{r_1^2}{2}\left[\frac{D_1(1-\mu^2)\vartheta_1}{r_1}-(1-\mu)M_{r1}\right], \tag{53}$$

где ϑ_1 или M_{r1} являются начальными параметрами.

Для сплошной пластины постоянная B, пропорциональная постоянной интегрирования C_2 [см. формулу (21а)], равна нулю [см. разд. Д § 1].

Располагая значениями A_1 и B_1, можно по формулам (22) и (23) выразить через начальный параметр все расчетные величины для первой ступени и, в частности, определить угол поворота ϑ_2 и интенсивность радиального момента M_{r2} на внешнем радиусе r_2 этой ступени:

$$\vartheta_2=\frac{r_2}{D_1}\left[\frac{A_1}{1+\mu}+\frac{B_1}{r_2^2(1-\mu)}\right]-\Phi_1'(r_2); \tag{54}$$

$$M_{r2}=A_1-\frac{B_1}{r_2^2}-D_1\left[\Phi_1''(r_2)+\mu\frac{\Phi_1'(r_2)}{r_2}\right], \tag{55}$$

где функции $\Phi_1'(r)$ и $\Phi_1''(r)$ составлены с учетом внешних нагрузок, действующих на первую ступень.

Вторую, а затем и любую последующую i-ю ступень можно рассматривать отдельно как упруго защемленную по концам кольцевую пластину, шарнирно связанную с соседними кольцами (фиг. 47, *а*).

Расчетная схема для i-й изолированно рассматриваемой кольцевой пластины представлена на фиг. 47, *б*.

Постоянные интегрирования A_i и B_i для i-го участка должны удовлетворять краевым условиям на радиусе r_i.

В соответствии с формулами (52) и (53)

$$\left.\begin{aligned}A_i&=\frac{1}{2}\left[\frac{D_i(1-\mu^2)\vartheta_i}{r_i}+(1+\mu)M_{ri}\right];\\ B_i&=\frac{r_i^2}{2}\left[\frac{D_i(1-\mu^2)\vartheta_i}{r_i}-(1-\mu)M_{ri}\right].\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

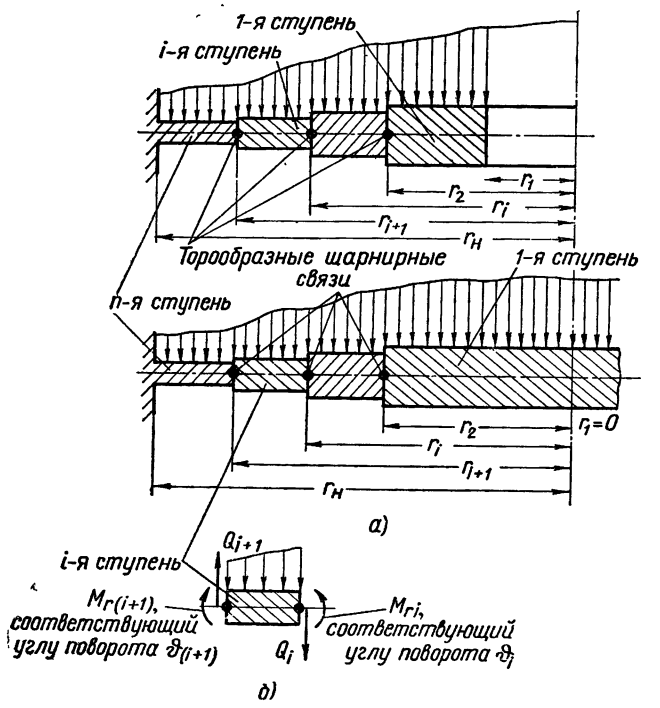
С помощью соотношений (56) можно выразить значения угла поворота ϑ_{i+1} и интенсивности изгибающего момента $M_{r,\,i+1}$ на внешнем радиусе r_{i+1} i-й кольцевой пластины.

В соответствии с формулами (54) и (55) имеем

$$\vartheta_{i+1} = \frac{r_{i+1}}{D_i}\left[\frac{A_i}{1+\mu} + \frac{B_i}{r_{i+1}^2(1-\mu)}\right] - \Phi_i'(r_{i+1}); \qquad (57)$$

$$M_{r,\,i+1} = A_i - \frac{B_i}{r_{i+1}^2} - D_i\left[\Phi_i''(r_{i+1}) + \mu\frac{\Phi_i'(r_{i+1})}{r_{i+1}}\right]. \qquad (58)$$

При составлении функций $\Phi_i'(r)$ и $\Phi_i''(r)$ помимо внешних нагрузок, непосредственно действующих на i-ю ступень, должна быть



Фиг. 47.

учтена поперечная сила Q_i на радиусе r_i, которая может быть определена из условий равновесия всех внутренних ступеней от первой до $(i-1)$-й включительно.

Заметим, что функция $\Psi(r) = D\left[\Phi''(r) + \frac{\mu\Phi'(r)}{r}\right]$ широко используется при графическом методе расчета пластин (см. § 4), в связи с чем для нее разработаны специальные формулы и вспомогательные графики (см. § 4).

Угол ϑ_{i+1} и интенсивность момента $M_{r,\,i+1}$ [см. формулы (57) и (58)] в свою очередь являются краевыми условиями для следующей $(i+1)$-й кольцевой пластины.

Таким образом, последовательно переходя от ступени к ступени, можно достигнуть наружной n-й кольцевой пластины (фиг. 47, *а*) и

по заданным краевым условиям на наружном радиусе $r_н$ (например $\vartheta_н = 0$ или $M_{rн} = \pm m$ *кгсм/см*) определить неизвестный начальный параметр (ϑ_1 или M_{r1})

Теперь величины A_i, B_i и M_{ri}, выраженные в процессе расчета через неизвестный параметр (ϑ_1 или M_{r1}), могут быть легко вычислены.

После этого по формулам (23) и (22) уже нетрудно определить угол поворота нормалей ϑ и интенсивность моментов M_r и M_t для любой ступени на произвольном текущем радиусе r, построить эпюры интенсивностей моментов, выявить опасное сечение и провести расчет пластины на прочность.

Для определения прогибов пластины воспользуемся зависимостью (20в).

1. Если пластина оперта по внутренней кромке (на радиусе r_1), то уравнение прогибов пластины следует записать в следующей форме:

$$w(r) = C_{31} + C_{11}\frac{r_1^2 - r^2}{2} + C_{21}\ln\frac{r_1}{r} + \Phi(r). \qquad (59)$$

В этом случае $\Phi(r_1) = 0$, и, следовательно, постоянная C_{31}, представляющая собой прогиб на внутреннем радиусе r_1, равна нулю.

Уравнение перемещений (20 в) для i-го участка ($r_i \leqslant r \leqslant r_{i+1}$) в этом случае примет вид

$$w(r) = w(r_i) + \frac{A_i}{2D_i(1+\mu)}(r_i^2 - r^2) + \frac{B_i}{D_i(1-\mu)}\ln\frac{r_i}{r} + \Phi(r) - \Phi(r_i), \qquad (60)$$

где A_i, B_i — постоянные для i-го участка, вычисленные ранее;

$w(r_i)$ — предварительно установленный прогиб на радиусе r_i.

2. Если пластина оперта по внешней кромке (на радиусе $r_н$), то зависимость (20 в) следует представить в следующем виде:

$$w(r) = C_{3н} + C_{1н}\frac{r_н^2 - r^2}{2} + C_{2н}\ln\frac{r_н}{r} + \Phi(r) - \Phi(r_н). \qquad (59а)$$

В этом случае $C_{3н} = w_н = 0$, и уравнение перемещений для i-го участка ($r_i \leqslant r \leqslant r_{i+1}$) будет

$$w(r) = w(r_{i+1}) + \frac{A_i}{2D_i(1+\mu)}(r_{i+1}^2 - r^2) + \frac{B_i}{D_i(1-\mu)}\ln\frac{r_{i+1}}{r} + \Phi(r) - \Phi(r_{i+1}), \qquad (60а)$$

где опять A_i и B_i — постоянные для i-й ступени, а $w(r_{i+1})$ прогиб пластины на радиусе r_{i+1} (см. фиг. 47, *а*).

3 Если пластина оперта по какому-либо контуру произвольного радиуса $r_к$ ($r_1 < r_к < r_н$), то часть пластины, лежащую вне круга радиуса $r_к$, следует рассчитывать как пластину, опертую по внутреннему контуру, а часть пластины, лежащую внутри окружности радиуса $r_к$, как пластину, опертую по внешней кромке.

Пример 1. В качестве примера обратимся еще раз к задаче, рассмотренной в предыдущем разделе (см фиг. 46).

Напомним, что $D = 2D_0$, где D_0 — жесткость внутренней (тонкой), а D — внешней (толстой) части пластины.

$$r_3 = 2r_2; \quad \mu = 0{,}3.$$

В центре пластины

$$r_1 = 0; \quad \vartheta_1 = 0.$$

Неизвестным начальным параметром является $M_{r1} = M_{t1} = M_1$.

Постоянные A_1 и B_1 для внутренней (первой) ступени вычисляются по формулам (52) и (53).

Раскрывая по правилу Лопиталя неопределенность в зависимости (52), получим $A_1 = M_1$. Для сплошной пластины $B_1 = 0$.

Угол поворота нормалей на радиус r_2 вычисляется по формулам (54) и (28):

$$\vartheta_2 = \frac{r_2}{D_0} \cdot \frac{M_1}{1+\mu} - \Phi'(r_2) = 0{,}77\,\frac{M_1 r_2}{D_0} - 0{,}0625\,\frac{pr_2^3}{D_0}.$$

Интенсивность радиального момента M_{r2} на радиусе r_2 по формулам (55), (28), и (29) равна

$$M_{r2} = M_1 - D_0\left[\Phi''(r_2) + \mu\frac{\Phi'(r_2)}{r_2}\right] = M_1 - 0{,}206pr_2^2.$$

Определим теперь постоянные для второго участка по формулам (56):

$$A_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{D(1-\mu^2)\vartheta_2}{r_2} + (1+\mu)M_{r2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{D(1-0{,}09)}{r_2}\left(0{,}77\,\frac{M_1 r_2}{D_0} - 0{,}0625\,\frac{pr_2^3}{D_0}\right) + \right.$$

$$\left. + (1+0{,}3)\left(M_1 - 0{,}206pr_2^2\right)\right],$$

откуда после преобразований получим

$$A_2 = 1{,}35M_1 - 0{,}191pr_2^2.$$

Аналогично

$$B_2 = \frac{r_2^2}{2}\left[\frac{D(1-\mu^2)\vartheta_2}{r_2} - (1-\mu)M_{r2}\right] = 0{,}35M_1 r_2^2 + 0{,}015pr_2^4.$$

Угол поворота нормалей на радиусе $r_3 = 2r_2$ второго участка ($i=2$) равен нулю, так как внешний контур пластины заделан. Тогда по формуле (57) с учетом зависимостей (28) и (34) имеем

$$\vartheta_3 = \frac{r_3}{D}\left[\frac{A_2}{1+\mu} + \frac{B_2}{(1-\mu)r_3^2}\right] - \Phi'(r_3) =$$

$$= \frac{r_3}{D}\left[\frac{1{,}35M_1 - 0{,}191pr_2^2}{1+0{,}3} + \frac{0{,}35M_1 r_2^2 + 0{,}015pr_2^4}{r_3^2(1-0{,}3)}\right] -$$

$$- K_1\left(\frac{r_3}{r_2}\right)\frac{pr_3^3}{16D} - L_1\left(\frac{r_3}{r_2}\right)\frac{Q_2 r_2 r_3}{4D} = 0,$$

где $Q_2 = \dfrac{p\pi r_2^2}{2\pi r_2} = \dfrac{pr_2}{2}$ — интенсивность поперечной силы в окружном сечении радиуса r_2.

Значения коэффициентов K_1 (2) и L_1 (2) можно установить по графикам, приведенным на фиг 28 и 32 соответственно.

После подстановки коэффициентов и преобразований получим значение неизвестного параметра.

$$M_1 = 0{,}242pr_2^2.$$

Теперь легко подсчитать величину постоянных:

$$A_1 = M_1 = 0{,}242pr_2^2;$$

$$B_1 = 0;$$

$$A_2 = 1{,}35M_1 - 0{,}191pr_2^2 = 0{,}135pr_2^2;$$

$$B_2 = 0{,}35M_1 r_2^2 + 0{,}015pr_2^4 \approx 0{,}1pr_2^4.$$

Располагая значениями постоянных и учитывая выражения для функций $\Phi'(r)$ и $\Phi''(r)$, составим уравнения для интенсивности изгибающих моментов M_r и M_t [см. формулы (22)].

Для первого участка

$$\Phi'(r) = \frac{pr^3}{16D_0} \text{ и } \Phi''(r) = \frac{3}{16} \cdot \frac{pr^3}{D_0},$$

тогда

$$M_r^{\text{I}} = A_1 - D_0\left[\Phi''(r) + \mu\frac{\Phi'(r)}{r}\right] = \left(0{,}242r_2^2 - 0.206r^2\right)p;$$

$$M_t^{\text{I}} = A_1 - D_0\left[\frac{\Phi'(r)}{r} + \mu\Phi''(r)\right] = \left(0.242r_2^2 - 0{,}119r^2\right)p.$$

Для второго участка в соответствии с формулами (28), (29), (34) и (36)

$$\Phi'(r) = K_1\left(\frac{r}{r_2}\right)\frac{pr^3}{16D} + L_1\left(\frac{r}{r_2}\right)\frac{pr_2^2 r}{8D};$$

$$\Phi''(r) = K_2\left(\frac{r}{r_2}\right)\frac{3pr^2}{16D} + L_2\left(\frac{r}{r_2}\right)\frac{pr_2^2}{8D}.$$

Тогда

$$M_r^{\text{II}} = A_2 - \frac{B_2}{r^2} - D\left[\Phi''(r) + \mu\frac{\Phi'(r)}{r}\right] = \left(0{,}298r_2^2 - 0{,}056\frac{r_2^4}{r^2} - 0{,}206r^2\right)p;$$

$$M_t^{\text{II}} = A_2 + \frac{B_2}{r^2} - D\left[\frac{\Phi'(r)}{r} + \mu\Phi''(r)\right] = \left(0{,}298r_2^2 + 0{,}056\frac{r_2^4}{r^2} - 0{,}119r^2\right)p.$$

Эти уравнения точно совпадают с аналогичными зависимостями, полученными в разд Б.

Как уже указывалось, при вычислении интенсивности изгибающих моментов целесообразно использовать приемы и вспомогательные графики, разработанные применительно к графическому методу расчета пластин (см. § 4).

Практически при использовании метода начальных параметров целесообразно вместо предварительного составления уравнений для интенсивностей изгибающих моментов непосредственно устанавливать величину последних в характерных сечениях.

При этом следует пользоваться графиками функций $K_1(\zeta)$; $K_2(\zeta)$; $L_1(\zeta)$ и $L_2(\zeta)$ [см. фиг. (28), (33) и (35)] или, что еще удобнее, коэффициентами и графиками, приведенными в § 4.

В рассматриваемом примере уравнения составлялись в полном их объеме лишь для иллюстрации метода и проверки решения (см. фиг. 46,*б*).

Обратимся теперь к определению прогибов.

В соответствии с формулой (60а) определим прогиб на радиусе $r_i = r_2$.

Учитывая, что на радиусе $r_{i+1} = r_3$ $w_3 = 0$, имеем

$$w(r_2) = \frac{A_2}{2D(1+\mu)}\left(r_3^2 - r_2^2\right) + \frac{B_2}{D(1+\mu)}\ln\frac{r_3}{r_2} + \Phi(r_2) - \Phi(r_3).$$

Для второй ступени ($r_2 \leqslant r \leqslant r_3$) [см. формулы (31) и (38)]

$$\Phi(r_2) = 0,$$

а

$$\Phi(r_3) = K\left(\frac{r_3}{r_2}\right)\frac{pr_3^4}{64D} + L\left(\frac{r_3}{r_2}\right)\frac{Q_2 r_2 r_3^2}{4D},$$

где интенсивность поперечной силы

$$Q_2 = \frac{pr_2}{2}.$$

По графику (см. фиг. 28)

$$K\left(\frac{r_3}{r_2}\right) = K(2) = 0{,}126.$$

По графику (см. фиг. 33)

$$L\left(\frac{r_3}{r_2}\right) = L(2) = 0{,}12,$$

откуда окончательно

$$w(r_2) = 0{,}164\,\frac{pr_2^4}{D}\ см.$$

Подсчитаем теперь прогиб в центре пластины при $r_1 = 0$.

Руководствуясь опять зависимостью (60а), получим

$$w(0) = w(r_2) + \frac{A_1}{2D_0(1+\mu)}\,r_2^2 + \Phi(r_1) - \Phi(r_2),$$

где

$$\Phi(r_1) = 0,$$

а

$$\Phi(r_2) = \frac{pr_2^4}{64D_0}$$

[см. формулу (31)].

Учитывая, что $D_0 = \frac{D}{2}$, окончательно имеем

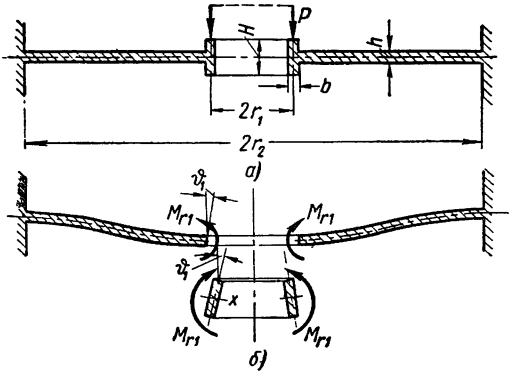
$$w(0) = 0{,}32\,\frac{pr_2^4}{D}$$

(см. пример в разд. Б).

Указанным приемом прогиб может быть подсчитан в любом месте пластины.

Пример 2. Опорная диафрагма подкреплена на внутреннем радиусе кольцом.

Рассчитать подкрепленную кольцевую пластину при условии, что воспринимаемая нагрузка P равномерно распределена по контуру кольца (фиг. 48,*а*).



Фиг. 48.

Отделим мысленно подкрепляющее кольцо от пластины (см. фиг. 48,*б*).

Можно принять, что угол поворота сечений кольца равен углу поворота ϑ_1 нормалей у пластины на радиусе r_1.

Выше (см. пример 3 разд. § 1, а также [20]) было получено соотношение между углом поворота сечений кольца и интенсивностью моментной нагрузки:

$$\vartheta_1 = \frac{M_{r1}r_1^2}{EJ_x}, \qquad (а)$$

где $J_x = \frac{bH^3}{12}$ — момент инерции поперечного сечения кольца относительно оси x (фиг. 48).

(Строго говоря, интенсивность моментной нагрузки равна

$$M_{r1} + \frac{P\frac{b}{2}}{2\pi\left(r_1 + \frac{b}{2}\right)},$$

однако, учитывая, что радиус r_1 значительно больше толщины кольца b, вторым слагаемым можно пренебречь.)

Примем за начальный параметр интенсивность моментной нагрузки M_{r1}, тогда по формулам (52) и (53), учитывая зависимость (а), можно выразить постоянные A и B для пластины через избранный начальный параметр M_{r1}:

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{D(1-\mu^2)\vartheta_1}{r_1} + (1+\mu)M_{r1}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{D(1-\mu)r_1}{EJ_x} + 1\right](1+\mu)M_{r1};$$
$$B = \frac{r_1^2}{2}\left[\frac{D(1-\mu^2)\vartheta_1}{r_1} - (1-\mu)M_{r1}\right] =$$
$$= \frac{r_1^2}{2}\left[\frac{D(1+\mu)r_1}{EJ_x} - 1\right](1-\mu)M_{r1}.$$

На контуре радиуса $r=r_2$, по которому пластина заделана, угол поворота нормалей равен нулю ($\vartheta_2=0$).

Используя формулу (54), имеем

$$\frac{M_{r1}r_2}{2D}\left\{\left[\frac{D(1-\mu)r_1}{EJ_x} + 1\right] + \frac{r_1^2}{r_2^2}\left[\frac{D(1+\mu)r_1}{EJ_x} - 1\right]\right\} - \Phi'(r_2) = 0,$$

откуда

$$M_{r1} = \frac{2D\Phi'(r_2)}{r_2\left\{\frac{Dr_1}{EJ_x}[(1-\mu) + k^2(1+\mu)] + (1-k^2)\right\}},$$

где

$$k = \frac{r_1}{r_2},$$

а

$$\Phi'(r_2) = L_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\frac{Pr_2}{8\pi D}.$$

Примем, например, что $k = \frac{1}{4}$ и $\mu = 0{,}3$, тогда (см. график на фиг. 33)

$$L_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = L_1(4) = 1{,}84.$$

В этом случае

$$M_{r1} = \frac{0{,}146P}{\frac{Dr_1}{EJ_x}\left[(1-0{,}3) + \frac{1+0{,}3}{16}\right] + \frac{15}{16}} = \frac{2{,}34P}{15 + 12{,}5\frac{Dr_1}{EJ_x}}.$$

Дальнейший расчет пластины может быть выполнен по готовым формулам (см. разд. Е § 1).

С помощью метода начальных параметров весьма просто можно решить и пример 3 разд. Ж § 1, где рассматривается расчет сплошной пластины с подкрепляющим ребром (см. фиг. 20).

Принимая за начальный параметр интенсивность изгибающего момента M_r в центре пластины, следует подсчитать M_{r1} и угол поворота нормалей $\vartheta_{1к}$ на радиусе $r_к = \kappa r_н$ с внутренней стороны ребра (см. фиг. 21).

Интенсивность момента M_{r2} на том же радиусе $r_к$ по внешнюю сторону ребра устанавливается из условия, что поперечные сечения подкрепляющего ребра тоже поворачиваются на угол $\vartheta_{1к}$ под действием моментной нагрузки интенсивностью $(M_{r2} - M_{r1})$ (см. пример 3 разд. Ж § 1), т. е. имеет место соотношение [см. формулу (18)]

$$(M_{r2} - M_{r1}) = \frac{FJ_x}{(kr_н)^2}\vartheta_{1к}.$$

Выражая теперь постоянные A_2 и B_2 на втором участке, а затем и угол поворота нормалей ϑ на радиусе $r_н$ заделанного контура пластины через начальный параметр M_r, можно определить его величину из условия, что при $r = r_н$ $\vartheta_{II} = 0$.

Как видно из рассмотренных примеров, метод начальных параметров в сочетании с использованием ранее введенных функций $\Phi(r)$ и их производных значительно упрощает технику расчета пластин ступенчатого профиля и осесимметрично подребренных пластин.

При очень большом числе ступеней, с чем, в частности, приходится сталкиваться при расчете пластин, имеющих профиль произвольного очертания, который приближенно заменяется ступенчатым, можно рекомендовать метод расчета, разработанный Н. Н. Малининым [15].

В этом случае ступенчатая пластина, по аналогии со ступенчатыми балками в методе Б. К. Жемочкина (см. гл. X т. I), заменяется пластиной постоянной толщины. К последней, помимо заданной нагрузки на контурах соответствующих ступеней прикладываются дополнительные специально подобранные по величине силы и моменты, которые совместно с заданной нагрузкой деформируют пластину постоянной толщины совершенно так же, как одни заданные силы деформируют ступенчатую пластину.

В этом случае, используя функции $\Phi(r)$ и их производные, можно по рекурентным формулам составить расчетные уравнения, включающие при любом количестве ступеней всего три постоянные, определяемые затем из граничных условий.

При расчете пластин с большим числом ступеней удобно использовать также графический способ, изложенный в следующем параграфе.

Г. Расчет пластин с непрерывно изменяющейся толщиной

Как уже указывалось, пластины с непрерывно изменяющейся толщиной при расчете обычно заменяются ступенчатыми пластинами со ступенями постоянной толщины, подбираемыми таких размеров, чтобы возможно лучше апроксимировать заданную пластину.

Однако в некоторых случаях более рационально ступени с плавно изменяющейся толщиной считать ограниченными какими-либо поверхностями, которые описываются простыми аналитическими зависимостями.

Расчленяя заданную пластину на трапециевидные, параболические, гиперболические и другие отсеки, иногда удается весьма удачно заменить заданную пластину ступенчатой с очень малым числом ступеней, что облегчает расчет.

Наибольшее упрощение достигается в том случае, когда профиль всей пластины может быть представлен одной такой ступенью криволинейного очертания.

Опираясь на гипотезы, сформулированные выше для пластин постоянной толщины, можно прийти к заключению, что и для пластин переменной толщины справедливы зависимости (5)—(8).

Однако дифференциальное уравнение задачи в рассматриваемом случае принимает несколько другой вид, поскольку при вычислении производной $(M_r r)'$, входящей в формулу (8), жесткость D пластины не является более постоянной, а зависит от радиуса r.

Учитывая сказанное и используя уравнения (5), из зависимости (8) получим для пластин с непрерывно изменяющейся толщиной следующее дифференциальное уравнение:

$$D\frac{d}{dr}\left(\frac{d\vartheta}{dr}+\frac{\vartheta}{r}\right)+\frac{dD}{dr}\left(\frac{d\vartheta}{dr}+\mu\frac{\vartheta}{r}\right)=-Q_r \qquad (61)$$

или

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{D}\cdot\frac{dD}{dr}\right)\frac{d\vartheta}{dr}+\left(\frac{\mu}{D}\cdot\frac{dD}{dr}-\frac{1}{r}\right)\frac{\vartheta}{r}=-\frac{Q}{D}. \qquad (61a)$$

[Дифференциальное уравнение (9), лежащее в основе расчета пластин постоянной толщины, является частным случаем зависимости (61а) и получается из последней, если в ней положить, что $\frac{dD}{dr}=0$].

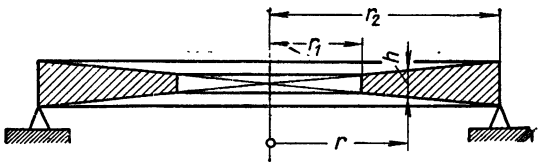
Дальнейший расчет пластины переменной толщины сводится к интегрированию дифференциального уравнения (61а) с целью получения зависимости угла поворота нормалей от радиуса:

$$\vartheta=\vartheta(r).$$

В остальном порядок решения задачи остается таким же, что и для пластин постоянной толщины.

Рассмотрим несколько характерных случаев.

Случай первый. Расчет пластины, толщина которой нарастает пропорционально радиусу, т. е. $h=cr$.



Фиг. 49.

Профиль радиального сечения пластины представлен на фиг. 49. Цилиндрическая жесткость пластины

$$D=\frac{Ec^3r^3}{12(1-\mu^2)},$$

откуда

$$\frac{dD}{dr}=\frac{Ec^3r^2}{4(1-\mu^2)}$$

и

$$\frac{1}{D}\cdot\frac{dD}{dr}=\frac{3}{r}.$$

В соответствии с формулой (61а) дифференциальное уравнение задачи принимает вид

$$r^3\frac{d^2\vartheta}{dr^2}+4r^2\frac{d\vartheta}{dr}-(1-3\mu)r\vartheta=-\frac{12Q(1-\mu^2)}{Ec^3}. \qquad (62)$$

Вводя в рассмотрение безразмерный радиус $\rho=\frac{r}{r_2}$, имеем

$$\rho^3\frac{d^2\vartheta}{d\rho^2}+4\rho^2\frac{d\vartheta}{d\rho}-(1-3\mu)\rho\vartheta=-\frac{12Q(1-\mu^2)}{Ec^3r_2}. \qquad (63)$$

Общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения:

$$\vartheta_0 = A\rho^{\frac{-3+\sqrt{9-4(3\mu-1)}}{2}} + B\rho^{\frac{-3-\sqrt{9-4(3\mu-1)}}{2}}. \qquad (64)$$

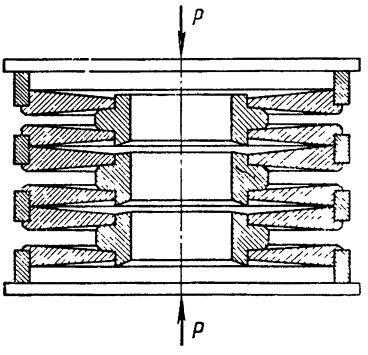
Частное решение $\vartheta_ч$ зависит от вида нагрузки и соответствующей ей функции интенсивности поперечной силы $Q=Q(r)$.

Полное выражение для угла поворота ϑ представляется суммой общего и частного решений, т. е. $\vartheta=\vartheta_0+\vartheta_ч$.

Постоянные интегрирования A и B определяются из граничных условий обычным способом.

По установленной, таким образом, функции $\vartheta=\vartheta(r)$ с помощью формул (5) вычисляются интенсивности изгибающих моментов, а по зависимости (11) находится уравнение прогибов.

Пример. Рассчитать дисковую пружину (фиг. 50), состоящую из нескольких соединенных последовательно кольцевых пластин (дисков), толщина которых меняется по линейному закону $h=cr$.



Фиг. 50

Такие пружины обладают рядом особенностей, благодаря которым их применение иногда является весьма рациональным.

Дисковые пружины занимают мало места по высоте. Их жесткость легко регулируется изменением количества дисков. Они дешевы в изготовлении, а их термообработка проще, чем у винтовых пружин сжатия, свитых из прутков большого диаметра.

Дисковые пружины в отличие от винтовых весьма устойчивы к восприятию боковых усилий. Разрушение одного диска не выводит из строя пружину в целом

В некоторых случаях функции пружины выполняет всего одна пластина (фиг. 51). При этом обеспечивается исключительная компактность конструкции.

Расчетная схема пружинного диска представлена на фиг. 52.

В рассматриваемом случае

$$Q=\frac{P}{2\pi r}.$$

Дифференциальное уравнение задачи в безразмерных координатах (63) принимает следующий вид:

$$\rho^4\frac{d^2\vartheta}{d\rho^2}+4\rho^3\frac{d\vartheta}{d\rho}-(1-3\mu)\rho^2\vartheta=-\frac{6P(1-\mu^2)}{\pi Ec^3r_2^2}, \qquad (63а)$$

где $\rho=\frac{r}{r_2}$.

Общее решение этого уравнения и подробное его исследование приведено в работе [28], (см. также [29], [35]).

Проведем решение задачи в несколько упрощенной постановке, положив коэффициент Пуассона $\mu=\frac{1}{3}$, тогда дифференциальное уравнение (63а) значительно упрощается и принимает вид

$$\rho^4\frac{d^2\vartheta}{d\rho^2}+4\rho^3\frac{d\vartheta}{d\rho}=\frac{16P}{3\pi Ec^3r_2^2}. \qquad (63б)$$

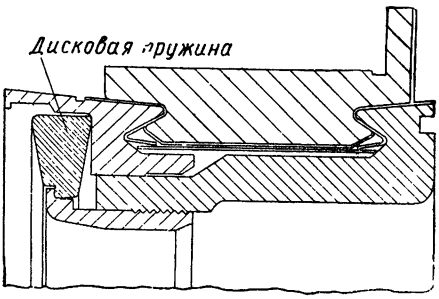
Суммируя общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\vartheta_0=A+\frac{B}{\rho^3}$$

и частное решение полного дифференциального уравнения (63б)

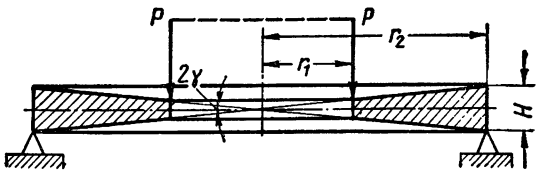
$$\vartheta_ч = \frac{8}{3} \cdot \frac{P}{\pi E c^3 r_2^2 \rho^2},$$

получим решение дифференциального уравнения (63б) в следующем виде:



Фиг. 51.

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_ч = A + \frac{B}{\rho^3} + \frac{8P}{3\pi E c^3 r_2^2 \rho^2}.$$



Фиг. 52.

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий:
при $r = r_1$

$$\rho = \frac{r_1}{r_2} = n, \text{а } M_r = 0;$$

при $r = r_2$

$$\rho = 1 \text{ и } M_r = 0.$$

Используя первую из зависимостей (5), имеем

$$A = \frac{40}{3} \cdot \frac{P}{\pi E c^3 r_2^2} \cdot \frac{1-n}{1-n^3};$$

$$B = -\frac{5}{3} \cdot \frac{P}{\pi E c^3 r_2^2} \cdot \frac{n(1-n^2)}{1-n^3},$$

тогда

$$\vartheta = -\frac{8P}{3\pi E c^3 r_2^2}\left[\frac{5(1-n^2)n}{8(1-n^3)\rho^3} - \frac{1}{\rho^2} - \frac{5(1-n)}{1-n^3}\right].$$

Уравнение прогибов получаем интегрированием функции $\vartheta = \vartheta(\rho)$ [см. формулу (11)]:

$$w(r) = C - \int \vartheta(r)dr = C - r_2 \int \vartheta(\rho)\,d\rho$$

или окончательно

$$w(r) = C - \frac{8P}{3\pi E c^3 r_2}\left[\frac{5(1-n)}{1-n^3}\rho - \frac{1}{\rho} + \frac{5}{16} \cdot \frac{n(1-n^2)}{(1-n^3)\rho^2}\right].$$

Постоянную интегрирования C определяем из того условия, что прогиб на наружном контуре (при $\rho = 1$) равен нулю, откуда

$$C = \frac{8P}{3\pi E c^3 r_2}\left[\frac{5(1-n)}{1-n^3} - 1 + \frac{5n(1-n^2)}{16(1-n^3)}\right],$$

тогда

$$w(r) = \frac{8P}{3\pi E c^3 r_2}\left[\frac{5(1-n)}{1-n^3}(1-\rho) - \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) + \frac{5}{16} \cdot \frac{n(1-n^2)}{1-n^3}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)\right].$$

Наибольший прогиб имеет место при $\rho = \frac{r_1}{r_2} = n$:

$$w_{\max} = \beta \frac{P r_2^2}{E H^3},$$

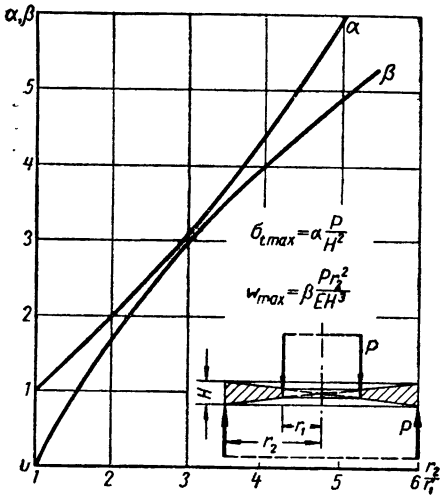
где

$$\beta = \frac{(1-n)^2(11+86n+11n^2)}{6\pi n(1-n^3)},$$

а $H = cr_2$ — наибольшая толщина диска.

Значения коэффициента β в зависимости от отношения $\frac{r_2}{r_1}$ представлены графиками на фиг. 53.

С помощью функции $\vartheta = \vartheta(r)$, можно по формулам (5) вычислить интенсивности изгибающих моментов M_r и M_t и исследовать напряженное состояние пластины:



Фиг. 53.

$$M_r = \frac{5P}{12\pi}\left[\frac{(1-n^2)n}{(1-n^3)\rho} - 1 + \frac{(1-n)\rho^2}{1-n^3}\right];$$

(при $\rho = 1$ и $\rho = n$ $M_r = 0$);

$$M_t = \frac{P}{4\pi}\left[\frac{5(1-n)\rho^2}{1-n^3} + \frac{1}{3}\right].$$

Наибольшие напряжения возникают в радиальном сечении у внутренней кромки при $\rho = n$, где

$$M_t = \frac{P}{12\pi}\left[\frac{15n^2(1-n)}{1-n^3} + 1\right];$$

$$\sigma_{t\,max} = \frac{6M_t}{(cr_1)^2} = \alpha\frac{P}{H^2}$$

и

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{15(1-n)}{1-n^3} + \frac{1}{n^2}\right].$$

Значения коэффициента α представлены графиком (см. фиг. 53) в зависимости от отношения $\frac{r_2}{r_1}$.

Таким же образом могут быть рассчитаны и другие пластины переменной толщины рассматриваемого класса ($h=cr$) при иных условиях закрепления и других видах нагрузки (табл. 7).

Во всех этих случаях наибольшие напряжения могут быть выражены формулами

$$\sigma_{t\,max} = \alpha\frac{P}{H^2} \quad \text{или} \quad \sigma_{t\,max} = \alpha\frac{pr_2^2}{H^2}.$$

Эти напряжения возникают, как правило, в радиальных сечениях, на внутреннем радиусе пластины, где ее толщина наименьшая.

Наибольший прогиб

$$w_{max} = \beta\frac{Pr_2^2}{EH^3} \quad \text{или} \quad w_{max} = \beta\frac{pr_2^4}{EH^3}.$$

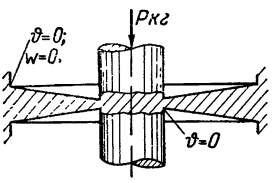
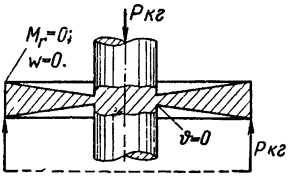
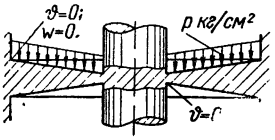
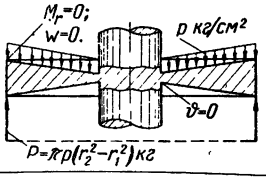
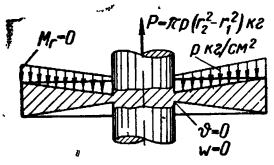
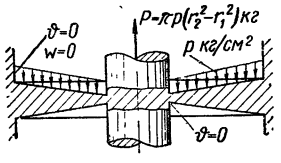
Значения коэффициентов α и β при $\mu = \frac{1}{3}$ для различных случаев закрепления и нагружения пластин исследуемого профиля приведены в зависимости от отношения $\frac{r_2}{r_1}$ в табл. 7 [28].

Случай второй. Расчет пластины (фиг. 54), толщина которой убывает от центра по линейному закону

$$h = h_{max}\left(1 - \frac{r}{a}\right),$$

Таблица 7

Значения коэффициентов α и β для различным образом закрепленных и нагруженных пластин переменной толщины при $h=cr^*$

		$\frac{r_2}{r_1}$					
		1,25	1,5	2	3	4	5
	α	0,159	0,396	1,091	3,306	6,549	10,78
	β	0,00174	0,0112	0,0606	0,261	0,546	0,876
	α	0,353	0,933	2,626	6,877	11,47	16,51
	β	0,00816	0,0583	0,3448	1,358	2,387	3,268
	α	0,0785	0,208	0,52	1,27	1,94	2,515
	β	0,00092	0,008	0,0495	0,193	0,346	0,482
	α	0,149	0,991	2,23	5,57	7,78	9,16
	β	0,00551	0,0564	0,412	1,673	2,786	3,573
	α	0,249	0,638	3,96	13,64	26,00	40,63
	β	0,00372	0,0453	0,401	2,119	4,245	6,283
	α	0,1275	0,5145	2,051	7,965	17,35	30,00
	β	0,00135	0,01145	0,0934	0,537	1,261	2,16

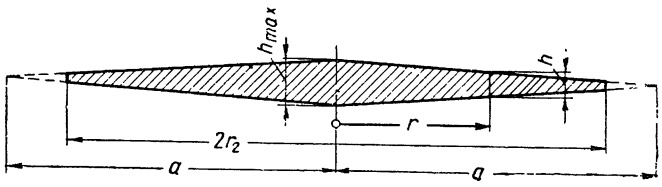
* h — толщина пластины, изменяющаяся по радиусу.

где h_{max} — толщина пластины в ее центре,

a — высота полного треугольника, определяющего профиль (фиг. 54).

Введем в рассмотрение безразмерный радиус $\rho = \frac{r}{a}$, тогда дифференциальное уравнение (61а) примет вид

$$\frac{d^2\vartheta}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{d\rho}\right)\frac{d\vartheta}{d\rho} + \left(\frac{\mu}{D} \cdot \frac{dD}{d\rho} - \frac{1}{\rho}\right)\frac{\vartheta}{\rho} = -\frac{Qa^2}{D}. \qquad (65)$$



Фиг. 54.

Учитывая, что $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ и $h = h_{max}(1-\rho)$, имеем

$$D = D_{max}(1-\rho)^3,$$

где

$$D_{max} = \frac{Eh_{max}^3}{12(1-\mu^2)}$$

и

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{d\rho} = -\frac{3}{1-\rho}.$$

Теперь зависимость (65) можно переписать в следующем виде:

$$\rho^2(1-\rho)^3\frac{d^2\vartheta}{d\rho^2} + \rho(1-4\rho)(1-\rho)^2\frac{d\vartheta}{d\rho} - [1-(1-3\mu)\rho](1-\rho)^2\vartheta = -\frac{Qa^2\rho^2}{D_{max}}. \qquad (65а)$$

Дальнейший расчет проведен в предположении, что $\mu = \frac{1}{3}$, что сильно упрощает все выкладки.

В этом случае дифференциальное уравнение задачи принимает вид

$$\rho^2(1-\rho)^3\frac{d^2\vartheta}{d\rho^2} + \rho(1-4\rho)(1-\rho)^2\frac{d\vartheta}{d\rho} - (1-\rho)^2\vartheta = -\frac{Qa^2\rho^2}{D_{max}}. \qquad (65б)$$

Общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения:

$$\vartheta_0 = A\left(\frac{1+2\rho}{\rho}\right) + B\left[\frac{3\rho-2\rho^2}{(1-\rho)^2}\right].$$

В качестве примера рассчитаем кольцевую пластину рассматриваемого класса, заделанную по внутреннему контуру радиуса r_1 и нагруженную постоянным давлением [30].

Расчетная схема представлена на фиг. 55,*а*.
Для рассматриваемого случая

$$Q = -\frac{\pi p}{2\pi r}\left(r_2^2 - r^2\right) = -\frac{pa}{2}\cdot\left(\frac{\rho_2^2}{\rho} - \rho\right).$$

Частное решение дифференциального уравнения имеет вид

$$\vartheta_u = -\frac{pa^3}{2D_{\max}}\left[\frac{4\rho^3 + 15\rho^2 - 6\rho - 6}{36\rho(1-\rho)^2} - \frac{\rho_2^2(2\rho^3 + \rho - 1)}{6\rho(1-\rho)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{(2\rho+1)\left(1+\rho_2^2\right)}{6\rho}\ln(1-\rho) - \frac{(3-2\rho)\rho\rho_2^2}{6(1-\rho)^2}\ln\rho\right].$$

Полное решение выражается суммой общего решения однородного уравнения и частного решения заданного уравнения. Следовательно,

$$\vartheta = A\left[\frac{1+2\rho}{\rho}\right] + B\left[\frac{3\rho - 2\rho^2}{(1-\rho)^2}\right] - \frac{pa^3}{2D_{\max}}\left[\frac{4\rho^3 + 15\rho^2 - 6\rho - 6}{36\rho(1-\rho)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\rho_2^2(2\rho^3 + \rho - 1)}{6\rho(1-\rho)^2} - \frac{(2\rho+1)\left(1+\rho_2^2\right)}{6\rho}\ln(1-\rho) - \frac{(3-2\rho)\rho\rho_2^2}{6(1-\rho)^2}\ln\rho\right].$$

Постоянные интегрирования определяются, как обычно, из граничных условий.

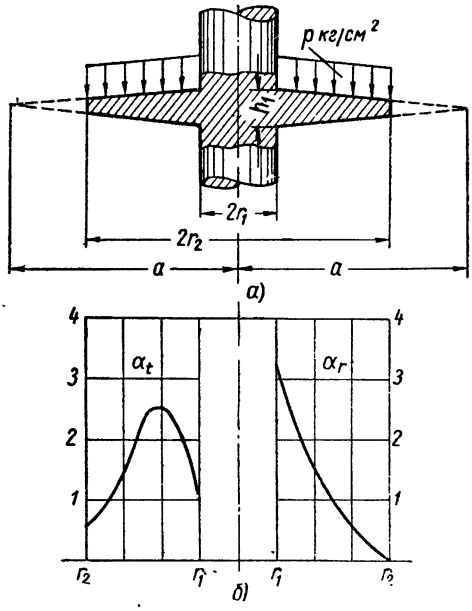
В рассматриваемом случае при $\rho = \rho_1$ $\vartheta = 0$; при $\rho = \rho_2$ $M_r = 0$ или, учитывая, что $\mu = \frac{1}{3}$,

$$\frac{d\vartheta}{d\rho} + \frac{1}{3}\frac{\vartheta}{\rho} = 0.$$

Примем для примера, что $\rho_2 = \frac{2}{3}$ $\left(\text{т. е. } r_2 = \frac{2}{3}a\right)$ и $\rho_1 = \frac{1}{6}$ $\left(\text{т. е. } r_1 = \frac{1}{6}a,\ \frac{r_2}{r_1} = 4\right)$, тогда

$$A = -0{,}040144\frac{pa^3}{D_{\max}};$$

$$B = 0{,}000474\frac{pa^3}{D_{\max}}.$$



Фиг. 55.

С помощью функции $\vartheta = \vartheta(\rho)$ можно по зависимостям (5) определить интенсивности моментов M_r и M_t, а затем вычислить напряжения σ_r и σ_t по формулам

$$\sigma_r = \alpha_r\frac{pr_2^2}{h_1^2}; \qquad \sigma_t = \alpha_t\frac{pr_2^2}{h_1^2},$$

где h_1 — толщина пластины на радиусе r_1.

Зависимость коэффициентов α_r и α_t от радиуса представлена графиками на фиг. 55,*б*.

Наибольшим является радиальное напряжение в заделке.

Уравнение прогибов $w = w(r)$ может быть получено по формуле (11).

Постоянная интегрирования C определится из условия, что при $\rho=\rho_1$ $w=0$.
Наибольший прогиб имеет место при $\rho=\rho_2$.
Рассмотрим еще один пример расчета.
Для пластины, представленной на фиг. 56,

$$Q=-\frac{P}{2\pi a\rho}.$$

Дифференциальное уравнение задачи в предположении, что $\mu=\frac{1}{3}$, имеет вид

$$\rho^2(1-\rho^3)\frac{d^2\vartheta}{d\rho^2}+\rho(1-4\rho)(1-\rho)^2\frac{d\vartheta}{d\rho}-(1-\rho)^2\vartheta=\frac{Pa\rho}{2\pi D_{\max}}. \qquad (65в)$$

Полное решение дифференциального уравнения будет [30]

$$\vartheta=A\left(\frac{2\rho+1}{\rho}\right)+B\left[\frac{3\rho-2\rho^2}{(1-\rho)^2}\right]+\frac{Pa}{2\pi D_{\max}}\left[\frac{2\rho^2+\rho-1}{6\rho(1-\rho)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\rho+1}{6\rho}\ln(1-\rho)+\frac{3\rho-2\rho^2}{6(1-\rho)^2}\ln\rho\right].$$

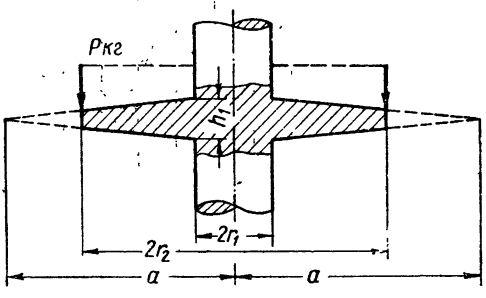
По-прежнему, принимая, что $\rho_2=\frac{2}{3}$ и $\rho_1=\frac{1}{6}$, получим

$$A=0{,}0329\frac{Pa}{D_{\max}};$$
$$B=-0{,}0249\frac{Pa}{D_{\max}}.$$

В рассматриваемом случае опять наибольшим напряжением будет радиальное напряжение в заделке (при $\rho=\rho_1$):

$$\sigma_{r\,\max}=1{,}717\frac{P}{h_1^2}.$$

Рассмотренные примеры дают достаточное представление о методике расчета пластин с непрерывно изменяющейся толщиной.



Фиг. 56.

В книге [24] приведен расчет круглых пластин, толщина которых изменяется по закону

$$h=h_0e^{\beta\rho^2},$$

где β — некоторая постоянная величина, подбираемая таким образом, чтобы действительный закон изменения толщины пластины был отражен избранным уравнением возможно более точно.

В работе [29] дается расчет кольцевых пластин переменной жесткости, у которых

$$D=D_0r^m,$$

где D_0 и m — некоторые постоянные величины.

(См., в частности, случай первый, разобранный в этом параграфе).

§ 4. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

А. Обоснование графического метода расчета

Из изложенного выше видно, что при расчете пластин, нагруженных сложным образом, и особенно при расчете пластин переменной толщины объем необходимых алгебраических выкладок сильно возрастает, а их выполнение требует от инженера значительных расчетных навыков и длительной напряженной работы.

В этих случаях для облегчения расчетной практики можно рекомендовать графический метод решения задачи, который значительно проще и нагляднее аналитического способа расчета круглых пластин.

Он может быть с одинаковым успехом применен для расчета пластин как постоянной, так и переменной толщины при нагрузках любой сложности.

Основной задачей при расчете круглых пластин на прочность является определение интенсивностей изгибающих моментов M_r и M_t.

В соответствии с формулами (22) для пластин постоянной толщины интенсивности изгибающих моментов можно выразить следующими зависимостями:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= A - \frac{B}{r^2} - \Psi(r); \\ M_t &= A + \frac{B}{r^2} - \Theta(r). \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Положительным значением изгибающих моментов соответствует растяжение материала пластины в точках, у которых координаты z положительны.

Напомним, что при горизонтальном расположении пластины за положительное направление оси z выше всюду принималось направление от срединной плоскости сверху вниз (см. фиг. 2, 3 и др.).

Нагрузочные функции $\Psi(r)$ и $\Theta(r)$ определяются следующими формулами [см. формулы (22)]:

$$\left.\begin{aligned} \Psi(r) &= D\left[\Phi''(r) + \mu\frac{\Phi'(r)}{r}\right]; \\ \Theta(r) &= D\left[\frac{\Phi'(r)}{r} + \mu\Phi''(r)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Из соотношений (67) видно, что нагрузочные функции зависят от характера нагрузки, а также от коэффициента Пуассона материала пластины.

(От жесткости пластины эти функции не зависят, поскольку $\Phi'(r)$ и $\Phi''(r)$ содержат в знаменателе жесткость D, которая и сократится со множителем D, стоящим перед квадратными скобками.)

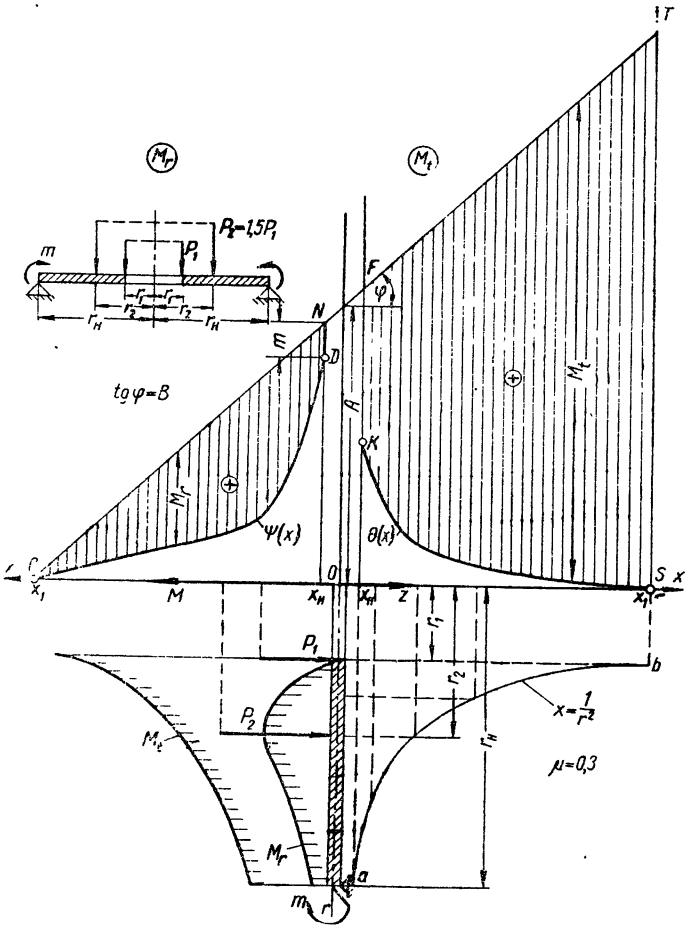
У функции $\Phi(r)$ и ее производных, а поэтому и у нагрузочных функций $\Psi(r)$ и $\Theta(r)$ нет разрывов в значениях, несмотря на возможные разрывы у функции нагрузки. Это обеспечивает одинаковость значений постоянных A и B для всех участков пластины постоянной толщины.

Для кольцевых пластин величина постоянных A и B может быть определена исходя из краевых условий на внутреннем и внешнем радиусах пластины.

Для пластин, не имеющих центрального отверстия, постоянная $B=0$, а постоянная A определяется из краевого условия на внешнем радиусе пластины.

Переходим к графическому определению моментов M_r и M_t.

Этот вопрос рассмотрим на примере расчета кольцевой пластины, нагруженной силами P_1 и P_2, равномерно распределенными по окружностям радиусов r_1 и r_2 соответственно и моментами интенсивностью m *кгсм/см*, приложенными по внешней кромке (фиг. 57).



Фиг. 57.

Прежде всего для заданной нагрузки строим графики нагрузочных функций Ψ (кривая CD) и Θ (кривая SK) [см. формулы (67)], каждый в отдельной системе координат, откладывая по оси абсцисс вместо радиуса r значения $x=\frac{1}{r^2}>0$. (Более подробно подсчет значений функций Ψ и Θ освещен ниже, в разд. Б.)

Построенные графики функций $\Psi(x)$ и $\Theta(x)$ располагаем друг относительно друга так, чтобы оси ординат избранных координатных систем и их начала были совмещены, а оси абсцисс x направлены в противоположные стороны (фиг. 57).

При построении функций $\Psi(x)$ и $\Theta(x)$ удобно воспользоваться вспомогательной кривой ab (фиг. 57), представляющей зависимость $x=\frac{1}{r^2}$.

Для получения эпюр M_r и M_t необходимо [см. формулу (66)] дополнительно учесть:

для момента M_r слагаемые

$$A-\frac{B}{r^2}=A-Bx; \tag{68}$$

для момента M_t слагаемые

$$A+\frac{B}{r^2}=A+Bx. \tag{69}$$

В избранных сопряженных системах координат уравнения (68) и (69) представляются одной прямой, отсекающей на оси ординат отрезок A и имеющей угловой коэффициент, равный B [$\operatorname{tg}\varphi=B$ (см. фиг. 57)]. Эту прямую при условии, что она построена с учетом краевых условий задачи, в дальнейшем будем называть замыкающей.

Перечислим краевые условия, встречающиеся при решении практических задач.

а) Для свободно опертой кольцевой пластины моменты M_r на внутреннем радиусе r_1 и внешнем радиусе r_2 должны быть равны интенсивности $\pm m$ *кгсм/см* внешних изгибающих моментов, приложенных на указанных радиусах, или равны нулю, если эти внешние пары отсутствуют.

На фиг. 57 замыкающая прямая CN проведена с учетом того, что на внутренней кромке изгибающий момент $M_r=0$ (точка C), а на внешней кромке $M_r=+m$ *кгсм/см* (точка N).

б) Для пластины без центрального отверстия $B=0$ и замыкающая прямая должна располагаться горизонтально так, чтобы граничные условия на ее внешнем радиусе были соблюдены.

В частности, для свободно опертой сплошной пластины на внешнем радиусе момент M_r должен равняться интенсивности внешней моментной нагрузки $\pm m$ *кгсм/см* или нулю, если такая моментная нагрузка на внешней кромке пластины отсутствует. (На фиг. 58 замыкающая прямая NF построена для сплошной пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой и моментами интенсивностью $-m$ *кгсм/см*, приложенными по внешней кромке).

в) Если пластина защемлена по какому-либо контуру (внешнему или внутреннему), то в заделке изгибающие моменты M и M_t связаны соотношением

$$M_t=\mu M_r. \tag{70}$$

Эта зависимость вытекает из формулы (6) при условии, что угол ϑ в заделке равен нулю.

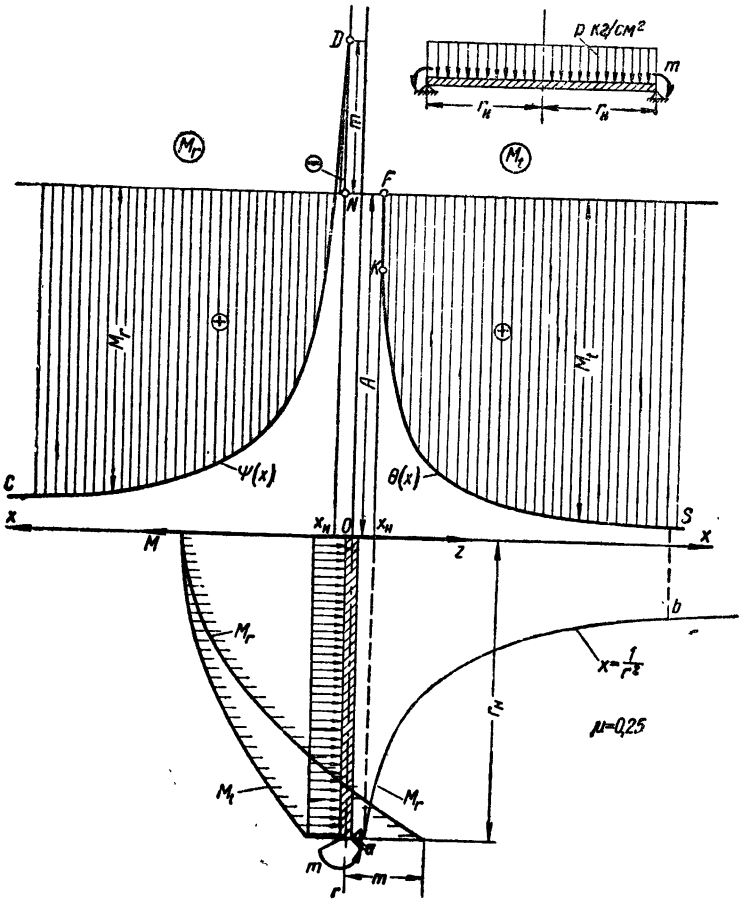
Если пластина подкреплена на внешней либо внутренней кромке радиуса $r_{кр}$ кольцом жесткости, то в этом случае на подкрепленной кромке имеет место упругое защемление и угол поворота нормалей $\vartheta_{кр}\neq 0$ связан с интенсивностью моментов $M_{rк}$ и $M_{tк}$ соотношением (6)

$$\vartheta_{кр}=\frac{12r_{кр}}{Eh^3}(M_{tк}-\mu M_{rк}).$$

Учитывая, что, с другой стороны (см. пример 2 разд. В § 3),

$$|\vartheta_{кр}| = \left| \frac{M_{rк} r_{кр}^2}{EJ_x} \right|,$$

где EJ_x — жесткость подкрепляющего кольца (см. фиг. 48, *а*), можно установить необходимую зависимость между $M_{rк}$ и $M_{tк}$.



Фиг. 58.

Способ построения замыкающей прямой во всех этих случаях будет показан ниже на примерах.

Отрезки, параллельные оси ординат и заключенные между замыкающей прямой и графиками функций $\Psi(x)$ и $\Theta(x)$, определяют значения моментов M_r и M_t (фиг. 57 и 58).

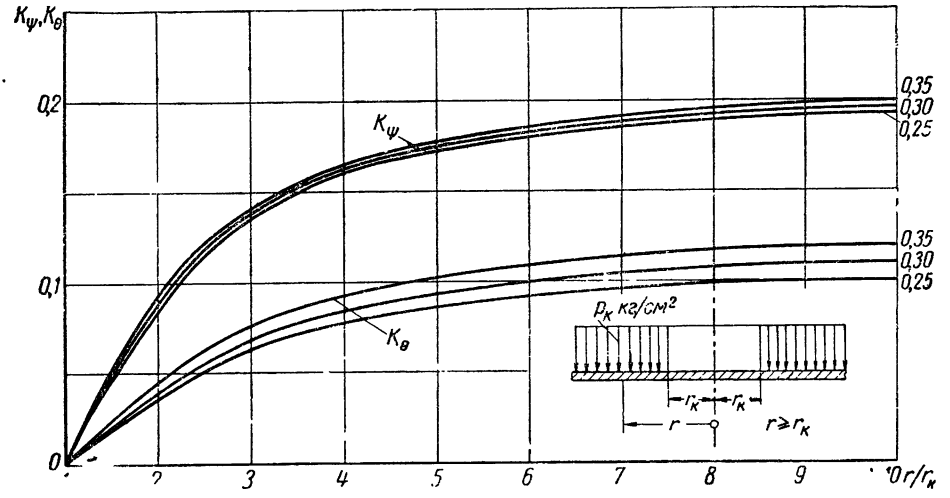
Графически полученные эпюры моментов (на фиг. 57 и 58 они заштрихованы) построены по переменной $x = \frac{1}{r^2}$.

Эти эпюры можно перестроить, отнеся полученные значения моментов к радиусу r, для чего удобно воспользоваться вспомогательной кривой ab (фиг. 57 или 58).

Окончательные эпюры изгибающих моментов, построенные по радиусу r, представлены в нижней части фиг. 57 и 58 и отштрихованы.

Б. Формулы для нагрузочных функций $\Psi(r)$ и $\Theta(r)$

Используя выведенные выше (см. § 2) формулы, выражающие функцию $\Phi(r)$ и ее производные при различных видах нагрузки, приведем зависимости, определяющие функции $\Psi(r)$ и $\Theta(r)$ для типовых частных случаев.



Фиг. 59.

1. Нагрузка, равномерно распределенная по пластине вне круга радиуса $r_к$ (фиг. 59). Если давление равно $p_к$, то при $r \leqslant r_к$

$$\Psi(r) = 0;$$
$$\Theta(r) = 0.$$

При $r \geqslant r_к$

$$\left.\begin{aligned} \Psi(r) &= p_к r^2 K_\Psi\left(\frac{r}{r_к}\right); \\ \Theta(r) &= p_к r^2 K_\Theta\left(\frac{r}{r_к}\right), \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

где

$$\left.\begin{aligned} K_\Psi\left(\frac{r}{r_к}\right) &= \frac{1}{16}\left\{\left(1-\frac{r_к^2}{r^2}\right)\left[\mu\left(1+\frac{r_к^2}{r^2}\right)+\left(3-\frac{r_к^2}{r^2}\right)\right]- \right. \\ &\left. -4(1+\mu)\frac{r_к^2}{r^2}\ln\frac{r}{r_к}\right\}; \\ K_\Theta\left(\frac{r}{r_к}\right) &= \frac{1}{16}\left\{\left(1-\frac{r_к^2}{r^2}\right)\left[\left(1+\frac{r_к^2}{r^2}\right)+\mu\left(3-\frac{r_к^2}{r^2}\right)\right]- \right. \\ &\left. -4(1+\mu)\frac{r_к^2}{r^2}\ln\frac{r}{r_к}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Функции $K_\Psi\left(\frac{r}{r_к}\right)$ и $K_\Theta\left(\frac{r}{r_к}\right)$ представлены графиками на фиг. 59 в зависимости от отношения $\frac{r}{r_к}$, при коэффициенте Пуассона $\mu = 0{,}25$, $\mu = 0{,}30$ и $\mu = 0{,}35$.

В частном случае при $r_к = 0$ (т. е. для сплошной пластины, загруженной постоянным давлением)

$$\left.\begin{aligned} \Psi(r) &= \frac{pr^2}{16}(3+\mu); \\ \Theta(r) &= \frac{pr^2}{16}(1+3\mu). \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Если по поверхности пластины нагрузка распределена произвольным образом (см. фиг. 31), то последнюю всегда можно приближенно заменить ступенчатой нагрузкой.

В этом случае с помощью зависимости (71) легко вывести формулы, выражающие функции $\Psi(r)$ и $\Theta(r)$ для любого участка. При этом следует применять способ, используемый для написания универсального уравнения упругой линии балок. Тогда в соответствии с формулами (33) для i-го участка имеем

$$\left.\begin{aligned} \Psi(r) &= \sum_{к=1}^{к=i}(p_к - p_{к-1})\, r^2 K_\Psi\left(\frac{r}{r_к}\right); \\ \Theta(r) &= \sum_{к=1}^{к=i}(p_к - p_{к-1})\, r^2 K_\Theta\left(\frac{r}{r_к}\right). \end{aligned}\right\} \tag{71a}$$

Для случая, представленного например, на фиг. 31, функции $\Psi(r)$ и $\Theta(r)$ записываются следующим образом:

$$\Psi(r) = p_1 r^2 K_\Psi\left(\frac{r}{r_1}\right)_{\text{I}} + (p_2 - p_1) r^2 K_\Psi\left(\frac{r}{r_2}\right)_{\text{II}} + (p_3 - p_2) r^2 K_\Psi\left(\frac{r}{r_3}\right)_{\text{III}} - p_3 r^2 K_\Psi\left(\frac{r}{r_4}\right)_{\text{IV}};$$

$$\Theta(r) = p_1 r^2 K_\Theta\left(\frac{r}{r_1}\right)_{\text{I}} + (p_2 - p_1) r^2 K_\Theta\left(\frac{r}{r_2}\right)_{\text{II}} + (p_3 - p_2) r^2 K_\Theta\left(\frac{r}{r_3}\right)_{\text{III}} - p_3 r^2 K_\Theta\left(\frac{r}{r_4}\right)_{\text{IV}}.$$

В последних зависимостях римскими цифрами указаны участки пластины (см. фиг. 31), к которым относятся все слагаемые слева от соответствующей черты.

2. **Нагрузка силами.** Если приложенная сила $P_к$ *кг* равномерно распределена по окружности радиуса $r_к$ (фиг. 60), то:

при $r \leqslant r_к$

$$\Psi(r) = 0;$$
$$\Theta(r) = 0;$$

при $r \geqslant r_к$

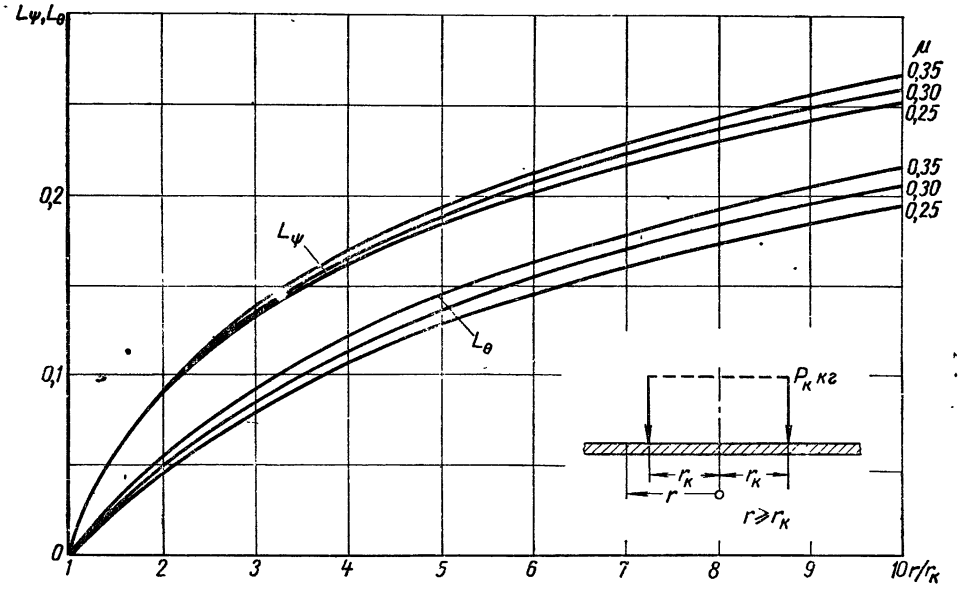
$$\left.\begin{aligned} \Psi(r) &= P_к L_\Psi\left(\frac{r}{r_к}\right); \\ \Theta(r) &= P_к L_\Theta\left(\frac{r}{r_к}\right), \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

где

$$L_\Psi\left(\frac{r}{r_к}\right)=\frac{1}{8\pi}\left[2(1+\mu)\ln\frac{r}{r_к}+(1-\mu)\left(1-\frac{r_к^2}{r^2}\right)\right];$$

и

$$L_\Theta\left(\frac{r}{r_к}\right)=\frac{1}{8\pi}\left[2(1+\mu)\ln\frac{r}{r_к}-(1-\mu)\left(1-\frac{r_к^2}{r^2}\right)\right]. \qquad (75)$$



Фиг. 60.

Функции $L_\Psi\left(\frac{r}{r_к}\right)$ и $L_\Theta\left(\frac{r}{r_к}\right)$ при коэффициенте Пуассона $\mu=0{,}25$, $\mu=0{,}3$ и $\mu=0{,}35$ представлены графиками на фиг. 60 в зависимости от отношения $\frac{r}{r_к}$.

Если пластина не имеет отверстия и сила приложена в ее центре (фиг. 61), то (см. § 2) для исключения центра как особой точки при составлении функции $\Phi(r)$ интегрирование проводится в пределах от наружного радиуса пластины $r_н$ до текущего радиуса r.

Таким способом в § 2 для функции $\Phi(r)$ и ее производных были получены зависимости (38б), (34б) и (36б).

Нагрузочные функции при наличии центральной силы P_1 выражаются следующими зависимостями:

$$\Psi(r)=P_1 L_\Psi^\circ\left(\frac{r_н}{r}\right);$$

и

$$\Theta(r)=P_1 L_\Theta^\circ\left(\frac{r_н}{r}\right). \qquad (76)$$

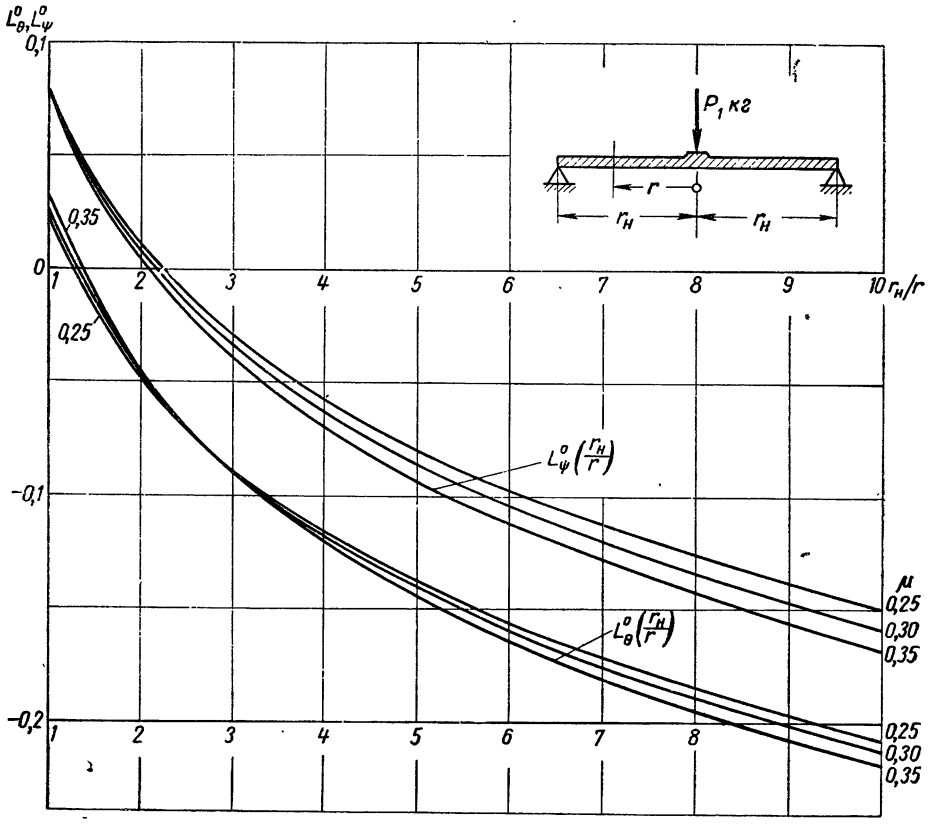
где

$$L_{\Psi}^{\circ}\left(\frac{r_н}{r}\right)=\frac{1}{4\pi}\left[1-(1+\mu)\ln\frac{r_н}{r}\right],$$

а

$$L_{\Theta}^{\circ}\left(\frac{r_н}{r}\right)=\frac{1}{4\pi}\left[\mu-(1+\mu)\ln\frac{r_н}{r}\right], \qquad (77)$$

что следует из формул (35а) и (37а).



Фиг. 61.

Для определения значений функций $L_{\Psi}^{\circ}\left(\frac{r_н}{r}\right)$ и $L_{\Theta}^{\circ}\left(\frac{r_н}{r}\right)$ удобно воспользоваться графиками, приведенными на фиг. 61. При этом следует иметь в виду, что взамен отношений $\frac{r}{r_к}$ по оси абсцисс на фиг. 61 отложены отношения $\frac{r_н}{r}$.

При нагружении пластины не только силой, приложенной в ее центре, но одновременно и силами, равномерно распределенными по соосным круговым контурам (см. фиг. 36), для i-го участка в соответствии с формулами (40) имеем

$$\left.\begin{aligned}\Psi(r) &= P_1 L^{\circ}_{\Psi}\left(\frac{r_н}{r}\right) + \sum_{к=2}^{к=i} P_к L_{\Psi}\left(\frac{r}{r_к}\right);\\ \Theta(r) &= P_1 L^{\circ}_{\Theta}\left(\frac{r_н}{r}\right) + \sum_{к=2}^{к=i} P_к L_{\Theta}\left(\frac{r}{r_к}\right).\end{aligned}\right\} \quad (78)$$

Так, для примера, представленного на фиг. 36,

$$\Psi(r) = P_1 L^{\circ}_{\Psi}\left(\frac{r_н}{r}\right)_{\text{I}} + P_2 L_{\Psi}\left(\frac{r}{r_2}\right)_{\text{II}} + P_3 L_{\Psi}\left(\frac{r}{r_3}\right)_{\text{III}} + P_4 L_{\Psi}\left(\frac{r}{r_4}\right)_{\text{IV}};$$

$$\Theta(r) = P_1 L^{\circ}_{\Theta}\left(\frac{r_н}{r}\right)_{\text{I}} + P_2 L_{\Theta}\left(\frac{r}{r_2}\right)_{\text{II}} + P_3 L_{\Theta}\left(\frac{r}{r_3}\right)_{\text{III}} + P_4 L_{\Theta}\left(\frac{r}{r_4}\right)_{\text{IV}},$$

где римскими цифрами указаны участки пластины (см. фиг. 36), к которым относятся все слагаемые, стоящие слева от соответствующей черты.

3. **Нагрузка моментами.** Если моментная нагрузка интенсивностью $m_к$ *кгсм/см* распределена равномерно по окружности радиуса $r_к$ (см. фиг. 37), то при $r < r_к$

$$\Psi(r) = 0; \quad \Theta(r) = 0,$$

а при $r > r_к$

$$\left.\begin{aligned}\Psi(r) &= m_к N_{\Psi}\left(\frac{r}{r_к}\right);\\ \Theta(r) &= m_к N_{\Theta}\left(\frac{r}{r_к}\right),\end{aligned}\right\} \quad (79)$$

где

$$\left.\begin{aligned}N_{\Psi}\left(\frac{r}{r_к}\right) &= \frac{1+\mu}{2} + \frac{1-\mu}{2}\left(\frac{r_к}{r}\right)^2;\\ N_{\Theta}\left(\frac{r}{r_к}\right) &= \frac{1+\mu}{2} - \frac{1-\mu}{2}\left(\frac{r_к}{r}\right)^2.\end{aligned}\right\} \quad (80)$$

Ниже будет показано (см. пример 6), что при графическом расчете пластин в рассматриваемом случае для построения нагрузочных функций вспомогательные графики не требуются.

В. Примеры расчета круглых пластин графическим способом

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Кольцевая пластина ($r_н = 4r_1$) (фиг. 62) оперта по внешнему периметру и нагружена равномерно распределенным давлением p *кг/см*^{2}. Коэффициент Пуассона материала $\mu = 0.3$.

В этом случае по формулам (71), учитывая, что $x = \frac{1}{r^2}$, имеем

$$\Psi(x) = \frac{p}{x} K_{\Psi}\left(\frac{r}{r_1}\right);$$

$$\Theta(x) = \frac{p}{x} K_{\Theta}\left(\frac{r}{r_1}\right).$$

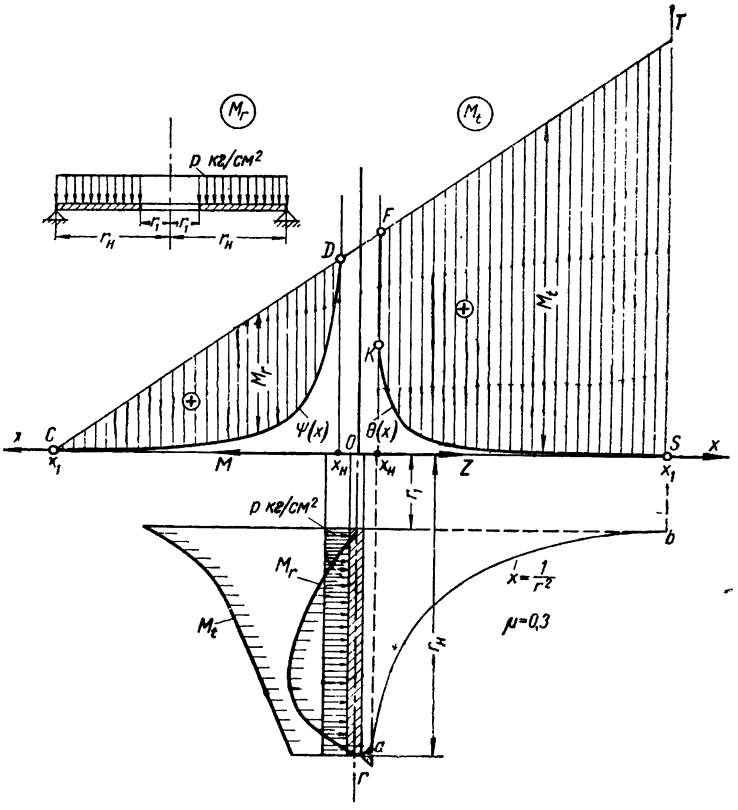
С помощью графиков (см. фиг. 59) для функций $K_{\Psi}\left(\frac{r}{r_1}\right)$ и $K_{\Theta}\left(\frac{r}{r_1}\right)$ строим (фиг. 62) в некотором масштабе нагрузочные функции $\Psi(x)$ и $\Theta(x)$ (кривые CD и SK на фиг. 62).

В данном случае замыкающая прямая должна проходить через точки C и D, так как по условию на наружном радиусе $r_н$ и внутреннем радиусе r_1 кольцевой пластины $M_r = 0$.

Эпюры M_r и M_t заштрихованы.

Значение интенсивности момента M_t на наружном радиусе $r_н$ представляется в масштабе отрезком KF, на внутреннем радиусе r_1—отрезком ST.

С помощью вспомогательной кривой ab, представляющей функцию $x = \frac{1}{r^2}$, эпюры интенсивности моментов M_r и M_t перестроены в некотором новом масштабе по радиусу пластины на сжатых ее слоях.



Фиг. 62.

Пример 2. Сплошная пластина (фиг 63) нагружена равномерным давлением p *кг/см*² по кольцевому участку $r_2 \div r_3$ и сосредоточенной силой P_1 *кг*, приложенной в ее центре.

Пластина оперта по внешнему контуру ($\mu = 0{,}25$).

Мысленно продолжаем заданную равномерно распределенную нагрузку до радиуса $r_н$ и, в целях компенсации добавочно приложенной на участке $r_3 \div r_н$ нагрузки, прикладываем на этом участке противодавление p (фиг. 63), тогда

$$\Psi(x) = P_1 L^{\circ}_{\Psi}\left(\frac{r_н}{r}\right)_{\text{I}} + \frac{p}{x} K_{\Psi}\left(\frac{r}{r_2}\right)_{\text{II}} - \frac{p}{x} K_{\Psi}\left(\frac{r}{r_3}\right)_{\text{III}};$$

$$\Theta(x) = P_1 L^{\circ}_{\Theta}\left(\frac{r_н}{r}\right)_{\text{I}} + \frac{p}{x} K_{\Theta}\left(\frac{r}{r_2}\right)_{\text{II}} - \frac{p}{x} K_{\Theta}\left(\frac{r}{r_3}\right)_{\text{III}}.$$

Используя значения функций

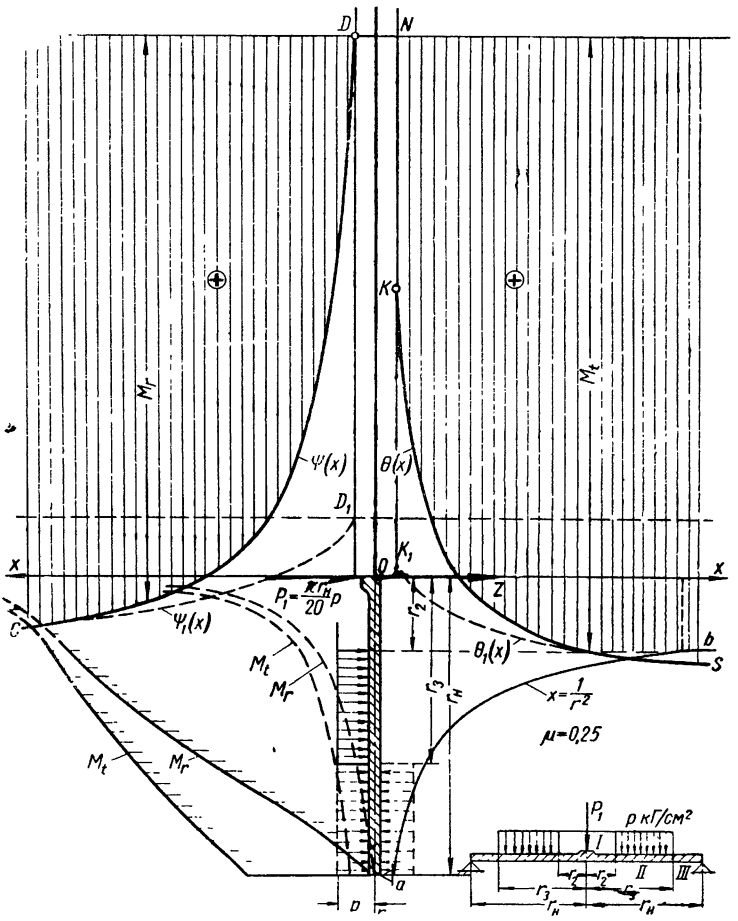
$$L^{\circ}_{\Psi}\left(\frac{r_н}{r}\right),\ L^{\circ}_{\Theta}\left(\frac{r_н}{r}\right) \text{ и } K_{\Psi}\left(\frac{r}{r_к}\right),\ K_{\Theta}\left(\frac{r}{r_к}\right),$$

представленных графиками на фиг. 61 и 59, строим (фиг. 63) нагрузочные функции $\Psi(x)$ и $\Theta(x)$ (кривые CD и SK) в избранном масштабе.

В рассматриваемом случае замыкающая прямая должна быть параллельна оси абсцисс и должна проходить через точку D, так как на внешнем радиусе пластины $M_r=0$.

Эпюры M_r и M_t заштрихованы.

С помощью вспомогательной кривой $ab\left(x=\frac{1}{r^2}\right)$ эпюры M_r и M_t перестроены в некотором новом масштабе в функции от радиуса (фиг. 63).



Фиг. 63.

Эпюры построены на сжатых слоях пластины.

Линии CD_1 и SK_1 (пунктир на фиг. 63) представляют нагрузочные функции $\Psi_1(x)$ и $\Theta_1(x)$, соответствующие одной сосредоточенной центральной силе P_1.

Эпюры интенсивности изгибающих моментов для этого случая построены по радиусу пластины также пунктиром.

Пример 3. Кольцевая пластина $r_н=4r_1$ (фиг. 64), защемленная по наружному контуру, нагружена постоянным давлением $p\ кг\ с\ м^2$ ($\mu=0{,}3$).

В этом случае функции $\Psi(x)$ и $\Theta(x)$ аналитически выражаются так же, как и в примере 1 (см. фиг. 62).

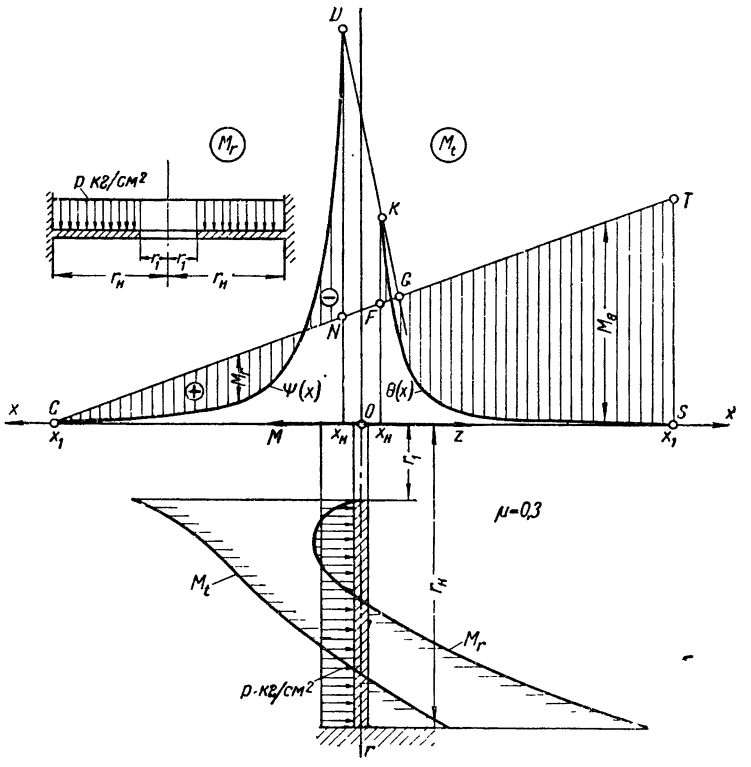
В избранных нами сопряженных системах координат эти функции изображаются в некотором масштабе $\alpha\ кг/мм$ кривыми CD и SK, имеющими тот же вид, что и на фиг. 62.

Замыкающая прямая должна проходить через точку C, так как на внутренней кромке на радиусе r_1 момент $M_r=0$.

В заделке на наружном радиусе $r_н=4r_1$ должно соблюдаться условие (70). Чтобы удовлетворить этому условию, соединяем точки D и K.

Отрезок (DK) делим внешним образом в отношении μ. Для этого откладываем на продолжении прямой DK от точки K отрезок KG, длина которого определяется из отношения

$$\frac{KG}{DG}=\mu.$$



Фиг. 64.

При построении следует иметь в виду, что

$$KG=\frac{\mu(DK)}{1-\mu}.$$

Замыкающая прямая должна проходить через точку G (прямая CG), так как в этом случае

$$\frac{KF}{DN}=\frac{KG}{DG}=\mu.$$

При этом на наружном радиусе $r_н$

$$M_r=(\overline{DN}_{мм})\ (\alpha\ кг/мм);$$

$$M_t=(\overline{KF}_{мм})\ (\alpha\ кг\cdot мм).$$

Легко убедиться в том, что условие (70) удовлетворяется.

Эпюры M_r и M_t заштрихованы; в нижней части фиг. 64 они перестроены по радиусу пластины.

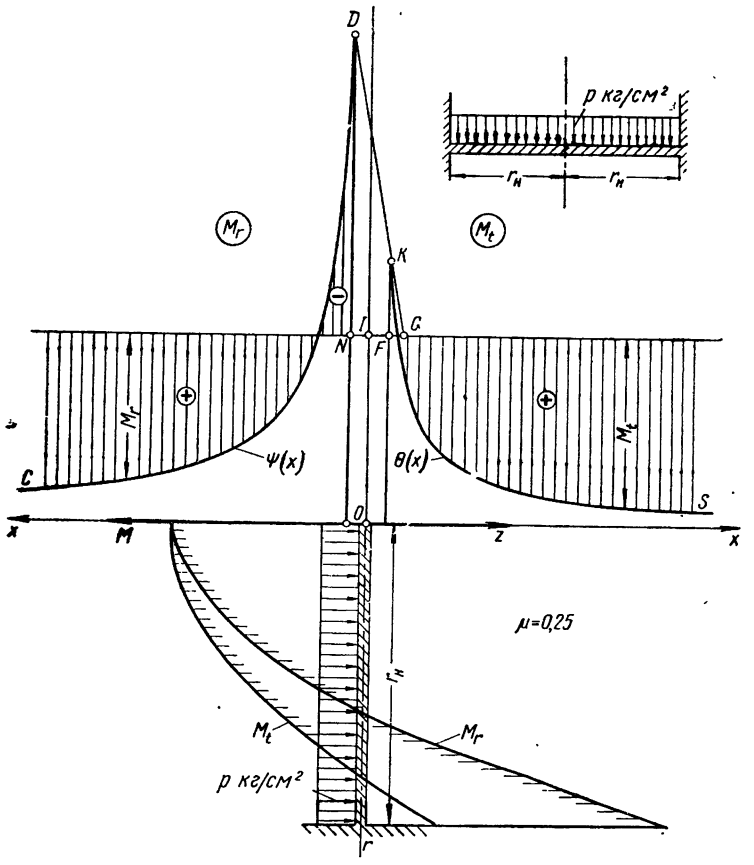
Пример 4. Пластина без центрального отверстия (фиг. 65), загруженная постоянным давлением p кг/см², защемлена по внешнему контуру ($\mu=0{,}25$).

В рассматриваемом случае в соответствии с формулами (73)

$$\Psi(x) = \frac{3+\mu}{16} \cdot \frac{p}{x} = 0{,}203 \frac{p}{x};$$

$$\Theta(x) = \frac{1+3\mu}{16} \cdot \frac{p}{x} = 0{,}109 \frac{p}{x}.$$

Функции $\Psi(x)$ и $\Theta(x)$ построены на фиг. 65 в некотором масштабе.



Фиг. 65.

Замыкающая в рассматриваемом случае должна быть горизонтальной. Она должна также проходить через точку G, которая делит отрезок (DK) внешним образом в отношении μ.

Эпюры интенсивности моментов M_r и M_t, построенные на фиг. 65 по переменной x, заштрихованы.

Эти эпюры в некотором новом масштабе построены также и по радиусу r. Моменты в центре пластины определяются отрезком $\overline{OI}$, т. е. при $r=0$

$$M_r = M_t = (\overline{OI}_{мм}) \ (\alpha \ кг/мм).$$

Пример 5. Кольцевая пластина (фиг. 66) защемлена по внутренней кромке радиуса r_1 и нагружена равномерно распределенным давлением $p кг/см^2$.

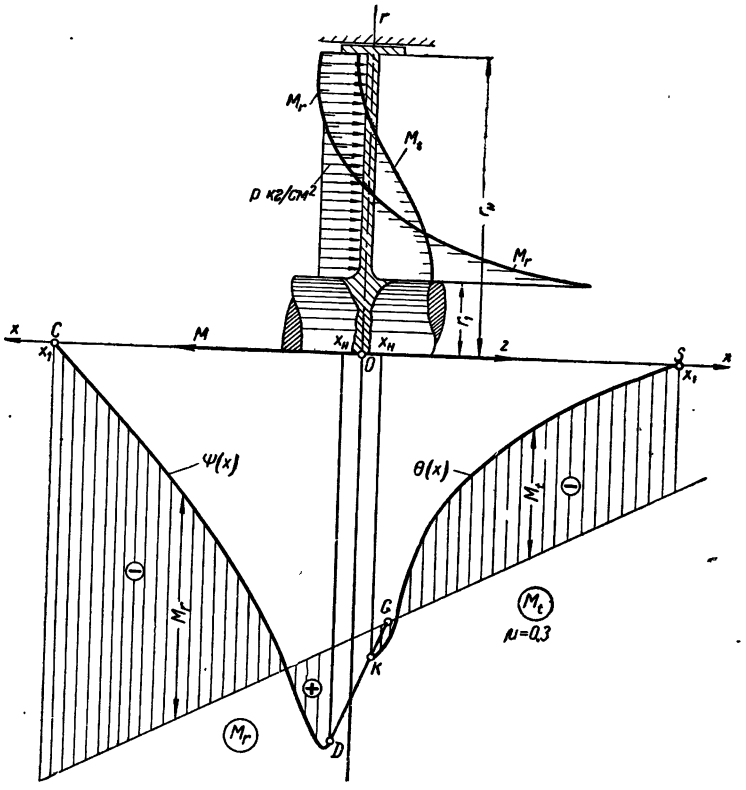
На наружной кромке радиуса $r_н = 4r_1$ запрещены только угловые перемещения (скользящая заделка) ($\mu=0{,}3$).

В этом случае

$$\Psi(x) = -\left(\pi r_н^2 - \pi r_1^2\right) pL_\Psi\left(\frac{r}{r_1}\right) + \frac{p}{x} K_\Psi\left(\frac{r}{r_1}\right);$$

$$\Theta(x) = -\left(\pi r_н^2 - \pi r_1^2\right) pL_\Theta\left(\frac{r}{r_1}\right) + \frac{p}{x} K_\Theta\left(\frac{r}{r_1}\right).$$

Функции $\Psi(x)$ и $\Theta(x)$ в некотором масштабе α *кг/мм* представлены на фиг. 66 кривыми CD и SK. Замыкающая проходит через точку G и точку N, не показан-



Фиг. 66.

ную на фиг. 66. Точка G делит внешним образом отрезок прямой DK в отношении μ, а точка N лежит на оси x, идущей вправо, и делит внешним образом в отношении μ отрезок CS $\left[SN = \frac{\mu(CS)}{1-\mu}\right]$.

Эпюры M_r и M_t заштрихованы.

В верхней части фиг. 66 эти эпюры построены в некотором новом масштабе по радиусу r.

Пример 6. Кольцевая пластина (фиг. 67) защемлена по внутренней кромке радиуса r_1 и по внешней кромке радиуса $r_н = 4r_1$.

По окружности радиуса $r_2 = 2r_1$ пластина нагружена моментной нагрузкой интенсивности m ($\mu = 0{,}3$).

В этом случае [см. формулы (79) и (80)]:

при $r < r_2$

$$\Psi(x) = 0; \quad \Theta(x) = 0;$$

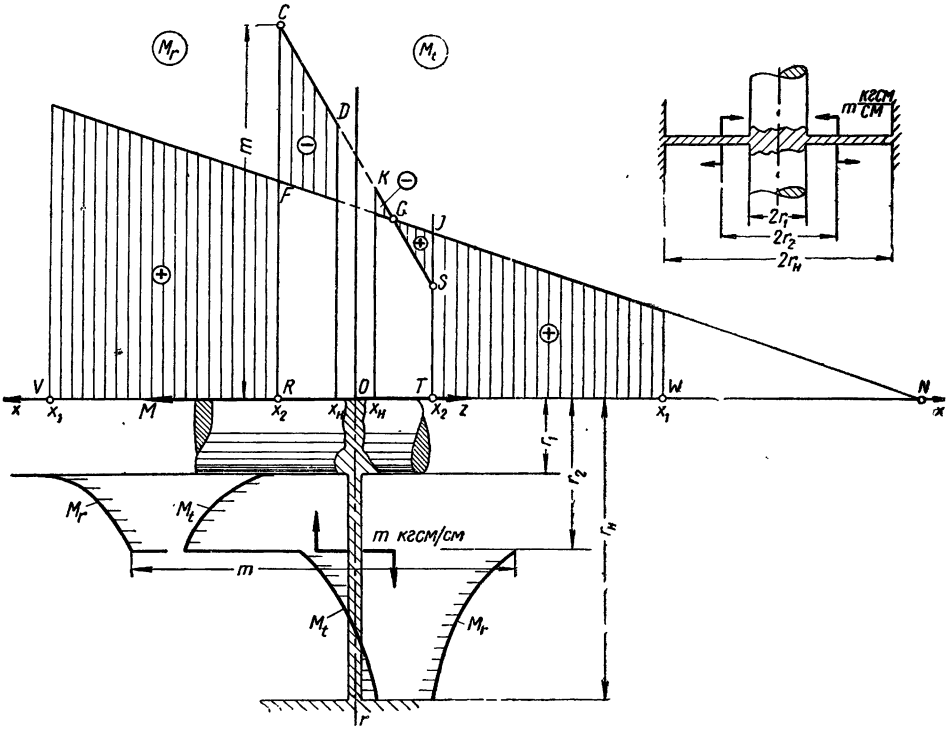
при $r > r_2$

$$\Psi(x) = m\left[0{,}65 + 0{,}35\,\frac{x}{x_2}\right];$$

$$\Theta(x) = m\left[0{,}65 - 0{,}35\,\frac{x}{x_2}\right],$$

где $x_2 = \frac{1}{r_2^2}$.

В рассматриваемой задаче нагрузочные функции $\Psi(x)$ и $\Theta(x)$ на участке $x_2 \geqslant x \geqslant x_н$ представляются графически одной общей прямой $CDKS$ (фиг. 67) и не



Фиг. 67.

требуют для своего построения каких-либо вспомогательных таблиц. (При наличии каких-либо других нагрузок нагрузочные функции последних должны пристраиваться к упомянутой прямой.)

Замыкающая прямая проходит через точки G и N, которые построены с учетом того, что пластина по ее граничным контурам заделана.

Точка G делит внешним образом отрезок прямой $(\overline{DK})$ в отношении μ.

Точка N лежит на оси x, идущей вправо, и делит отрезок $(\overline{VW})$ тоже внешним образом в отношении μ $\left[\frac{(\overline{NW})}{(\overline{NV})} = \mu\right]$.

Эпюры M_r и M_t заштрихованы.

В нижней части фиг. 67 эти эпюры построены в некотором масштабе по радиусу r.

На радиусе r_2 должно соблюдаться условие неразрывности деформаций, выражаемое зависимостью [см. формулу (6)]

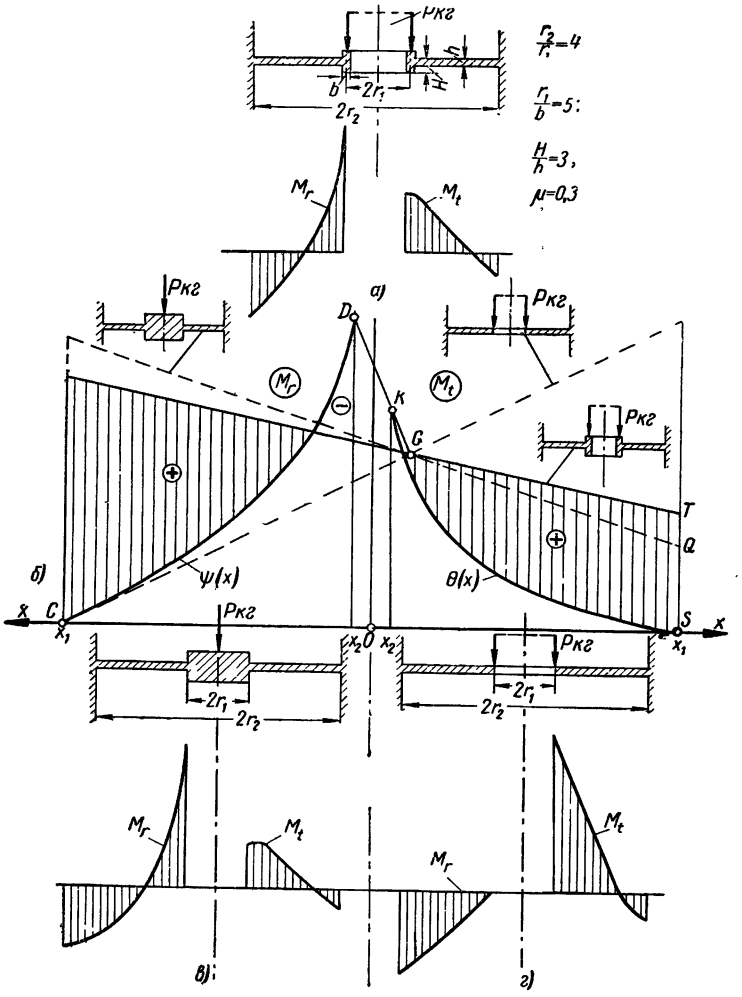
$$(\overline{TJ} - \mu\overline{RF}) = (\overline{SJ} + \mu\overline{FC}).$$

Это уравнение может быть использовано для проверки точности построений.

Заметим также, что из условия равновесия элемента пластины на радиусе r_2 отрезок $\overline{RC}$ равен в соответствующем масштабе интенсивности моментов m.

Пример 7. Рассчитать кольцевую пластину ($\frac{r_2}{r_1}=4$), защемленную по внешнему контуру и подкрепленную на внутренней кромке ребром.

Пластина нагружена силой P *кг*, равномерно распределенной по внутренней кромке.



Фиг. 68.

Соотношения размеров ребра и пластины проведены на фиг. 68,*а*. Коэффициент Пуассона $\mu=0{,}3$.

Нагрузочные функции в рассматриваемом случае выражаются зависимостями [см. формулы (74) и графики фиг. 60]

$$\Psi(x)=PL_{\Psi}\left(\frac{r}{r_1}\right);$$

$$\Theta(x)=PL_{\Theta}\left(\frac{r}{r_1}\right).$$

Они представлены кривыми CD и SK соответственно (фиг. 68,*б*).

Замыкающая прямая должна быть проведена с учетом контурных условий.

На внешней кромке при $x = x_2$ должно соблюдаться граничное условие (70), поскольку эта кромка жестко заделана.

Для выполнения этого условия соединяем точки D и K и делим отрезок $\overline{DK}$ внешним образом в отношении μ.

Построенная таким образом точка G принадлежит замыкающей.

Внутренняя кромка при $x=x_1$ в связи с наличием подкрепляющего ребра защемлена упруго.

Из условия неразрывности деформации пластины и подкрепляющего кольца на радиусе r_1 следует [см. формулу (6) и пример 2 в разд. В § 3], что

$$\vartheta = \frac{12r_1}{Eh^3}(M_{t1} - \mu M_{r1}) = \frac{M_{r1}r_1^2}{EJ_x},$$

где J_x — момент инерции подкрепляющего кольца относительно срединной плоскости пластины.

Из составленного уравнения легко установить, что между интенсивностями моментов M_{t1} и M_{r1} должна соблюдаться зависимость

$$M_{t1} = \eta M_{r1},$$

где

$$\eta = \mu + \frac{r_1}{b} \cdot \frac{h^3}{H^3};$$

здесь H — высота подкрепляющего ребра;
b — его ширина (фиг. 68, *а*);
h — толщина пластины.

Если разделить отрезок абсциссы CS (фиг. 68,*б*) внешним образом в отношении η, то построенная таким путем на правой оси x точка N (на фиг. 68 она не показана) является второй точкой, определяющей замыкающую прямую; соединив ее с точкой G, получим замыкающую прямую GTN, которая определяет величину интенсивности изгибающих моментов.

Полученные в результате эпюры M_r и M_t на фиг. 68,*б* заштрихованы.

На фиг. 68,*а* эпюры M_r и M_t построены также по радиусу пластины.

На этом практически можно считать расчет пластины завершенным.

Заметим, что графический метод позволяет одновременно оценить влияние на прочность пластины степени жесткости защемления ее кромок.

Так, например, проводя замыкающую через точки C и G (см. на фиг. 68,*б* пунктирную прямую), можно получить эпюру интенсивности моментов для кольцевой пластины, нагруженной силой P *кг* на внутренней кромке, не имеющей какого-либо подкрепления и защемленной по внешней кромке (фиг. 68,*г*).

Если замыкающую (см. на фиг. 68,*б* штриховую линию GQ) провести через точку G и точку N_1, лежащую на оси x, идущую вправо и делящую отрезок CS внешним образом в отношении μ (точка N_1 на фиг. 68 не показана), то замыкающая GQN_1 определит интенсивность моментов для кольцевой пластины, защемленной по внешней и по внутренней кромкам, как это показано на фиг. 68,*в*.

Возможность такого рода исследований и их простота делают для инженерной практики графический способ расчета пластин особенно ценным.

Пример 8. Рассчитать сплошную пластину, нагруженную постоянным давлением $p=4$ *кг/см*^{2} и подкрепленную концентрическим ребром на радиусе $r_к = 0{,}5r_н$ (фиг. 69,*а*).

Наружный радиус $r_н = 20$ *см*; толщина пластины $h=1$ *см*; ширина ребра $b=1$ *см*; высота ребра $H=3h=3$ *см*; коэффициент Пуассона материала пластины $\mu=0{,}3$.

Нагрузочные функции выражаются в соответствии с формулами (73) зависимостями

$$\Psi(x) = 0{,}206\frac{p}{x};$$

$$\Theta(x) = 0{,}119\frac{p}{x}.$$

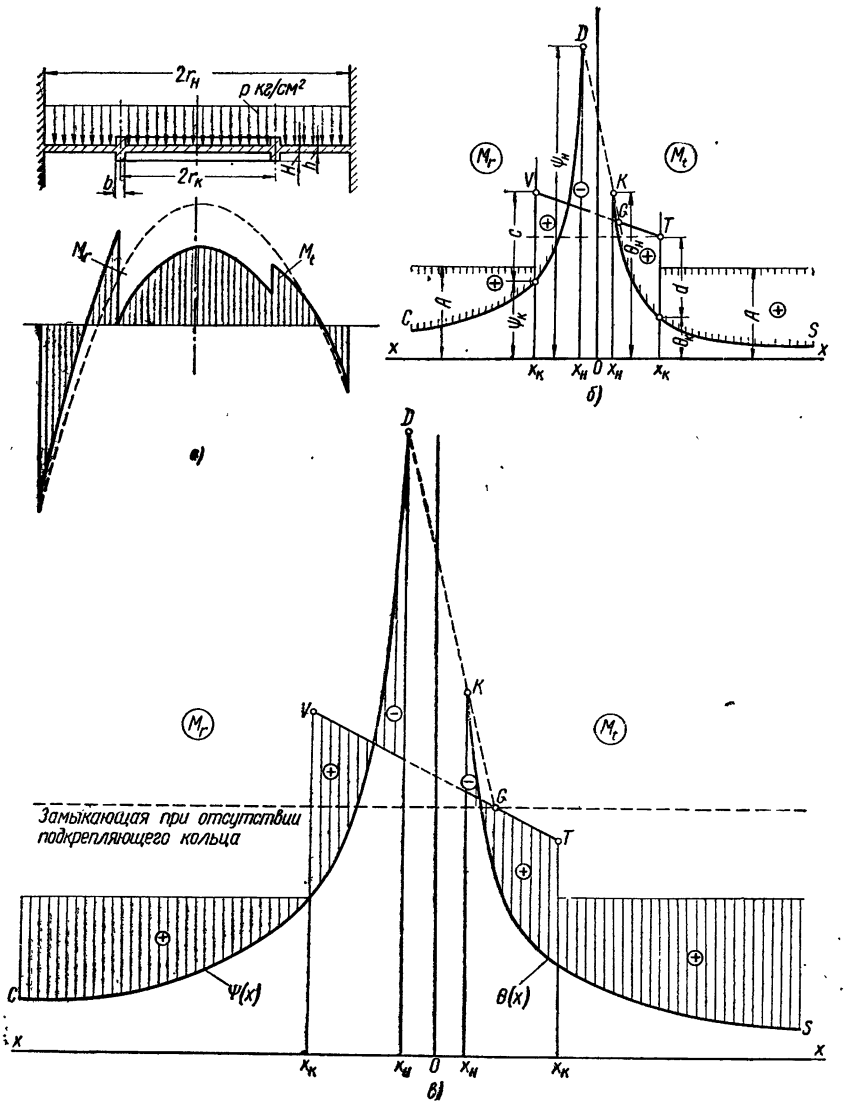
Они представлены на фиг. 69,*б* кривыми CD и SK соответственно.

Подкрепляющее ребро как бы разделяет пластину на две части.

На внутреннем участке пластины ($x_к < x < \infty$) замыкающая должна представляться горизонтальной прямой.

Допустим, что она отстоит от оси абсцисс на расстоянии A (фиг. 69, *б*), которое пока неизвестно.

На внешнем кольцевом участке ($x_н < x < x_к$) замыкающая представляет собой наклонную прямую TV, проведенную через точку G. Последняя должна быть выбрана так, чтобы на внешнем контуре (т. е. при $x = x_н$) удовлетворялось условие (70) $\left(\frac{\overline{GK}}{\overline{GD}} = \mu\right)$.



Фиг. 69.

На контуре ребра при $x = x_к$ должно соблюдаться условие неразрывности деформаций, связанное с поворотом поперечных сечений кольца [см. пример 3, разд. Ж §1].

Предположим, что замыкающая TV на участке $x_н < x < x_к$ проходит так, как это показано на фиг. 69, *б*. Тогда в соответствии с зависимостью (70) имеем

$$\left[\psi_н - (\theta_к + d) - \frac{(c + \psi_к - \theta_к - d)(x_н + x_к)}{2x_к}\right]\mu =$$

$$= \left[\theta_н - (\theta_к + d) - \frac{(c + \psi_к - \theta_к - d)(x_к - x_н)}{2x_к}\right], \qquad (I)$$

где (фиг. 69, *б*)

$$\psi_н = 0{,}206pr_н^2;$$

$$\psi_к = 0{,}0515pr_н^2;$$

$$\theta_н = 0{,}119pr_н^2;$$

$$\theta_к = 0{,}03pr_н^2;$$

$$\frac{x_н}{x_к} = \frac{r_к^2}{r_н^2} = \frac{1}{4}.$$

(Выражение, заключенное в квадратные скобки в левой части равенства (I), представляет в масштабе величину M_r на внешнем контуре, а выражение в правой части зависимости (1) представляет в масштабе величину M_t на том же контуре.)

После подстановки перечисленных величин в равенство (I) получим

$$0{,}188c + 0{,}512d = 0{,}032pr_н^2. \qquad \text{(Ia)}$$

Из условия неразрывности деформаций в примере 3 разд. Ж § 1 было получено выражение (18), по которому можно записать

$$\vartheta_к = \frac{(c + \psi_к - A)\, r_к^2}{EJ_x} = \frac{12r_к}{Eh^3}(d - \mu c),$$

откуда

$$d - 0{,}3c = \left(c - A + 0{,}0515pr_н^2\right)\left(\frac{r_к}{b}\right)\left(\frac{h^3}{H^3}\right), \qquad \text{(II)}$$

или

$$d + 0{,}37A - 0{,}67c = 0{,}019pr_н^2. \qquad \text{(IIa)}$$

Тот же угол $\vartheta_к$ на радиусе $r_к$ по формуле (6) равен

$$\vartheta_к = [(A - \theta_к) - \mu\,(A - \psi_к)]\,\frac{12r_к}{Eh^3} = (d - \mu c)\,\frac{12r_к}{Eh^3}, \qquad \text{(III)}$$

следовательно,

$$0{,}7A - d + 0{,}3c = 0{,}0145pr_н^2. \qquad \text{(IIIa)}$$

Решая зависимости (Ia), (IIa) и (IIIa) совместно, получаем:

$$A = 0{,}0523pr_н^2;$$

$$c = 0{,}0605pr_н^2;$$

$$d = 0{,}0402pr_н^2.$$

Располагая величинами A, c и d, не представляет затруднений выполнить построения и получить эпюры изгибающих моментов (фиг. 69,*в*). На фиг. 69,*а* эти эпюры построены по радиусу пластины.

Наибольшие напряжения развиваются в заделке, где $M_{r\,\max} = 0{,}11\ pr^2$:

$$\sigma_{r\,\max} = \frac{6 \cdot 0{,}11pr_н^2}{h^2} = \frac{6 \cdot 0{,}11 \cdot 4 \cdot 20^2}{1^2} = 1060\ кг/см^2.$$

При отсутствии ребра (см. пример 1 разд. Ж § 1)

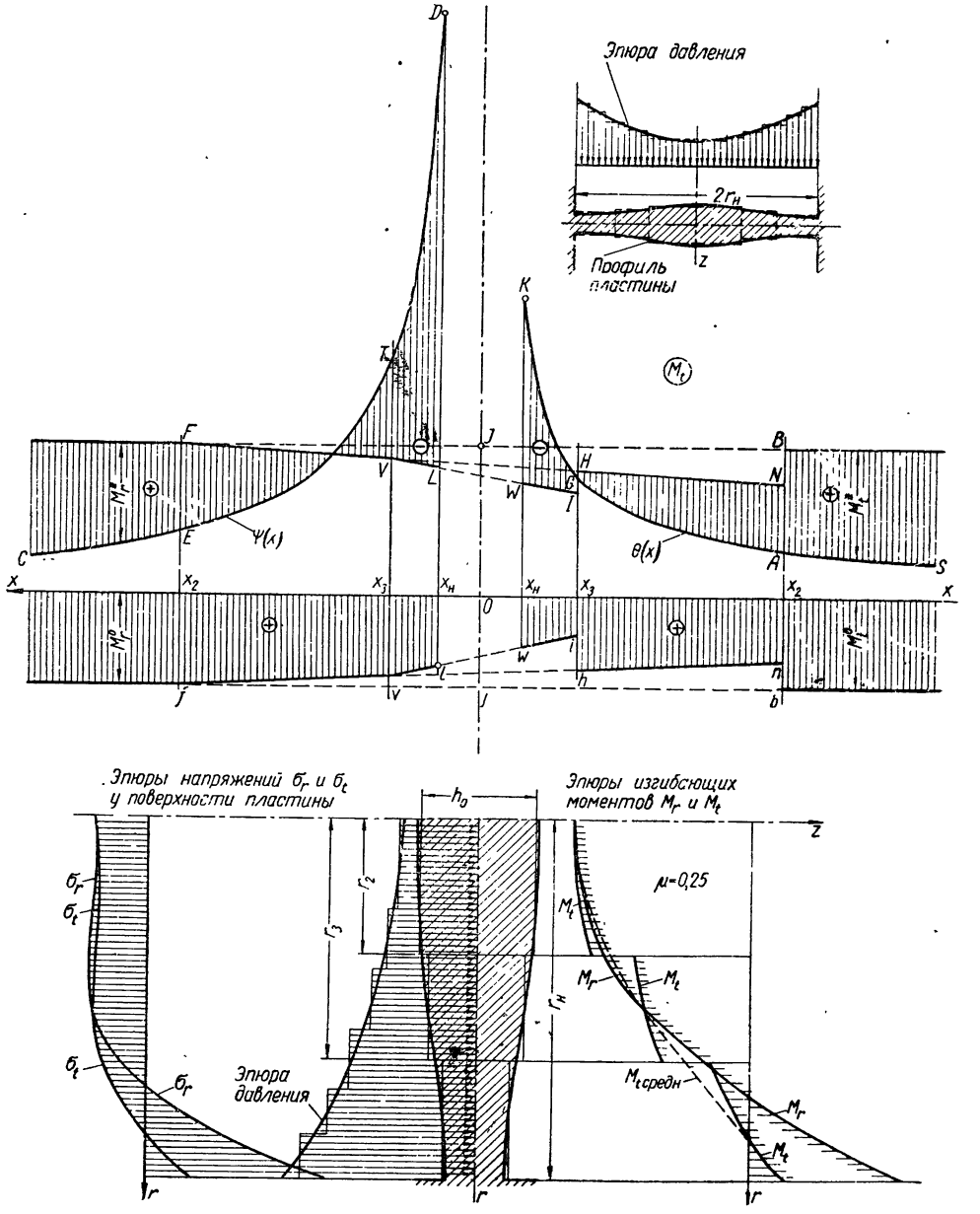
$$\sigma_{r\,\max} = \frac{6\ 0{,}125pr_н^2}{h^2} = \frac{6 \cdot 0{,}125 \cdot 4 \cdot 20^2}{1^2} = 1200\ кг/см^2.$$

Эпюра интенсивности моментов для этого случая показана на фиг. 69,*а* пунктиром.

При наличии двух и более подкрепляющих концентричных колец графическое решение может быть получено методом двух расчетов, который изложен ниже, при рассмотрении пластины произвольно-переменного профиля.

Г. Расчет графическим способом пластин переменной толщины

Рассмотрим чечевицеобразную пластину радиуса $r_н$, заделанную по внешнему контуру и нагруженную давлением, распределенным так, как это представлено на фиг. 70.



Фиг. 70.

Расчленяем пластину на две кольцевые пластины постоянной толщины и центральный сплошной диск толщиной h_0. [Для получения более точного решения пластину переменной толщины следует делить на

большее число частей. Это не осложняет построения заметным образом, однако во избежание затемнения чертежа и затруднения объяснений в рассматриваемом примере пластина расчленена всего на три части (фиг. 70)].

Нагрузку, непрерывно изменяющуюся вдоль радиуса, представляем в виде ступенчатой нагрузки.

По окружным сечениям, делящим пластину на кольца, должны соблюдаться два условия, сформулированные выше [см. зависимости (48) и (49)].

Учитывая формулы (48), (49) и (6), получим

$$M_t^H = \frac{H^3}{h^3} M_t^h - \mu \left(\frac{H^3}{h^3} - 1 \right) M_r^h, \tag{81}$$

где M_t^H — интенсивность момента, соответствующая участку толщиной H;

M_t^h — соответствующая участку толщиной h.

Зависимость (81) позволяет определять значение интенсивности изгибающего момента M_t^H на радиусе цилиндрической поверхности раздела для кольца толщиной H по значениям интенсивности изгибающих моментов M_t^h и M_r^h на том же радиусе ступени, имеющей толщину h $(M_r^h = M_r^H = M_r)$.

Приступаем к графическому решению задачи. Как и прежде, с помощью графиков фиг. 59 в избранных сопряженных системах координат строим в некотором масштабе α *кг/мм* функции $\Psi(x)$ и $\Theta(x)$ (кривые CD и SK на фиг. 70), которые не зависят от жесткости пластины и определяются только характером нагрузки.

Основная трудность в решении поставленной задачи заключается в необходимости проведения замыкающих прямых раздельно на каждой из ступеней рассматриваемой пластины.

Проводим предварительный расчет.

Задаемся моментом в центре пластины

$$M_r^* = M_t^* = M_0^*$$

и откладываем его в масштабе α [отрезок $(\overline{OJ})$].

Учитывая, что центральный диск не имеет отверстия, проводим для него на участках от $x_1 = \infty$ до x_2 горизонтальную замыкающую прямую, проходящую через точку J.

Отрезок $\overline{EF}$ представляет в масштабе α момент M_{r2}^{*h} на радиусе r_2 (фиг. 70). Отрезок $(\overline{AB})$ представляет в масштабе α на том же радиусе r_2 момент M_{t2}^{*h}.

По формуле (81) определяем M_{t2}^{*H} на радиусе r_2 и представляем его отрезком $(\overline{AN})$.

Прямая FN является замыкающей на участках $x_2 - x_3$.

Отрезок (TV) представляет в масштабе α момент $M_{r3}^{*H} = M_{r3}^{*h} = M_r^{*3}$ на радиусе r_3, а отрезок (GH) в том же масштабе момент M_{t3}^{*h} на том же радиусе r_3.

По формуле (81) определяем M_{t3}^{*H} на радиусе r_3 и, отложив его в виде отрезка $(\overline{GI})$, строим замыкающую прямую VI для участков $x_3 - x_н$. Достигнув таким образом радиуса $r_н$, находим $M_{rн}^*$ [отрезок

$(\overline{DL})$] и $M^*_{tн}$ [отрезок $(\overline{KW})$]. Однако необходимое для заделки условие (80) вследствие произвольного выбора M^*_0, естественно, остается невыполненным. Таким образом, пока еще решена не поставленная, а некоторая другая задача. Рассчитана пластина, защемленная по наружной кромке не жестко, как это обусловлено в задании, а упруго. Для устранения возникшей неувязки и получения решения заданной задачи проводим дополнительный расчет пластины тех же размеров, но нагруженной только моментом, распределенным по наружной кромке и имеющим некоторую неизвестную пока интенсивность m_0 *кг·см/см*.

В этом случае

$$\Psi(x) = \Theta(x) = 0.$$

Опять задаемся моментом в центре пластины (интенсивность изгибающих моментов, относящихся к дополнительному расчету, помечена значком ноль):

$$M^0_r = M^0_t = M^0_0.$$

Откладываем его вниз[1] от оси абсцисс [отрезок $(\overline{Oj})$] и проводим замыкающую прямую для участков от $x_1 = \infty$ до x_2 (горизонтальная прямая, проходящая через точку j). Отрезки $(\overline{x_2 f})$ и $(\overline{x_2 b})$ дают в масштабе α интенсивности моментов M^{0h}_{r2} и M^{0h}_{t2} на радиусе r_2.

По формуле (81) определяем M^{0H}_{t2} на радиусе r_2 и представляем его отрезком $(\overline{x_2 n})$. Прямая nf является замыкающей на участках $x_2 - x_3$.

Повторяя аналогичные построения, в конечном счете достигаем внешнего радиуса $r_н$, на котором $M^0_{rн} = (\overline{x_н l})\alpha$ и $M^0_{tн} = (\overline{x_н w})\alpha$.

Теперь решение поставленной задачи может быть получено путем сложения изгибающих моментов предварительного расчета M^*_r и M^*_t и моментов, полученных при дополнительном расчете M^0_r и M^0_t, умноженных на некоторый коэффициент приведения χ. Последний определяется из того условия [см. формулу (70)], что в заделке на радиусе $r_н$

$$M^*_{tн} + \chi M^0_{tн} = \mu\,(M^*_{rн} + \chi M^0_{rн}).$$

Отсюда коэффициент приведения определяется следующим выражением:

$$\chi = -\frac{M^*_{tн} - \mu M^*_{rн}}{M^0_{tн} - \mu M^0_{rн}},$$

а в рассматриваемом случае, учитывая знаки,

$$\chi = \frac{(\overline{KW}) - \mu\,(\overline{DL})}{(\overline{x_н w}) - \mu\,(\overline{x_н l})}.$$

Окончательные значения интенсивности изгибающих моментов для поставленной задачи определяются из условий

$$M_r = M^*_r + \chi M^0_r;$$
$$M_t = M^*_t + \chi M^0_t.$$

[1] В целях сокращения размеров чертежа графики, связанные с дополнительным расчетом, построены в уже имеющейся системе координат, изменено лишь направление оси ординат.

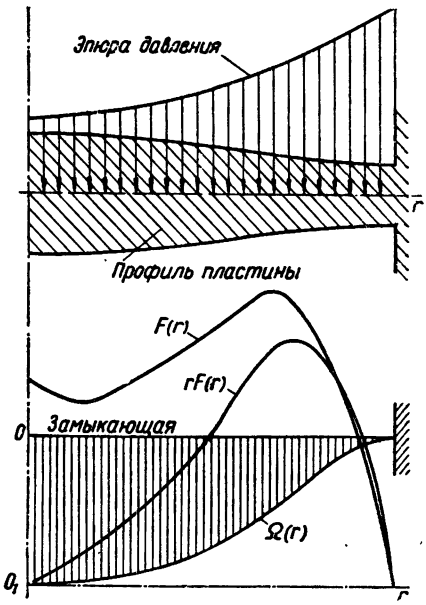
Эпюры изгибающих моментов M_r и M_t, построенные в некотором новом масштабе по радиусу пластины, представлены в нижней части фигуры. Эпюра моментов M_t имеет разрывы на радиусах r_2 и r_3 ступенчатого изменения толщины пластины. Пунктиром представлен примерный вид эпюры M_t для заданной чечевицеобразной пластины. Можно рекомендовать осредненную эпюру M_t строить по значениям моментов M_t^* и M_t^0, графически полученным для сечений, в которых толщина ступенчатой пластины совпадает с толщиной заданной пластины. В нижней части фиг. 70 построены также эпюры напряжений σ_r и σ_t.

Помимо расчета на прочность весьма существенным является также расчет круглых пластин на жесткость.

Весьма часто необходимо знать вид упругой поверхности, которую принимает срединная плоскость пластины при ее деформации.

Если известны эпюры интенсивности моментов M_r и M_t, построенные по радиусу пластины, то легко представить (фиг. 71) в некотором масштабе β 1/*см* на 1 *мм* и график функции [см. формулу (6)]

$$F(r) = \frac{12}{Eh^3}(M_t - \mu M_r).$$



Фиг. 71.

Построив в некотором масштабе γ 1/*мм* вспомогательную кривую $rF(r)$, а затем в масштабе δ *см*/*мм* интегральную кривую $\Omega(r) = \int_r rF(r)\,dr$, можно перейти непосредственно к определению величины прогибов $w(r)$. [Интегральная кривая $\Omega(r)$ выражает изменение по радиусу r площади, ограничиваемой кривой $rF(r)$.]

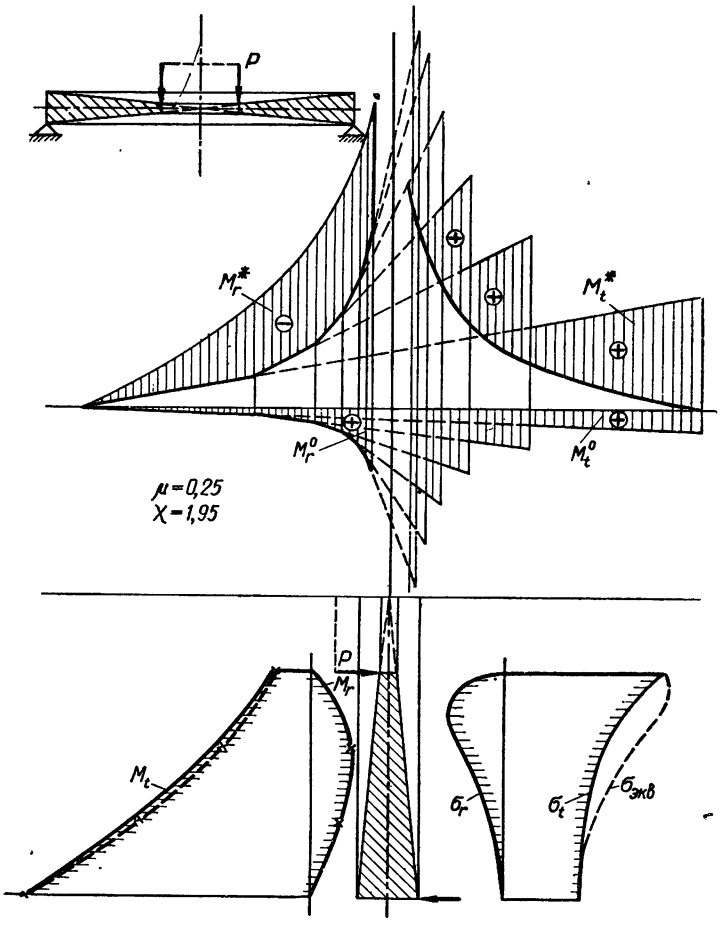
Для этой цели надо провести замыкающую прямую, параллельную оси абсцисс, так, чтобы она проходила через точку, в которой $w = 0$. Отрезки, параллельные оси ординат и заключенные между замыкающей прямой и интегральной кривой, равны прогибам w в масштабе δ *см*/*мм*.

На фиг. 71 приведены все необходимые построения и вычерчен профиль деформированной срединной поверхности чечевицеобразной пластины, рассмотренной в последнем примере. Максимальный прогиб w_{max} представляется отрезком OO_1:

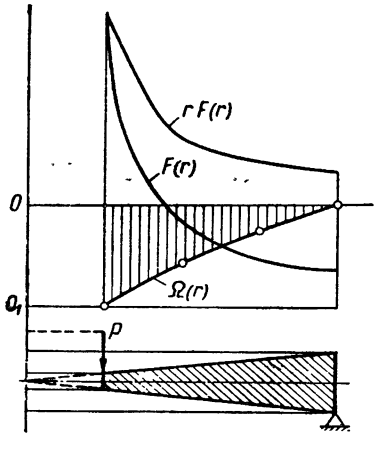
$$w_{max} = (\overline{OO}_1\ мм)\ (\delta\ см/мм).$$

Для проверки точности разработанного графического способа расчета пластин переменного сечения на фиг. 72 и 73 проведено сопоставление результатов графического и аналитического методов расчета элемента дисковой пружины [35].

Результаты графического решения представлены на фиг. 72 эпюрами M_r, M_t, σ_r, σ_t и $\sigma_{экв}$ (по энергетической теории прочности).


P
M_r^*
M_t^*
M_r^0
M_t^0
μ=0,25
χ=1,95
P
M_r
M_t
σ_r
σ_t
$\sigma_{экв}$

Фиг. 72.


rF(r)
F(r)
0
Ω(r)
Q_1
P

Фиг. 73.

На фиг. 73 графически построена функция $\Omega(r)$. Результаты аналитического расчета показаны на эпюрах M_r и M_t (фиг. 72) и на графике функции $\Omega(r)$ (фиг. 73) зв здочками.

Проведенное сопоставление показывает, что незначительное расхождение имеет место только для значений момента M_t, что связано с несколько произвольным осреднением их величин при графическом расчете.

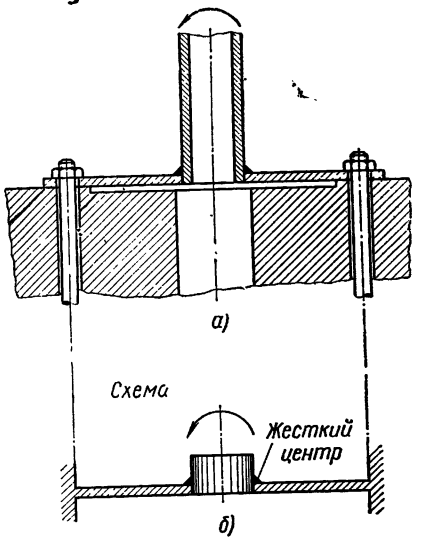
Следует также заметить, что при аналитическом расчете в целях упрощения выкладок приближенно принимают, что нагрузка, воспринимаемая диском, приложена точно по его внутренней кромке. В действительности нагрузка распределена по относительно широкой кольцевой полосе, примыкающей к этой кромке. Кроме того, имеющиеся аналитические решения [14], [35] разработаны в предположении, что вершины наружных конических поверхностей диска совпадают, что практически также не всегда имеет место.

Графический метод расчета не стеснен этими ограничениями.

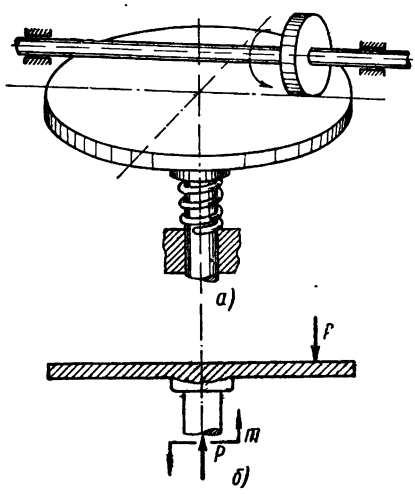
§ 5. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ АСИММЕТРИЧНОГО ИЗГИБА КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

А. Предварительные соображения

В предыдущих параграфах были подробно рассмотрены различные вопросы осесимметричного изгиба жестких тонких круглых пластин.



Фиг. 74.



Фиг. 75.

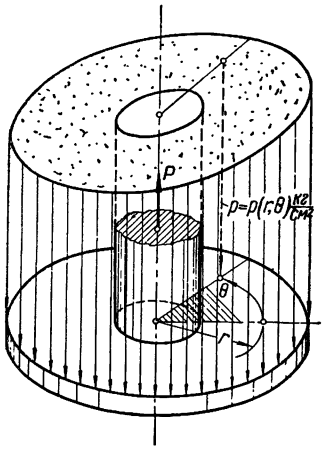
Однако в инженерной практике приходится встречаться также и с задачами асимметричного изгиба таких пластин (см., например, фиг. 74, *а, б* и 75, *а, б*).

В этом случае при расчете следует учитывать, что внешнее давление p *кг/см*^{2} (фиг. 76), воспринимаемое пластиной, меняется не только по радиусу r, но является также и функцией полярного угла θ, т. е. $p=p(r,\theta)$.

Метод расчета круглых пластин при асимметричной нагрузке опирается на те же гипотезы, что и расчет этих пластин при нагрузке осесимметричной (см. § 1).

По-прежнему используется гипотеза о неискривляемости нормалей к ее срединной плоскости.

Как и ранее, принимается, что нормальные напряжения в площадках, параллельных срединной плоскости, отсутствуют, а перемещения w точек срединной плоскости по их малости параллельны центральной оси пластины, и деформации в срединной плоскости пренебрежимо малы.



Фиг. 76.

Естественно, что в рассматриваемом случае, в отличие от осесимметричного изгиба круглых пластин, упругая поверхность не является поверхностью вращения, т. е. $w=w(r, \Theta)$.

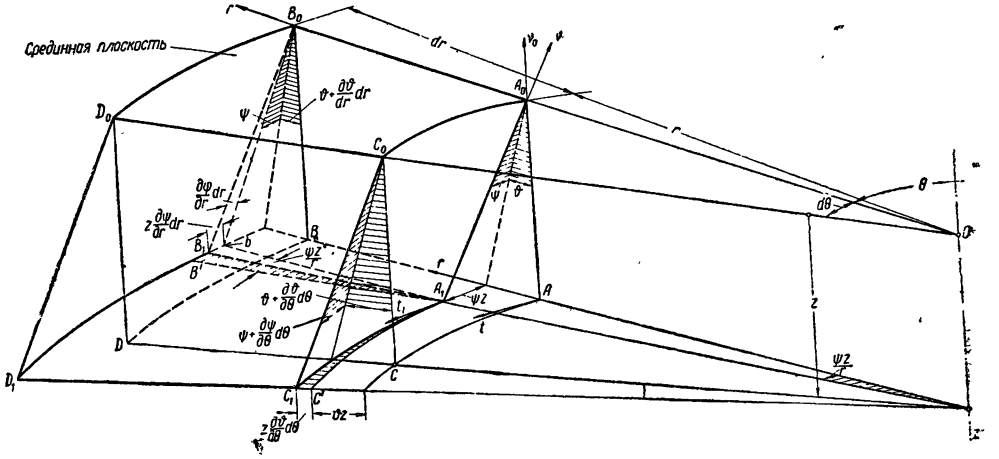
При этом в связи с нарушением осевой симметрии касательные напряжения имеют место не только в окружных, но и в радиальных сечениях.

Таким образом, деформированное и напряженное состояния пластин являются в этом случае существенно отличными от рассмотренных ранее.

Б. Связь между перемещениями, деформациями и напряжениями

Геометрия деформированного состояния определяется принятой гипотезой о неизменности нормалей.

Предположим, что нормаль ν_0 в некоторой точке $A_0\,(r, \theta, O$ срединной плоскости (фиг. 77), оставаясь прямой, повернулась на угол



Фиг. 77.

ϑ в радиальной плоскости и на угол ψ в окружном направлении. (Перемещения предполагаются малыми.) Нормаль к деформированной срединной поверхности обозначена буквой ν.

В точке $B_0(r+dr, \theta, O)$ углы поворота нормали будут

$$\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\,dr \text{ и } \psi + \frac{\partial \psi}{\partial r}\,dr.$$

В точке $C_0(r, \theta + d\theta, O)$ соответственно

$$\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} d\theta \text{ и } \psi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta$$

(фиг. 77).

Рассмотрим возникающие в связи с искривлением пластины перемещения точек $A(r, \theta, z)$, $B(r + dr, \theta, z)$, $C(r, \theta + d\theta, z)$, лежащих в слое, отстоящем на расстоянии z от срединной плоскости.

Точка A перемещается в точку $A_1(r + z\vartheta, \theta + z\psi, z)$, точка B — в точку

$$B_1\left(r + dr + z\vartheta + z\frac{\partial \vartheta}{\partial r} dr, \theta + \frac{z}{r}\psi + \frac{z}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} dr, z\right),$$

а точка C — в точку

$$C_1\left(r + z\vartheta + z\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} d\theta, \theta + d\theta + \frac{z}{r}\psi + \frac{z}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta, z\right).$$

Деформации в точке $A(r, \theta, z)$ будут равны:

относительная линейная деформация в радиальном направлении (фиг. 77)

$$\varepsilon_r = \frac{A_1B_1 - AB}{AB} = \frac{\left(z\vartheta + z\frac{\partial \vartheta}{\partial r} dr\right) - z\vartheta}{dr} = z\frac{\partial \vartheta}{\partial r}; \tag{82}$$

относительная линейная деформация в окружном направлении

$$\varepsilon_t = \frac{A_1C_1 - AC}{AC} = \frac{[(r + z\vartheta)\, d\theta - r d\theta] + \left[\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta\right) z - \psi z\right]}{r d\theta} =$$

$$= z\left(\frac{\vartheta}{r} + \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}\right); \tag{83}$$

угловая деформация (угол сдвига) (фиг. 77)

$$\gamma_{rt} = -B'\hat{A}_1B_1 + C'\hat{A}_1C_1 = -\left(\frac{\psi}{r} - \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) z + \frac{\partial \vartheta}{r \partial \theta} z =$$

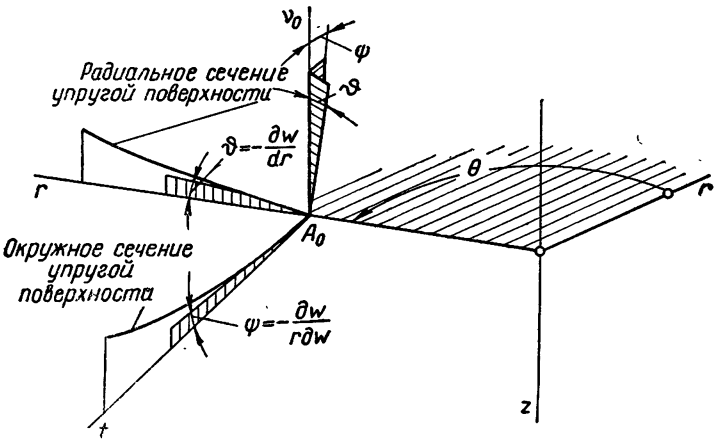
$$= -\left(\frac{\psi}{r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \vartheta}{r \partial \theta}\right) z. \tag{84}$$

Действительно, ортогональные оси rt поворачиваются в плоскости $z = \text{const}$ на угол $\frac{\psi z}{r}$ и занимают положение r_1t_1. Прямой угол $B\hat{A}C$ с одной стороны увеличивается на угол $B'\hat{A}_1B_1$, равный $\left(\frac{\psi}{r} z - \right.$ $\left. - \frac{\partial \psi}{\partial r} z\right)$, а с другой стороны уменьшается на угол $C'\hat{A}C_1$, равный $z\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} d\theta$.

Угол сдвига γ_{rt} по формуле (84) выражает полное увеличение прямого угла $B\hat{A}C$ и в соответствии с правилами знаков, принятыми в теории упругости, считается отрицательным.

Как видно из фиг. 78, углы ϑ и ψ связаны с прогибом следующими зависимостями:

$$\vartheta = -\frac{\partial w}{\partial r} \quad \text{и} \quad \psi = -\frac{\partial w}{r\partial\theta}. \tag{85}$$



Фиг. 78.

С учетом выражений (85) формулы (82), (83) и (84) принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \\ \varepsilon_t &= -z\left(\frac{\partial w}{r\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2}\right); \\ \gamma_{rt} &= 2z\left(\frac{\partial w}{r^2\partial\theta} - \frac{\partial^2 w}{r\partial r\partial\theta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

На основании закона Гука, используя гипотезу об отсутствии нормальных напряжений в площадках, параллельных срединной плоскости, заключаем, что

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t) = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial w}{r\partial r}\right)\right]; \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r) = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{r\,\partial\theta^2} + \frac{\partial w}{r\partial r} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]; \\ \tau_{rt} &= \tau_{tr} = G\gamma_{rt} = \frac{E\gamma_{rt}}{2(1+\mu)} = \frac{Ez}{1+\mu}\left[\frac{\partial w}{r^2\partial\theta} - \frac{\partial^2 w}{r\partial r\partial\theta}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

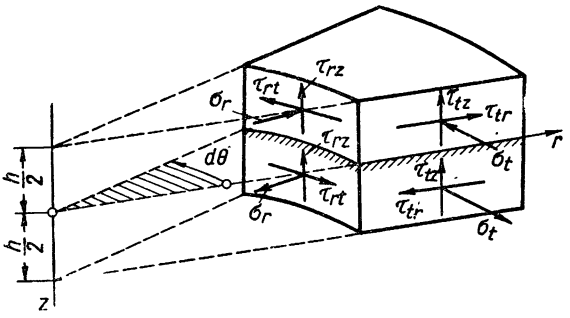
Помимо подсчитанных компонентов напряжений в окружных и радиальных сечениях пластины возникают еще касательные напряжения τ_{rz} и τ_{tz}, направленные в сторону, противоположную оси z, поскольку соответствующие им касательные силы уравновешивают избыточную силу давления на внешнюю поверхность элемента пластины, которая действует в направлении оси z.

(В слоях, параллельных срединной плоскости, имеют место парные касательные напряжения τ_{zr} и τ_{zt}.)

Совокупность всех компонентов напряжения на гранях элемента пластины представлена на фиг. 79.

В точках при $z>0$ все компоненты предполагаются положительными.

Положительные направления устанавливаются в соответствии с правилом внешней нормали (см. гл. I, т. I).



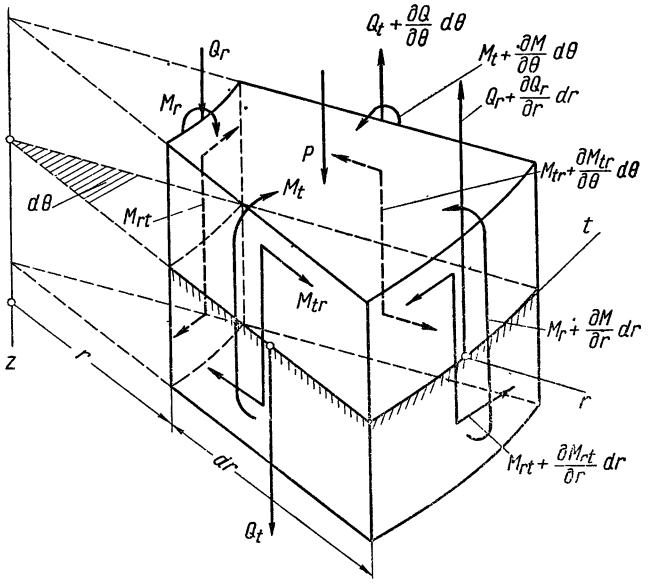
Фиг. 79.

В. Внутренние силовые факторы и уравнения равновесия

Обратимся к изучению внутренних силовых факторов, возникающих в радиальных и окружных сечениях пластины.

Касательные силы в радиальных и окружных сечениях при приведении их к срединной плоскости сводятся к поперечной силе и крутящему моменту.

Поперечные силы параллельны центральной оси z пластины, поскольку сдвигающие силы, лежащие в срединной плоскости, так же как и нормальные силы, равны нулю в соответствии с предположением,



Фиг. 80.

что деформации срединной плоскости пренебрежимо малы. (В этом легко убедиться и вычисляя упомянутые силовые факторы по соответствующим формулам гл. II, т. II.)

Таким образом, нормальные силы в радиальных и окружных сечениях приводятся к чистым парам.

На фиг. 80 показан элемент пластины, к которому приложены существующие в данном случае внутренние силовые факторы. Последние отнесены к единице длины сечения.

Направления силовых факторов, показанные на фиг. 80, принимаются в расчете за положительные.

Избираемое здесь правило знаков согласуется с правилами, принятыми при рассмотрении осесимметричной задачи.

Заметим, что изгибающие пары лежат в плоскостях, нормальных срединной плоскости.

Изгибающие моменты, лежащие в срединной плоскости и возникающие за счет неравномерного распределения нормальных сил по бесконечно малым боковым граням элемента, могут быть опущены как малые высшего порядка.

Учитывая направления векторов, показанных на фиг. 79 и 80, можно установить, что интенсивности внутренних силовых факторов связаны с напряжениями следующими зависимостями:

$$\left.\begin{aligned} Q_r &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{rz}\,dz; \\ Q_t &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{tz}\,dz; \\ M_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r z\,dz; \\ M_t &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_t z\,dz; \\ M_{rt} &= M_{tr} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{rt} z\,dz. \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

В соответствии с формулами (87) и (88) имеем

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial w}{r\partial r}\right)\right]; \\ M_t &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial w}{r\partial r} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]; \\ M_{tr} &= M_{rt} = -D(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{r\partial r\partial\theta} - \frac{\partial w}{r^2\partial\theta}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (89)$$

Цилиндрическая жесткость D выражается зависимостью (4).

Из условий равновесия выделенного элемента пластины (фиг. 80) можно установить зависимости между интенсивностями силовых факторов и внешним давлением.

Сумма проекций всех сил на ось z дает

$$prd\theta dr + Q_r r d\theta - \left(Q_r + \frac{\partial Q_r}{\partial r} dr\right)(r + dr)\, d\theta + \\ + Q_t dr - \left(Q_t + \frac{\partial Q_t}{\partial \theta} d\theta\right) dr = 0,$$

откуда

$$p = \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial Q_t}{r \partial \theta} + \frac{Q_r}{r}. \tag{90}$$

Составим сумму моментов всех сил относительно оси t (фиг. 80). Опуская малые высшего порядка, имеем

$$- Q_r r\, d\theta dr + M_r r d\theta - \left(M_r + \frac{\partial M_r}{\partial r} dr\right)(r + dr)\, d\theta + \\ + 2M_t dr \sin\frac{d\theta}{2} + M_{tr} dr - \left(M_{tr} + \frac{\partial M_{tr}}{\partial \theta} d\theta\right) dr = 0,$$

откуда

$$Q_r = \frac{M_t - M_r}{r} - \frac{\partial M_r}{\partial r} - \frac{\partial M_{tr}}{r \partial \theta}. \tag{91}$$

Аналогично составляя сумму моментов относительно оси r, получаем

$$Q_t dr r d\theta - M_t dr + \left(M_t + \frac{\partial M_t}{\partial \theta} d\theta\right) dr - M_{rt} r d\theta + \\ + \left(M_{rt} + \frac{\partial M_{rt}}{\partial r} dr\right)(r + dr)\, d\theta + 2M_{tr} dr \sin\frac{d\theta}{2} = 0,$$

откуда

$$Q_t = -\frac{\partial M_{rt}}{\partial r} - \frac{2M_{rt}}{r} - \frac{\partial M_t}{r \partial \theta}. \tag{92}$$

Зависимости (90) — (92) позволяют установить, что

$$p = -\frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 M_{rt}}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 M_t}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial M_{rt}}{\partial \theta} - \\ - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial r}. \tag{93}$$

Используя уравнения равновесия (91) и (92), а также формулы (89), можно выразить поперечные силы Q_r и Q_t через функцию осевого перемещения $w = w(r)$.

После ряда преобразований получим

$$Q_r = D \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right] = D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w$$

и

$$Q_t = D \frac{\partial}{r \partial \theta}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right] = D \frac{\partial}{r \partial \theta} \nabla^2 w, \tag{94}$$

где ∇^2 — дифференциальный оператор:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Г. Дифференциальное уравнение задачи и его интегрирование

Используя уравнение (93) и формулы (89), можно связать функцию $p=p(r, \theta)$, выражающую закон нагружения пластины, с функцией прогибов $w=w(r, \theta)$.

После соответствующих подстановок и преобразований окончательно получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=\frac{p}{D} \qquad (95)$$

или

$$\nabla^2\nabla^2=\frac{p}{D}.$$

Дифференциальное уравнение (95) можно также получить и из формулы (12) гл. II т. II путем преобразования [24] декартовой системы координат, в которой выведена формула (12) гл. II, в полярную систему, используемую в настоящей главе.

В общем случае асимметричного изгиба круглых пластин дифференциальное уравнение (95) является основным, поскольку оно позволяет установить функцию прогибов $w=w(r, \theta)$, а также все внутренние силовые факторы в сечениях пластины, определяемые соответствующими производными этой функции [см. формулы (89)].

Из всех возможных функций $w(r, \theta)$, удовлетворяющих уравнению (95), искомой является та единственная, которая согласуется с граничными условиями задачи.

Для пластины, заделанной по контуру радиуса $r=r_к$ (контур оперт и защемлен), граничные условия имеют вид

$$w(r_к, \theta)=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w(r_к, \theta)}{\partial r}=0.$$

Для пластины, свободно опертой по контуру, граничными условиями будут

$$w(r_к, \theta)=0 \quad \text{и} \quad (M_r)_{r=r_к}=0.$$

В случае полностью свободного (не опертого) контура следует принимать

$$(M_r)_{r=r_к}=0 \quad \text{и} \quad \left(Q_r-\frac{\partial M_{r\theta}}{r\partial\theta}\right)_{r=r_к}=0.$$

Последняя зависимость соответствует условию (16) гл. II т. II и выражает отсутствие касательных сил на свободном круговом контуре пластины, в приближенном представлении.

Если по условиям задачи пластина при расчете мысленно расчленяется на отдельные концентрические области, то на контурах разделов должны быть обеспечены условия совместности деформаций и удовлетворены уравнения равновесия.

Легко убедиться в том, что зависимость (95) включает в себя как частный случай и дифференциальное уравнение (9) для осесимметричного изгиба круглых пластин.

Действительно, при осесимметричном изгибе нагрузка, а следовательно и прогибы пластины, не зависит от полярного угла.

В связи с этим уравнение (95) упрощается и записывается в форме

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right)=\frac{p}{D}, \tag{95а}$$

или

$$\frac{d^4w}{dr^4}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d^3w}{dr^3}-\frac{1}{r}\cdot\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\cdot\frac{dw}{dr}=\frac{p}{D}. \tag{95б}$$

К этому же виду приводится и основное дифференциальное уравнение (9) для осесимметричного изгиба круглых пластин, если его продифференцировать, умножив предварительно на r, и учесть зависимости (7) и (85).

Нетрудно также показать, что в случае осесимметричного изгиба пластин, когда $w=w(r)$, первые две формулы (89) преобразуются в формулы (5), а крутящие моменты [см. третью формулу (89)] и поперечная сила Q_t [см. вторую формулу (94)] обращаются в ноль.

Общее решение дифференциального уравнения (95) может быть представлено, как обычно, в виде суммы

$$w=w_0+w_r,$$

где w_u — частное решение уравнения (95);

w_0 — решение соответствующего однородного уравнения (96).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2w_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w_0}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2w_0}{\partial\theta^2}\right)=0. \tag{96}$$

Общее решение уравнения (96), данное еще А. Клебшем* (1862 г), имеет вид

$$w_0=F_0(r)+\sum_{m=1}^{m=\infty}F_m(r)\cos m\theta+\sum_{m=1}^{m=\infty}f_m(r)\sin m\theta, \tag{97}$$

где $F_0(r)$, $F_1(r)$, $F_2(r)$,... и $f_1(r)$, $f_2(r)$,... являются функциями одного лишь радиуса

Подставив в дифференциальное уравнение (94) ряд (97), можно для каждой из этих функций получить обычное дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}-\frac{m^2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2F_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dF_m}{dr}-\frac{m^2F_m}{r^2}\right)=0. \tag{98}$$

Решение последнего при $m>1$ имеет вид

$$F_m(r)=C_{1m}r^m+C_{2m}r^{-m}+C_{3m}r^{m+2}+C_{4m}r^{-m+2}. \tag{99}$$

При $m=1$ решение будет

$$F_1(r)=C_{11}r+C_{21}r^3+C_{31}r^{-1}+C_{41}r\ln\frac{r}{r_н}, \tag{99а}$$

где $r_н$ — некоторый фиксированный, например наружный, радиус пластины.

Совершенно аналогичные формулы будут иметь место и для функций $f_m(r)$ при $m\geqslant 1$.

---

[1] См. «Théorie de l'elasticité des corps solides» de Clebsch, tratuide par B. de St. Venant et Flamant, Paris 1883.

При $m=0$ решение $F_0(r)$ уравнения (98) выражается следующим образом:

$$F_0(r)=C_{10}+C_{20}r^2+C_{30}\ln\frac{r}{r_н}+C_{40}r^2\ln\frac{r}{r_н}. \qquad (99б)$$

Поскольку этот член ряда не зависит от полярного угла θ, можно заключить, что функция $F_0(r)$ соответствует случаю симметричного изгиба круглой пластины.

Если по условиям нагружения и закрепления пластина имеет некоторую плоскость симметрии, то, принимая эту плоскость за начало отсчета полярных углов θ, следует в общем решении [см. формулу (97)] опустить слагаемые, включающие $\sin m\theta$, как нечетные функции, противоречащие условиям симметрии.

При кососимметричной деформации пластины, наоборот, должны быть опущены слагаемые ряда, содержащие четные функции, т. е. $\cos m\theta$.

Постоянные C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}, входящие в общее решение (97), должны быть в каждом отдельном случае определены из граничных условий.

Величина каждой из четырех постоянных, соответствующих определенному значению m, вычисляется как корень системы линейных уравнений, свободные члены которых определяются видом нагрузки и условиями закрепления пластины.

В ряде случаев эти уравнения являются однородными, и соответствующие постоянные обращаются в связи с этим в ноль.

Учитывая сказанное, в отдельных задачах можно сразу предвидеть, какие слагаемые следует сохранить в общем решении (97) дифференциального уравнения (95) для того, чтобы все граничные условия задачи могли быть полностью удовлетворены.

Рациональный выбор вида общего решения обеспечивает успех расчета асимметрично нагруженной круглой пластины.

Д. Расчет круглой пластины с жестким центром, нагруженным моментом

В практике машиностроения можно встретиться с конструкциями, в которых круглые пластины нагружаются моментом, приложенным к жесткому центру (см., например, фиг. 74).

В таких условиях находятся, в частности, торцовые стенки грузовых подъемных барабанов некоторых типов (фиг. 81, *а*). При изгибе вала жесткие опорные ступицы стремятся повернуться относительно цилиндра барабана (фиг. 81, *б*), в связи с чем связанные со ступицами торцовые стенки, представляющие собой круглые пластины, нагружаются моментом (см. пример).

Обод колеса грузовой тележки часто соединяется со ступицей плоским диском. В этом случае при изгибе оси тележки диск нагружается моментом.

На фиг. 82 представлена схема деформированного состояния круглой пластины, защемленной по внешнему контуру радиуса $r_н$. Пластина имеет жесткий центр радиуса $r_в$, который нагружен моментом $\mathfrak{M}$.

Если положить, что жесткий центр поворачивается относительно оси, нормальной плоскости момента $\mathfrak{M}$, на угол φ_0 и за начало отсчета

полярного угла θ также принять плоскость момента $\mathfrak{M}$ (фиг. 82), то перемещение контура жесткого центра выражается зависимостью

$$w_в = -r_в\varphi_0\cos\theta. \tag{100}$$

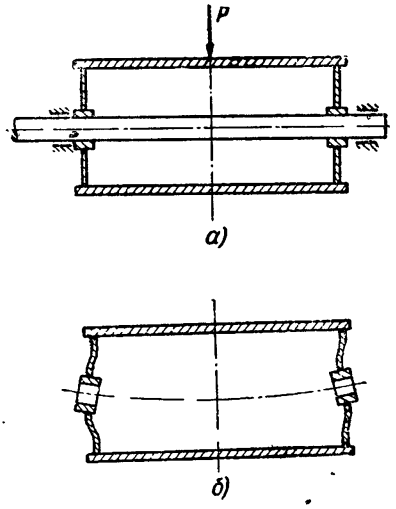
Граничные условия в рассматриваемом случае будут следующие: при $r = r_в$

$$w_в = -r_в\varphi_0\cos\theta \text{ и } \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=r_в} = -\varphi_0\cos\theta;$$

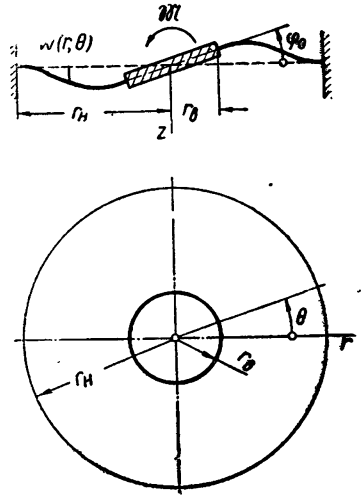
при $r = r_н$ и любом значении угла θ

$$w_н = 0 \text{ и } \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=r_н} = 0.$$

Дифференциальное уравнение задачи, учитывая отсутствие внешнего давления, будет однородным [см. формулу (96)].



Фиг. 81.



Фиг. 82.

Функцию перемещений $w(r, \theta)$, принимая во внимание граничные условия на радиусе $r_в$, будем искать в форме

$$w = F(r)\cos\theta, \tag{101}$$

тогда, решая уравнение (96), получим [см. формулу (99а)]

$$w = \left(C_1 r + C_2 r^3 + \frac{C_3}{r} + C_4 r\ln\frac{r}{r_в}\right)\cos\theta. \tag{101а}$$

Граничные условия позволяют составить следующую систему уравнений для определения постоянных интегрирования.

Из условия, что при $r = r_н$ $w = 0$, получим

а) $C_1 r_н + C_2 r_н^3 + \frac{C_3}{r_н} + C_4 r_н \ln\frac{r_н}{r_в} = 0;$

учитывая, что при $r = r_н$ $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=r_н} = 0$, можно записать:

$$б)\ C_1 + 3C_2 r_н^2 - \frac{C_3}{r_н^2} + C_4\left(\ln\frac{r_н}{r_в} + 1\right) = 0;$$

поскольку при $r = r_в$ $w = w_в$, то

$$в)\ C_1 + C_2 r_в^2 + \frac{C_3}{r_в^2} = -\varphi_0;$$

наконец, из условия, что при

$$r = r_в \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=r_в} = -\varphi_0 \cos\theta,$$

имеем

$$г)\ C_1 + 3C_2 r_в^2 - \frac{C_3}{r_в^2} + C_4 = -\varphi_0.$$

Решая составленные уравнения совместно, получим

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\varphi_0}{2}\cdot\frac{k^2 - 1 - 2(k^2+1)\ln k}{(k^2+1)\ln k - (k^2-1)};\\ C_2 &= -\frac{\varphi_0}{2r_в^2}\cdot\frac{1}{(k^2+1)\ln k - (k^2-1)};\\ C_3 &= \frac{\varphi_0 r_в^2}{2}\cdot\frac{k^2}{(k^2+1)\ln k - (k^2-1)};\\ C_4 &= \varphi_0\frac{k^2+1}{(k^2+1)\ln k - (k^2-1)}, \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

где $k = \frac{r_н}{r_в}$.

Неизвестное пока значение угла поворота φ_0 жесткого центра можно найти из условия равновесия последнего.

Предварительно запишем по формулам (89), (91) и (101 а) значения интенсивностей внутренних силовых факторов, необходимых для составления уравнений равновесия.

Учитывая зависимости (102), получим

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -\frac{\varphi_0 D}{r_в[(k^2+1)\ln k - (k^2-1)]}\left[-(3+\mu)\frac{r}{r_в} + \right.\\ &\left. +(1-\mu)k^2\left(\frac{r_в}{r}\right)^3 + (1+\mu)(k^2+1)\frac{r_в}{r}\right]\cos\theta;\\ M_t &= \frac{\varphi_0 D}{r_в[(k^2+1)\ln k - (k^2-1)]}\left[(1+3\mu)\frac{r}{r_в} - \right.\\ &\left. -(1+\mu)(k^2+1)\frac{r_в}{r} + (1-\mu)k^2\left(\frac{r_в}{r}\right)^3\right]\cos\theta;\\ M_{rt} &= -\frac{(1-\mu)\varphi_0 D}{r_в[(k^2+1)\ln k - (k^2-1)]}\left[\frac{r}{r_в} - (k^2+1)\frac{r_в}{r} + \right.\\ &\left. + k^2\left(\frac{r_в}{r}\right)^3\right]\sin\theta;\\ Q_r &= -\frac{2\varphi_0 D}{r_в^3[(k^2+1)\ln k - (k^2-1)]}\left[2 + (k^2+1)\left(\frac{r_в}{r}\right)^2\right]\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

Сумма моментов всех сил, действующих на жесткий центр относительно оси y, перпендикулярной к плоскости действия момента $\mathfrak{M}$, выразится (фиг. 83) следующим образом:

$$\mathfrak{M} + 2\int_0^{\pi} Q_r r_в^2 \cos\theta d\theta + 2\int_0^{\pi} M_r r_в \cos\theta d\theta - 2\int_0^{\pi} M_{r\theta} r_в \sin\theta d\theta = 0.$$

Положительные направления силовых факторов соответствуют принятым ранее (см. фиг. 80).

Выполняя интегрирование и делая преобразование, получим

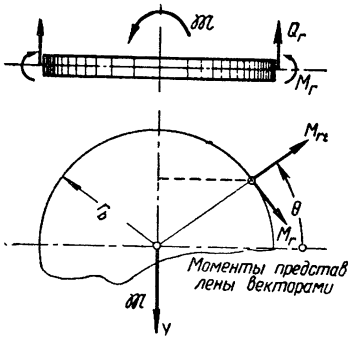
$$\mathfrak{M} = 4C_4\pi D,$$

или

$$\mathfrak{M} = \frac{4\pi D\varphi_0 (k^2+1)}{(k^2+1)\ln k - (k^2-1)}, \qquad (104)$$

тогда

$$\varphi_0 = \frac{\mathfrak{M}[(k^2+1)\ln k - (k^2-1)]}{4\pi D(k^2+1)}. \qquad (105)$$



Фиг. 83.

Теперь уже нетрудно, используя формулы (103) и (105), связать силовые факторы с внешним моментом.

Наибольший изгибающий момент имеет место вблизи внутреннего контура ($r=r_в$) при $\theta=0$:

$$M_{r\max} = -\frac{2D\varphi_0(k^2-1)}{r_в[(k^2+1)\ln k - (k^2-1)]}, \qquad (106)$$

или

$$M_{r\max} = -\frac{\mathfrak{M}}{2\pi r_в}\cdot\frac{k^2-1}{k^2+1}. \qquad (106а)$$

У внешнего контура ($r = r_н$) при $\theta = 0$

$$M_r = \frac{2D\varphi_0}{r_в}\cdot\frac{(k^2-1)}{k[(k^2+1)\ln k - (k^2-1)]}, \qquad (107)$$

или

$$M_r = \frac{\mathfrak{M}}{2\pi r_н}\frac{k^2-1}{k^2+1}. \qquad (107а)$$

Заметим, что значения для M_r в формулах (106) и (107) не зависят от коэффициента Пуассона.

Пример. Массивный грузоподъемный барабан со сплошными боковыми стенками укреплен на валу с помощью жестких ступиц.

Расчетная схема представлена на фиг. 84: l=60 *см*; a=45 *см*; $r_н$=25 *см*; $r_в$=8 *см*; d=8 *см*; h=1 *см*; P=1000 *кг*; коэффициент Пуассона материала μ=0,3.

Угол поворота ступицы по формуле (105)

$$\varphi_c = \frac{\mathfrak{M}_c}{4\pi D}\frac{[(k^2+1)\ln k - (k^2-1)]}{k^2+1} = K_c\frac{\mathfrak{M}_c}{Eh^3},$$

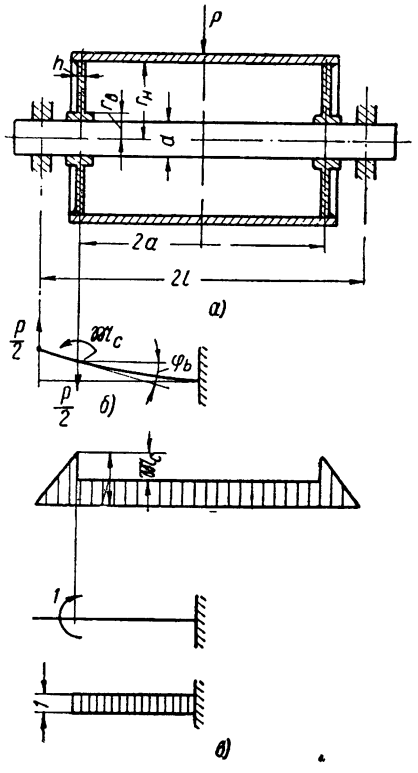
где

$$k = \frac{r_н}{r_в} = 3{,}12;$$

$$K_c = \frac{[(k^2+1)\ln k - (k^2-1)]}{k^2+1} \cdot \frac{3(1-\mu^2)}{\pi} = 0{,}282.$$

$\mathfrak{M}_c$ — момент, передаваемый боковой стенке через ступицу.

Рассмотрим изгиб вала, принимая схему его нагружения по фиг 84,*б*.



Фиг. 84.

Определим способом Верещагина (см. гл. X т. I) угол поворота $\varphi_в$ среднего сечения подступичной части вала:

$$\varphi_в = \frac{\left[\frac{P}{2}(l-a) - \mathfrak{M}_c\right] a \cdot 1}{EJ} = \frac{P(l-a)a}{EJ} - \frac{\mathfrak{M}_c a}{EJ},$$

где EJ — жесткость вала $\left(J = \frac{\pi d^4}{64}\ см^4\right)$.

По условию совместности деформации $\varphi_в = \varphi_c$. Поэтому

$$\frac{K_c \mathfrak{M}_c}{Eh^3} = \frac{P(l-a)a}{EJ} - \frac{\mathfrak{M}_c a}{EJ},$$

откуда

$$\mathfrak{M}_c = \frac{\frac{P}{2}(l-a)\cdot}{1 + \frac{K_c J}{ah^3}} = \frac{500(60-45)}{1 + \frac{0{,}282\,\pi \cdot 8^4}{64 \cdot 45 \cdot 1^3}} = 3320\ кгсм.$$

Наибольшая интенсивность радиального изгибающего момента для пластины по формуле (106а)

$$|M_r|_{max} = \frac{\mathfrak{M}_c}{2\pi r_в} \cdot \frac{k^2-1}{k^2+1} = \frac{3320(3{,}12^2-1)}{2\pi 8(3{,}12^2+1)} = 54\ кгсм.$$

Наибольшее нормальное напряжение в боковой стенке барабана

$$\sigma_{max} = \frac{6|M_r|}{h^2} = \frac{6 \cdot 54}{1^2} = 324\ кг/см^2.$$

Е. Расчет круглой пластины, нагруженной сосредоточенной силой

Рассматриваемая задача асимметричного изгиба является основной.

Действительно, любую нагрузку, воспринимаемую пластиной, при расчете можно представить как бы состоящей из конечного числа сосредоточенных сил и бесконечного множества элементарных сосредоточенных нагрузок, тогда искомые результаты могут быть получены

путем наложения решений, соответствующих отдельно взятым сосредоточенным силам.

Обращаемся к основной задаче.

Примем, что полярная ось проходит через точку O приложения силы P (фиг. 85).

Разделим мысленно пластину на две части цилиндрическим сечением радиуса $r=r_0$, проходящим через точку O.

Учитывая, что полярная ось для деформированной пластины является осью симметрии, опустим в общем решении (97) (см. разд. Г) слагаемые, включающие $\sin m\theta$.

В соответствии с этим для наружной части пластины

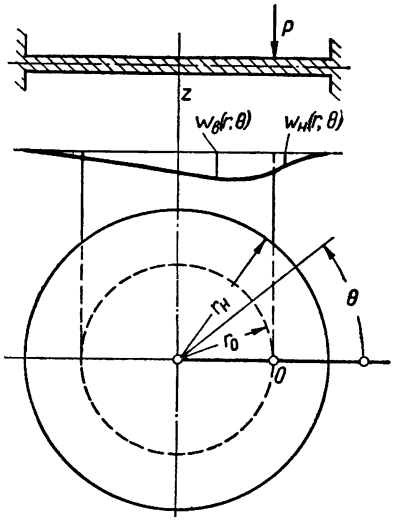
$$w_н = F_0(r) + \sum_{m=1}^{m=\infty} F_m(r)\cos m\theta, \quad (108)$$

где $F_m(r)$ при $m>1$, $F_1(r)$ и $F_0(r)$ выражаются формулами (99), (99а) и (99б) соответственно.

Аналогично для внутренней части пластины

$$w_в = \Omega_0(r) + \sum_{m=1}^{m=\infty} \Omega_m(r)\cos m\theta, \quad (109)$$

где функции $\Omega(r)$ выражаются такими же уравнениями, что и функции $F(r)$ [см. формулы (99), (99а) и (99б)].



Фиг. 85.

Постоянные в функциях $\Omega(r)$ обозначим буквами B с соответствующими индексами.

Из условия, что в центре пластины прогиб, углы уклона упругой поверхности и интенсивность моментов должны иметь конечное значение, можно заключить, что

$$\left.\begin{aligned} &B_{30}=B_{40}=0\\ &B_{31}=B_{41}=0\\ &\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\\ &B_{2m}=B_{4m}=0 \end{aligned}\right\}. \quad (110)$$

Нулю равны коэффициенты [см. формулу (110)] у всех слагаемых, включающих $\ln\frac{r}{r_н}$ или координату r в отрицательной степени.

$B_{42}=0$ по условию однозначности прогиба в центре пластины.

Таким образом, неизвестными пока остаются для внутренней части пластины по две постоянные и для наружной ее части по четыре постоянные у каждого члена ряда.

Для их определения должны быть использованы граничные условия.

В частности, для пластины, заделанной по наружному контуру радиуса $r_н$ (см. фиг. 85),

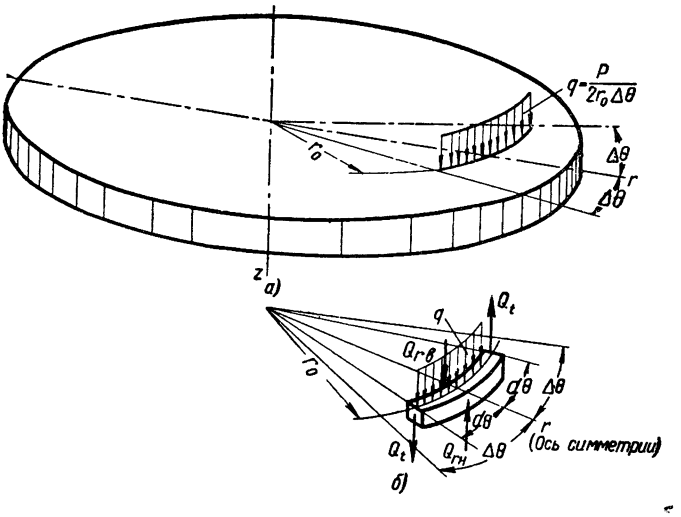
$$(w_н)_{r=r_н}=0 \text{ и } \left(\frac{\partial w_н}{\partial r}\right)_{r=r_н}=0. \quad (111)$$

Для пластины, свободно опертой по наружному контуру,

$$(w_н)_{r=r_н}=0 \text{ и } (M_r^н)_{r=r_н}=0. \tag{111а}$$

На контуре сопряжения радиуса r_0

$$\left.\begin{aligned}(w_в)_{r=r_0}&=(w_н)_{r=r_0}\\ \left(\frac{\partial w_в}{\partial r}\right)_{r=r_0}&=\left(\frac{\partial w_н}{\partial r}\right)_{r=r_0}\\ (M_r^в)_{r=r_0}&=(M_r^н)_{r=r_0}\end{aligned}\right\}. \tag{112}$$



Фиг. 86.

В соответствии с первой формулой (89) и учетом других условий на контуре $r=r_0$ третье соотношение (112) может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial^2 w_в}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}=\left(\frac{\partial^2 w_н}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}. \tag{112а}$$

Необходимое шестое граничное условие может быть получено из рассмотрения закона изменения интенсивности поперечной силы Q_r по радиусу.

По любому из радиусов при $\theta\neq 0$ функция $Q(r,\ \theta)$, выражающая интенсивность поперечной силы, остается непрерывной на всем протяжении радиуса от 0 до $r_н$. Лишь по радиусу, проходящему через точку O $(\theta=0)$, в месте приложения сосредоточенной силы P функция $Q_r\ (r, 0)$ претерпевает разрыв.

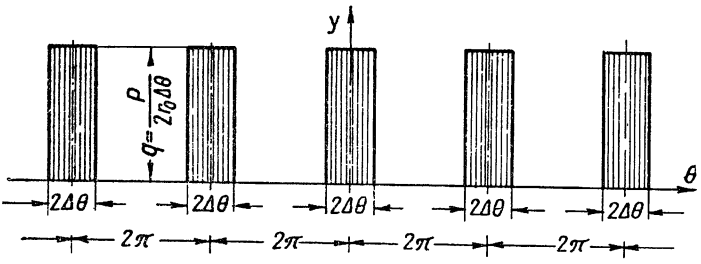
Рассмотрим сосредоточенную силу как нагрузку, распределенную на малом участке дуги, радиуса r_0, с центральным углом $2\Delta\theta$, расположенным симметрично относительно полярной оси (фиг. 86). Тогда интенсивность распределенной нагрузки будет

$$q=\frac{P}{2r_0\Delta\theta}. \tag{113}$$

Разложим в ряд Фурье функцию $y=f(\theta)$, представленную на фиг. 87 и выражающую на интервале $-\Delta\theta \leqslant \theta \leqslant \Delta\theta$ интенсивность q [см. формулу (113)].

Поскольку рассматриваемая функция является четной с периодом 2π, имеем

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} a_m \cos m\theta. \tag{114}$$



Фиг. 87.

Интегрируя функцию (114) в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, получаем

$$\int_{-\pi}^{+\pi} y\,d\theta = \int_{-\Delta\theta}^{+\Delta\theta} \frac{P}{2r_0\Delta\theta}\,d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{a}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} a_m \cos m\theta\right) d\theta,$$

откуда

$$\frac{P}{2r_0\Delta\theta}\,2\Delta\theta = \pi a_0$$

и

$$a_0 = \frac{P}{2\pi r_0}.$$

Умножим теперь левую и правую часть уравнения (114) на $\cos n\theta$, где n — некоторое целое число, и проинтегрируем полученные функции в пределах от $-\pi$ до $+\pi$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{+\pi} y \cos n\theta\,d\theta = \int_{-\Delta\theta}^{+\Delta\theta} \frac{P}{2r_0\Delta\theta} \cos n\theta\,d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{a_0}{2} \cos n\theta + \sum_{m=1}^{m=\infty} a_m \cos m\theta \cos n\theta\,d\theta\right],$$

откуда, учитывая, что при $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos m\theta \cos n\theta\,d\theta = 0,$$

имеем

$$\frac{P}{2r_0\Delta\theta}\left(\frac{\sin m\theta}{m}\right)\Bigg|_{-\Delta\theta}^{+\Delta\theta} = a_m\pi$$

или

$$\frac{P}{r_0}\left(\frac{\sin m\Delta\theta}{m\Delta\theta}\right)=a_m\pi$$

и

$$a_m=\frac{P}{\pi r_0}\left(\frac{\sin m\Delta\theta}{m\Delta\theta}\right).$$

Подставляем установленные значения коэффициентов a_0 и a_m в уравнение (114). Тогда

$$y=\frac{P}{\pi r_0}\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{\sin m\Delta\theta}{m\Delta\theta}\right)\cos m\theta\right]. \tag{115}$$

Для случая сосредоточенной силы следует принять, что угол $\Delta\theta$ стремится к нулю.

Учитывая, что

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin m\Delta\theta}{m\Delta\theta}=1,$$

получим

$$y=\frac{P}{\pi r_0}\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{m=\infty}\cos m\theta\right). \tag{116}$$

Шестое граничное условие, отражающее закон изменения интенсивности поперечной силы Q_r по радиусу, может быть записано с учетом ранее принятого правила знаков (фиг. 86, *б*) следующим образом:

$$Q_{rв}2rd\theta+q2rd\theta-Q_{rн}(r+dr)2d\theta=0,$$

откуда

$$Q_{rн}-Q_{rв}=q.$$

Теперь, учитывая первую зависимость (94) и формулу (116), окончательно получим

$$D\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2w_н-D\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2w_в=\frac{P}{\pi r_0}\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{m=\infty}\cos m\theta\right). \tag{117}$$

Из шести уравнений (111), (112), (112 а) и (117) можно вычислить все постоянные интегрирования, отличные от нуля, и выразить функции $F_m(r)$ и $\Omega_m(r)$ в следующем виде:

при $m>1$

$$F_m(r)=\frac{Pr_0^m}{8m(m-1)\pi D}\left\{\frac{r^m}{2r_н^{2m}}\left[(m-1)r_0^2-mr_н^2+(m-1)r^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{m(m-1)r_0^2r^2}{(m+1)r_н^2}\right]+\frac{1}{r^m}\left(r^2-\frac{m-1}{m+1}r_0^2\right)\right\};$$

$$F_1(r)=-\frac{Pr_0^3}{16\pi D}\left[\frac{1}{r}+\frac{2(r_н^2-r_0^2)r}{r_н^2r_0^2}-\frac{(2r_н^2-r_0^2)r^3}{r_н^4r_0^2}-\frac{4r}{r_0^2}\ln\frac{r_н}{r}\right];$$

$$F_0(r)=\frac{P}{8\pi D}\left[(r^2+r_0^2)\ln\frac{r}{r_н}+\frac{(r_н^2+r_0^2)(r_н^2-r^2)}{2r_н^2}\right]; \tag{118}$$

при $m > k$

$$\Omega_m(r) = \frac{Pr_0^m}{8m(m-1)\pi D}\left\{\frac{r^m}{r_н^{2m}}\left[(m-1)r_0^2 - mr_н^2 + \frac{r_н^{2m}}{r_0^{2m-2}}\right] + \right.$$

$$\left. + (m-1)\frac{r^{m+2}}{r_н^{2m}}\left[1 - \frac{m}{m+1}\cdot\frac{r_0^2}{r_н^2} - \frac{1}{m+1}\left(\frac{r_н}{r_0}\right)^{2m}\right]\right\};$$

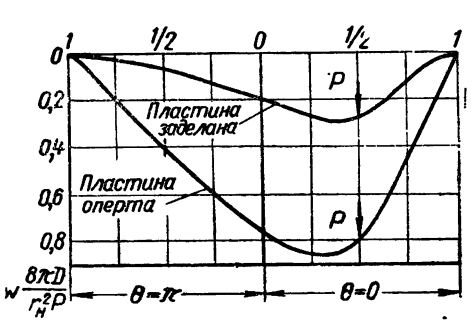
$$\Omega_1(r) = -\frac{Pr_0^3}{16\pi D}\left[\frac{2(r_н^2 - r_0^2)r}{r_н^2 r_0^2} + \frac{(r_н^2 - r_0^2)^2 r^3}{r_н^4 r_0^4} - \frac{4r}{r_0^2}\ln\frac{r_н}{r}\right];$$

$$\Omega_0(r) = \frac{P}{8\pi D}\left[(r^2 + r_0^2)\ln\frac{r}{r_н} + \frac{(r_н^2 + r^2)(r_н^2 - r_0^2)}{2r_н^2}\right].$$

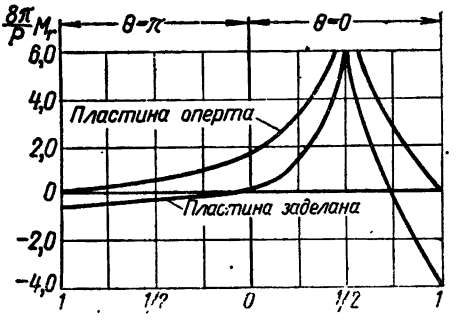
Пользуясь функциями (118), можно показать, что прогиб в точке O приложения силы P равен

$$w(r_0, 0) = \frac{P}{16\pi D}\cdot\frac{(r_н^2 - r_0^2)^2}{r_н^2}. \qquad (119)$$

При $r_0 = 0$ (центрально приложенная сила) формула (119) обращается в зависимость, приведенную для этого случая в табл. 2.



Фиг. 88.



Фиг. 89.

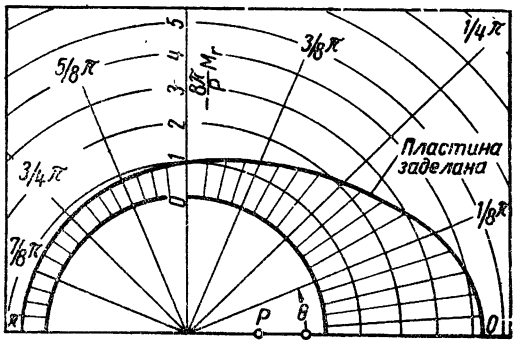
На фиг. 88 представлены меридиональные сечения срединной поверхности для двух пластин (опертой и заделанной), нагруженных сосредоточенной силой P в плоскости рассматриваемых меридиональных сечений, на радиусе $r_0 = \frac{r_н}{2}$, в предположении, что коэффициент Пуассона материала пластины $\mu = 0{,}3$.

По оси абсцисс на фиг. 88 отложены отношения $\frac{r}{r_н}$, а по оси ординат — коэффициенты, равные $\frac{8\pi D w}{Pr_н^2}$, характеризующие прогибы w пластины при единичной нагрузке.

Правая сторона диаграммы (фиг. 88) соответствует радиальному сечению пластины при $\theta = 0$, а левая сторона $\theta = \pi$.

На фиг. 89 представлены графики, характеризующие величину интенсивности момента M_r в точках меридионального сечения в плоскости действия силы для тех же двух пластин.

Наконец, на фиг. 90 для рассматриваемых пластин в полярной системе координат показан закон изменения интенсивности момента M_r по наружному периметру. Для свободно опертой пластины на наружном контуре $M_r = 0$.



Фиг. 90.

Более подробное освещение вопросов, связанных с расчетом асимметрично нагруженных пластин можно найти в работах [4], [6], [13], [17], [24], [26], [27], [33], [34].

Для практики машиностроения может также представить интерес расчет радиально подкрепленных круглых пластин [2], [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В. Л., К расчету круглых симметрично нагруженных пластинок, «Сборник трудов кафедры «Сопротивление материалов» МВТУ», разд. III «Расчет оболочек и пластин», изд. МВТУ, 1947.

2. Бицено К. и Граммель Р., Техническая динамика, т. I, изд. ГИТТЛ, 1950.

3. Вайнберг Д. В., Расчет дисков турбин по методу начальных параметров, «Сборник трудов Института строительной механики АН УССР» № 13, 1949.

4. Вайнберг Д. В., Напряженное состояние составных дисков и пластин, изд. АН УССР, 1952.

5. Вольмир А. С.. Изгиб круглых пластинок, изд. ВВИА имени Жуковского, 1949.

6. Дименберг Ф. М., Об одном случае изгиба круглой пластинки, «Вестник инженеров и техников» № 7, 1938.

7. Динник А. Н., Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости, избр. труды, т. II, гл. III, изд. АН УССР, 1955.

8. Жемочкин Б. Н., Расчет круглых плит на упругом основании, изд ВВИА, 1938.

9. Киселев В. А.. Метод начальных параметров при расчете круглых пластинок с осесимметричной нагрузкой, сб. «Исследования по теории сооружений», вып. VI, Изд. лит. по строит. и архитектуре, 1954.

10. Китовер К. А, Применение функциональных прерывателей к расчету симметрично нагруженных круговых и кольцевых пластинок, «Вестник инженеров и техников» № 11, 1939.

11. Китовер К. А., Круглые тонкие плиты, Изд. лит. по строит. и архитектуре, 1953.

12. Коваленко А. Д., Пластины и оболочки в роторах турбомашин, изд. АН УССР, 1955

13. Лурье А. И., Некоторые задачи об изгибе круглой пластинки, «Прикладная математика и механика», т. IV, № 1, 1940.

14 Малинин Н. Н, Расчет дисковых пружин, «Сборник трудов МВТУ», вып. 11 «Расчеты на прочность в машиностроении», Машгиз, 1950.

15. Малинин Н. Н., Расчет круглых и кольцевых симметрично нагруженных пластин переменной толщины, «Сборник трудов МВТУ», вып. 26 «Расчеты на проч-

ность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций», Машгиз, 1953.

16. Панов Д. Ю., О больших прогибах круглой пластинки, «Труды ЦАГИ», вып. 450, 1939.

17. Папкович П. Ф., Строительная механика корабля, т. II, Судпромгиз, 1941.

18. Переходцева А. М., Расчет на изгиб круглых кольцевых пластин, «Труды ЦАГИ» вып. 403, 1939.

19. Пономарев С. Д., Графоаналитический метод расчета круглых симметрично-нагруженных пластин, «Вестник машиностроения» № 2, 1953.

20. Савин Г. Н. и Флейшман Н. П., Приближенное решение задачи изгиба кольцевой круглой плиты с подкрепленным краем, «Инженерный сборник АН СССР», т. VIII, 1950.

21. Соколов С. Н., Обобщенное уравнение для круглой и кольцеобразной пластинок, симметрично нагруженных, «Сборник трудов МИХМ», вып. 1, 1935.

22. Соколов С. Н., Изгиб круглых и кольцевых пластинок, подкрепленных кольцевыми ребрами, сб. «Расчеты на прочность, жесткость, устойчивость и колебания», Машгиз, 1955.

23. Тимошенко С. П., Теория упругости, ОНТИ, 1934.

24. Тимошенко С. П., Пластины и оболочки, Гостехиздат, 1948.

25. Феодосьев В. И., Упругие элементы точного приборостроения, Оборонгиз, 1949.

26. Фридман М. М., Изгиб круглой плиты сосредоточенными силами, «Прикладная математика и механика», т. XV, вып. 2, 1951.

27. Чанкветадзе Г. Г., Изгиб круглой пластинки, опертой в нескольких точках. «Инженерный сборник», т. XIV, изд. АН СССР, 1953.

28 Conway H. D., The Bending of Symmetrically Loaded Circular Plates of Variable Thickness, «Journal of Applied Mechanics», v. 15, N 1, 1948.

29. Conway H. D., Note on the Bending of Circular Plates of Variable Thickness, «Journal of Applied Mechanics», v. 16, N 2, 1949.

30 Conway H. D., Axially Symmetrical Plates with Linearly Varying Thickness, «Journal of Applied Mechanics», v. 18, N 2, 1951.

31. Ensslin M., Beanspruchung einess ebenen Scheibenkolbens mit zwei Böden und ohne Rippen, «Dingler Polit. Journal», Bd. 322, 1907.

32. Nash W. A., Effect a Concentric Ring of Stiffness and Strength of a Circular Plate, «Journal of Applied Mechanics», v 15, N 1, 1948.

33. Reismann H., Bending and Buckling of a Elastically Restrained Circular Plate, «Journal of Applied Mechanics», v. 19, N 2, 1952.

34. Reissner H., Über die unsymmetrische Biegung dünner Kreisringplatten, «Ingenieur-Archiv», Bd. 1, Heft 1, 1929.

35. Wahl A. M., «Mechanical Springs» Cleveland, OHIO, USA, 1944.

ТЕОРИЯ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН И ЕЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Расчет прямоугольных пластин по сравнению с круглыми осесимметричными представляет некоторые технические трудности. Дело в том, что для прямоугольных пластин задача решается в функции двух независимых переменных, тогда как напряжения и деформации у круглой пластины при осесимметричной нагрузке зависят только от одного независимого переменного (радиуса r).

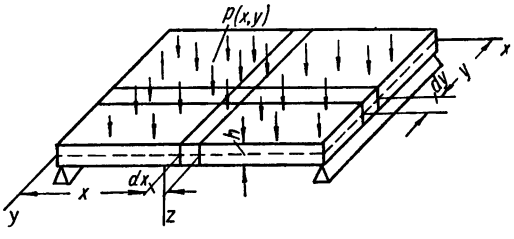
Основные дифференциальные уравнения для прямоугольных пластин выводятся в декартовой системе координат. Составим эти уравнения в предположении сохранения гипотез, высказанных выше, т. е. будем при выводе считать по-прежнему прогибы пластины малыми по сравнению с ее толщиной, и, кроме того, примем гипотезу неизменности нормали и гипотезу ненадавливания слоев пластины (см. гл. I).

§ 1. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

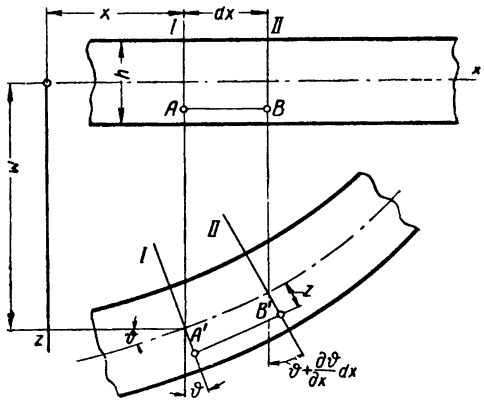
А. Связь между перемещениями, деформациями и напряжениями

Отнесем пластину (не обязательно прямоугольную) постоянной толщины h к системе координат x, y, z (фиг. 91). Оси x и y расположим в срединной плоскости, а ось z направим вниз.

Обозначим перемещение точек срединной поверхности пластины в направлении оси z через w и рассмотрим сечение пластины плоскостью $y=\text{const}$ до и после деформации (фиг. 92).



Фиг. 91.



Фиг. 92.

Нормаль *I* повернется на угол

$$\vartheta = -\frac{\partial w}{\partial x},$$

а нормаль *II* на

$$\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx.$$

Волокно AB, находящееся на расстоянии z от срединной поверхности, при изгибе пластины несколько удлинится и будет иметь новую длину $A'B'$.

Относительное изменение длины

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB}.$$

Но

$$AB = dx, \text{ а } A'B' = dx + z\frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx,$$

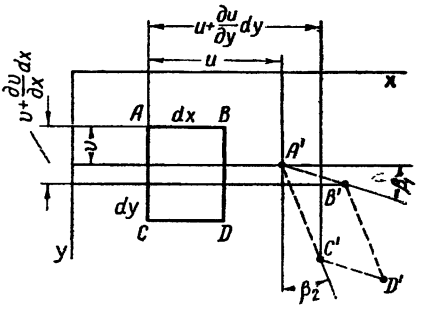
поэтому

$$\varepsilon_x = +z\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Аналогично

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{2}$$

Определим теперь угол сдвига γ_{xy} в плоскости $z = \text{const}$. Рассмотрим для этого прямоугольник $ABCD$, лежащий в этой плоскости (фиг. 93), до и после деформации ($A'B'C'D'$). Перемещения вдоль осей x и y обозначим через u и v.



Фиг. 93.

Искомый угол сдвига

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2.$$

Но

$$\beta_1 = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \beta_2 = \frac{\partial u}{\partial y},$$

поэтому

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Согласно фиг. 92

$$u = z\vartheta = z\frac{\partial w}{\partial x};$$

аналогично

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y};$$

таким образом, получаем

$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{3}$$

Далее, по закону Гука

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y);$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x);$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}.$$

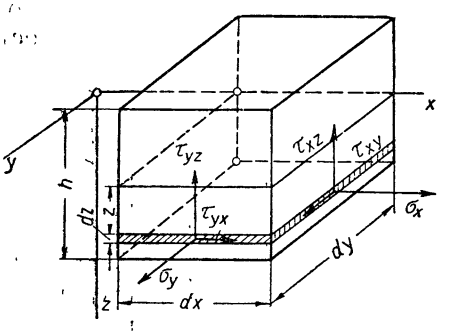
Согласно формулам (1) — (3)

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\
\sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);\\
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Следует отметить, что в гранях элемента (фиг. 94) могут возникнуть не только напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy}, но и касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} (фиг. 94).

Б. Внутренние силовые факторы и уравнения равновесия

В каждой грани элемента пластины (фиг. 94) все внутренние силы могут быть приведены, очевидно, в общем случае к шести силовым факторам: нормальной силе, вертикальной поперечной силе, горизонтальной поперечной (сдвигающей) силе и к трем моментам — крутящему и и двум изгибающим.



Фиг. 94.

Однако момент, лежащий в срединной плоскости, для всех граней выделенного элемента пластины равен нулю (точнее, является величиной высшего порядка малости), поскольку размеры dx и dy выбраны настолько малыми, что распределение всех напряжений вдоль отрезков dx и dy можно считать равномерным.

Легко также показать, что нормальные силы N_x и N_y и сдвигающие силы, параллельные срединной плоскости, S_{xy} и S_{yx} также равны нулю, что следует из выведенных выше выражений (4)

В самом деле,

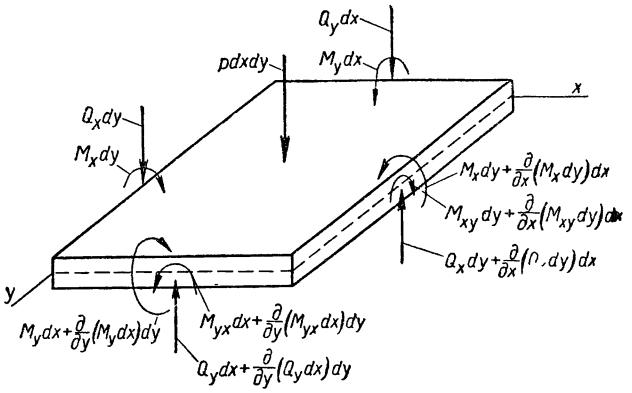
$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x dy dz = -\frac{Edy}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z dz = 0;$$

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y dx dz = -\frac{Edx}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z dz = 0;$$

$$S_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dxdz = -\frac{Edx}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} zdz = 0;$$

$$S_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} dydz = -\frac{Edy}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} zdz = 0.$$

Таким образом, в гранях элемента (фиг. 94) возникают только изгибающие моменты в вертикальной плоскости, крутящие моменты и поперечные силы (фиг. 95).



Фиг. 95.

При переходе от грани x к $x+dx$ и от y к $y+dy$ все силовые факторы получают соответствующие приращения.

Введем следующие обозначения для интенсивности усилий, т. е. для внутренних сил и моментов, отнесенных к единицам длин соответствующих граней. В плоскости, перпендикулярной к оси x (фиг. 95), интенсивность изгибающего момента M_x *кгсм/см*; интенсивность крутящего момента M_{xy} *кгсм/см*; интенсивность поперечной силы Q_x *кг/см*. Соответствующие моменты и силы на грани dy элемента (фиг. 95) будут

$$M_x dy, \quad M_{xy} dy, \quad Q_x dy.$$

В плоскости, перпендикулярной к оси y, соответственно имеем M_y, M_{yx} и Q_y, а также $M_y dx$, $M_{yx} dx$ и $Q_y dx$.

Указанные интенсивности сил и моментов в дальнейшем для сокращения будем называть просто силами и моментами.

Согласно выражениям (4) нетрудно выразить моменты в функции w.

Очевидно, что

$$M_x dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x dyzdz; \quad M_y dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y dxzdz;$$

$$M_{xy}dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy}dyzdz; \quad M_{yx}dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx}dxzdz$$

или

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz;$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz.$$

Подставляя значения σ_x, σ_y и τ_{xy}, по формулам (4) получим

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]; \\ M_y &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]; \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \tag{6}$$

эту величину по-прежнему будем называть жесткостью пластины на изгиб.

Элемент пластины, изображенный на фиг. 95, после приложения к нему внутренних сил и моментов, а также внешней силы $pdxdy$ [где p — внешнее давление, $p = f(xy)$] должен находиться в равновесии.

На фиг. 95 внутренние силовые факторы представлены в предположении, что они положительны.

Спроектируем систему сил на ось z, а затем возьмем сумму моментов всех сил относительно осей x и y.

Имеем

$$pdxdy + Q_x dy - \left[Q_x dy + \frac{\partial}{\partial x}(Q_x dy)\,dx\right] + Q_y dx - \left[Q_y dx + \frac{\partial}{\partial y}(Q_y dx)\,dy\right] = 0;$$

$$M_y dx + \frac{\partial}{\partial y}(M_y dx)\,dy - M_y dx + \left[Q_y dx + \frac{\partial}{\partial y}(Q_y dx)\,dy\right]dy - M_{xy}dy + \left[M_{xy}dy + \frac{\partial}{\partial x}(M_{xy}dy)\,dx\right] = 0;$$

$$-\left[M_x dy + \frac{\partial}{\partial x}(M_x dy)\,dx\right] + M_x dy - \left[Q_x dy + \frac{\partial}{\partial x}(Q_x dy)\,dx\right]dx - \left[M_{yx}dx + \frac{\partial}{\partial y}(M_{yx}dx)\,dy\right] + M_{yx}dx = 0,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}; \\ Q_y &= -\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}; \\ Q_x &= -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Подставим теперь выражения моментов M_x, M_y и M_{xy} (5) в последние уравнения равновесия (7). При этом будем учитывать, что толщина пластины h, а следовательно, и жесткость D не зависят от x и y. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]; \\ Q_y &= D\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Операцию

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

принято обозначать значком ∇^2, т. е.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{9}$$

Поэтому можно написать

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w; \\ Q_y &= D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Возвращаясь к первому уравнению равновесия (7), получим

$$p = D\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla^2 w + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\nabla^2 w\right],$$

или

$$p = D\nabla^2\nabla^2 w. \tag{11}$$

Если это выражение раскрыть, то его можно написать еще и так:

$$\frac{p}{D} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \tag{12}$$

Это и есть дифференциальное уравнение пластины в окончательном его виде, выведенное в декартовой системе координат.

Заметим, что оно справедливо не только для прямоугольных, но и вообще для любых пластин (в пределах указанных выше ограничений).

§ 2. ОСНОВНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИНЫ

Функцию $\varphi(x,y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\nabla^2\varphi = 0,$$

принято называть гармонической функцией, а функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = 0, \tag{13}$$

бигармонической.

Заметим, между прочим, что всякая гармоническая функция φ является одновременно бигармонической функцией.

Интеграл уравнения (11) или (12) может быть написан в виде

$$w = f(x, y) + \Phi(x, y), \tag{14}$$

где функция $f(x,y)$ — частное решение уравнения (12), которое в обычных случаях может быть всегда найдено, а $\Phi(x,y)$ — бигармоническая функция, подобрать которую, вообще говоря, не составляет труда.

Однако не любая бигармоническая функция, удовлетворяющая дифференциальной зависимости (12), является решением рассматриваемой задачи. Единственным решением является лишь то, которое при этом удовлетворяет еще и заданным граничным условиям, а такую функцию найти уже не так просто.

В этом-то и заключается основная трудность решения задачи не только для прямоугольных, но и вообще для пластин любого очертания.

Интегрировать уравнение (12) приходится обычно в рядах.

Исключение, как известно, представляют круглые симметрично нагруженные пластины, для которых уравнение (12), преобразованное к полярной системе координат, решается в квадратурах. Эта задача рассмотрена в гл. I т. II. Другое известное исключение представляет задача об определении прогибов защемленной по контуру эллиптической пластины, нагруженной равномерно распределенным давлением p. Для такой пластины функция w определяется точно в виде

$$w = \frac{p}{8D}\,\frac{\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2}{\dfrac{3}{a^4} - \dfrac{1}{a^2b^2} + \dfrac{3}{b^4}},$$

где a и b — полуоси эллиптического контура.

Итак, в зависимости от способа закрепления пластины граничные условия для функции w должны быть заданы определенным образом.

Остановимся на некоторых типичных граничных условиях.

1. Защемленный край. В этом случае для всех участков защемления, очевидно, прогиб

$$w = 0$$

и угол поворота в плоскости, перпендикулярной краю,

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

где y — расстояние в направлении нормали к защемленному краю.

Заметим, между прочим, что при защемлении контура также и

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

где x — координата, измеряемая вдоль защемленного края.

Это условие выполняется, однако, само собой, поскольку на контуре w тождественно равно нулю.

2. Свободно опертый край. Для такого способа закрепления на контуре, как и в предыдущем случае, $w=0$. Кроме того, на контурной боковой поверхности равны нулю нормальные напряжения σ_y.

Согласно выражению (4) это условие можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

но поскольку на краю w тождественно равно нулю, то

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

и граничное условие окончательно принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{15}$$

Существенно отметить, что на свободной опоре крутящий момент M_{xy} [см. формулу (5)] не может быть тождественно равен нулю. Это легко показать.

Если бы момент M_{xy} был равен нулю, то согласно соотношению (5) для края соблюдалось бы условие

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0.$$

Но отсюда следовало бы, что угол поворота на свободной опоре $\frac{\partial w}{\partial y}$ не зависит от x, что в общем случае нагружения пластины, естественно, не соблюдается.

В этом обстоятельстве находит, например, объяснение тот факт, что прямоугольная свободно опертая по контуру пластина в общем случае нагружения обнаруживает тенденцию к поднятию углов.

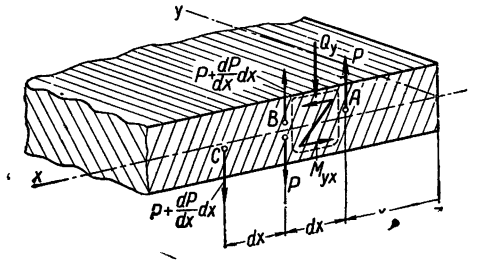
Для того чтобы углы пластины не поднимались (и было соблюдено указанное условие $w=0$), необходимо, очевидно, либо приложить по контуру крутящие моменты, распределенные соответствующим образом, что конструктивно неосуществимо, либо же неподвижно закрепить углы пластины. В последнем случае в углах возникнут сосредоточенные реактивные силы, а распределенные реакции боковых опор изменят свою величину.

3. Свободно висящий край. В этом случае на боковой поверхности пластины равны нулю все три компонента напряжений:

$$\sigma_y, \quad \tau_{yx}, \quad \tau_{yz}.$$

Это условие равносильно требованию, чтобы обращались в ноль одновременно изгибающий момент M_y, перерезывающая сила Q_y и крутящий момент M_{yx}.

Однако в рассматриваемой задаче все три условия не могут быть выполнены одновременно. Это является следствием принятой гипотезы неизменности нормали, согласно которой накладывается определенное условие на деформацию пластины. Теперь же, после потери как бы степени свободы, уже не представляется возможным удовлетворить точно всем условиям на контуре.



Фиг. 96.

Полученное противоречие в пределах точности гипотезы неизменности нормали легко преодолевается объединением двух последних граничных условий в одно. Именно, крутящий момент на контуре можно заменить некоторым добавочным распределенным перерезывающим усилием Q_1. Действительно, рассмотрим отрезок контура длиной dx (фиг. 96). Горизонтальные касательные напряжения τ_{yx} на участке dx дают крутящий момент $M_{yx}\,dx$.

Этот же момент может быть получен в виде пары сил P с плечом dx, если принять, что $P = M_{yx}$ *кгсм/см*.

Аналогичную замену можно произвести для каждого элементарного участка длиной dx. Складывая затем силы в каждой точке, подобной точке B, получим результирующую силу

$$\frac{\partial P}{\partial x}\cdot dx$$

Разделив эту величину на dx, получим дополнительную поперечную силу интенсивности Q_1:

$$Q_1 = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}.$$

В крайних точках свободно висящего пролета останутся сосредоточенные силы $P_1 = M_{yx1}$ и $P_2 = M_{yx2}$.

Если свободно висящий край граничит с опертым или защемленным краем, то эти силы принимать во внимание не следует, поскольку они будут погашены реакциями опор. В случае, если свободно висящий край граничит с другим свободно висящим краем, необходимо считать, что в точке сопряжения краев (на углу) возникает сосредоточенная сила. Она в этом случае должна приниматься во внимание.

Таким образом, интенсивность полной перерезывающей силы на контуре, или, как ее называют, реакция опоры, учитывая положительное направление Q_y [см. фиг. 95 и 96], будет равна

$$Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}.$$

Следовательно, для свободно висящего края взамен двух условий $M_{yx} = 0$ и $Q_y = 0$ можно принять одно условие:

$$Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0. \qquad (16)$$

Изложенная выше замена крутящего момента перерезывающей силой, или, точнее, замена горизонтальных касательных напряжений вер-

тикальными, существенным образом изменяет напряженное состояние лишь в непосредственной близости от контура. По мере удаления от контура вызванное этой заменой возмущение напряженного состояния быстро выравнивается.

Таким образом, для свободно висящего края можно принять следующие два граничных условия:

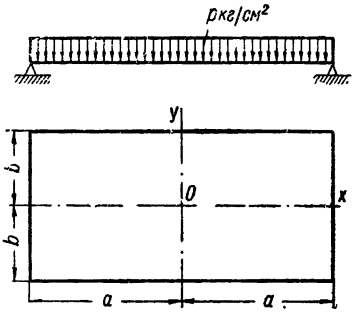
$$M_y = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

и

$$Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0. \tag{17}$$

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Пример 1. В качестве первого простейшего примера рассмотрим прямоугольную пластину со сторонами $2a$ и $2b$, свободно опирающуюся по периметру и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой p *кг/см*^{2} (фиг. 97).



Фиг. 97.

Прежде всего заметим, что плита деформируется симметрично относительно осей x и y, и поэтому функция w в заданной системе координат относительно x и y будет четной функцией.

Напомним, что четной функцией $f(x)$ называется такая функция, для которой

$$f(+x) = f(-x).$$

Для нечетной функции

$$f(+x) = -f(-x).$$

Функция w при указанных условиях закрепления должна обращаться в ноль на контуре пластины. Кроме того, должны обращаться в ноль при $x = \pm a$ момент M_x и при $y = \pm b$ момент M_y.

Согласно условию (15) имеем

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=\pm a} &= 0; \\ \left|\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=\pm b} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Функцией w зададимся в виде.

$$w = f(x) + \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a} + B_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a}\right) \sin \frac{n\pi (a+x)}{2a}, \tag{19}$$

где $f(x)$ — частное решение уравнения (12).

Частное решение для большей простоты удобнее всего выбирать в зависимости только от одного переменного x или y. В рассматриваемом случае $f(x)$ зависит только от x. A_n и B_n — неопределенные постоянные.

Каждый член суммы, входящей в зависимость (19), при любых значениях постоянных A_n и B_n удовлетворяет бигармоническому уравнению (13) и является функцией четной как относительно переменного x, так и относительно y. Кроме того, при $x = \pm a$ каждый член суммы независимо от величин A_n и B_n обращается в ноль, точно так же обращаются в ноль и вторые производные от этих же слагаемых по x и по y.

Функцию $f(x)$ найдем из уравнения (12).

Поскольку $f(x)$ не зависит от y, то из уравнения (12) получаем

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{p}{D}.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{p}{D}\left(\frac{x^4}{24} + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta\right);$$

α, β, γ и δ — произвольные постоянные.

Функция $f(x)$ должна быть четной, поэтому $\alpha=\gamma=0$

Согласно первому из условий (18) и требованию равенства нулю функции w при $x=\pm a$ имеем

$$\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=\pm a} = 0 \quad \text{и} \quad |w|_{x=\pm a} = 0.$$

Отсюда, учитывая свойства членов, стоящих под знаком Σ в выражении (19), имеем

$$\beta = -\frac{a^2}{4}; \quad \delta = \frac{5a^4}{24}.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{p}{D}\left(\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{4}a^2x^2 + \frac{5}{24}a^4\right).$$

и

$$w = \frac{p}{24D}(x^4 - 6a^2x^2 + 5a^4) + \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\left(A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi y}{2a} + B_n y \operatorname{sh}\frac{n\pi y}{2a}\right)\sin\frac{n\pi(a+x)}{2a}. \tag{20}$$

Это выражение w при любых значениях A_n и B_n удовлетворяет всем условиям на краях $x = \pm a$. Теперь подберем величину постоянных A_n и B_n так, чтобы удовлетворялись условия

$$|w|_{y=\pm b} = 0 \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=\pm b} = 0. \tag{21}$$

Для этого первую алгебраическую часть выражения (20) разложим в ряд по синусам:

$$\frac{p}{24D}(x^4 - 6a^2x^2 + 5a^4) = \sum_{1,3\ldots}^{\infty}\alpha_n \sin\frac{n\pi(a+x)}{2a},$$

где коэффициент α_n по правилам разложения в тригонометрический ряд определяется выражением

$$\alpha_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} f(x)\sin\frac{n\pi(a+x)}{2a}\,dx.$$

После интегрирования получаем

$$\alpha_n = \frac{32pa^4}{(\pi n)^5 D}(1 - \cos\pi n),$$

откуда следует, что при четных n $\alpha_n = 0$, а при нечетных

$$\alpha_n = \frac{64pa^4}{(\pi n)^5 D}.$$

Теперь выражение (20) перепишется в виде

$$w = \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\left[\frac{64pa^4}{(\pi n)^5 D} + A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi y}{2a} + B_n y \operatorname{sh}\frac{n\pi y}{2a}\right]\sin\frac{n\pi(a+x)}{2a}.$$

Для того чтобы условия (21) удовлетворялись при любом значении x, необходимо, чтобы этим условиям удовлетворяло каждое слагаемое последней суммы, поэтому

$$A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n b}{2a} + B_n b \operatorname{sh}\frac{\pi n b}{2a} = -\frac{64 p a^4}{(\pi n)^5 D};$$

$$A_n \frac{\pi n}{2a}\operatorname{ch}\frac{\pi n b}{2a} + B_n\left[2\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a} + b\frac{n\pi}{2a}\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}\right] = 0.$$

Отсюда

$$A_n = -\frac{32 p a^4}{(\pi n)^5 D}\cdot\frac{2 + \frac{\pi n b}{2a}\operatorname{th}\frac{\pi n b}{2a}}{\operatorname{ch}\frac{\pi n b}{2a}};$$

$$B_n = \frac{32 p a^4}{(\pi n)^5 D}\cdot\frac{\frac{\pi n}{2a}}{\operatorname{ch}\frac{\pi n b}{2a}}.$$

Теперь выражение (20) для w может быть написано в следующем окончательном виде:

$$w = \frac{p(1-\mu^2)}{2Eh^3}\left\{x^4 - 6a^2x^2 + 5a^4 + \frac{1536a^4}{\pi^4}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^4\operatorname{ch}\frac{\pi n b}{2a}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[-\left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a}\operatorname{th}\frac{\pi n b}{2a}\right)\operatorname{ch}\frac{\pi n y}{2a} + \frac{y}{4a}\operatorname{sh}\frac{\pi n y}{2a}\right]\sin\frac{\pi n(a+x)}{2a}\right\}. \qquad (22)$$

Максимальный прогиб имеет место в центре пластины.

При $x=y=0$ имеем

$$w_0 = \frac{p a^4(1-\mu^2)}{2Eh^3}\left[5 - \frac{1536}{\pi^4}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n^4\operatorname{ch}\frac{\pi n b}{2a}}\left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a}\operatorname{th}\frac{\pi n b}{2a}\right)\right].$$

При $\frac{b}{a} = 1$, т. е., например, для квадратной пластины,

$$w_0 = 0{,}762\frac{p a^4}{h^3}\cdot\frac{1-\mu^2}{E};$$

при $\frac{b}{a} = 2$

$$w_0 = 1{,}936\frac{p a^4}{h^3}\cdot\frac{1-\mu^2}{E};$$

при $\frac{b}{a} = 3$

$$w_0 = 2{,}352\frac{p a^4}{h^3}\cdot\frac{1-\mu^2}{E}$$

и т. д.

Выражение (22) дает возможность определить изгибающие моменты M_x и M_y.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{6p(1-\mu^2)}{Eh^3}\left\{x^2 - a^2 - \frac{128a^4}{\pi^4}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^4\operatorname{ch}\frac{\pi n b}{2a}}\left[-\left(\frac{1}{\pi n} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{b}{4a}\operatorname{th}\frac{\pi n b}{2a}\right)\operatorname{ch}\frac{\pi n y}{2a} + \frac{y}{4a}\operatorname{sh}\frac{\pi n y}{2a}\right]\left(\frac{\pi n}{2a}\right)^2\sin\frac{\pi n(a+x)}{2a}\right\};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{p(1-\mu^2)}{Eh^3} \cdot \frac{768a^4}{\pi^4} \sum_{1,3,5,..}^{\infty} \frac{1}{n^4 \operatorname{ch} \frac{\pi nb}{2a}} \left[-\left(\frac{1}{\pi n} + \right.\right.$$

$$+ \frac{b}{4a} \operatorname{th} \frac{\pi nb}{2a} \left.\right) \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2 \operatorname{ch} \frac{\pi ny}{2a} + \frac{1}{2a} \cdot \frac{\pi n}{2a} \operatorname{ch} \frac{\pi ny}{2a} +$$

$$\left. + \frac{y}{4a} \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2 \operatorname{sh} \frac{\pi ny}{2a} \right] \sin \frac{\pi n (a+x)}{2a}.$$

Согласно выражениям (5)

$$M_x = \frac{p}{2} \left\{ x^2 - a^2 + \frac{128a^4}{\pi^4} \sum_{1,3,5,..}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n (a+x)}{2a}}{n^4 \operatorname{ch} \frac{\pi nb}{2a}} \left[\left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \operatorname{th} \frac{\pi nb}{2a} \right) (1-\mu) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2 \operatorname{ch} \frac{\pi ny}{2a} - (1-\mu) \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2 \frac{y}{4a} \operatorname{sh} \frac{\pi ny}{2a} + \frac{\mu}{2a} \cdot \frac{\pi n}{2a} \operatorname{ch} \frac{\pi ny}{2a} \right] \right\};$$

$$M_y = \frac{p}{2} \left\{ (x^2 - a^2)\mu + \frac{128a^4}{\pi^4} \sum_{1,3,5...}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n (a+x)}{2a}}{n^4 \operatorname{ch} \frac{\pi nb}{2a}} \left[-\left(\frac{1}{\pi n} + \right.\right.\right.$$

$$+ \frac{b}{4a} \operatorname{th} \frac{\pi nb}{2a} \left.\right) \cdot (1-\mu) \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2 \operatorname{ch} \frac{\pi ny}{2a} + (1-\mu) \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2 \frac{y}{4a} \operatorname{sh} \frac{\pi ny}{2a} +$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{2a} \cdot \frac{\pi n}{2a} \operatorname{ch} \frac{\pi ny}{2a} \right] \right\}.$$

В начале координат

$$M_{x0} = \frac{pa^2}{2} \left\{ -1 + \frac{32}{\pi^4} \sum_{1,3,5...}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n^4 \operatorname{ch} \frac{\pi nb}{2a}} \left[(1-\mu)(\pi n)^2 \left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \operatorname{th} \frac{\pi nb}{2a} \right) + \mu \pi n \right] \right\};$$

$$M_{y0} = \frac{pa^2}{2} \left\{ -\mu + \frac{32}{\pi^4} \sum_{1,3,5...}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n^4 \operatorname{ch} \frac{\pi nb}{2a}} \left[-(1-\mu)(\pi n)^2 \left(\frac{1}{\pi n} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{b}{4a} \operatorname{th} \frac{\pi nb}{2a} \right) + \pi n \right] \right\}.$$

При $\mu = 0{,}3$ моменты M_{x0} и M_{y0} имеют значения:

для $\frac{b}{a} = 1$

$$M_{x0} = 0{,}192pa^2; \quad M_{y0} = 0{,}192pa^2;$$

для $\frac{b}{a} = 2$

$$M_{x0} = 0{,}407pa^2; \quad M_{y0} = 0{,}186pa^2;$$

для $\frac{b}{a}=3$

$$M_{x0}=0{,}238pa^2;\quad M_{y0}=0{,}162pa^2$$

и т. д.

Подобные таблицы для изгибающих моментов и прогибов в зависимости от отношения $\frac{b}{a}$ и величины коэффициента Пуассона для рассматриваемого примера и для других наиболее распространенных случаев нагружения прямоугольных плит могут быть найдены в книге Б. Г. Галеркина [2].

Остановимся, наконец, на определении наибольших напряжений σ_x и σ_y в центре пластины. Как и для круглой пластины, здесь напряжения σ_x и σ_y выражаются через изгибающие моменты [см. формулы (12а) гл. I, т. II] следующим образом:

$$\sigma_x=\frac{6M_x}{h^2};\quad \sigma_y=\frac{6M_y}{h^2}.$$

Так как в центре пластины напряжения имеют один и тот же знак, то

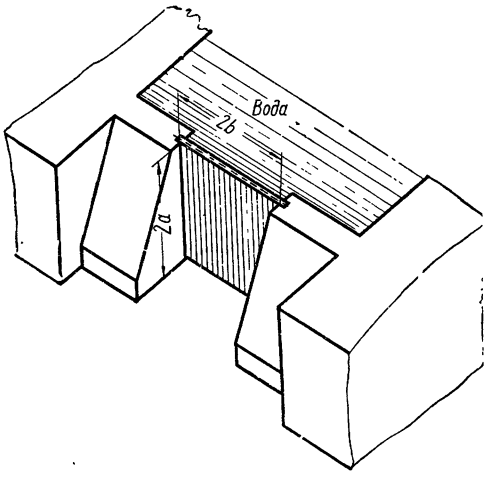
$$\sigma_1=\sigma_x,\ \text{а}\ \sigma_3=0.$$

Следовательно;

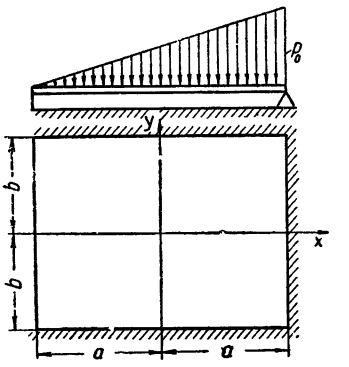
$$\sigma_{экв}=\sigma_x=\frac{6M_x}{h^2}.$$

По этому напряжению и должен вестись расчет пластины на прочность.

Пример 2. Подобрать толщину плиты, перегораживающей водосток (фиг. 98).



Фиг. 98.



Фиг. 99.

Размеры плиты: $2b=1$ *м*, $2a=1{,}5$ *м*; материал — сталь; $E=2\cdot10^6$ *кг/см*^{2}; $\mu=0{,}3$; допускаемое напряжение $[\sigma]_д=1200$ *кг/см*^{2};

Пазы, в которые входит плита, предполагаются свободными настолько, что не препятствуют повороту плиты на контуре при ее деформации.

Задача сводится, таким образом, к следующей схеме (фиг. 99). Пластина размерами $2a\times2b$ опирается по трем сторонам и нагружена давлением, изменяющимся по оси x по линейному закону[1].

Закон изменения этого давления будет, очевидно, следующим:

$$p=\frac{p_0}{2a}(a+x).$$

[1] Расчет такой плиты впервые дан Б. Г. Галеркиным [2].

Функция w по условиям постановки задачи должна быть четной относительно переменной y.

Найдем частное решение путем интегрирования только по y.

Из уравнения (12) имеем

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \cdot \frac{p_0}{2a} (a + x),$$

откуда

$$f = \frac{p_0}{2aD} (a + x) \left(\frac{y^4}{24} + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta \right).$$

Из условия четности функции $f(y)$ $\alpha = \gamma = 0$.

Кроме того, как и в предыдущем примере, условия закрепления дают

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{y=\pm b} = 0; \quad |f|_{y=\pm b} = 0,$$

тогда

$$\beta = \frac{b^2}{4}; \quad \delta = \frac{5}{24} b^4.$$

Окончательно

$$f = \frac{p_0}{48aD} (a + x) (y^4 - 6b^2 y^2 + 5b^4).$$

Теперь функцию w представим в виде

$$w = C (a + x) (y^4 - 6b^2 y^2 + 5b^4) +$$

$$+ \sum_{1,3,5..,}^{\infty} \left[A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n x}{2b} + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n x}{2b} + C_n x \operatorname{sh} \frac{\pi n x}{2b} + \right.$$

$$\left. + D_n x \operatorname{ch} \frac{\pi n x}{2b} \right] \cos \frac{\pi n y}{2b}, \tag{23}$$

где

$$C = \frac{p_0 (1 - \mu^2)}{4aEh^3}. \tag{24}$$

Здесь [см. зависимость (23)] в отличие от предыдущего примера под знак суммы входят не только четные, но и нечетные функции.

Взятая функция w удовлетворяет при любых значениях произвольных постоянных A_n, B_n, C_n и D_n условиям на краях $y = \pm b$, т. е.

$$|w|_{y=\pm b} = 0 \text{ и } \left| \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=\pm b} = 0,$$

и уравнению (12).

Остается подобрать постоянные A_n, B_n, C_n и D_n так, чтобы удовлетворить граничным условиям и на краях $x = \pm a$.

На крае $x = +a$ имеет место свободная опора, поэтому

$$|w|_{x=a} = 0; \quad \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0,$$

тогда

$$2Ca (y^4 - 6b^2 y^2 + 5b^4) + \sum_{1,3,5...}^{\infty} \left[A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n a}{2b} + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n a}{2b} + C_n a \operatorname{sh} \frac{\pi n a}{2b} + \right.$$

$$\left. + D_n a \operatorname{ch} \frac{\pi n a}{2b} \right] \cos \frac{\pi n y}{2b} = 0; \tag{25}$$

$$\sum_{1,3,5..,}^{\infty}\left[A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n a}{2b}+B_n \operatorname{sh}\frac{\pi n a}{2b}+4C_n b\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi n a}{2b}}{\pi n}+\frac{a}{4b}\operatorname{sh}\frac{\pi n a}{2b}\right)+\right.$$

$$\left.+4D_n b\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n a}{2b}}{\pi n}+\frac{a}{4b}\operatorname{ch}\frac{\pi n a}{2b}\right)\right] n^2 \cos\frac{n\pi y}{2b}. \qquad (26)$$

Алгебраическую часть уравнения (25) раскладываем в ряд

$$y^4-6b^2y^2+5b^4=\sum_{1,3,5...}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{\pi n y}{2b}.$$

Определяя коэффициент α_n обычными методами, получаем

$$\alpha_n=\frac{1536}{(\pi n)^5}b^4(-1)^{\frac{n+3}{2}}.$$

Теперь уравнение (25) принимает вид

$$\sum_{1,3,5..}^{\infty}\left[\frac{3072}{(\pi n)^5}Cab^4(-1)^{\frac{n+3}{2}}+A_n\operatorname{ch}\frac{\pi n a}{2b}+B_n\operatorname{sh}\frac{\pi n a}{2b}+\right.$$

$$\left.+C_n a\operatorname{sh}\frac{\pi n a}{2b}+D_n a\operatorname{ch}\frac{\pi n a}{2b}\right]\cos\frac{\pi n y}{2b}=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\cos\frac{\pi n y}{2b}$, подобно тому как это делалось в предыдущем примере, получаем

$$\frac{3072Cab^4(-1)^{\frac{n+3}{2}}}{(\pi n)^5}+A_n\operatorname{ch}\frac{\pi n a}{2b}+B_n\operatorname{sh}\frac{\pi n a}{2b}+$$

$$+C_n a\operatorname{sh}\frac{\pi n a}{2b}+D_n a\operatorname{ch}\frac{\pi n a}{2b}=0. \qquad (27)$$

Уравнение (26) дает

$$A_n\operatorname{ch}\frac{\pi n a}{2b}+B_n\operatorname{sh}\frac{\pi n a}{2b}+4C_n b\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi n a}{2b}}{\pi n}+\frac{a}{4b}\operatorname{sh}\frac{\pi n a}{2b}\right)+$$

$$+4D_n b\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n a}{2b}}{\pi n}+\frac{a}{4b}\operatorname{ch}\frac{\pi n a}{2b}\right)=0.$$

Исключаем из этих уравнений A_n и B_n. Тогда

$$-\frac{768Cab^3(-1)^{\frac{n+}{2}}}{(\pi n)^4}+C_n\operatorname{ch}\frac{\pi n a}{2b}+D_n\operatorname{sh}\frac{\pi n a}{2b}=0. \qquad (28)$$

На крае $x=-a$ момент и опорная реакция обращаются в ноль (край свободен). Согласно выражениям (17)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=0.$$

Из первого условия получаем

$$A_n(1-\mu)\operatorname{ch}\frac{\pi na}{2b} - B_n(1-\mu)\operatorname{sh}\frac{\pi na}{2b} + 4C_nb\left[\frac{1}{\pi n}\operatorname{ch}\frac{\pi na}{2b} + \right.$$
$$\left. + \frac{a}{4b}(1-\mu)\operatorname{sh}\frac{\pi na}{2b}\right] - 4D_nb\left[\frac{1}{\pi n}\operatorname{sh}\frac{\pi na}{2b} + (1-\mu)\frac{a}{4b}\operatorname{ch}\frac{\pi na}{2b}\right] = 0,$$

из второго

$$-\frac{3072Cb^5(-1)^{\frac{n+3}{2}}}{(\pi n)^6}\cdot\frac{2-\mu}{1-\mu} + A_n\operatorname{sh}\frac{\pi na}{2b} - B_n\operatorname{ch}\frac{\pi na}{2b} -$$
$$-2C_nb\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\cdot\frac{1}{\pi n}\operatorname{sh}\frac{\pi na}{2b} - \frac{a}{2b}\operatorname{ch}\frac{\pi na}{2b}\right) +$$
$$+2D_nb\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\cdot\frac{1}{\pi n}\operatorname{ch}\frac{\pi na}{2b} - \frac{a}{2b}\operatorname{sh}\frac{\pi na}{2b}\right) = 0.$$

Из уравнений (27) и (28) и двух последних можно получить

$$A_n = \frac{1536\mu Cab^4(-1)^{\frac{n+3}{2}}}{(1-\mu)(\pi n)^5\operatorname{ch}\frac{\pi na}{2b}} - 4C_nb\left[\frac{1}{(1-\mu)\pi n} + \frac{a}{4b}\operatorname{th}\frac{\pi na}{2b}\right];$$

$$B_n = \frac{1536\mu Cab^4(-1)^{\frac{n+3}{2}}}{(1-\mu)(\pi n)^5\operatorname{sh}\frac{\pi na}{2b}} - 4D_nb\left[\frac{1}{(1-\mu)\pi n} + \frac{a}{4b}\operatorname{cth}\frac{\pi na}{2b}\right];$$

$$D_n = +\frac{768Cab^3(-1)^{\frac{n+3}{2}}}{(\pi n)^4\operatorname{sh}\frac{\pi na}{2b}} - C_n\operatorname{cth}\frac{\pi na}{2b};$$

$$C_n = \frac{768Cb^4(-1)^{\frac{n+3}{2}}}{(\pi n)^4}\left[-2(2-\mu)\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi na}{2b}}{(\pi n)^2} - \frac{\mu}{\pi n}\frac{a}{b}\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi na}{2b}} + \right.$$
$$\left. + \frac{a}{b}(3+\mu)\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi na}{2b}}{\pi n} + \frac{a^2}{2b^2}\cdot\frac{1-\mu}{\operatorname{sh}\frac{\pi na}{2b}}\right] : \left[(3+\mu)\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi na}{b}}{\pi n} + \frac{a}{b}\cdot\frac{1-\mu}{\operatorname{sh}\frac{\pi na}{b}}\right]. \quad (29)$$

При $\frac{a}{b} = 1{,}5$ получаем:

$$C_1 = 0{,}9046Cb^4; \quad C_3 = -0{,}000115Cb^4;$$
$$D_1 = 1{,}340Cb^4; \quad D_3 = -0{,}000134Cb^4;$$
$$A_1 = -2{,}372Cb^5; \quad A_3 = +0{,}000219Cb^5;$$
$$B_1 = -3{,}866Cb^5; \quad B_3 = +0{,}000260Cb^5.$$

Далее по формуле (23) определяется прогиб w, а затем и изгибающие моменты M_x и M_y.

Результаты таких расчетов приведены на фиг. 100, *а*, *б*, *в*. На фиг. 101 представлено перспективное изображение упругой поверхности (фиг. 100, *в*).

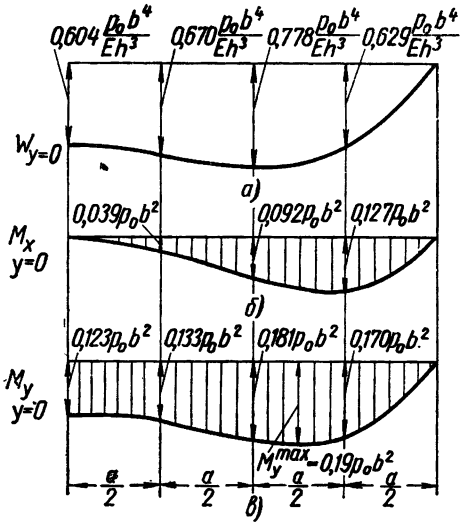
$$\sigma_{\max} = \frac{6M_y^{\max}}{h^2} = \frac{6\cdot 0{,}190p_0b^2}{h^2}.$$

Наименьшее нормальное напряжение в этой же точке равно нулю, поэтому

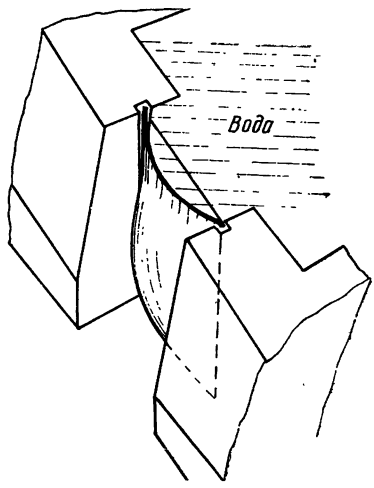
$$\sigma_{экв} = \frac{6 \cdot 0{,}190 \cdot 0{,}15 \cdot 50^2}{h^2} \leqslant 1200,$$

откуда

$$h^2 \geqslant 0{,}356\ см^2 \text{ или } h = 0{,}597\ см\ (h \approx 6\ мм).$$



Фиг. 100.



Фиг. 101.

Наибольший прогиб (фиг. 100, *а*) равен

$$w_{\max} \approx 0{,}778 \frac{p_0 b^4}{Eh^3} = 0{,}778 \frac{0{,}15 \cdot 50^4}{2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}6^3}\ см;$$

$$w_{\max} = 0{,}17\ см = 1{,}7\ мм.$$

§ 4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОГИБОВ ПЛАСТИН

В тех случаях, когда желательно избежать сложных выкладок, возникающих при расчете пластин точным методом интегрирования бигармонического уравнения, обычно прибегают к приближенным методам. При этом решение неизбежно получается менее строгим и точным, однако возникающие погрешности не являются существенными.

Наиболее распространенными методами приближенного расчета пластин являются методы Галеркина и Ритца, которые и будут рассмотрены в этом параграфе.

А. Метод Ритца

Сущность метода Ритца и простейшие примеры его применения уже были даны ранее в § 2 гл. VII т. I, поэтому перейдем непосредственно к расчету пластин.

Составим сначала общее выражение внутренней потенциальной энергии пластины.

Удельная потенциальная энергия для любого напряженного состояния (см. гл. VII т .I) выражается следующим образом:

$$W = G\left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\mu e^2}{1-2\mu} + \frac{1}{2}\left(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2\right)\right].$$

Для плоского напряженного состояния, в котором находится пластина, $\sigma_z = 0$, и, следовательно, из формул (5) гл. III т. I после элементарных преобразований получается зависимость

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

Но согласно формулам (1) — (3)

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

В соответствии с гипотезой неизменности нормали

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0.$$

Теперь

$$W = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right].$$

Умножая это выражение на элемент объема $dxdydz$ и интегрируя по x, y и z, получаем выражение внутренней потенциальной энергии пластины:

$$U = \frac{D}{2}\iint_{x\,y}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]dxdy. \qquad (30)$$

Теперь рассмотрим пример.

Найти прогиб в центре прямоугольной плиты со сторонами $2a$ и $2b$, нагруженной равномерно распределенным давлением p и защемленной на контуре.

Зададимся уравнением упругой поверхности:

$$w = \frac{1}{4}w_0\left(1+\cos\frac{\pi x}{a}\right)\left(1+\cos\frac{\pi y}{b}\right), \qquad (31)$$

где w_0 — искомый прогиб в центре.

Уравнение (31) удовлетворяет условиям защемления, т. е. при $x = \pm a$

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

при $y = \pm b$

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Подставляя w в выражение (30) и интегрируя, находим

$$U = \frac{D}{2}\cdot\frac{w_0^2}{16}\pi^4\left(\frac{3b}{a^3} + \frac{3a}{b^3} + \frac{2}{ab}\right). \qquad (32)$$

Определим далее потенциал внешних сил (см. гл. VII т. I):

$$\mathcal{U} = -\int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b} pw\,dxdy = -pw_0 ab.$$

Полная потенциальная энергия системы (см. гл. VII т. I)

$$\Pi = \frac{D}{2} \cdot \frac{w_0^2}{16} \pi^4 \left[\frac{3b}{a^3} + \frac{3a}{b^3} + \frac{2}{ab} \right] - p w_0 ab.$$

Далее подбираем w_0 из условия минимума П:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_0} = 0,$$

откуда

$$w_0 = \frac{pa^4}{Eh^3} \cdot \frac{192(1-\mu^2)}{\pi^4} \cdot \frac{1}{3 + 3\frac{a^4}{b^4} + 2\frac{a^2}{b^2}}.$$

При $\mu = 0{,}3$ в зависимости от отношения $\frac{b}{a}$ получаем:

при $\frac{b}{a} = 1$

$$w_0 = 0{,}224 \frac{pa^4}{Eh^3};$$

при $\frac{b}{a} = 1{,}5$

$$w_0 = 0{,}379 \frac{pa^4}{Eh^3}.$$

Точное решение (см. [1]) дает:

при $\frac{b}{a} = 1$

$$w_0 = 0{,}220 \frac{pa^4}{Eh^3};$$

при $\frac{b}{a} = 1{,}5$

$$w_0 = 0{,}386 \frac{pa^4}{Eh^3}.$$

Точность, как видим, получена весьма высокая.

Б. Метод Галеркина

Метод Галеркина (см. § 3 гл. VII т. I) применительно к расчету пластин заключается по сути дела в приближенном решении бигармонического уравнения (12) при различных граничных условиях.

Рассмотрим пример.

Прямоугольная плита размером $2a$ и $2b$ защемлена на краях $x = \pm a$ и свободно опирается на краях $y = \pm b$. Нагрузка — равномерно распределенное давление p. Определить прогиб в центре.

Зададимся уравнением упругой поверхности в виде

$$w = \frac{1}{2} w_0 \left(1 + \cos\frac{\pi x}{a}\right) \cos\frac{\pi y}{2b}. \tag{33}$$

Подставляем эту функцию в уравнение (12):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{p}{D} = 0,$$

тогда

$$\frac{w_0}{2}\pi^4 \left[\frac{1}{a^4} \cos\frac{\pi x}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2 b^2} \cos\frac{\pi x}{a} + \frac{1}{16 b^4} \left(1 + \cos\frac{\pi x}{a}\right) \right] \cos\frac{\pi y}{2b} - \frac{p}{D} \neq 0.$$

Умножая это выражение (см. изложение метода в § 3 гл. VII т. I) на

$$\left(1+\cos\frac{\pi x}{a}\right)\cos\frac{\pi y}{2b}\,dxdy$$

и интегрируя в пределах от $-a$ до $+a$ и от $-b$ до $+b$, получаем

$$w_0=\frac{p b^4}{Eh^3}\cdot\frac{192(1-\mu^2)}{\pi^5}\cdot\frac{1}{\frac{3}{16}+\frac{b^2}{2a^2}+\frac{b^4}{a^4}};$$

при $\frac{a}{b}=1$ и $\mu=0{,}3$

$$w_0=0{,}338\frac{pb^4}{Eh^3};$$

при $\frac{a}{b}=2$

$$w_0=1{,}52\frac{pb^4}{Eh^3};$$

при $\frac{a}{b}=3$

$$w_0=2{,}24\frac{pb^4}{Eh^3}.$$

Теперь сравним это решение с точным (см. [1]). Последнее дает:

при $\frac{a}{b}=1$

$$w_0=0{,}342\frac{pb^4}{Eh^3};$$

при $\frac{a}{b}=2$

$$w_0=1{,}58\frac{pb^4}{Eh^3};$$

при $\frac{a}{b}=3$

$$w_0=2{,}04\frac{pb^4}{Eh^3}.$$

Сопоставление результатов показывает, что точность решения, полученного по методу Галеркина, вполне удовлетворительна.

Метод Ритца и метод Галеркина можно также с уверенностью применять и при определении напряжений, возникающих в пластинах. При этом желательно, однако, решать задачу по крайней мере во втором приближении. Например, в только что рассмотренной задаче следовало бы взамен функции (33) принять выражение

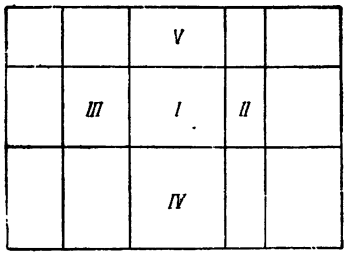
$$w=w_0f_0+w_1f_1=\frac{1}{2}w_0\left(1+\cos\frac{\pi x}{a}\right)\cos\frac{\pi y}{2b}+$$
$$+\frac{1}{2}w_1\left(1+\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\frac{3\pi y}{2b}.$$

§ 5. НЕРАЗРЕЗНЫЕ ПЛАСТИНЫ

А. Основной случай расположения опор

В практике нередко встречаются случаи, когда возникает необходимость провести расчет пластины, имеющей промежуточные опоры. Эта задача во всех случаях аналогична задаче о расчете неразрезных балок, поэтому будем именовать ее задачей о неразрезных пластинах.

Рассмотрим некоторую произвольную систему прямоугольных пластин, подпертых рядом жестких продольных и поперечных опор (фиг. 102). При этом предположим, что размеры пластин и их толщина могут быть различными для различных участков. Коэффициент Пуассона μ для всех пластин предполагается одинаковым.

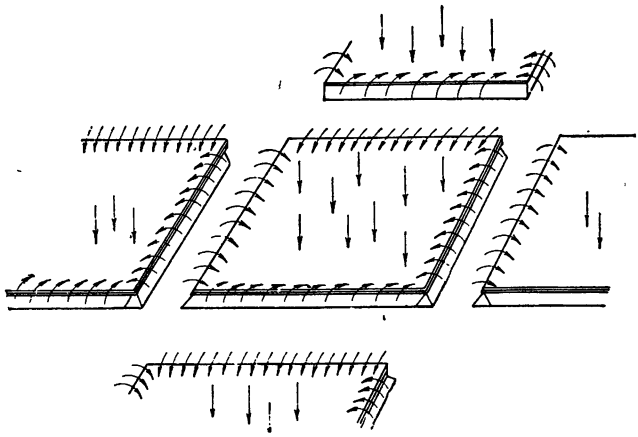


Фиг. 102.

Допустим, что пластины (все или некоторые) (фиг. 102) загружены некоторой произвольной нагрузкой.

Подобно тому как это делается при расчете неразрезных балок, представим себе, что прогиб каждой пластины складывается из прогибов, вызванных только внешними силами, действующими непосредственно на свободно опертую отдельно взятую пластину, и прогибов, вызванных внутренним силовым моментным взаимодействием с соседними пластинами на общих опорах (фиг. 103).

Из системы пластин (фиг. 102) выделим пять смежных полей *I*, *II*, *III*, *IV* и *V* размерами сторон $2a_1 \times 2b_1$, $2a_2 \times 2b_2$, $2a_3 \times 2b_3$ и т. д.



Фиг. 103.

Выберем систему координат. Центр каждой пластины примем за начало координат, а оси x и y направим так, как это показано на фиг. 104.

Кроме того, каждому полю припишем еще четыре угловые системы x_1y_1, x_2y_2, x_2y_1, x_1y_2, направленных так, как это показано на фиг. 104. Прогиб i-й пластины обозначим через w_i (xy). На контуре каждой пластины прогиб равен нулю (опоры жесткие):

$$w_i = 0. \tag{34}$$

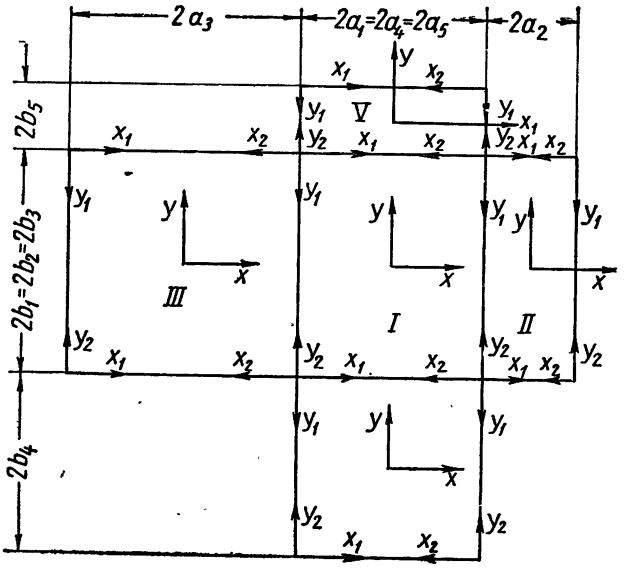
Напишем далее условия неразрывности для пластин *I—II* и *I—V*. На соответствующих опорах прежде всего имеем

$$\left.\begin{aligned} |w_1|_{x=a_1} &= |w_2|_{x=-a_2} = 0; \\ |w_1|_{y=b_1} &= |w_5|_{y=-b_5} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Кроме того,

$$\left|\frac{\partial w_1}{\partial x}\right|_{x=a_1} = \left|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{x=-a_2}; \tag{36}$$

$$\left|\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=b_1} = \left|\frac{\partial w_5}{\partial y}\right|_{y=-b_5}. \tag{37}$$



Фиг. 104.

Из условий равновесия на опоре следует, что изгибающие моменты M_x на опоре *I—II* и M_y на опоре *I — V* являются одинаковыми для пластин *I — II* и *I — V*:

$$|M_{x\mathrm{I}}|_{x=a_1} = |M_{x\mathrm{II}}|_{x=-a_2}$$

или

$$-D_1\left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right]_{x=a_1} = -D_2\left[\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right]_{x=-a_2}.$$

Но

$$\left|\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right|_{x=a_1} = \left|\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right|_{x=-a_2} = 0;$$

так как опоры остаются прямыми,

$$D_1\left|\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right|_{x=a_1} = D_2\left|\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right|_{x=-a_2}. \tag{38}$$

Точно так же

$$D_1\left|\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right|_{y=b_1} = D_5\left|\frac{\partial^2 w_5}{\partial y^2}\right|_{y=-b_5}. \tag{39}$$

Функцию w_i разобьем на два слагаемых:

$$w_i = w_{i0} + w_i', \tag{40}$$

где w_{i0} — прогиб свободно опертой пластины под действием собственной, непосредственно к ней приложенной нагрузки;

w_i' — прогиб той же пластины под действием контурных опорных моментов.

Функция w_i' удовлетворяет уравнению прямоугольной пластины с контурной нагрузкой:

$$\nabla^2\nabla^2 w_i' = 0. \tag{41}$$

Определение функции w_{i0}— задача, решенная для большинства случаев нагружения. Способы определения этой функции были рассмотрены в предыдущих параграфах настоящей главы, сейчас же постараемся установить в наиболее простом виде связь между деформациями соседних пластин.

Перепишем условия непрерывности для пластин *I—II* с учетом выражения (40):

$$|w_{10} + w_1'|_{x=a_1} = |w_{20} + w_2'|_{x=-a_2} = 0;$$

но так как

$$|w_{10}|_{x=a_1} = |w_{20}|_{x=-a_2} = 0,$$

то

$$|w_1'|_{x=a_1} = |w_2'|_{x=-a_2} = 0, \tag{42}$$

затем

$$\left|\frac{\partial w_{10}}{\partial x} + \frac{\partial w_1'}{\partial x}\right|_{x=a_1} = \left|\frac{\partial w_{20}}{\partial x} + \frac{\partial w_2'}{\partial x}\right|_{x=-a_2}. \tag{43}$$

Наконец, поскольку контурные моменты свободно опертой плиты равны нулю, то

$$\left|\frac{\partial^2 w_{10}}{\partial x^2}\right|_{x=a_1} = \left|\frac{\partial^2 w_{20}}{\partial x^2}\right|_{x=-a_2} = 0$$

и

$$D_1\left|\frac{\partial^2 w_1'}{\partial x^2}\right|_{x=a_1} = D_2\left|\frac{\partial^2 w_2'}{\partial x^2}\right|_{x=-a_2}. \tag{44}$$

Функции w_1' и w_2' представим в виде рядов, заранее удовлетворяющих условиям (42) и (44) и, конечно, уравнению (41), а именно:

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= \sum_1^\infty A_k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{b_1}\right)\left[\frac{\operatorname{sh}\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_1}{b_1}\right)}{\operatorname{sh}\left(k\pi\frac{a_1}{b_1}\right)} - \frac{x_1}{2a_1}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_1}{b_1}\right)}{\operatorname{ch}\left(k\pi\frac{a_1}{b_1}\right)}\right]; \\ w_2' &= \sum_1^\infty A_k \xi_k \left(\frac{a_2}{a_1}\right)\sin\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{b_1}\right)\left[\frac{\operatorname{sh}\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_2}{b_1}\right)}{\operatorname{sh}\left(k\pi\frac{a_2}{b_1}\right)} - \right. \\ &\left. - \frac{x_2}{2a_2}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_2}{b_1}\right)}{\operatorname{ch}\left(k\pi\frac{a_2}{b_1}\right)}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Здесь x_1y_1, x_2y_2 — угловые координаты, введенные ранее.

$$\xi_k\left(\frac{a_2}{a_1}\right)=\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{D_1}{D_2}\,\frac{\operatorname{th}\left(k\pi\,\frac{a_1}{b_1}\right)}{\operatorname{th}\left(k\pi\,\frac{a_2}{b_1}\right)}. \tag{46}$$

Функции w_1' и w_2' [см. формулы (45)] являются прежде всего бигармоническими функциями. Кроме того, для первого поля при $y_1=0$, при $y_1=2b_1$, при $x_1=0$ и при $x_1=2a_1$, т. е. на всем контуре пластины, $w_1'=0$, то же самое имеет место и для второй пластины. Таким образом, функции w_1' и w_2' удовлетворяют условию (42). Кроме того, функции (45) удовлетворяют также и условию (44).

Непосредственным дифференцированием легко показать, что

$$D_1\left|\frac{\partial^2 w_1'}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=2a_1}=D_2\left|\frac{\partial^2 w_2'}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=2a_2}.$$

На других сторонах обеих пластин контурные моменты обращаются в ноль.

Например, для первой пластины (на опоре *I—III*)

$$D_1\left|\frac{\partial^2 w_1'}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 w_1'}{\partial y_1^2}\right|_{x_1=0}=0.$$

На опорах *I—V* и *I—IV* также

$$D_1\left|\frac{\partial^2 w_1'}{\partial y_1^2}+\mu\frac{\partial^2 w_1'}{\partial x_1^2}\right|_{y_1=0}=D_1\left|\frac{\partial^2 w_1'}{\partial y_1^2}+\mu\frac{\partial^2 w_1'}{\partial x_1^2}\right|_{y_1=2b_1}=0.$$

Аналогично и для трех контуров второй пластины изгибающие моменты обращаются в ноль.

Отсюда следует, что ряды (45) с постоянными A_k учитывают прогиб первой пластины w_1', вызванный опорным моментом со стороны второй пластины, и прогиб второй пластины, вызванный действием первой.

Таким образом, выражения (45) дают возможность учесть контурную нагрузку на обе пластины со стороны края *I—II*.

Аналогично учтем действие полей *III*, *IV* и *V* на прогиб плиты *I*, тогда полный прогиб плиты *I* под действием контурных моментов будет

$$w_1'=\sum_1^\infty\left\{\sin\left(k\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{b_1}\right)\left[A_k\left(\frac{\operatorname{sh}\left(k\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_1}{b_1}\right)}{\operatorname{sh}\left(k\pi\,\frac{a_1}{b_1}\right)}-\frac{x_1}{2a_1}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(k\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_2}{b_1}\right)}{\operatorname{ch}\left(k\pi\,\frac{a_1}{b_1}\right)}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_k\left(\frac{\operatorname{sh}\left(k\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_2}{b_1}\right)}{\operatorname{sh}\left(k\pi\,\frac{a_1}{b_1}\right)}-\frac{x_2}{2a_1}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(k\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_2}{b_1}\right)}{\operatorname{ch}\left(k\pi\,\frac{a_1}{b_1}\right)}\right)\right]+\right.$$

$$+\sin\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_1}{a_1}\right)\left[C_k\left(\frac{\operatorname{sh}\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{a_1}\right)}{\operatorname{sh}\left(k\pi\frac{b_1}{a_1}\right)}-\frac{y_1}{2b_1}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{a_1}\right)}{\operatorname{ch}\left(k\pi\frac{b_1}{a_1}\right)}\right)+\right.$$

$$\left.+D_k\left(\frac{\operatorname{sh}\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_2}{a_1}\right)}{\operatorname{sh}\left(k\pi\frac{b_1}{a_1}\right)}-\frac{y_2}{2b_1}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_2}{a_1}\right)}{\operatorname{ch}\left(k\pi\frac{b_1}{a_1}\right)}\right)\right]\Bigg\}. \qquad (47)$$

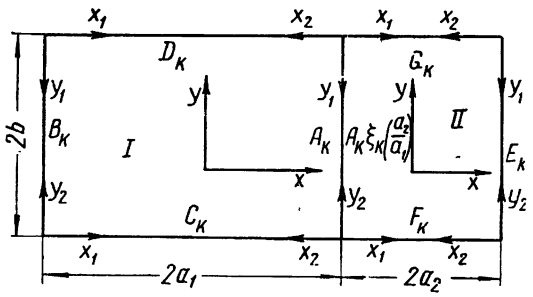
Заметим, что роль изгибающих контурных моментов на каждой из сторон пластины I учитывается только одной группой коэффициентов A_k, B_k, C_k или D_k. Например, на краю $I-IV$ изгибающий момент M_y не зависит непосредственно от постоянных A_k, B_k и D_k, а зависит только от C_k, хотя величины постоянных C_k и определяются значениями A_k, B_k и D_k. Поэтому в дальнейшем общие опоры плит будем именовать соответствующими буквами, сами же постоянные A_k, B_k и т. д., определяющие контурные моменты, будем называть постоянными защемления.

Не следует, однако, забывать, что если, вообще говоря, некоторой пластине на каком-либо краю приписан коэффициент N_k, то для другой пластины на этой же опоре должен быть приписан коэффициент $N_k\xi_k\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$ [см. формулу (46)], где a_2 и a_1 — размеры второй и первой пластин в направлении, перпендикулярном к общей опоре.

Если край свободно оперт, то постоянные защемления для этого края равны нулю:

$$N_1 = N_2 = \ldots = N_k = 0.$$

(На фиг. 105 показаны буквенные обозначения опор для плит I и II.)



Фиг. 105.

Выражение (47) при любых значениях входящих постоянных A_k, B_k, C_k, D_k заранее удовлетворяет условиям (42) и (44).

Остается выполнить условие (43). Для этого нужно соответствующим образом подобрать коэффициенты A_k, B_k, C_k и D_k.

Обозначим

$$\left.\begin{aligned}\left|\frac{\partial w_{10}}{\partial x}\right|_{x=+a_1}&=\omega_1^A;\quad \left|\frac{\partial w_1'}{\partial x}\right|_{x=+a_1}=\Omega_1^A\\ \left|\frac{\partial w_{20}}{\partial x}\right|_{x=-a_2}&=\omega_2^A;\quad \left|\frac{\partial w_2'}{\partial x}\right|_{x=-a_2}=\Omega_2^A\end{aligned}\right\}. \qquad (48)$$

Условие (43) перепишется теперь в виде

$$\omega_1^A - \omega_2^A = \Omega_2^A - \Omega_1^A. \tag{49}$$

Функции ω_2^A и ω_1^A определяются в зависимости от способа нагружения пластин; будем считать их заданными. Что же касается величин Ω_1^A и Ω_2^A, то они определяются из выражения (47):

$$\Omega_1^A = \left|\frac{\partial w_1'}{\partial x}\right|_{x=+a_1} =$$

$$= \frac{\pi}{2b_1}\sum_1^\infty k\left\{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{b_1}\right)\left[A_k\left(\frac{1}{\operatorname{th} k\pi\frac{a_1}{b_1}} - \frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{1}{k\pi} - \operatorname{th} k\pi\frac{a_1}{b_1}\right) - \right.\right.$$

$$- B_k\left(\frac{1}{\operatorname{sh} k\pi\frac{a_1}{b_1}} - \frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{1}{k\pi}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch} k\pi\frac{a_1}{b_1}}\right)\Bigg] +$$

$$+ \frac{b_1}{a_1}\cos k\pi\left[C_k\left(\frac{\operatorname{sh} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{a_1}}{\operatorname{sh} k\pi\frac{b_1}{a_1}} - \frac{y_1}{2b_1}\cdot\frac{\operatorname{ch} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{a_1}}{\operatorname{ch} k\pi\frac{b_1}{a_1}}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + D_k\left(\frac{\operatorname{sh} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_2}{a_1}}{\operatorname{sh} k\pi\frac{b_1}{a_1}} - \frac{y_2}{2b_1}\cdot\frac{\operatorname{ch} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_2}{a_1}}{\operatorname{ch} k\pi\frac{b_1}{a_1}}\right)\right]\right\}. \tag{50}$$

Аналогично находим

$$\Omega_2^A = \left|\frac{\partial w_2'}{\partial x}\right|_{x=-a_2} =$$

$$= \frac{\pi}{2b_1}\sum_1^\infty k\left\{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{b_1}\right)\left[E_k\left(\frac{1}{\operatorname{sh} k\pi\frac{a_2}{b_1}} - \frac{b_1}{a_2}\cdot\frac{1}{k\pi}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch} k\pi\frac{a_2}{b_1}}\right) - \right.\right.$$

$$- A_k\xi_k\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{th} k\pi\frac{a_2}{b_1}} - \frac{b_1}{a_2}\cdot\frac{1}{k\pi} - \operatorname{th} k\pi\frac{a_2}{b_1}\right)\Bigg] +$$

$$+ \frac{b_1}{a_2}\left[F_k\left(\frac{\operatorname{sh} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{a_2}}{\operatorname{sh} k\pi\frac{b_1}{a_2}} - \frac{y_1}{2b_1}\cdot\frac{\operatorname{ch} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{a_2}}{\operatorname{ch} k\pi\frac{b_1}{a_2}}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + G_k\left(\frac{\operatorname{sh} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_2}{a_2}}{\operatorname{sh} k\pi\frac{b_1}{a_2}} - \frac{y_2}{2b_1}\cdot\frac{\operatorname{ch} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_2}{a_2}}{\operatorname{ch} k\pi\frac{b_1}{a_2}}\right)\right]\right\}.$$

Обозначим для сокращения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\operatorname{th} k\pi\dfrac{a_2}{b_1}}-\frac{b_1}{a_2}\cdot\frac{1}{k\pi}-\operatorname{th} k\pi\frac{a_2}{b_1}=\alpha_k\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\\ \text{и}\qquad&\\ &\frac{1}{\operatorname{sh} k\pi\dfrac{a_2}{b_1}}-\frac{b_1}{a_2}\cdot\frac{1}{k\pi}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch} k\pi\dfrac{a_2}{b_1}}=\beta_k\left(\frac{a_2}{b_1}\right).\end{aligned}\right\},\qquad(51)$$

Тогда, подставив полученные выражения Ω_1^A и Ω_2^A в уравнение (49), получим

$$\begin{aligned}\frac{2b_1}{\pi}\left(\omega_1^A-\omega_2^A\right)=\sum_1^\infty k\Bigg\{&\sin\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{b_1}\right)\Big[-A_k\alpha_k\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+\\&+B_k\beta_k\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+E_k\beta_k\left(\frac{a_2}{b_1}\right)-A_k\xi_k\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\alpha_k\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\Big]+\\&+\left(\frac{b_1}{a_2}F_k-\frac{b_1}{a_1}\cos k\pi G_k\right)\left[\frac{\operatorname{sh} k\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{y_1}{a_1}}{\operatorname{sh} k\pi\dfrac{b_1}{a_1}}-\frac{y_1}{2b_1}\cdot\frac{\operatorname{ch} k\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{y_1}{a_1}}{\operatorname{ch} k\pi\dfrac{b_1}{a_1}}\right]+\\&+\left(\frac{b_1}{a_2}G_k-\frac{b_1}{a_1}\cos k\pi D_k\right)\left[\frac{\operatorname{sh} k\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{y_2}{a_2}}{\operatorname{sh} k\pi\dfrac{b_1}{a_2}}-\frac{y_2}{2b_1}\cdot\frac{\operatorname{ch} k\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{y_2}{a_2}}{\operatorname{ch} k\pi\dfrac{b_1}{a_2}}\right]\Bigg\}.\end{aligned}\qquad(52)$$

Это условие для опоры A_k должно выполняться при любых значениях переменных y_1 и y_2, связанных с y соотношениями

$$y_1=b-y;\quad y_2=b+y.$$

Разность $\omega_1^A-\omega_2^A$ разложим в ряд:

$$\begin{aligned}\omega_1^A-\omega_2^A=&\sum_{1,3,5\ldots}^\infty(-1)^{\frac{q-1}{2}}\psi_q\cos\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{b_1}\right)+\\&+\sum_{2,4,6\ldots}^\infty(-1)^{\frac{r}{2}+1}\psi_r\sin\left(r\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{b_1}\right).\end{aligned}\qquad(53)$$

Если в подобный ряд разложить и правую часть уравнения (52), то, приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, после некоторых преобразований приходим к следующим окончательным уравнениям (см. [6]):

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}\cdot\frac{\pi}{2}b_1\psi_q=&\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\Big[-A_q\alpha_q\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+B_q\beta_q\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+E_q\beta_q\left(\frac{a_2}{b_1}\right)-\\&-A_q\xi_q\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\alpha_q\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\Big]-2\sum_1^\infty\Big[R_{qk}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)(C_k+D_k)\cos k\pi-\\&-R_{qk}\left(\frac{b_1}{a_2}\right)(F_k+G_k)\Big];\end{aligned}$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\pi}{2}\,b_1\psi_r=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[-A_r\alpha_r\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+B_r\beta_r\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+E_r\beta_r\left(\frac{a_2}{b_1}\right)-\right.$$
$$-A_r\xi_r\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\alpha_r\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\Big]+2\sum_1^{\infty}\Big[R_{rk}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)(C_k-D_k)\cos k\pi-$$
$$\left.-R_{rk}\left(\frac{b_1}{a_2}\right)(F_k-G_k)\right]. \qquad (54)$$

Здесь величины ξ_q, α_q и β_q определяются выражениями (46) и (51).

$$R_{qk}=\frac{\operatorname{th} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{b_1}{a_1}}{1+\operatorname{th}^2 k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{b_1}{a_1}}\cdot\frac{b_1^2}{a_1^2}\cdot\frac{k^2}{\left(k^2\frac{b_1^2}{a_1^2}+q^2\right)^2}. \qquad (55)$$

Давая q значения 1, 3, 5,..., а r — значения 2, 4, 6,..., получим систему уравнений относительно постоянных защемления A_k, B_k и т. д. Порядковый номер k при этом должен пробегать значения членов натурального ряда чисел 1, 2, 3 и т. д. от единицы до наибольшего значения r или q, смотря по тому, сколькими членами разложения функции w' желательно ограничиться.

Таким образом, соотношения (54) приводятся к числу $q_{наиб}$ или $r_{наиб}$ уравнений.

Эти уравнения составлены для опоры A_k. Подобные же системы могут быть составлены и для других опор. Если система состоит из nm пластин (n поперечных и m продольных), то число промежуточных опор будет равно

$$(m-1)n+(n-1)m,$$

а число неизвестных

$$[(m-1)n+(n-1)m]k,$$

где k — число членов разложения функции w'.

С другой стороны, для каждой опоры получаем k уравнений. По числу опор уравнений будет всего

$$k[(m-1)n+(n-1)m].$$

Задача, таким образом, принципиально разрешима.

Б. Случай свободного края

В практике возникает иногда необходимость расчета неразрезных плит со свободно висящим краем.

Рассмотрим случай, когда у системы неразрезных пластин одна (или несколько) из крайних опор отсутствует.

Как и в основном случае, выделим из заданной системы пару смежных пластин (фиг. 105). Будем считать, что у второй пластины правая кромка, она же крайняя для всей системы, остается свободно

висящей. Остальные края второй пластины покоятся на свободных опорах.

Пользуясь принципом независимости действия сил, представим себе порядок нагружения пластины *II* следующим образом: положим, что эта пластина выделена из общей системы, а под ее правый край поставлена жесткая опора, тогда упругая поверхность пластины будет определяться функцией w_{20} — прогибом под действием внешних сил, приложенных к свободной пластине. Чтобы учесть влияние опорных моментов, наложим на перемещения w_{20}, как это делалось выше, перемещение w'_2, получающееся за счет действия этих моментов. Теперь остается только убрать временно подставленную правую опору. Но это равносильно приложению контурной перерезывающей нагрузки на рассматриваемом краю, направленной в сторону, противоположную реакции опоры, и по величине равной этой реакции. Таким образом, к сумме уже полученных перемещений следует алгебраически прибавить еще одно: w''_2, получающееся от реакции правой опоры, взятой с обратным знаком. Тогда уравнение упругой поверхности второй плиты изобразится в виде

$$w_2 = w_{20} + w'_2 + w''_2.$$

Упругая поверхность первой пластины, как и прежде, будет

$$w_1 = w_{10} + w'_1.$$

На общей опоре граничные условия обеих пластин остаются прежними, т. е.

$$|w'_1|_{x=a_1} = |w'_2 + w''_2|_{x=-a_2} = 0; \tag{56}$$

$$\left|\frac{\partial w_{10}}{\partial x} + \frac{\partial w'_1}{\partial x}\right|_{x=a_1} = \left|\frac{\partial w_{20}}{\partial x} + \frac{\partial w'_2}{\partial x} + \frac{\partial w''_2}{\partial x}\right|_{x=-a_2}; \tag{57}$$

$$D_1\left|\frac{\partial^2 w''_1}{\partial x^2}\right|_{x=a_1} = D_2\left|\frac{\partial^2 w'_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w''_2}{\partial x^2}\right|_{x=-a_2}. \tag{58}$$

Поскольку на правой кромке второй пластины изгибающий момент равен нулю, то

$$\left|\frac{\partial^2 w''_2}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w''_2}{\partial y^2}\right|_{x=a_2} + \left|\frac{\partial^2 w'_2}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w'_2}{\partial y^2}\right|_{x=a_2} = 0.$$

Второе слагаемое этого выражения обратится в ноль, если в выражении w'_2 постоянные E_k (см. фиг. 105) положить равными нулю, тогда

$$\left|\frac{\partial^2 w''_2}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w''_2}{\partial y^2}\right|_{x=a_2} = 0. \tag{59}$$

Наконец, на правом краю реакция опоры равняется нулю, тогда

$$\left|\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right|_{x=a_2} = 0. \tag{60}$$

Теперь зададимся функциями w_{20}, w_2' и w_2''. Первую из них, как и прежде, будем считать известной. Функцию w_2' возьмем в виде

$$w_2' = \sum_1^\infty A_k \xi_k \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \sin\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{b_1}\right)\left[\frac{\operatorname{sh} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_2}{b_1}}{\operatorname{sh} k\pi\frac{a_2}{b_1}} - \frac{x_2}{2a_2}\cdot\frac{\operatorname{ch} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_2}{b_1}}{\operatorname{ch} k\pi\frac{a_2}{b_1}}\right] +$$

$$+\sum_1^\infty F_k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_1}{a_2}\right)\left[\frac{\operatorname{sh} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{a_2}}{\operatorname{sh} k\pi\frac{b_1}{a_2}} - \frac{y_1}{2b_1}\cdot\frac{\operatorname{ch} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{a_2}}{\operatorname{ch} k\pi\frac{b_1}{a_2}}\right] +$$

$$+\sum_1^\infty G_k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_1}{a_2}\right)\left[\frac{\operatorname{sh} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_2}{a_2}}{\operatorname{sh} k\pi\frac{b_1}{a_2}} - \frac{y_2}{2b_1}\cdot\frac{\operatorname{ch} k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_2}{a_2}}{\operatorname{ch} k\pi\frac{b_1}{a_2}}\right]. \qquad (61)$$

Здесь коэффициенты E_k положены равными нулю. Это выражение w_2' удовлетворяет прежде всего уравнению (12) и по всему контуру обращается в ноль, а так как E_k принято равным нулю, то на свободной кромке оказывается равным нулю и изгибающий момент.

Зададимся w_2'' в форме

$$w_2'' = \sum_1^\infty E_k' \sin\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y_1}{b_1}\right)\left[\operatorname{sh}\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_1}{b_1}\right) + \zeta_k\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\frac{x_1}{b_1}\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{ch}\left(k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x_1}{b_1}\right)\right], \qquad (62)$$

где

$$\zeta_k\left(\frac{a_2}{b_1}\right) = -\frac{k(1-\mu)}{2+(1-\mu)\frac{a_2}{b_1}k\pi\operatorname{cth}\left(k\pi\frac{a_2}{b_1}\right)}. \qquad (63)$$

Функция w_2'' также удовлетворяет уравнению (12). Кроме того, при $x_1 = 0$

$$w_2'' = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w_2''}{\partial x^2} = 0,$$

при $y_1 = 0$ и при $y_1 = 2b_1$ также

$$w_2'' = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w_2''}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом, при указанном выборе функций w_2' и w_2'' для пластины *II* удовлетворяются краевые условия (34).

Обращаясь к условию неразрывности угла поворота на общей опоре *I* — *II*, можно использовать написанное ранее уравнение (49):

$$\omega_1^A - \omega_2^A = \Omega_2^A - \Omega_1^A.$$

Здесь следует к величине $\Omega_2^A = \left|\frac{\partial w_2'}{\partial x}\right|_{x=-a_2}$ прибавить $\frac{\partial w_2''}{\partial x}$, а коэффициент E_k, входящий в выражение Ω_2^A, по-прежнему положить

равным нулю. Дальнейшие преобразования совершенно не будут отличаться от проведенных ранее. В результате вместо формулы (54) получится уравнение неразрывности для общей опоры A_k в виде

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{\pi}{2}b_1\psi_q=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left\{-A_q\alpha_q\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+B_q\beta_q\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+\right.$$
$$\left.+E_q'\left[1+\frac{1}{q}\zeta_q\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\right]-A_q\xi_q\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\alpha_q\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\right\}-$$
$$-2\sum_1^\infty\left[R_{qk}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)(C_k+D_k)\cos k\pi-R_{qk}\left(\frac{b_1}{a_2}\right)(F_k+G_k)\right];$$
$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\pi}{2}b_1\psi_r=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left\{-A_r\alpha_r\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+B_r\beta_r\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+\right.$$
$$\left.+E_r'\left[1+\frac{1}{r}\zeta_r\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\right]-A_r\xi_r\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\alpha_r\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\right\}+$$
$$+2\sum_1^\infty\left[R_{rk}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)(C_k-D_k)\cos k\pi-R_{rk}\left(\frac{b_1}{a_2}\right)(F_k-G_k)\right]. \qquad (64)$$

Заметим, что система уравнений (64) отличается от системы (54) лишь тем, что здесь величины

$$E_q\beta_q\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\text{ и }E_r\beta_r\left(\frac{a_2}{b_1}\right),$$

стоявшие слагаемыми в уравнениях (54), заменены соответственно величинами

$$E_q'\left[1+\frac{1}{q}\zeta_q\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\right]\text{ и }E_r'\left[1+\frac{1}{r}\zeta_r\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\right].$$

Аналогичная замена должна быть произведена, если свободным краем является не ребро E_k, а B_k. Если же свободными краями являются C_k и F_k, уравнения (64), как можно показать (см. [6]), должны быть написаны в виде

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{\pi}{2}b_1\psi_q=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[-A_q\alpha_q\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+B_q\beta_q\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+\right.$$
$$\left.+E_q\beta_q\left(\frac{a_2}{b_1}\right)-A_q\xi_q\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\alpha_q\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\right]-$$
$$-2\sum_1^\infty\left[D_kR_{qk}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\cos k\pi-G_kR_{qk}\left(\frac{b_1}{a_2}\right)\right]+$$
$$+\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty\left[C_k'M_{qk}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)-F_k'M_{qk}\left(\frac{b_1}{a_2}\right)\cos k\pi\right];$$
$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\pi}{2}b_1\psi_r=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[-A_r\alpha_r\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+B_r\beta_r\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+\right.$$
$$\left.+E_r\beta_r\left(\frac{a_2}{b_1}\right)-A_r\xi_r\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\alpha_r\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\right]-$$

$$-2\sum_{1}^{\infty}\left[D_k R_{rk}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\cos k\pi - G_k R_{rk}\left(\frac{b_1}{a_2}\right)\right] -$$

$$-\frac{\pi}{2}\sum_{1}^{\infty}\left[C'_k M_{rk}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) - F'_k M_{rk}\left(\frac{b_1}{a_2}\right)\cos k\pi\right], \qquad (65)$$

где

$$M_{qk}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{k\,\frac{b}{a}}{k^2\frac{b^2}{a^2}+q^2}\left[\operatorname{sh}\left(k\pi\frac{b}{a}\right)+\zeta_k\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\pi b}{a}\operatorname{ch}\left(k\pi\frac{b}{a}\right) - \right.$$

$$\left. -\zeta_k\left(\frac{b}{a}\right)\frac{2k\,\frac{b^2}{a^2}}{k^2\frac{b^2}{a^2}+q^2}\operatorname{sh}\left(k\pi\frac{b}{a}\right)\right]. \qquad (66)$$

Вернемся к условию (60).

Реакцию свободно опертой пластины представим в виде

$$\left|\frac{\partial^3 w_{20}}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w_{20}}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=a_2} = \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}(-1)^{\frac{q-1}{2}}\lambda_q\cos\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{b_1}\right)+$$

$$+\sum_{2,4,6\ldots}^{\infty}(-1)^{\frac{r}{2}+1}\lambda_r\sin\left(r\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{b_1}\right). \qquad (67)$$

Если в такой же ряд разложить и функцию

$$\left|\frac{\partial^3 w'_2}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w'_2}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=a_2}+\left|\frac{\partial^3 w''_2}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w''_2}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=a_2},$$

а затем согласно условию (60) приравнять коэффициенты при соответствующих переменных, можно получить условие равенства нулю реакции опоры на свободном крае (см. [6]) в виде

$$\lambda_q\left(\frac{2b_1}{q\pi}\right)^3+E'_q\eta_q\left(\frac{a_2}{b_1}\right)+A_q\xi_q\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left[\theta_q\left(\frac{a_2}{b_1}\right)+(2-\mu)\beta_q\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\right] -$$

$$-\frac{8}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}(F_k+G_k)R_{qk}\left(\frac{b_1}{a_2}\right)\left[\left(\frac{kb_1}{qa_2}\right)^2+(2-\mu)\right]\cos k\pi = 0;$$

$$\lambda_r\left(\frac{2b_1}{r\pi}\right)^3+E'_r\eta_r\left(\frac{a_2}{b_1}\right)+A_r\xi_r\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left[\theta_r\left(\frac{a_2}{b_1}\right)+(2-\mu)\beta_r\left(\frac{a_2}{b_1}\right)\right]+$$

$$+\frac{8}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}(F_k-G_k)R_{rk}\left(\frac{b_1}{a_2}\right)\left[\left(\frac{kb_1}{ra_2}\right)^2+(2-\mu)\right]\cos k\pi = 0, \qquad (68)$$

где

$$\eta_q\left(\frac{a}{b}\right) = -\frac{[4-(1+\mu)^2]\operatorname{sh}\left(q\pi\frac{a}{b}\right)\operatorname{ch}\left(q\pi\frac{a}{b}\right)+q\pi\frac{a}{b}(1-\mu)^2}{\operatorname{sh}^2\left(q\pi\frac{a}{b}\right)+(1-\mu)\frac{a}{q\pi}\operatorname{ch}\left(q\pi\frac{a}{b}\right)}; \qquad (69)$$

$$\theta_q\left(\frac{a}{b}\right)=-\frac{1}{\operatorname{sh}\left(q\pi\frac{a}{b}\right)}+3\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{q\pi}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\left(q\pi\frac{a}{b}\right)}. \qquad (70)$$

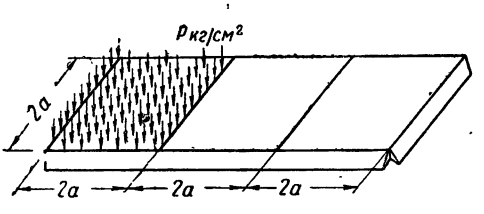
Таким образом, при наличии свободно висящих краев изменяются не только уравнения (54) основного случая, но вместе с тем добавляются новые постоянные E_k' и новые уравнения (68). Для свободно висящего края $E_k=0$.

Уравнения (68) независимо от расположения висящего края остаются неизменными, меняются лишь индексы постоянных и размеров a и b.

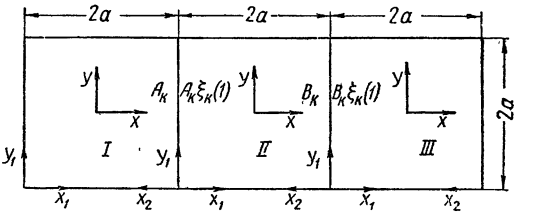
Для усвоения изложенных методов лучше всего рассмотреть простейшие примеры.

В. Примеры расчета неразрезных пластин

Пример 1. Рассмотрим систему трех неразрезных квадратных пластин, расположенных в один ряд (фиг. 106 и 107). Левая крайняя пластина *I* загружена постоянным давлением p.



Фиг. 106.



Фиг. 107.

Определим прогибы каждой пластины и выявим закон распределения внутренних изгибающих моментов.

Промежуточной опоре *I—II* припишем постоянные защемления A_k, а опоре *II—III* B_k. На остальных опорах защемление отсутствует и прочие постоянные равны нулю.

Обратимся к уравнениям (54), которые принимают для рассматриваемого случая следующий простой вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{q}\cdot\frac{\pi}{2}a\psi_q&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2[-A_q\alpha_q(1)+B_q\beta_q(1)-A_q\xi_q(1)\,\alpha_q(1)];\\ \frac{1}{r}\cdot\frac{\pi}{2}a\psi_r&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2[-A_r\alpha_r(1)+B_r\beta_r(1)-A_r\xi_r(1)\,\alpha_r(1)].\end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Для опоры *II—III*

$$\left.\begin{aligned}-B_q\alpha_q(1)+A_q\xi_q(1)\,\beta_q(1)-B_q\xi_q(1)\,\alpha_q(1)=0;\\ -B_r\alpha_r(1)+A_r\xi_r(1)\,\beta_r(1)-B_r\xi_r(1)\,\alpha_r(1)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

Для опоры *II—III* коэффициенты ψ_q и ψ_r равны нулю, так как собственная нагрузка на плитах *II* и *III* отсутствует.

Величина q в этих уравнениях должна проходить нечетные, а r — четные значения натурального ряда чисел.

Прежде чем решить полученные уравнения, необходимо найти коэффициенты ψ. Для этого обратимся к выражению (53):

$$\omega_1^A-\omega_2^A=\sum_{1,\,3,\,5..,}^{\infty}(-1)^{\frac{q-1}{2}}\psi_q\cos\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{b}\right)+$$

$$+\sum_{2,\,4,\,6...}^{\infty}(-1)^{\frac{r}{2}+1}\psi_r\sin\left(r\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{b}\right),$$

где

$$\omega_1^A = \left|\frac{\partial w_{10}}{\partial x}\right|_{x=a}; \quad \omega_2^A = \left|\frac{\partial w_{20}}{\partial x}\right|_{x=-a}.$$

Разложим в аналогичные ряды отдельно ω_1^A и ω_2^A, т. е.

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1^A &= \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{q-1}{2}} \chi_q^{\mathrm{I}} \cos\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{b}\right) + \\
&+ \sum_{2,4,6\ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{r}{2}+1} \chi_r^{\mathrm{I}} \sin\left(r\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{b}\right); \\
\omega_2^A &= \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{q-1}{2}} \chi_q^{\mathrm{II}} \cos\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{b}\right) + \\
&+ \sum_{2,4,6\ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{r}{2}+1} \chi_r^{\mathrm{II}} \sin\left(r\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{b}\right);
\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

откуда следует, что

$$\psi_k = \chi_k^{\mathrm{I}} - \chi_k^{\mathrm{II}}. \tag{74}$$

Величины χ_k^{I} и χ_k^{II} независимы, так как каждая из этих величин является функцией нагрузки, действующей на свободно опертую пластину. В случае отсутствия нагрузки $\chi_k = 0$.

В рассматриваемом случае

$$\chi_k^{\mathrm{II}} = \chi_k^{\mathrm{III}} = 0.$$

Коэффициенты разложения рядов (73) определяются по известному образцу:

$$\left.\begin{aligned}
\chi_q^{\mathrm{I}} &= \frac{1}{b_1}(-1)^{\frac{q-1}{2}} \int_{-b_1}^{+b_1} \omega_1^A \cos\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{b_1}\right) dy; \\
\chi_r^{\mathrm{I}} &= \frac{1}{b_1}(-1)^{\frac{r}{2}+1} \int_{-b_1}^{+b_1} \omega_1^A \sin\left(r\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{b_1}\right) dy.
\end{aligned}\right\}. \tag{75}$$

Заметим, что при симметричном распределении нагрузки ω_1^A является четной функцией переменного y, тогда χ_r^{I}, очевидно, равно нулю, так как второй интеграл выражений (75) обращается в ноль. Аналогично коэффициенты χ_q^{I} и χ_r^{I} могут быть найдены и для других краев пластины. Например, для края D_k (фиг. 105) нужно вместо

$$\omega_1^A = \left|\frac{\partial w_{01}}{\partial x}\right|_{x=a_1}$$

принять

$$\omega_1^D = \left|\frac{\partial w_{01}}{\partial y}\right|_{y=b_1},$$

тогда для края D_k получим

$$\left.\begin{aligned}
\chi_q^{\mathrm{I}} &= \frac{1}{a_1}(-1)^{\frac{q-1}{2}} \int_{-a_1}^{+a_1} \omega_1^D \cos\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{a_1}\right) dx; \\
\chi_r^{\mathrm{I}} &= \frac{1}{a_1}(-1)^{\frac{r}{2}+1} \int_{-a_1}^{+a_1} \omega_1^D \sin\left(r\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{a_1}\right) dx.
\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

В рассматриваемом случае равномерно загруженной пластины прогиб w_{01} определяется выражением (22):

$$w_{01}=\frac{p(1-\mu^2)}{2Eh^3}\left\{x^4-6a^2x^2+5a^4+\frac{1536a^4}{\pi^4}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n\pi x}{2a}}{n^4\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[-\left(\frac{1}{\pi n}+\frac{b}{4a}\operatorname{th}\frac{n\pi b}{2a}\right)\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{2a}+\frac{y}{4a}\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{2a}\right]\right\}.$$

Из этого выражения могут быть определены величины χ_q и χ_r для любого края пластины. При настоящем расположении системы координат xy удобнее, однако, определять эти постоянные для края $D_k(y=+b)$, а затем перестановкой сторон a и b, пользуясь симметрией нагружения, перейти к краю $x=a$.

Итак, определяем функцию

$$\omega_1^D=\left|\frac{\partial w_{01}}{\partial y}\right|_{y=b}=-\frac{pa^3}{Eh^3}\cdot\frac{192(1-\mu^2)}{\pi^4}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n\pi x}{2a}}{n^4}\times$$

$$\times\left[\operatorname{th}\frac{n\pi b}{2a}+\frac{n\pi b}{2a}\operatorname{th}^2\frac{n\pi b}{2a}-\frac{n\pi b}{2a}\right].$$

Согласно выражению (76) для края $y=b$ получаем

$$\chi_q=-\frac{pa^3}{Eh^3}\cdot\frac{192(1-\mu^2)}{\pi^4q^4}\left[\operatorname{th}\frac{q\pi b}{2a}+\frac{q\pi b}{2a}\operatorname{th}^2\frac{q\pi b}{2a}-\frac{q\pi b}{2a}\right]. \tag{77}$$

$$\chi_r=0.$$

Переходя к краю $x=a$, получим

$$\chi_q=-\frac{pa^3}{Eh^3}\cdot\frac{192(1-\mu^2)}{\pi^4q^4}\left[\operatorname{th}\frac{q\pi a}{2b}+\frac{q\pi a}{2b}\operatorname{th}^2\frac{q\pi a}{2b}-\frac{q\pi a}{2b}\right]\frac{b^3}{a^3}. \tag{78}$$

$$\chi_r=0.$$

Поскольку $\chi_r=0$, то и A_r и B_r, как это следует из уравнений (71) и (72), также равны нулю. Таким образом, получаем постоянные защемления только нечетного индекса q.

Так как в рассматриваемой системе загружена только одна пластина, то χ_q^{II} и χ_q^{III} равны нулю, поэтому при $a=b$

$$\psi_q=\chi_q=-\frac{pa^3}{Eh^3}\cdot\frac{192(1-\mu^2)}{\pi^4q^4}\left[\operatorname{th}\frac{q\pi}{2}+\frac{q\pi}{2}\operatorname{th}^2\frac{q\pi}{2}-\frac{q\pi}{2}\right].$$

Если учесть, что при одинаковой жесткости пластин $\xi_q(1)=1$, то уравнения (71) и (72) перепишутся в виде

$$2A_q\alpha_q(1)-B_q\beta_q(1)=-\frac{2a\psi_q}{\pi q};$$

$$A_q\beta_q(1)-2B_q\alpha_q(1)=0;$$

откуда

$$A_q=\frac{\frac{4}{\pi}\alpha_q(1)\frac{a}{q}\psi_q}{\beta_q^2(1)-4\alpha_q^2(1)};$$

$$B_q=\frac{\frac{2}{\pi}\beta_q(1)\frac{a}{q}\psi_q}{\beta_q^2(1)-4\alpha_q^2(1)}.$$

По формулам (51) вычисляем

$$\alpha_1(1) = -0{,}31083; \quad \alpha_3(1) = -0{,}10610;$$

$$\beta_1(1) = +0{,}059131; \quad \beta_3(1) = +0{,}00014;$$

$$\psi_1 = -1{,}3162\,\frac{pa^3(1-\mu^2)}{Eh^3}; \quad \psi_3 = -0{,}02436\,\frac{pa^3(1-\mu^2)}{Eh^3},$$

и находим далее

$$A_1 = -1{,}3602\,\frac{pa^4(1-\mu^2)}{Eh^3}; \quad A_3 = -0{,}02436\,\frac{pa^4(1-\mu^2)}{Eh^3};$$

$$B_1 = +0{,}12938\,\frac{pa^4(1-\mu^2)}{Eh^3}; \quad B_3 = +0{,}000016\,\frac{pa^4(1-\mu^2)}{Eh^3}.$$

Уравнение упругой поверхности для каждой из пластин согласно выражениям (22), (47) и (40) будет

$$w_1 = \frac{p(1-\mu^2)}{2Eh^3}\left\{x^4 - 6a^2x^2 + 5a^4 + \frac{1536a^4}{\pi^4}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}\cos\frac{q\pi x}{2a}}{q^4\,\mathrm{ch}\,\frac{q\pi}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[-\left(\frac{1}{\pi q}+\frac{1}{4}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi q}{2}\right)\mathrm{ch}\,\frac{q\pi y}{2a}+\frac{y}{4a}\,\mathrm{sh}\,\frac{q\pi y}{2a}\right]\right\}+$$

$$+\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}A_q\sin\left(q\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)\left[\frac{\mathrm{sh}\left(q\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,q\pi}-\frac{a+x}{2a}\cdot\frac{\mathrm{ch}\left(q\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)}{\mathrm{ch}\,q\pi}\right];$$

$$w_2 = \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}A_q\sin\left(q\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)\left[\frac{\mathrm{sh}\left(q\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,q\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{a-x}{2a}\cdot\frac{\mathrm{ch}\left(q\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right)}{\mathrm{ch}\,q\pi}\right]+\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}B_q\sin\left(q\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)\left[\frac{\mathrm{sh}\left(q\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,q\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{a+x}{2a}\cdot\frac{\mathrm{ch}\left(q\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)}{\mathrm{ch}\,q\pi}\right];$$

$$w_3 = \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}B_q\sin\left(q\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)\left[\frac{\mathrm{sh}\left(q\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,q\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{a-x}{2a}\cdot\frac{\mathrm{ch}\left(q\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right)}{\mathrm{ch}\,q\pi}\right].$$

Используя подсчитанные значения постоянных A_1, A_3, B_1 и B_3, можно найти прогиб пластин в любой точке. В частности, упругая линия в сечении при $y = 0$ принимает вид кривой, изображенной на фиг. 108, *а*.

Изгибающие моменты определяются при этом из выражений

$$M_x = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right];$$

$$M_y = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right].$$

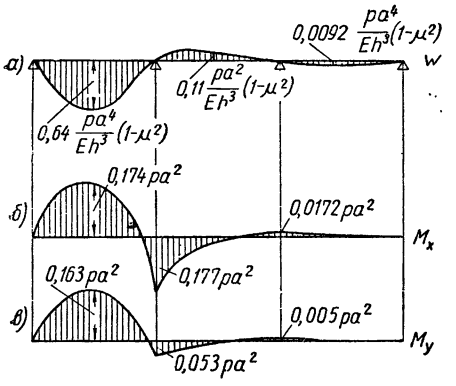
Эпюры изгибающих моментов M_x и M_y для сечения плит плоскостью $y = 0$ при $\mu = 0{,}3$ показаны на фиг. 108, *б* и *в*.

Наибольший изгибающий момент

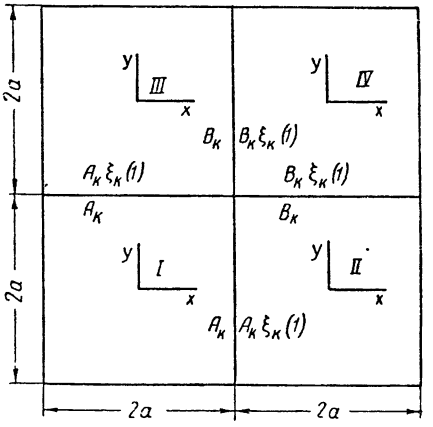
$$M_{x\,\max} = 0{,}177\,pa^2.$$

Пример 2. Найти постоянные защемления и написать уравнение упругих поверхностей четырех неразрезных квадратных пластин *I*, *II*, *III*, *IV* (фиг. 109), из которых одна (пластина *I*) нагружена равномерно распределенным давлением p.

Составим прежде всего уравнения для определения постоянных защемления.



Фиг. 108.



Фиг. 109.

Из соображений симметрии опорам $I-II$ и $I-III$ припишем одну и ту же систему постоянных A_k. Опорам $II-IV$ и $III-IV$ будут соответствовать постоянные B_k.

Учитывая, что $\xi_q(1) = 1$, а постоянные четного индекса из условий симметрии (см. предыдущий пример) обращаются в ноль, по уравнениям (54) для опор $I-II$ получим

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{\pi}{2}\,a\psi_q = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2[-A_q\alpha_q(1) - A_q\alpha_q(1)] -$$

$$-2\sum_1^\infty [A_k R_{qk}(1)\cos k\pi - B_k R_{qk}(1)];$$

для опор $II-IV$

$$0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2[-B_q\alpha_7(1) - B_q\alpha_q(1)] -$$

$$-2\sum_1^\infty [A_k R_{qk}(1)\cos k\pi - B_k R_{qk}(1)],$$

или

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{\pi}{4}\,a\psi_q = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 A_q\alpha_q(1) - \sum_1^\infty (A_k\cos k\pi - B_k)\,R_{qk}(1);$$

$$0 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 B_q\alpha_q(1) - \sum_1^\infty (A_k\cos k\pi - B_k)\,R_{qk}(1).$$

Ограничимся двумя приближениями, тогда

$$\frac{\pi}{4}a\psi_1 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 A_1\alpha_1(1) - R_{11}(1)(-A_1 - B_1) - R_{13}(1)(-A_3 - B_3);$$

$$0 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 B_1\alpha_1(1) - R_{11}(1)(-A_1 - B_1) - R_{13}(1)(-A_3 - B_3);$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}a\psi_3 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 A_3\alpha_3(1) - R_{31}(1)(-A_1 - B_1) - R_{33}(1)(-A_3 - B_3);$$

$$0 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 B_3\alpha_3(1) - R_{31}(1)(-A_1 - B_1) - R_{33}(1)(-A_3 - B_3).$$

Величины $\alpha_1(1)$ и $\alpha_3(1)$ вычислены в предыдущем примере.
Согласно формуле (55) вычисляем

$$R_{11}(1) = 0{,}12453;\quad R_{13}(1) = 0{,}04500;$$
$$R_{31}(1) = 0{,}004982;\quad R_{33} = 0{,}01389.$$

Величины ψ_1 и ψ_3 остаются теми же, что и в предыдущем примере, т. е.

$$\psi_1 = -1{,}3162\frac{pa^3(1-\mu^2)}{Eh^3};\quad \psi_3 = -0{,}02436\frac{pa^3(1-\mu^2)}{Eh^3}.$$

Уравнения принимают вид

$$-1{,}0337\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2) = A_1\,0{,}89147 + B_1\,0{,}12453 + A_3\,0{,}04500 + B_3\,0{,}04500;$$

$$0 = A_1\,0{,}12453 + B_1\,0{,}89147 + A_3\,0{,}04500 + B_3\,0{,}04500;$$

$$-0{,}00638\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2) = A_1\,0{,}004982 + B_1 0{,}004982 + A_3 0{,}27568 + B_3 0{,}01389;$$

$$0 = A_1 0{,}004982 + B_1 0{,}004982 + A_3 0{,}01389 + B_3 0{,}27568.$$

Если определять постоянные защемления в первом приближении, то следует решать совместно только два первых уравнения, полагая $A_3 = B_3 = 0$.
В этом случае

$$A_1 = -1{,}183\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$B_1 = +0{,}1652\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2).$$

Во втором приближении получаем

$$A_1 = -1{,}183\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$B_1 = +0{,}1646\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$A_3 = -0{,}00569\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$B_3 = +0{,}0187\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2).$$

Уравнения упругих поверхностей *I*, *II*, *III*, *IV* пластин будут

$$w_1 = \frac{p(1-\mu^2)}{2Eh^3}\left\{x^4 - 6a^2x^2 + 5a^4 + \frac{1536a^4}{\pi^4}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}\cos\frac{q\pi x}{2a}}{q^4\operatorname{ch}\frac{\pi q}{2}}\times\right.$$

$$\times\left[-\left(\frac{1}{\pi q}+\frac{1}{4}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi q}{2}\right)\mathrm{ch}\,\frac{q\pi y}{2a}+\frac{y}{4a}\,\mathrm{sh}\,\frac{q\pi y}{2a}\right]\Bigg\}+$$

$$+\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}A_q\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)\left[\frac{\mathrm{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,q\pi}-\frac{a+x}{2a}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\mathrm{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)}{\mathrm{ch}\,q\pi}\right]+\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}A_q\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)\left[\frac{\mathrm{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-y}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,q\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{a-y}{2a}\cdot\frac{\mathrm{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-y}{a}\right)}{\mathrm{ch}\,q\pi}\right];$$

$$w_2=\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}A_q\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)\left[\frac{\mathrm{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,q\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{a-x}{2a}\,\frac{\mathrm{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right)}{\mathrm{ch}\,q\pi}\right]+\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}B_q\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-y}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,q\pi}-\frac{a-y}{2a}\cdot\frac{\mathrm{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-y}{a}\right)}{\mathrm{ch}\,q\pi}\right];$$

$$w_3=\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}A_q\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)\left[\frac{\mathrm{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,q\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{a+y}{2a}\,\frac{\mathrm{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)}{\mathrm{ch}\,q\pi}\right]+\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}B_q\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,q\pi}-\frac{a+x}{2a}\cdot\frac{\mathrm{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)}{\mathrm{ch}\,q\pi}\right];$$

$$w_4=\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}B_q\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)\left[\frac{\mathrm{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,q\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{a+y}{2a}\,\frac{\mathrm{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)}{\mathrm{ch}\,q\pi}\right]+\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}B_q\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,q\pi}-\frac{a-x}{a}\cdot\frac{\mathrm{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right)}{\mathrm{ch}\,q\pi}\right].$$

По этим формулам прогиб можно определить в любой точке каждой из четырех пластин. Например, в центре каждой пластины соответственно имеем

$$|w_1|_{x=y=0} = 0{,}546\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$|w_2|_{x=y=0} = |w_3|_{x=y=0} = -0{,}093\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$|w_4|_{x=y=0} = 0{,}030\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2).$$

При помощи выражений (5) можно найти также изгибающие моменты в любой точке каждой из пластин.

§ 6. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОРОБКИ

А. Общие положения

Под прямоугольной пространственной коробкой понимается пространственная система, образованная из прямоугольных пластин.

Ниже будут рассматриваться только коробки с такими геометрическими соотношениями, при которых каждая образующая коробку пластина имеет достаточную устойчивость и обеспечивает полную передачу усилий, действующих в ее плоскости. Это дает возможность при рассмотрении любой пластины, входящей в коробку, считать все смежные с ней пластины за жесткие опоры. Далее предполагается, что при деформации системы прилегающие к ребрам элементы смежных пластин поворачиваются на общий угол, непрерывно меняющийся по длине ребра.

Подобно тому как это делается при расчете рамных систем, полагаем, что деформации пластин под влиянием усилий, действующих в их плоскости, весьма малы по сравнению с деформациями от изгибающих моментов. Отсюда следует, что размеры и форма каждой пластины в плане не изменяются, следовательно, ребра коробки остаются прямыми независимо от действующих усилий. Сопоставим теперь условия сопряжения пластины в пространственной коробке с условиями сопряжения неразрезных пластин, рассмотренных в § 5 настоящей главы.

Прежде всего поскольку каждое ребро коробки не искривляется, при отсутствии поступательных перемещений этого ребра оно может рассматриваться как жесткая опора для пластин, к нему примыкающих. В этом случае, следовательно, условие непрерывности (34) соблюдается у пространственной системы в той же мере, как и у плоской системы.

При переходе от пространственной коробки к развертке изгибающий опорный момент не изменит плоскости своего действия, если только условие неразрывности (34) не нарушится. То же самое можно сказать и относительно условия (36), т. е. о том, что величины $\frac{\partial w_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial w_2}{\partial x}$ на общей опоре независимо от угла между плоскостями остаются равными для любой точки общей кромки.

Что касается крутящего момента, то при переходе от пространственной системы к плоской он меняет плоскость своего действия и превращается в изгибающий момент в плоскости каждой пластины, деформациями же в плоскости пластин можно пренебречь.

Таким образом, из всего сказанного можно сделать вывод, что расчет пространственной коробки при условии несмещения ее ребер сводится к расчету ее плоской развертки методами расчета неразрезных плит. Жесткие ребра коробки играют при этом роль неподатливых опор.

Впервые мысль о неизменности ребер коробок высказана, насколько нам известно, А. Смотровым [9], а идея использования аппарата неразрезных пластин для расчета коробок принадлежит К. Лихареву [6].

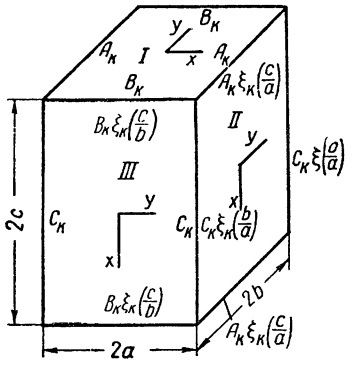
Б. Примеры расчета

Пример 1. Определить давление p, которое может быть допущено внутри прямоугольной замкнутой коробки со сторонами $2a=0{,}5$ *м*; $2b=0{,}5$ *м*; $2c=1$ *м* (фиг. 110). Толщина стенок постоянна и равна $h=1$ *см*. Допускаемое напряжение $[\sigma_z]=1500$ *кг/см*^{2}.

Так как для рассматриваемой системы ребра остаются неподвижными, к расчету ее применим метод неразрезных пластин.

Припишем каждому ребру систему постоянных защемления. Из условия симметрии таких систем должно быть только три: A_k, B_k и C_k, причем k принимает только нечетные значения.

Полагая $q=1$ и $q=3$, перепишем уравнения (54) для рассматриваемого случая.



Фиг. 110.

Для ребра *I—II*

$$\frac{\pi}{2}b\psi_1^A=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[-A_1\alpha_1\left(\frac{a}{b}\right)+A_1\beta_1\left(\frac{a}{b}\right)+\right.$$

$$\left.+A_1\xi_1\left(\frac{c}{a}\right)\beta_1\left(\frac{c}{b}\right)-\right.$$

$$\left.-A_1\xi_1\left(\frac{c}{a}\right)\alpha_1\left(\frac{c}{b}\right)\right]-2\left\{-R_{11}\left(\frac{b}{a}\right)(B_1+B_1)-\right.$$

$$-R_{11}\left(\frac{b}{c}\right)\left[C_1\xi_1\left(\frac{b}{a}\right)+C_1\xi_1\left(\frac{b}{a}\right)\right]\Big\}-2\left\{-R_{13}\left(\frac{b}{a}\right)(B_3+B_3)-\right.$$

$$\left.-R_{13}\left(\frac{b}{c}\right)\left[C_3\xi_3\left(\frac{b}{a}\right)+C_3\xi_3\left(\frac{b}{a}\right)\right]\right\};$$

$$\frac{\pi}{6}b\psi_3^A=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[-A_3\alpha_3\left(\frac{a}{b}\right)+A_3\beta_3\left(\frac{a}{b}\right)+A_3\xi_3\left(\frac{c}{a}\right)\beta_3\left(\frac{c}{b}\right)-\right.$$

$$\left.-A_3\xi_3\left(\frac{c}{a}\right)\alpha_3\left(\frac{c}{b}\right)\right]-2\left\{-R_{31}\left(\frac{b}{a}\right)(B_1+B_1)-R_{31}\left(\frac{b}{c}\right)\left(C_1\xi_1\left(\frac{b}{a}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+C_1\xi_1\left(\frac{b}{a}\right)\right)\right\}-2\left\{-R_{33}\left(\frac{b}{a}\right)(B_3+B_3)-R_{33}\left(\frac{b}{c}\right)\left[C_3\xi_3\left(\frac{b}{a}\right)+C_3\xi_3\left(\frac{b}{a}\right)\right]\right\}.$$

Для ребра *I—III*

$$\frac{\pi}{2}a\psi_1^B=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[-B_1\alpha_1\left(\frac{b}{a}\right)+B_1\beta_1\left(\frac{b}{a}\right)+B_1\xi_1\left(\frac{c}{b}\right)\beta_1\left(\frac{c}{a}\right)-B_1\xi_1\left(\frac{c}{b}\right)\alpha_1\left(\frac{c}{a}\right)\right]-$$

$$-2\left[-R_{11}\left(\frac{a}{b}\right)(A_1+A_1)-R_{11}\left(\frac{a}{c}\right)(C_1+C_1)\right]-$$

$$-2\left[-R_{13}\left(\frac{a}{b}\right)(A_3+A_3)-R_{13}\left(\frac{a}{c}\right)(C_3+C_3)\right];$$

$$\frac{\pi}{6}a\psi_3^B=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[-B_3\alpha_3\left(\frac{b}{a}\right)+B_3\beta_3\left(\frac{b}{a}\right)+B_3\xi_3\left(\frac{c}{b}\right)\beta_3\left(\frac{c}{a}\right)-B_3\xi_3\left(\frac{c}{b}\right)\alpha_3\left(\frac{c}{a}\right)\right]-$$

$$-2\left[-R_{31}\left(\frac{a}{b}\right)(A_1+A_1)-R_{31}\left(\frac{a}{c}\right)(C_1+C_1)\right]-$$

$$-2\left[-R_{33}\left(\frac{a}{b}\right)(A_3+A_3)-R_{33}\left(\frac{a}{c}\right)(C_3+C_3)\right].$$

Для ребра *III—II*

$$\frac{\pi}{2}c\psi_1^C=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[-C_1\alpha_1\left(\frac{a}{c}\right)+C_1\beta_1\left(\frac{a}{c}\right)+C_1\xi_1\left(\frac{b}{a}\right)\beta_1\left(\frac{b}{c}\right)-C_1\xi_1\left(\frac{b}{a}\right)\alpha_1\left(\frac{b}{c}\right)\right]-$$

$$-2\left\{-R_{11}\left(\frac{c}{a}\right)\left[B_1\xi_1\left(\frac{c}{b}\right)+B_1\xi_1\left(\frac{c}{b}\right)\right]-R_{11}\left(\frac{c}{b}\right)\left[A_1\xi_1\left(\frac{c}{a}\right)+A_1\xi_1\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}-$$

$$-2\left\{-R_{13}\left(\frac{c}{a}\right)\left[B_3\xi_3\left(\frac{c}{b}\right)+B_3\xi_3\left(\frac{c}{b}\right)\right]-R_{13}\left(\frac{c}{b}\right)\left[A_3\xi_3\left(\frac{c}{a}\right)+A_3\xi_3\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\};$$

$$\frac{\pi}{6}c\psi_3^C=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[-C_3\alpha_3\left(\frac{a}{c}\right)+C_3\beta_3\left(\frac{a}{c}\right)+C_3\xi_3\left(\frac{b}{a}\right)\beta_3\left(\frac{b}{c}\right)-C_3\xi_3\left(\frac{b}{a}\right)\alpha_3\left(\frac{b}{c}\right)\right]-$$

$$-2\left\{-R_{31}\left(\frac{c}{a}\right)\left[B_1\xi_1\left(\frac{c}{b}\right)+B_1\xi_1\left(\frac{c}{b}\right)\right]-R_{31}\left(\frac{c}{b}\right)\left[A_1\xi_1\left(\frac{c}{a}\right)+A_1\xi_1\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}-$$

$$-2\left\{-R_{33}\left(\frac{c}{a}\right)\left[B_3\xi_3\left(\frac{c}{b}\right)+B_3\xi_3\left(\frac{c}{b}\right)\right]-R_{33}\left(\frac{c}{b}\right)\left[A_3\xi_3\left(\frac{c}{a}\right)+A_3\xi_3\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}.$$

После преобразований получаем в окончательном виде следующие шесть уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ A_1\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[\beta_1\left(\frac{a}{b}\right)-\alpha_1\left(\frac{a}{b}\right)+\xi_1\left(\frac{c}{a}\right)\beta_1\left(\frac{c}{b}\right)-\xi_1\left(\frac{c}{a}\right)\alpha_1\left(\frac{c}{b}\right)\right]+\\
&+B_1 4R_{11}\left(\frac{b}{a}\right)+C_1 4R_{11}\left(\frac{b}{c}\right)\xi_1\left(\frac{b}{a}\right)+B_3 4R_{13}\left(\frac{b}{a}\right)+\\
&+C_3 4R_{13}\left(\frac{b}{c}\right)\xi_3\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\pi}{2}b\psi_1^A;\\
&2)\ A_1 4R_{11}\left(\frac{a}{b}\right)+B_1\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[\beta_1\left(\frac{b}{a}\right)-\alpha_1\left(\frac{b}{a}\right)+\xi_1\left(\frac{c}{b}\right)\beta_1\left(\frac{c}{a}\right)-\right.\\
&\left.-\xi_1\left(\frac{c}{b}\right)\alpha_1\left(\frac{c}{a}\right)\right]+C_1 4R_{11}\left(\frac{a}{c}\right)+A_3 4R_{13}\left(\frac{a}{b}\right)+C_3 4R_{13}\left(\frac{a}{c}\right)=\\
&=\frac{\pi}{2}a\psi_1^B;\\
&3)\ A_1 4R_{11}\left(\frac{c}{b}\right)\xi_1\left(\frac{c}{a}\right)+B_1 4R_{11}\left(\frac{c}{a}\right)\xi_1\left(\frac{c}{b}\right)+C_1\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[\beta_1\left(\frac{a}{c}\right)-\right.\\
&\left.-\alpha_1\left(\frac{a}{c}\right)+\xi_1\left(\frac{b}{a}\right)\beta_1\left(\frac{b}{c}\right)-\xi_1\left(\frac{b}{a}\right)\alpha_1\left(\frac{b}{c}\right)\right]+A_3 4R_{13}\left(\frac{c}{b}\right)\xi_3\left(\frac{c}{a}\right)+\\
&+B_3 4R_{13}\left(\frac{c}{a}\right)\xi_3\left(\frac{c}{b}\right)=\frac{\pi}{2}c\psi_1^C;\\
&4)\ B_1 4R_{31}\left(\frac{b}{a}\right)+C_1 4R_{31}\left(\frac{b}{c}\right)\xi_1\left(\frac{b}{a}\right)+A_3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[\beta_3\left(\frac{a}{b}\right)-\right.\\
&\left.-\alpha_3\left(\frac{a}{b}\right)+\xi_3\left(\frac{c}{a}\right)\beta_3\left(\frac{c}{b}\right)-\xi_3\left(\frac{c}{a}\right)\alpha_3\left(\frac{c}{b}\right)\right]+B_3 4R_{33}\left(\frac{b}{a}\right)+\\
&+C_3 4R_{33}\left(\frac{b}{c}\right)\xi_3\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\pi}{6}b\psi_3^A;\\
&5)\ A_1 4R_{31}\left(\frac{a}{b}\right)+C_1 4R_{31}\left(\frac{a}{c}\right)+A_3 4R_{33}\left(\frac{a}{b}\right)+B_3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[\beta_3\left(\frac{b}{a}\right)-\right.\\
&\left.-\alpha_3\left(\frac{b}{a}\right)+\xi_3\left(\frac{c}{b}\right)\beta_3\left(\frac{c}{a}\right)-\xi_3\left(\frac{c}{b}\right)\alpha_3\left(\frac{c}{a}\right)\right]+\\
&+C_3 4R_{33}\left(\frac{a}{c}\right)=\frac{\pi}{6}a\psi_3^B;\\
&6)\ A_1 4R_{31}\left(\frac{c}{b}\right)\xi_1\left(\frac{c}{a}\right)+B_1 4R_{31}\left(\frac{c}{a}\right)\xi_1\left(\frac{c}{b}\right)+A_3 4R_{33}\left(\frac{c}{b}\right)\xi_3\left(\frac{c}{a}\right)+\\
&+B_3 4R_{33}\left(\frac{c}{a}\right)\xi_3\left(\frac{c}{b}\right)+C_3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[\beta_3\left(\frac{a}{c}\right)-\alpha_3\left(\frac{a}{c}\right)+\right.\\
&\left.+\xi_3\left(\frac{b}{a}\right)\beta_3\left(\frac{b}{c}\right)-\xi_3\left(\frac{b}{a}\right)\alpha_3\left(\frac{b}{c}\right)\right]=\frac{\pi}{6}c\psi_3^C.
\end{aligned}\right\}\quad(79)$$

По формулам (51) и (55) подсчитываем в соответствии с заданными отношениями $\frac{a}{b}=1$ и $\frac{c}{b}=2$ величины

$$4R_{11}\left(\frac{b}{a}\right)=0{,}49814 \qquad \xi_1\left(\frac{c}{b}\right)=1{,}99254 \qquad 4R_{33}\left(\frac{b}{c}\right)=0{,}03555$$

$$4R_{11}\left(\frac{a}{c}\right)=0{,}29348 \qquad \alpha_1\left(\frac{b}{a}\right)=-0{,}31083 \qquad 4R_{33}\left(\frac{c}{a}\right)=0{,}03556$$

$$4R_{11}\left(\frac{a}{b}\right)=0{,}49814 \qquad \alpha_1\left(\frac{c}{a}\right)=-0{,}15915 \qquad 4R_{33}\left(\frac{c}{b}\right)=0{,}03556$$

$$4R_{11}\left(\frac{b}{c}\right)=0{,}29348 \qquad \alpha_1\left(\frac{a}{b}\right)=-0{,}31083 \qquad \xi_3\left(\frac{c}{a}\right)=2{,}0000$$

$$4R_{31}\left(\frac{b}{a}\right)=0{,}01993 \qquad \alpha_1\left(\frac{c}{b}\right)=-0{,}15915 \qquad \xi_3\left(\frac{c}{b}\right)=2{,}0000$$

$$4R_{31}\left(\frac{a}{c}\right)=0{,}00536 \qquad \alpha_1\left(\frac{a}{c}\right)=-0{,}46346 \qquad \xi_3\left(\frac{b}{a}\right)=1{,}0000$$

$$4R_{31}\left(\frac{a}{b}\right)=0{,}01993 \qquad \alpha_1\left(\frac{b}{c}\right)=-0{,}46346 \qquad \beta_1\left(\frac{b}{a}\right)=0{,}05913$$

$$4R_{31}\left(\frac{b}{c}\right)=0{,}00536 \qquad \alpha_3\left(\frac{b}{a}\right)=-0{,}10610 \qquad \beta_1\left(\frac{c}{a}\right)=0{,}00314$$

$$4R_{11}\left(\frac{c}{a}\right)=0{,}31999 \qquad \alpha_3\left(\frac{c}{a}\right)=-0{,}05305 \qquad \beta_1\left(\frac{a}{b}\right)=0{,}05913$$

$$4R_{11}\left(\frac{c}{b}\right)=0{,}31999 \qquad \alpha_3\left(\frac{a}{b}\right)=-0{,}10610 \qquad \beta_1\left(\frac{c}{b}\right)=0{,}00314$$

$$4R_{13}\left(\frac{b}{a}\right)=0{,}18000 \qquad \alpha_3\left(\frac{c}{b}\right)=-0{,}05305 \qquad \beta_1\left(\frac{a}{c}\right)=0{,}18083$$

$$4R_{13}\left(\frac{a}{c}\right)=0{,}42597 \qquad \alpha_3\left(\frac{a}{c}\right)=-0{,}21189 \qquad \beta_1\left(\frac{b}{c}\right)=0{,}18083$$

$$4R_{13}\left(\frac{a}{b}\right)=0{,}18000 \qquad \alpha_3\left(\frac{b}{c}\right)=-0{,}21189 \qquad \beta_3\left(\frac{b}{a}\right)=0{,}00014$$

$$4R_{13}\left(\frac{b}{c}\right)=0{,}42597 \qquad 4R_{31}\left(\frac{c}{a}\right)=0{,}04734 \qquad \beta_3\left(\frac{c}{a}\right)=0{,}00000$$

$$4R_{13}\left(\frac{c}{a}\right)=0{,}05259 \qquad 4R_{31}\left(\frac{c}{b}\right)=0{,}04734 \qquad \beta_3\left(\frac{a}{b}\right)=0{,}00014$$

$$4R_{13}\left(\frac{c}{b}\right)=0{,}05259 \qquad 4R_{32}\left(\frac{b}{a}\right)=0{,}05556 \qquad \beta_3\left(\frac{c}{b}\right)=0{,}00000$$

$$\xi_1\left(\frac{c}{a}\right)=1{,}99254 \qquad 4R_{33}\left(\frac{a}{c}\right)=0{,}03555 \qquad \beta_3\left(\frac{a}{c}\right)=0{,}01416$$

$$\xi_1\left(\frac{b}{a}\right)=1{,}0000 \qquad 4R_{33}\left(\frac{a}{b}\right)=0{,}05556 \qquad \beta_3\left(\frac{b}{c}\right)=0{,}01416$$

По формуле (77) для равномерно распределенной нагрузки вычисляем

$$\left(\chi_1^A\right)_1=-1{,}3162\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\left(\chi_1^B\right)_1=-1{,}3162\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\left(\chi_{II}^{A}\right)_1 = +0{,}23970\frac{pc^3}{Eh^3}(1-\mu^2) = +1{,}9176\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\left(\chi_{II}^{C}\right)_1 = +0{,}41028\frac{pc^3}{Eh^3}(1-\mu^2) = +3{,}2822\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\left(\chi_{III}^{B}\right)_1 = +0{,}23970\frac{pc^3}{Eh^3}(1-\mu^2) = +1{,}9176\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\left(\chi_{III}^{C}\right)_1 = -0{,}41028\frac{pc^3}{Eh^3}(1-\mu^2) = -3{,}2822\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\left(\chi_{I}^{A}\right)_3 = -0{,}02436\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\left(\chi_{I}^{B}\right)_3 = -0{,}02436\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\left(\chi_{II}^{A}\right)_3 = +0{,}00300\frac{pc^3}{Eh^3}(1-\mu^2) = +0{,}02400\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\left(\chi_{II}^{C}\right)_3 = +0{,}02184\frac{pc^3}{Eh^3}(1-\mu^2) = +0{,}17472\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\left(\chi_{III}^{B}\right)_3 = +0{,}00300\frac{pc^3}{Eh^3}(1-\mu^2) = +0{,}02400\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\left(\chi_{III}^{C}\right)_3 = -0{,}02184\frac{pc^3}{Eh^3}(1-\mu^2) = -0{,}17472\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2).$$

Согласно выражению (74)

$$\psi_1^A = \left(\chi_{I}^{A}\right)_1 - \left(\chi_{II}^{A}\right)_1 = -3{,}2338\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\psi_3^A = \left(\chi_{I}^{A}\right)_3 - \left(\chi_{II}^{A}\right)_3 = -0{,}04836\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\psi_1^B = \left(\chi_{I}^{B}\right)_1 - \left(\chi_{III}^{B}\right)_1 = -3{,}2338\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\psi_3^B = \left(\chi_{I}^{B}\right)_3 - \left(\chi_{III}^{B}\right)_3 = -0{,}04836\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\psi_1^C = \left(\chi_{III}^{C}\right)_1 - \left(\chi_{II}^{C}\right)_1 = -6{,}5644\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\psi_3^C = \left(\chi_{III}^{C}\right)_3 - \left(\chi_{II}^{C}\right)_3 = -0{,}34944\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2).$$

Уравнения (79) примут теперь вид

$$1)\ 1{,}71073A_1 + 0{,}49814B_1 + 0{,}29348C_1 + 0{,}18000B_3 + 0{,}42597C_3 = -5{,}0797\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$2)\ 0{,}49814A_1 + 1{,}71073B_1 + 0{,}29348C_1 + 0{,}18000A_3 + 0{,}42597C_3 = -5{,}0797\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$3)\ 0{,}63759A_1 + 0{,}63759B_1 + 3{,}17946C_1 + 0{,}10518A_3 + 0{,}10518B_3 = -20{,}623\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$4)\ 0{,}01993B_1 + 0{,}00536C_1 + 0{,}52393A_3 + 0{,}05556B_3 + 0{,}03555C_3 = -0{,}02532\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$5)\ 0{,}01993A_1 + 0{,}00536C_1 + 0{,}05556A_3 + 0{,}52393B_3 + 0{,}03555C_3 = $$
$$= -0{,}02532\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$6)\ 0{,}09433A_1 + 0{,}09433B_1 + 0{,}07112A_3 + 0{,}07112B_3 + 1{,}11552C_3 = $$
$$= -0{,}36593\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2).$$

Решая эти уравнения, получим

$$A_1 = -1{,}508\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$B_1 = -1{,}508\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$C_1 = -5{,}882\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$A_3 = +0{,}0676\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$B_3 = +0{,}0676\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$C_3 = -0{,}0816\frac{pa^4}{Eh^3}(1-\mu^2).$$

Для взятых размеров коробки, как и следовало ожидать, $A_q = B_q$.

Уравнения упругих поверхностей пластин согласно выражениям (22), (47) и (40) напишутся в виде

$$w_1 = \frac{p(1-\mu^2)}{2Eh^3}\left\{x^4 - 6a^2x^2 + 5a^4 + \frac{1536a^4}{\pi^4}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\sin\frac{q\pi(a+x)}{2a}}{q^4\operatorname{ch}\frac{q\pi}{2}}\times\right.$$
$$\left.\times\left[-\left(\frac{1}{\pi q}+\frac{1}{4}\operatorname{th}\frac{\pi q}{2}\right)\operatorname{ch}\frac{\pi qy}{2a}+\frac{y}{4a}\operatorname{sh}\frac{\pi qy}{2a}\right]\right\}+$$
$$+\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}A_q\left\{\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)\left[\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)}{\operatorname{sh}q\pi}-\frac{a+x}{2a}\times\right.\right.$$
$$\times\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)}{\operatorname{ch}q\pi}+\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right)}{\operatorname{sh}q\pi}-\frac{a-x}{2a}\times$$
$$\left.\times\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right)}{\operatorname{ch}q\pi}\right]+\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)\left[\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)}{\operatorname{sh}q\pi}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{a+y}{2a}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)}{\operatorname{ch}q\pi}+\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-y}{a}\right)}{\operatorname{sh}q\pi}-\frac{a-y}{2a}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-y}{a}\right)}{\operatorname{ch}q\pi}\right]\right\};$$

$$w_2 = w_3 = \frac{p(1-\mu^2)}{2Eh^3}\left\{x^4 - 6c^2x^2 + 5c^4 + \frac{1536c^4}{\pi^4}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\sin\frac{q\pi(a+x)}{2a}}{q^4\operatorname{ch}\frac{q\pi b}{2c}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[-\left(\frac{1}{q\pi}+\frac{b}{4c}\operatorname{th}\frac{\pi qb}{2c}\right)\operatorname{ch}\frac{\pi qy}{2c}+\frac{y}{4c}\operatorname{sh}\frac{\pi qy}{2c}\right]\right\}+$$

$$+\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\left\{A_q\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{b+y}{b}\right)\left[\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{c+x}{b}\right)}{\operatorname{sh}q\pi\frac{c}{b}}-\frac{c+x}{2c}\times\right.\right.$$

$$\times\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{c+x}{b}\right)}{\operatorname{ch}q\pi\frac{c}{b}}+\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{c-x}{b}\right)}{\operatorname{sh}q\pi\frac{c}{b}}-\frac{c-x}{2c}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{c-x}{b}\right)}{\operatorname{ch}q\pi\frac{c}{b}}\Bigg]+$$

$$+C_q\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{c+x}{c}\right)\left[\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{b+y}{c}\right)}{\operatorname{sh}q\pi\frac{b}{c}}-\frac{b+y}{2b}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{b+y}{c}\right)}{\operatorname{ch}q\pi\frac{b}{c}}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{b-y}{c}\right)}{\operatorname{sh}q\pi\frac{b}{c}}+\frac{b-y}{2b}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{b-y}{c}\right)}{\operatorname{sh}q\pi\frac{b}{c}}\right]\right\}.$$

Вид упругой линии среднего ($y=0$) вертикального и среднего ($x=0$) горизонтального сечения коробки показан на фиг. 111, *а* и *б*.

В этих же сечениях коробки на той же фиг. 111 приведены эпюры изгибающих моментов. Последние вычислены на основании выписанных выражений w по формулам (5).

Наибольший изгибающий момент, как это видно из приведенных эпюр, имеет место по серединам больших ребер:

$$M_{y\,\max} = 0{,}35pa^2.$$

Знак второго изгибающего момента в этих же точках совпадает со знаком первого, следовательно,

$$\sigma_{экв} = \frac{6M_{y\,\max}}{h^2}$$

или

$$\sigma_{экв} = \frac{6\cdot 0{,}35pa^2}{h^2} \leqslant [\sigma]_p.$$

Подставляя числовые значения величин, имеем,

$$p \leqslant \frac{1^2\cdot 1500}{6\cdot 0{,}35\cdot 25^2} = 1{,}15\ кг/см^2.$$

Заметим, что полученное допускаемое давление оказалось столь низким за счет того, что пластины, составляющие коробку, работают в невыгодных условиях сильного изгиба на ребрах.

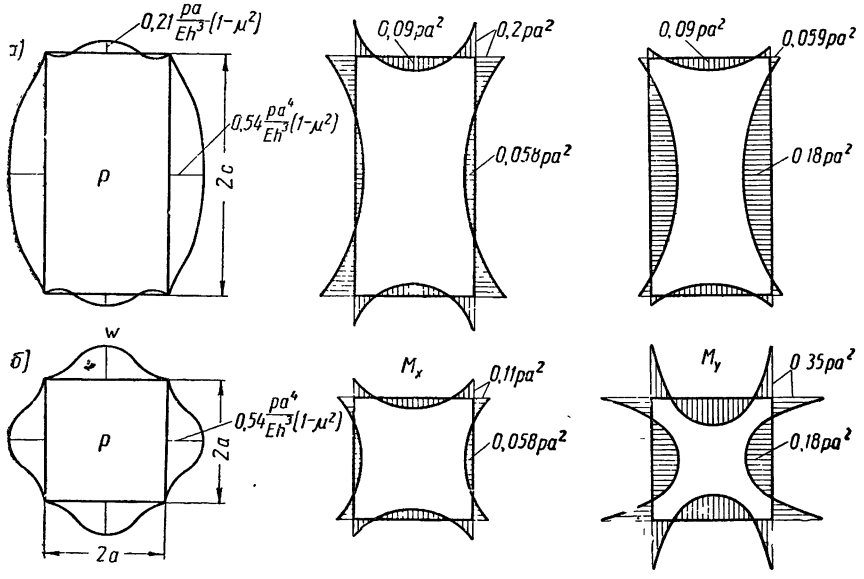
Идеальную конструкцию для удержания высоких давлений представляет, как известно, сферическая оболочка. Если в рассматриваемом примере коробку заменить сферическим сосудом той же толщины и емкости ($R \approx 40$ *см*), то

$$\sigma_{экв} = \frac{pR}{2h} \leqslant [\sigma]_p$$

и

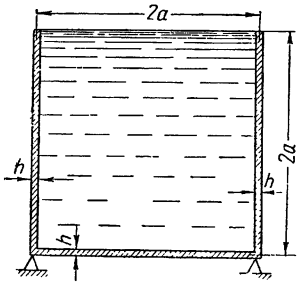
$$p \leqslant \frac{1500 \cdot 2 \cdot 1}{40} \approx 75 \text{ кг/см}^2.$$

Разница, как видим, разительная.

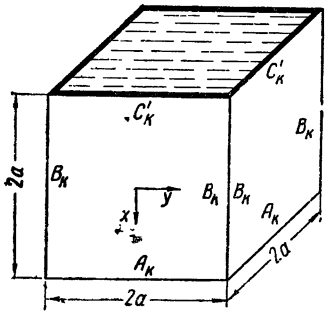


Фиг. 111.

Пример 2. Подобрать толщину стенок прямоугольного открытого водонапорного бака (фиг. 112), если дано, что $2a=2$*м*, а допускаемое напряжение для материала $[\sigma]=2000$ *кг/см*^{2}. Все стенки бака и днище имеют одинаковую толщину h.



Фиг. 112.



Фиг. 113.

В случае заполнения бака доверху его боковые стенки находятся под воздействием линейно распределенного по высоте давления, дно бака — под воздействием постоянного давления.

Припишем ребрам бака постоянные защемления A_k и B_k. Свободному краю припишем постоянные C'_j (фиг. 113).

Для нижнего ребра согласно формуле (64) можно написать

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{\pi}{2}a\psi_q^A=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[-A_q\alpha_q(1)+A_q\beta_q(1)+C_q'\left(1+\frac{1}{q}\zeta_q(1)\right)-A_q\alpha_q(1)\right]-$$

$$-2\sum_1^\infty[2A_kR_{qk}(1)\cos k\pi-2B_kR_{qk}(1)];$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\pi}{2}a\psi_r^A=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[-A_r\alpha_r(1)+A_r\beta_r(1)+C_r'\left(1+\frac{1}{r}\zeta_r(1)\right)-A_r\alpha_r(1)\right].$$

Для свободного края по формулам (68) получаем

$$\lambda_q\left(\frac{2a}{q\pi}\right)^3+C_q'\eta_{iq}(1)+A_q[\theta_q(1)+(2-\mu)\beta_q(1)]-$$

$$-\frac{8}{\pi^2}\sum_1^\infty 2B_k\cos k\pi R_{qk}(1)\left[\left(\frac{k}{q}\right)^2+(2-\mu)\right]=0;$$

$$\lambda_r\left(\frac{2a}{r\pi}\right)^3+C_r'\eta_r(1)+A_r[\theta_r(1)+(2-\mu)\beta_r(1)]=0.$$

Наконец, для вертикального ребра формулы (65) дают

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{\pi}{2}a\psi_q^B=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2[-B_q\alpha_q(1)+B_q\beta_q(1)+B_q\beta_q(1)-B_q\alpha_q(1)]-$$

$$-2\sum_1^\infty[A_kR_{qk}(1)\cos k\pi-A_kR_{qk}(1)]+$$

$$+\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty\left[C_k'M_{qk}(1)-C_k'M_{qk}(1)\cos k\pi\right];$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\pi}{2}a\psi_r^B=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2[-B_r\alpha_r(1)+B_r\beta_r(1)+B_r\beta_r(1)-B_r\alpha_r(1)]-$$

$$-2\sum_1^\infty[A_rR_{rk}(1)\cos k\pi-A_rR_{rk}(1)]-$$

$$-\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty\left[C_k'M_{rk}(1)-C_k'M_{rk}(1)\cos k\pi\right].$$

Прежде чем преобразовывать эти уравнения, обратимся к определению величин

$$\psi_q^A,\ \psi_r^A,\ \lambda_q,\ \lambda_r,\ \psi_q^B\ \text{и}\ \psi_r^B.$$

Последние зависят только от размеров пластин и способа их нагружения. Для горизонтального ребра [см. выражение (74)]

$$\psi_q^A=\chi_q^{\mathrm{I}}-\chi_q^{\mathrm{II}},$$

где χ_q^{I} — коэффициент разложения для кромки днища;

χ_q^{II} — то же для стенки [см. формулу (76)].

Для плиты, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, величина χ_q^{I} может быть определена по формуле (77).

При $a = b$

$$\chi_1^{\mathrm{I}} = -1{,}3162\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\chi_2^{\mathrm{I}} = 0;$$

$$\chi_3^{\mathrm{I}} = -0{,}02436\frac{pa^3}{Eh^3}(1-\mu^2);$$

$$\chi_4^{\mathrm{I}} = 0.$$

Для боковой стенки, т. е. для пластины, загруженной силами, распределенными по закону треугольника, коэффициенты разложения должны быть определены особо.

Воспользуемся общим выражением упругой поверхности свободно опертой плиты с нагрузкой указанного типа. Это выражение заимствовано из работы Б. Г. Галеркина [2] [формула (159)]. При $a=b$ оно имеет следующий вид:

$$w_0 = \frac{pa^4(1-\mu^2)}{4Eh^3}\left[\frac{a+x}{a^5}(y^4 - 6a^2y^2 + 5a^4) - \right.$$

$$-\frac{3072}{\pi^5}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k+3}{2}}}{k^5\,\mathrm{sh}\,k\pi}\,\mathrm{sh}\frac{k\pi(a+x)}{2a}\cos\frac{k\pi y}{2a} -$$

$$-\frac{768}{\pi^4}\cdot\frac{a-x}{a}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k+3}{2}}}{k^4\,\mathrm{sh}^2\,k\pi}\,\mathrm{ch}\,k\pi\,\mathrm{sh}\frac{k\pi(a+x)}{2a}\cos\frac{k\pi y}{2a} +$$

$$\left.+\frac{768}{\pi^4}\cdot\frac{a+x}{a}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k+3}{2}}}{k^4\,\mathrm{sh}^2\,k\pi}\,\mathrm{sh}\frac{k\pi(a-x)}{2a}\cos\frac{k\pi y}{2a}\right]. \qquad (80)$$

Начало координат xy расположено при этом в центре пластины, и ось x направлена в сторону возрастания давления.

Из выражения (80) находим

$$\left|\frac{\partial w_0}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{pa^3(1-\mu^2)}{4Eh^3}\left[\frac{1}{a^4}(y^4 - 6a^2y^2 + 5a^4) - \right.$$

$$\left.-\frac{768}{\pi^4}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k+3}{2}}}{k^4\,\mathrm{th}\,k\pi}\cos\frac{k\pi y}{2a} - \frac{768}{\pi^4}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}k\pi\frac{(-1)^{\frac{k+3}{2}}}{k^4\,\mathrm{sh}^2\,k\pi}\cos\frac{k\pi y}{2a}\right];$$

$$\left|\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=a} = \frac{pa^3(1-\mu^2)}{4Eh^3}\left[-\frac{8}{a}(a+x) + \frac{1536}{\pi^4}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{k^4\,\mathrm{sh}\,k\pi}\,\mathrm{sh}\frac{k\pi(a+x)}{2a} + \right.$$

$$+\frac{384}{\pi^3}\cdot\frac{a-x}{a}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}\,k\pi}{k^3\,\mathrm{sh}^2\,k\pi}\,\mathrm{sh}\frac{k\pi(a+x)}{2a} -$$

$$\left.-\frac{384}{\pi^3}\frac{a+x}{a}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{k^3\,\mathrm{sh}^2\,k\pi}\,\mathrm{sh}\frac{k\pi(a-x)}{2a}\right].$$

Для нижнего ребра

$$\chi_q^{II} = \frac{1}{a}(-1)^{\frac{q-1}{2}} \int_{-a}^{+a} \left| \frac{\partial w_0}{\partial x} \right|_{x=a} \cos\left(q\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{a}\right) dy;$$

$$\chi_r^{II} = \frac{1}{a}(-1)^{\frac{r}{2}+1} \int_{-a}^{+a} \left| \frac{\partial w_0}{\partial x} \right|_{x=a} \sin\left(r\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{a}\right) dy,$$

откуда

$$\chi_q^{II} = 192 \frac{p(1-\mu^2)}{Eh^3} a^3 \left[\frac{2}{(q\pi)^5} - \frac{1}{(q\pi)^4 \operatorname{th} q\pi} - \frac{1}{(q\pi)^3 \operatorname{sh}^2 q\pi}\right]. \quad (81)$$

$$\chi_r^{II} = 0$$

Для боковых ребер

$$\chi_q^{II} = \frac{1}{a}(-1)^{\frac{q-1}{2}} \int_{-a}^{+a} \left| \frac{\partial w_0}{\partial y} \right|_{y=a} \cos\left(q\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a}\right) dx;$$

$$\chi_r^{II} = \frac{1}{a}(-1)^{\frac{r}{2}+1} \int_{-a}^{+a} \left| \frac{\partial w_0}{\partial y} \right|_{y=a} \sin\left(r\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a}\right) dx,$$

откуда

$$\chi_q^{II} = 8\frac{pa^3(1-\mu^2)}{Eh^3}\left[-\frac{1}{q\pi} + \frac{96}{\pi^5}\sum_{1,3,5...}^{\infty} \frac{1}{k^4 q\left(1+\frac{k^2}{q^2}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{96}{\pi^5}\sum_{1,3,5...}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}^2 k\pi - 1}{k^2 q^3 \operatorname{sh}^2 k\pi \left(1+\frac{k^2}{q^2}\right)^2}\right]; \quad (82)$$

$$\chi_r^{II} = 8\frac{pa^3(1-\mu^2)}{Eh^3}\left[-\frac{1}{r\pi} + \frac{96}{\pi^5}\sum_{1,3,5...}^{\infty} \frac{1}{k^4 r\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{96}{\pi^5}\sum_{1,3,5...}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}^2 k\pi - 1}{k^2 r^3 \operatorname{sh}^2 k\pi \left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)^2}\right]. \quad (83)$$

Для нижнего ребра в числах получаем

$$\chi_1^{II} = -0{,}77004\frac{p(1-\mu^2)a^3}{Eh^3}.$$

Так как группа уравнений (64) для ребра составлена переходом от дна к стенке; ось x для стенок следует направить от ребра, т. е. в сторону убывания линейно распределенного давления p (вверх). Следовательно, знак при χ_1^{II} следует изменить на обратный, поэтому

$$\psi_1^A = [-1{,}3162 - (+0{,}7700)]\frac{pa^3(1-\mu^2)}{Eh^3}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \psi_1^A &= -2{,}0862\frac{pa^3(1-\mu^2)}{Eh^3}; \\ \psi_2^A &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (84)$$

Для бокового ребра

$$\chi_1^{II} = -0{,}6584\frac{pa^3(1-\mu^2)}{Eh^3};$$

$$\chi_2^{II} = -0{,}0605\frac{pa^3(1-\mu^2)}{Eh^3}.$$

Константы ψ_q^B и ψ_r^B из условия равноправия стенок определяются удвоением величин χ_q^{II} и χ_r^{II}, так что

$$\left.\begin{aligned}\psi_1^B &= -1{,}3168\frac{pa^3(1-\mu^2)}{Eh^3};\\ \psi_2^B &= -0{,}1210\frac{pa^3(1-\mu^2)}{Eh^3}.\end{aligned}\right\} \qquad (85)$$

Теперь остается определить λ_q и λ_r, которые являются коэффициентами разложения реакции опоры на длине свободной кромки:

$$\lambda_q = \frac{1}{a}(-1)^{\frac{q-1}{2}}\int_{-a}^{+a}\left|\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=-a}\cos\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{a}\right)dy;$$

$$\lambda_r = \frac{1}{a}(-1)^{\frac{r}{2}+1}\int_{-a}^{+a}\left|\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=-a}\sin\left(r\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{a}\right)dy.$$

Согласно выражению (80) после преобразований получаем

$$\lambda_q = 48\frac{pa(1-\mu^2)}{Eh^3}\left[2\frac{2-\mu}{(q\pi)^3}-\frac{1-\mu}{q\pi}\cdot\frac{\operatorname{ch} q\pi}{\operatorname{sh}^2 q\pi}-\frac{3-\mu}{(q\pi)^2}\frac{1}{\operatorname{sh} q\pi}\right];$$

$\lambda_r = 0.$

Подсчет дает

$$\lambda_1 = +3{,}200\frac{pa(1-\mu^2)}{Eh^3};\ \lambda_2 = 0. \qquad (86)$$

Вернемся теперь к уравнениям (64) и (65), определяющим постоянные защемления, и перепишем их, ограничиваясь индексами $q = 1$ и $r = 2$:

$$1)\ A_1\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2[-2\alpha_1(1)+\beta_1(1)]+4R_{11}(1)\right\}+$$
$$+B_1 4R_{11}(1)+C_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)^2[1+\zeta_1(1)]-$$
$$-A_2 4R_{12}(1)+B_2 4R_{12}(1)=\frac{\pi}{2}a\psi_1^A;$$

$$2)\ A_1[\theta_1(1)+(2-\mu)\beta_1(1)]+B_1\frac{16}{\pi^2}R_{11}(1)[1+(2-\mu)]+$$
$$+C_1'\eta_1(1)-B_2\frac{16}{\pi^2}R_{12}(1)[4+(2-\mu)]=-\lambda_1\left(\frac{2a}{\pi}\right)^3;$$

$$3)\ A_1 4R_{11}(1)+B_1\left(\frac{\pi}{2}\right)^2[-2\alpha_1(1)+2\beta_1(1)]+C_1'\pi M_{11}(1)=\frac{\pi}{2}a\psi_1^B;$$

$$4)\ A_2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2[-2\alpha_2(1)+\beta_2(1)]+C_2'\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[1+\frac{1}{2}\zeta_2(1)\right]=0;$$

$$5)\ A_2[\theta_2(1)+(2-\mu)\beta_2(1)]+C_2'\eta_2(1)=0;$$

$$6)\ A_1 4R_{21}(1)-C_1'\pi M_{21}(1)+B_2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2[2\alpha_2(1)+2\beta_2(1)]=\frac{\pi}{4}a\psi_2^B.$$

Из четвертого и пятого уравнений следует, что $A_2 = C_2' = 0$.

По формулам (51), (55), (63), (69), (70) и (66), положив $\mu = 0{,}3$, получим

$$\alpha_1(1) = -0.31083;\quad \beta_1(1) = 0{,}059131;\quad R_{11}(1) = 0{,}12453;$$
$$\zeta_1(1) = -0{,}16637;\quad R_{12}(1) = 0{,}079998;\quad \theta_1(1) = -0{,}004208;$$
$$\eta_{11}(1) = 6{,}3964;\quad M_{11}(1) = 3{,}7058;\quad R_{21}(1) = 0{,}019925;$$
$$M_{21}(1) = 1{,}2518;\quad \alpha_2(1) = -0{,}15915;\quad \beta_2(1) = 0{,}0031405.$$

Уравнения принимают теперь вид

$$2{,}1779A_1 + 0{,}49812B_1 + 2{,}0569C_1' + 0{,}31999B_2 = -3{,}2770\,\frac{pa^4(1-\mu^2)}{Eh^3};$$

$$0{,}096315A_1 + 0{,}54507B_1 - 6{,}3964C_1' - 0{,}73922B_2 = -0{,}8256\,\frac{pa^4(1-\mu^2)}{Eh^3};$$

$$0{,}49812A_1 + 1{,}8257B_1 + 11{,}642C_1' = -2{,}0684\,\frac{pa^4(1-\mu^2)}{Eh^3};$$

$$0{,}079700A_1 - 3{,}9327\,C_1' + 0{,}80087B_2 = -0{,}09503\,\frac{pa^4(1-\mu^2)}{Eh^3};$$

откуда

$$A_1 = -1{,}335\,\frac{pa^4(1-\mu^2)}{Eh^3};\quad C_1' = 0{,}01981\,\frac{pa^4(1-\mu^2)}{Eh^3};$$

$$B_1 = -0{,}8950\,\frac{pa^4(1-\mu^2)}{Eh^3};\quad B_2 = 0{,}1115\,\frac{pa^4(1-\mu^2)}{Eh^3}.$$

Уравнения упругих поверхностей для днища и стенок могут быть в соответствии с выражениями (22), (40), (47) и (80) записаны в виде

$$w = \frac{p(1-\mu^2)}{2Eh^3}\left\{x^4 - 6a^2x^2 + 5a^4 + \frac{1536}{\pi^4}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}\cos\frac{q\pi x}{2a}}{q^4\operatorname{ch}\frac{q\pi}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[-\left(-\frac{1}{\pi q}+\frac{1}{4}\operatorname{th}\frac{\pi q}{2}\right)\operatorname{ch}\frac{q\pi y}{2a}+\frac{y}{4a}\operatorname{sh}\frac{q\pi y}{2a}\right]\right\}+$$

$$+\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}A_q\left\{\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)\left[\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)}{\operatorname{sh}q\pi}-\frac{a+x}{2a}\times\right.\right.$$

$$\times\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)}{\operatorname{ch}q\pi}+\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right)}{\operatorname{sh}q\pi}-\frac{a-x}{2a}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right)}{\operatorname{ch}q\pi}\Bigg]+$$

$$+\sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)\left[\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)}{\operatorname{sh}q\pi}-\frac{a+y}{2a}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)}{\operatorname{ch}q\pi}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-y}{a}\right)}{\operatorname{sh}q\pi}-\frac{a-y}{2a}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-y}{a}\right)}{\operatorname{ch}q\pi}\right]\right\};$$

для боковой стенки

$$w = \frac{pa^4(1-\mu^2)}{4Eh^3}\left[\frac{a+x}{a^5}(y^4 - 6a^2y^2 + 5a^4) - \right.$$

$$- \frac{3072}{\pi^5}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{q+3}{2}}}{q^5 \operatorname{sh} q\pi}\operatorname{sh}\frac{q\pi(a+x)}{2a}\cos\frac{q\pi y}{2a} -$$

$$- \frac{768}{\pi^4}\cdot\frac{a-x}{a}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{q+3}{2}}}{q^4 \operatorname{sh}^2 q\pi}\operatorname{ch} q\pi\cdot\operatorname{sh}\frac{q\pi(a+x)}{2a}\cos\frac{q\pi y}{2a} +$$

$$\left. + \frac{768}{\pi^4}\cdot\frac{a+x}{a}\sum_{1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{q+3}{2}}}{q^4 \operatorname{sh}^2 q\pi}\operatorname{sh}\frac{q\pi(a-x)}{2a}\cos\frac{q\pi y}{2a}\right] +$$

$$+ \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} A_q \sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-y}{a}\right)\left[\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)}{\operatorname{sh} q\pi} - \frac{a+x}{2a}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)}{\operatorname{ch} q\pi}\right] +$$

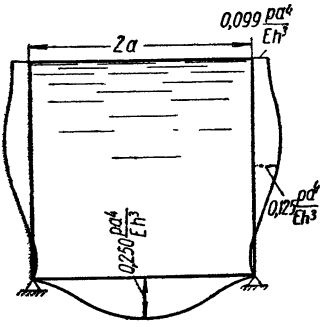
$$+ \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} B_q \sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+x}{a}\right)\left[\frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-y}{a}\right)}{\operatorname{sh} q\pi} - \frac{a-y}{2a}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-y}{a}\right)}{\operatorname{ch} q\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)}{\operatorname{sh} q\pi} - \frac{a+y}{2a}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+y}{a}\right)}{\operatorname{ch} q\pi}\right] +$$

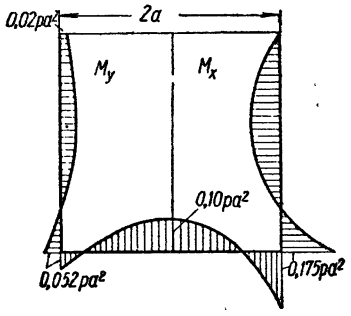
$$+ \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} C'_q \sin\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-y}{a}\right)\left[\operatorname{sh}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \zeta_q(1)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\operatorname{ch}\left(q\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\right)\right].$$

Ось x направлена во втором случае по вертикали вниз (фиг. 113).



Фиг. 114.



Фиг. 115.

Пользуясь выписанными выражениями и первыми значениями постоянных A, B и C', можно построить упругую линию образующей бака в вертикальном его сечении (фиг. 114), а затем и эпюры изгибающих моментов (фиг. 115).

Наибольший изгибающий момент $M_x = 0{,}175\,pa^2$ возникает по серединам нижних ребер:

$$\sigma_{экв} = \frac{6M_x}{h^2};$$

$$\sigma_{экв} = 1{,}05\frac{pa^2}{h^2} \leqslant [\sigma]_p.$$

При заданном размере $2a = 2$ *м*, допускаемом напряжении $[\sigma]_p = 2000$ *кг/см*^{2} и при $p = 0{,}2$ *кг/см*^{2} имеем

$$1{,}05\frac{0{,}2 \cdot 100^2}{h^2} \leqslant 2000;$$

$$h \geqslant 1 \text{ см}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов Н. И., Теория упругости и пластичности, ГИТТЛ, 1953.
2. Галеркин Б. Г., Упругие тонкие плиты, Госстройиздат, 1933.
3. Калманок А. С., Строительная механика пластинок, Машстройиздат, 1950.
4. Лейбензон Л. С., Курс теории упругости, ОГИЗ, 1947.
5. Лехницкий С. Г., Анизотропные пластинки, ОГИЗ, 1947.
6. Лихарев К. К., Расчет систем, составленных из жестко соединенных прямоугольных плит, Труды кафедры «Сопротивление материалов», МВТУ, 1947.
7. Маркус Г., Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит и безбалочных перекрытий, ОНТИ, 1936.
8. Папкович П. Ф., Строительная механика корабля, ч. II, Гос. изд. судостроит. промышл., 1941.
9. Смотров А., Жесткие коробки, ГНТИ, 1931.
10. Тимошенко С. П., Пластинки и оболочки, ОГИЗ, 1948.
11. Шиманский Ю. А., Изгиб пластин, ОНТИ, 1934.

ГЛАВА III

РАСЧЕТЫ ДЕТАЛЕЙ КОНСТРУКЦИЙ, ВЫПОЛНЕННЫХ В ВИДЕ СИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК

Под осесимметричными или просто симметричными оболочками понимаются оболочки, срединная поверхность которых представляет собой поверхность вращения. Примем, что нагрузка, действующая на такую оболочку, также обладает свойствами осевой симметрии.

Существенным упрощением расчета оболочек подобного типа является то обстоятельство, что производные от всех геометрических параметров, напряжений, усилий и деформаций, возникающих в оболочке, по полярному углу обращаются в ноль. При этом задача после принятия некоторых гипотез, оправдываемых тонкостенностью, становится одномерной, т. е. решается в функции одного независимого переменного, например текущего радиуса, задача же о расчете несимметричных оболочек решается в функции двух независимых переменных.

К схеме симметричной оболочки сводится решение многих практических задач. Сюда относится расчет безбалочных перекрытий, стенок баков, температурных компенсаторов и многие другие задачи.

Наиболее типичные из них будут разобраны ниже.

Техническая теория тонкостенных оболочек основана на принятии тех же гипотез, что и теория пластин. При расчете оболочек принимают обычно гипотезу неизменности нормали и гипотезу ненадавливания слоев оболочки друг на друга (см. гл. I и II т. II).

В отличие от пластин серединную поверхность оболочек даже при малых перемещениях нельзя считать ненапряженной, поэтому в число внутренних силовых факторов необходимо вводить, кроме изгибающих моментов и перерезывающих сил, еще и нормальные усилия.

Изучение теории оболочек целесообразно начать с простейших примеров расчета по так называемой безмоментной теории.

§ 1. БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ

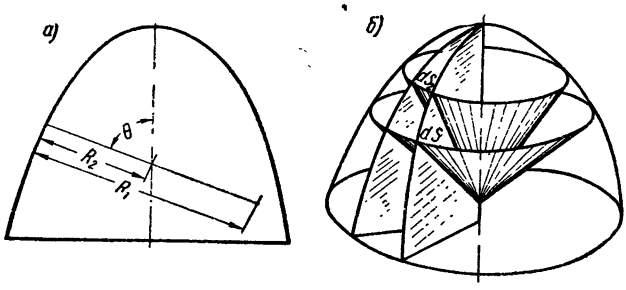
А. Общие положения

Задача о расчете оболочек вращения наиболее просто решается в том случае, когда возможно принять, что напряжения, возникающие в оболочке, равномерно распределены по ее толщине и, следовательно, изгибающие моменты равны нулю. Теория оболочек, построенная в этом предположении, называется безмоментной теорией оболочек.

Если оболочка не имеет резких переходов и жестких закреплений и, кроме того, если она не нагружена контурными сосредоточенными силами и моментами, то к ее расчету с успехом может применяться безмоментная теория. При наличии же перечисленных особенностей в

местах крепления оболочки и в местах резких изменений формы возникают повышенные напряжения, обусловленные изгибным эффектом. Решение подобных задач более точными методами с учетом изгибающих моментов (см. ниже) показывает, что зона повышенных напряжений остается в большинстве случаев весьма ограниченной, и поэтому, следовательно, на достаточном удалении от перечисленных особых областей определение напряжений может также производиться по безмоментной теории. Определение же напряжений в указанных зонах требует особого исследования.

Следует, наконец, заметить, что чем меньше толщина оболочки, тем ближе к истине предполагаемый закон равномерного распределе-



Фиг. 116.

ния напряжений по толщине и тем более точные результаты дает безмоментная теория. Для гибких матерчатых и тонких резиновых оболочек эта теория дает наилучшие результаты.

Рассмотрим симметричную оболочку (фиг. 116, *а*). Обозначим через R_1 радиус кривизны меридиана, R_2 — второй главный радиус, т. е. радиус кривизны нормального сечения, перпендикулярного дуге меридиана.

Из дифференциальной геометрии известно, что для поверхности вращения радиус R_2 равен отрезку нормали, заключенному между оболочкой и осью вращения (фиг. 116, *а*). Радиусы R_1 и R_2 в общем случае являются функциями угла θ — угла между нормалью к срединной поверхности и осью симметрии.

Внешнюю нагрузку, отнесенную к единице площади срединной поверхности и распределенную симметрично относительно оси, разложим по нормали и касательной к дуге меридиана и соответственно обозначим составляющие через p_n и p_t.

Двумя парами меридиональных и нормальных конических сечений (фиг. 116, *б*) выделим из оболочки элемент $ds_1 ds_2$, представленный на фиг. 117, и к его граням приложим внутренние силы. Через T_1 обозначим нормальное усилие, отнесенное к единице соответствующей дуги нормального сечения и расположенное в плоскости кривизны меридиана, через T_2 — то же во второй главной плоскости кривизны.

Вследствие того что по предположению напряжения по толщине распределены равномерно, изгибающие моменты в проведенных сечениях обращаются в ноль, а величины $T_1 = \sigma_1 h$; $T_2 = \sigma_2 h$, где σ_1 и σ_2 — соответственно меридиональное и окружное напряжения.

Проектируем силы, действующие на элемент, на ось z (нормаль к срединной поверхности — см. фиг. 117):

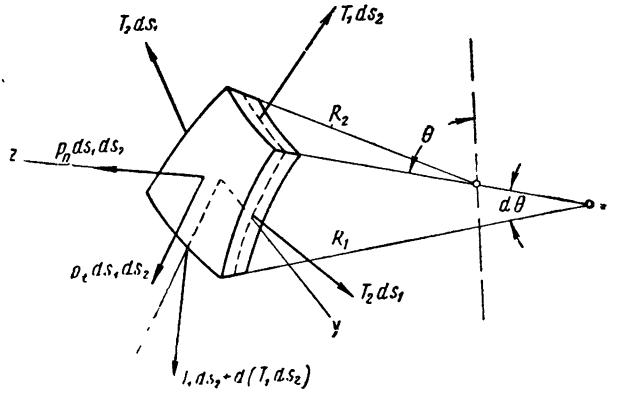
$$T_2 ds_1 \frac{ds_2}{R_2} + T_1 ds_2 \frac{ds_1}{R_1} - p_n ds_1 ds_2 = 0.$$

Отсюда

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}=p_n \tag{1}$$

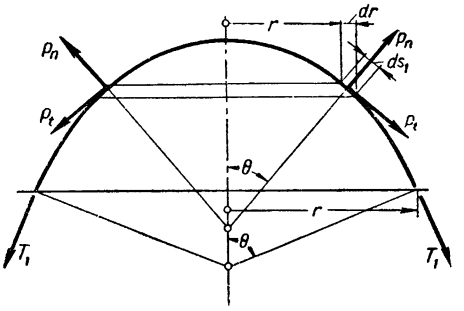
или

$$\frac{\sigma_1}{R_1}+\frac{\sigma_2}{R_2}=\frac{p_n}{h}. \tag{2}$$



Фиг. 117.

Второе уравнение равновесия осесимметричной оболочки удобнее составлять не для элемента $ds_1 ds_2$, а для части оболочки, отсеченной нормальным коническим сечением (фиг. 118).



Фиг. 118.

Приравнивая осевые составляющие сил, получаем

$$2\pi r T_1 \sin\theta = \int (p_n \cos\theta - p_t \sin\theta)\, 2\pi r ds_1$$

или

$$T_1 r \sin\theta = \sigma_1 h r \sin\theta = \int (p_n - p_t \operatorname{tg}\theta)\, r dr. \tag{3}$$

Уравнений (2) и (3) уже достаточно для того, чтобы иметь возможность в основных случаях определить напряжения в оболочке, находящейся в безмоментном состоянии.

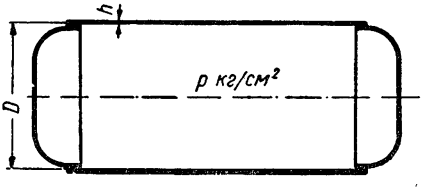
Б. Примеры расчета симметричных оболочек по безмоментной теории

Пример 1. Подобрать толщину цилиндрической части бака (фиг. 119), находящегося под воздействием внутреннего давления $p=10$ *ат*. Диаметр бака $D=1$ *м*. Допускаемое напряжение $[\sigma]=1000$ *кг/см*^{2}.

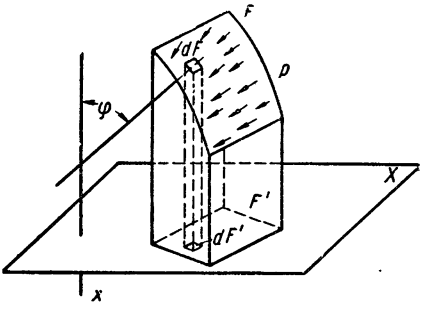
Местными напряжениями, возникающими на стыке цилиндрической части с днищем, пренебрегаем. Тогда к данному расчету можно будет применить формулы (2) и (3) безмоментной теории.

Прежде всего докажем следующую теорему.

Теорема. Если на какую-либо поверхность действует равномерно распределенное давление, то независимо от формы поверхности проек-



Фиг. 119.



Фиг. 120.

ция равнодействующей сил давления на заданную ось равна произведению давления p на площадь проекции поверхности на плоскость, перпендикулярную к заданной оси.

Положим, задана поверхность F (фиг. 120), на которую действует равномерно распределенное давление p. Требуется определить проекцию равнодействующей сил давления на ось x.

Эта проекция P_x будет, очевидно, равна

$$\int_F p\cos\varphi dF,$$

где φ — угол между нормалью к поверхности и осью x (фиг. 120).

Площадь проекции элемента dF на плоскость X, перпендикулярную к оси x, будет

$$dF'=dF\cos\varphi,$$

поэтому

$$P_x=p\int_F dF'=pF'.$$

Теорема, таким образом, доказана.

Для части цилиндра (фиг. 121) осевое усилие от давления независимо от формы днища будет

$$p\frac{\pi D^2}{4},$$

тогда из условия равновесия

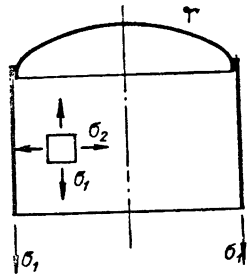
$$\sigma_1\pi Dh=p\frac{\pi D^2}{4};$$

$$\sigma_1=\frac{pD}{4h}.$$

Из выражения (2), полагая $R_1 = \infty$ и $R_2 = \frac{D}{2}$, находим

$$\sigma_2 = \frac{pD}{2h}. \tag{4}$$

Таким образом, в стенках цилиндрического бака окружное напряжение σ_2 вдвое больше меридионального напряжения σ_1. В этом находит свое объяснение тот факт, что разрыв подобного бака при чрезмерном внутреннем давлении происходит по образующей.



Фиг. 121.

Третье главное напряжение σ_3 считается, как говорилось выше, пренебрежимо малым по сравнению с двумя первыми.

В самом деле, на внутренней поверхности нормальное напряжение $\sigma_3 = -p$, на внешней поверхности $\sigma_3 = 0$.

В промежуточных точках σ_3 остается в указанных пределах [1], поэтому напряжение σ_3 меньше наибольшего напряжения σ_2 (4) в таком отношении, в каком толщина h меньше радиуса $\frac{D}{2}$. Таким образом, поскольку толщина h считается малой по сравнению с радиусами кривизны оболочки, пренебрежение напряжением σ_3 является вполне логичным.

По теории наибольших касательных напряжений эквивалентное напряжение в рассматриваемой задаче

$$\sigma_{экв} = \sigma_{max} - \sigma_{min},$$

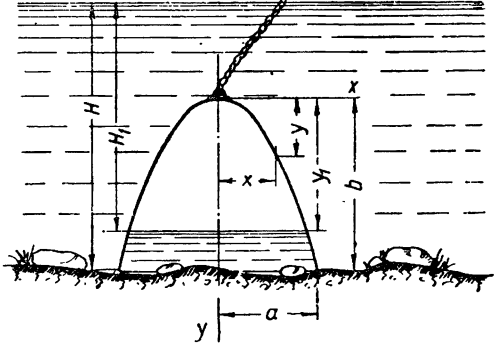
т. е.

$$\sigma_{экв} = \frac{pD}{2h} - 0 = \frac{pD}{2h}.$$

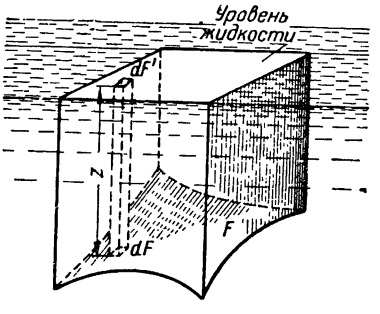
Согласно заданным размерам

$$h \geqslant \frac{pD}{2[\sigma]_p} = \frac{10 \cdot 100}{2 \cdot 1000} = 0{,}5\ см.$$

Пример 2. Определить напряжения, возникающие в колоколе, предназначенном для подводных работ (фиг. 122), при опускании его на дно водоема, имеющего глубину $H = 7$ *м*.



Фиг. 122.



Фиг. 123.

Колокол имеет параболическую форму. Радиус основания $a = 1$ *м*, высота $b = 2$ *м*, толщина $h = 3$ *мм*. Балласт, погружающий колокол, равномерно распределен по его нижнему контуру.

Прежде чем решить задачу, докажем следующую теорему.

Теорема. Если на какую-либо поверхность действует давление жидкости, имеющей свободный уровень (фиг. 123), то вертикальная состав-

[1] В гл. V т. II этот вопрос будет рассмотрен подробно.

ляющая равнодействующей сил давления равна весу жидкости в объеме, расположенном над поверхностью.

Вертикальная составляющая сил давления для площадки согласно теореме предыдущего примера будет равна произведению давления, действующего на эту площадку, на проекцию площадки dF на уровень жидкости, т. е.

$$pdF'.$$

Так как

$$p = \gamma z,$$

где γ — вес единицы объема жидкости, то вертикальная сила, действующая на площадку dF, будет

$$\gamma z dF'.$$

Но

$$zdF'$$

представляет собой объем элементарной призмы, расположенной над площадкой dF. Суммарная искомая сила будет, следовательно, равна весу всей жидкости в объеме, расположенном над поверхностью F.

Теорема, таким образом, доказана.

Обращаемся к решению примера.

Напишем прежде всего уравнение образующей колокола в системе координат xy (фиг. 122)

$$y = \frac{b}{a^2} x^2.$$

Объем верхней части колокола до уровня y будет

$$V = \int_0^y \pi x^2 dy = \frac{\pi a^2}{2b} y^2.$$

Объем всего колокола

$$V_в = \frac{\pi}{2} a^2 b. \tag{5}$$

Определим теперь положение уровня жидкости в колоколе, т. е. установим величины y_1 и H_1 (фиг. 122).

Давление воздуха под колоколом p равно, очевидно, давлению жидкости на глубине H_1, т. е.

$$p = \gamma H_1 + p_a, \tag{6}$$

где p_a — давление атмосферы над уровнем жидкости.

Но давление p определяется из закона Бойля-Мариотта как

$$p = p_a \frac{V_в}{V_1}$$

или

$$p = p_a \frac{b^2}{y_1^2}.$$

Согласно выражению (6)

$$p_a \frac{b^2}{y_1^2} = \gamma (H - b + y_1) + p_a,$$

откуда

$$y_1^3 + y_1^2 \left(\frac{p_a}{\gamma} + H - b \right) = \frac{p_a}{\gamma} b^2.$$

При $p_a = 1$ *ат* и при заданных размерах

$$y_1^3 + 1500\, y_1^2 = 4 \cdot 10^7,$$

откуда

$$y_1 = 155{,}5 \text{ см};$$

$$p = p_a \frac{b^2}{y_1^2} = 1{,}655 \text{ кг/см}^2.$$

Нормальным коническим сечением отделим верхнюю часть колокола (фиг. 124). Осевое суммарное усилие от всех внешних сил, действующих на отсеченную часть оболочки, будет слагаться из силы давления во внутренней полости сосуда

$$p\pi x^2,$$

из силы веса вышележащего объема жидкости

$$-\gamma\left[\pi x^2 (H - b + y) - \frac{\pi a^2}{2b} y^2\right]$$

и силы атмосферного давления

$$-p_a \pi x^2.$$

Таким образом (фиг. 124),

$$\sigma_1 2\pi x h \sin\theta = (p - p_a)\pi x^2 - \gamma\left[\pi x^2 (H - b + y) - \frac{\pi a^2}{2b} y\right]. \qquad (7)$$

Найдем далее R_1 и R_2:

$$R_1 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{a^2}{2b}\left[1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b}\right]^{\frac{3}{2}};$$

$$R_2 = \frac{x}{\sin\theta} = \frac{a^2}{2b}\left[1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b}\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\sin\theta = \frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2b}{a}\sqrt{\frac{y}{b}}\left[1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Из выражения (7) следует, что

$$\sigma_1 = \frac{a^2}{4bh}\left[p - p_a - \gamma b\left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b}\right)\right]\left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как перепад давления между внутренней и внешней полостью составляет

$$p_n = p - p_a - \gamma (H - b + y),$$

то из выражения (2) получаем

$$\sigma_2 = \frac{a^2}{4bh}\left\{2\left[p - p_a - \gamma b\left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{y}{b}\right)\right] - \frac{p - p_a - \gamma b\left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b}\right)}{1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b}}\right\} \times \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Эти выражения справедливы в пределах изменения y от нуля до y_1.

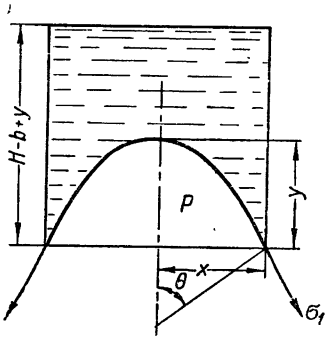
При $y > y_1$ $p_n = 0$, так как давление жидкости снаружи и изнутри колокола будет одинаковым. Следовательно, осевая сила на этом участке будет оставаться неизменной и сохранит то значение, которое она имела при $y = y_1$. Тогда из выражения (7) получаем

$$\sigma_1 = \frac{a^2}{4bh} \cdot \frac{y_1}{y}\left[p - p_a - \gamma b\left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_1}{b}\right)\right]\left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}};$$

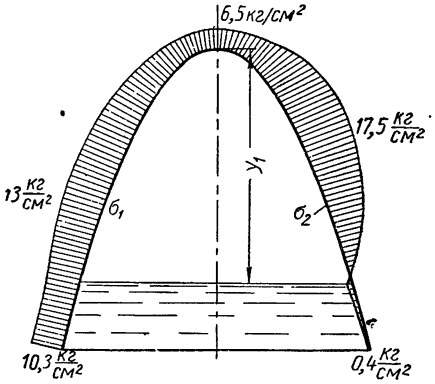
а из выражения (2)

$$\sigma_2 = -\frac{a^2}{4bh} \cdot \frac{y_1}{y}\left[p - p_a - \gamma b\left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_1}{b}\right)\right]\left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Полученные выражения дают возможность подсчитать σ_1 и σ_2 в любой точке колокола. Эпюры напряжений при заданных размерах a и b даны на фиг. 125.



Фиг. 124.



Фиг. 125.

Как видно из этих эпюр, напряжения, возникающие в колоколе, весьма невелики. Совершенно незначительны сжимающие окружные напряжения в нижней части колокола, вследствие этого отпадает опасность потери устойчивости оболочки.

Заметим между прочим, что если этот купол опустить на бо́льшую глубину, напряжения в нем не увеличатся, а, наоборот, уменьшатся, так как будет уменьшаться разность давлений между внутренней и внешней поверхностями оболочки.

§. 2. ИЗГИБНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

А. Вывод дифференциального уравнения

Рассмотрим круговой тонкостенный цилиндр постоянной толщины h, находящийся под действием некоторой осесимметричной нагрузки (фиг. 126). Деформации и напряжения, возникающие в оболочке, будут обладать, очевидно, той же осевой симметрией, и деформированный цилиндр будет представлять собой некоторое тело вращения. Форма этого тела вполне определяется формой деформированной образующей цилиндра.

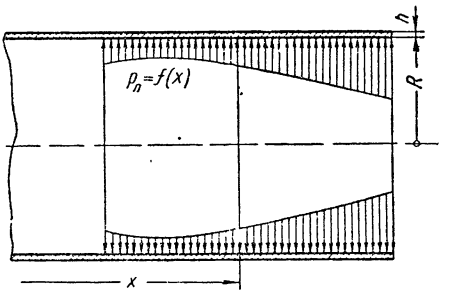
Из рассматриваемого цилиндра двумя осевыми и двумя нормальными сечениями выделим элемент размерами dx и $Rd\varphi$ (фиг. 127) и к его боковым граням приложим внутренние силы и моменты (фиг. 128).

По-прежнему через T_1 и T_2 будем обозначать интенсивности нормальных сил. Сами силы будут $T_1Rd\varphi$ и T_2dx.

Через Q обозначим интенсивность перерезывающей силы.

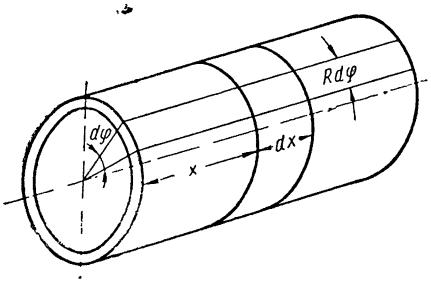
M_1 и M_2 представляют собой интенсивности изгибающих моментов.

Соответствующие силы и моменты показаны на фиг. 128. Прочие силовые факторы из условий симметрии обращаются в ноль.

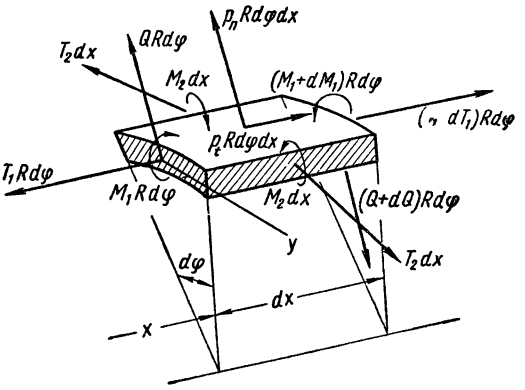


Фиг. 126.

При переходе от грани с координатой x к грани $x+dx$ силы получают соответственно малые приращения. В осевых сечениях по свойствам симметрии силовые факторы остаются неизменными.



Фиг. 127.



Фиг. 128.

На фиг. 128, кроме внутренних усилий, показаны и внешние силы $p_nRd\varphi dx$ и $p_tRd\varphi dx$.

Обратимся к условиям равновесия выделенного элемента. Проектируя все силы на ось цилиндра, получим

$$dT_1Rd\varphi + p_tRd\varphi dx = 0,$$

откуда

$$T_1 = C - \int p_t dx.$$

Это означает, что осевая сила T_1 возникает как следствие внешних распределительных касательных сил p_t, если таковые имеют место, или появляется в результате осевых контурных сил, учитываемых постоянной C.

Проектируя все силы на направление радиуса, получим второе уравнение равновесия:

$$-T_2dxd\varphi + dQRd\varphi + p_nRd\varphi dx = 0,$$

откуда

$$\frac{dQ}{dx} = p_n - \frac{T_2}{R}. \tag{8}$$

Наконец, третье уравнение равновесия можно получить, приравнивая нулю сумму моментов всех сил относительно оси, касательной к дуге нормального сечения (на фиг. 128 это ось y).

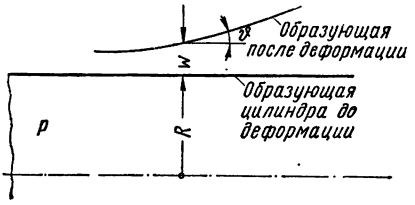
В результате имеем:

$$Q = \frac{dM_1}{dx}. \tag{9}$$

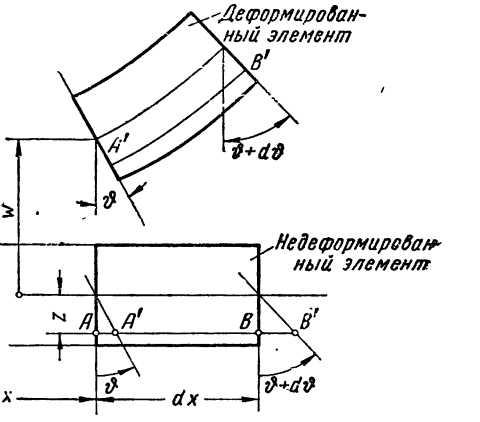
Остальные условия равновесия вследствие симметрии удовлетворяются тождественно при любых значениях действующих усилий.

Обозначим через w радиальное перемещение, а через ϑ — угол поворота элемента образующей срединной поверхности цилиндра (фиг. 129). При этом очевидно, что

$$\frac{dw}{dx} = \vartheta. \tag{10}$$



Фиг. 129.



Фиг. 130.

Относительное удлинение ε_1 волокна AB (фиг. 130), расположенного на расстоянии z от срединной поверхности, будет складываться из двух составляющих — из удлинения ε_0 срединной поверхности и удлинения, обусловленного искривлением образующей цилиндра. Последнее слагаемое имеет вид

$$\frac{z d\vartheta}{dx}.$$

Полное удлинение волокна AB будет

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + z\frac{d\vartheta}{dx}. \tag{11}$$

Удлинение в окружном направлении равно

$$\varepsilon_2 = \frac{w}{R}. \tag{12}$$

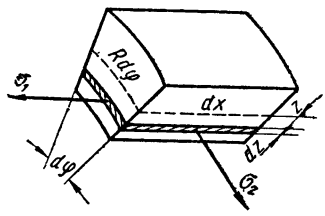
Соответствующие этим удлинениям напряжения определяются по закону Гука:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_0 + \mu\frac{w}{R} + z\frac{d\vartheta}{dx}\right]; \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\mu\varepsilon_0 + \frac{w}{R} + \mu z\frac{d\vartheta}{dx}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Зная напряжения, легко вычислить изгибающие моменты M_1 и M_2 и растягивающие усилия T_1 и T_2 (фиг. 131):

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_1 z dz; \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_2 z dz;$$

$$T_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_1 dz; \quad T_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_2 dz$$



Фиг. 131.

или согласно формуле (13)

$$M_1 = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[\left(\varepsilon_0 + \mu \frac{w}{R} \right) z + z^2 \frac{d\vartheta}{dx} \right] dz;$$

$$M_2 = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[\left(\mu\varepsilon_0 + \frac{w}{R} \right) z + \mu z^2 \frac{d\vartheta}{dx} \right] dz;$$

$$T_1 = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[\left(\varepsilon_0 + \mu \frac{w}{R} \right) + z \frac{d\vartheta}{dx} \right] dz;$$

$$T_2 = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[\left(\mu\varepsilon_0 + \frac{w}{R} \right) + \mu z \frac{d\vartheta}{dx} \right] dz.$$

Так как ε_0, w и $\frac{d\vartheta}{dx}$ от z не зависят, а

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dz = h;$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z dz = 0;$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{h^3}{12},$$

то

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\cdot\frac{d\vartheta}{dx} = D\frac{d\vartheta}{dx};\\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\,\mu\frac{d\vartheta}{dx} = \mu D\frac{d\vartheta}{dx};\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_0 + \mu\frac{w}{R}\right);\\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{w}{R} + \mu\varepsilon_0\right).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Исключая из уравнений (15) ε_0, получим

$$T_2 = \frac{Eh}{R}w + \mu T_1. \tag{16}$$

Из первого уравнения (14) и из уравнения (10)

$$M_1 = D\frac{d^2w}{dx^2}.$$

Подставляя это выражение для M_1 последовательно в уравнения равновесия (9) и (8), получаем

$$D\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{T_2}{R} = p_n.$$

Исключаем отсюда T_2 (16), тогда

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2D}w = \frac{p_n}{D} - \mu\frac{T_1}{RD}.$$

Обозначим

$$\frac{Eh}{R^2D} = \frac{12(1-\mu^2)}{R^2h^2} = 4k^4;$$

$$k = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2h^2}}. \tag{17}$$

Дифференциальное уравнение деформированной образующей цилиндра принимает следующий окончательный вид:

$$w^{(IV)} + 4k^4w = \frac{p_n}{D} - \frac{\mu T_1}{RD}. \tag{18}$$

При этом усилие T_1 предполагается известным. При отсутствии сил p_t оно определяется из условий загружения цилиндра на торцах. Если уравнение (18) решено и перемещение w найдено как функция x, то тогда легко определяются и все силовые факторы. Из уравнения (16) находим T_2. Моменты M_1 и M_2 определяются из выражений (14) и (10):

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= Dw'';\\ M_2 &= \mu Dw''.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Наконец, перерезывающая сила Q из формул (9) и (19) равна

$$Q = Dw'''. \tag{20}$$

Наибольшие напряжения σ_1 и σ_2 согласно соотношениям (13)

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(\varepsilon_0 + \mu\frac{w}{R}\right) \pm \frac{h}{2}\cdot\frac{d\vartheta}{dx}\right];$$
$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(\mu\varepsilon_0 + \frac{w}{R}\right) \pm \mu\frac{h}{2}\cdot\frac{d\vartheta}{dx}\right].$$

Если исключить отсюда при помощи выражений (14) и (15) величины

$$\left(\varepsilon_0 + \mu\frac{w}{R}\right),\quad \left(\mu\varepsilon_0 + \frac{w}{R}\right) \text{ и } \frac{d\vartheta}{dx},$$

получаем

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{T_1}{h} \pm \frac{6M_1}{h^2};\\ \sigma_2 &= \frac{T_2}{h} \pm \frac{6M_2}{h^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Таким образом, если радиальное перемещение w известно, то по приведенным формулам без особого труда можно определить усилия и изгибающие моменты, а по ним и напряжения σ_1 и σ_2.

Для определения w вернемся к уравнению (18). Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами решается, как известно, в тригонометрических и гиперболических функциях. Решение соответствующего однородного уравнения

$$w^{(IV)} + 4k^4 w = 0 \qquad (22)$$

может быть представлено в виде парных произведений гиперболических синуса и косинуса на круговые синус и косинус (см. § 6, гл. X, т. I).

Для расчета цилиндрических оболочек, однако, гораздо более удобно воспользоваться решением уравнения (22), взятым в виде

$$w = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx),$$

которое получается путем обычного представления гиперболических функций через показательные. Это выражение w состоит из двух слагаемых: одного, весьма быстро затухающего с ростом x,

$$e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx)$$

и второго, столь же быстро возрастающего,

$$e^{kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx).$$

Это обстоятельство является чрезвычайно важным, так как позволяет во многих случаях пренебречь одним слагаемым по сравнению с другим (в зависимости от величины x) и тем самым значительно упростить решение задач.

К написанному интегралу однородного уравнения остается добавить частное решение уравнения (18) w^*. Тогда

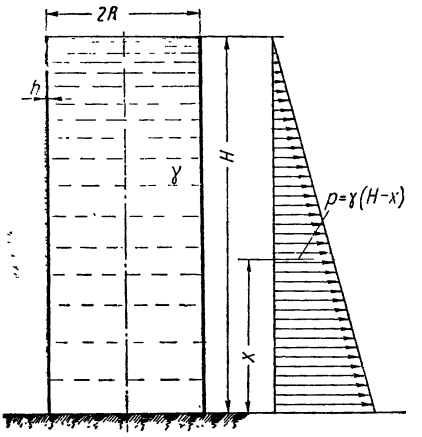
$$w = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + w^*. \qquad (23)$$

Функция w^* в обычных случаях, как будет показано ниже, может быть найдена без особого труда.

Перейдем теперь к решению некоторых задач.

Б. Примеры расчета цилиндрической оболочки

Пример 1. Определим напряжения, возникающие в открытом цилиндрическом баке, заделанном нижней частью в жесткое основание и заполненном доверху жидкостью, вес единицы объема которой γ *кг/см*^{3} (фиг. 132).



Фиг. 132.

Размеры: R=1 *м*; h=5 *мм*; H=5 *м*; материал — сталь; $E=2\cdot10^4$ *кг/мм*^{2}; μ=0,3; удельный вес жидкости γ=0,001 *кг/см*^{3}.

Давление заполняющей цилиндр жидкости пропорционально расстоянию до верхнего уровня (фиг. 132). Если координату x отсчитывать от дна цилиндра, то

$$p=\gamma(H-x).$$

При этом растягивающее усилие $T_1=0$ Частное решение уравнения (18):

$$w^*=\frac{\gamma(H-x)}{4k^4D},$$

тогда

$$w=e^{-kx}(C_1\sin kx+C_2\cos kx)+$$

$$+e^{kx}(C_3\sin kx+C_4\cos kx)+\frac{\gamma(H-x)}{4k^4D}. \quad (24)$$

Граничные условия будут следующими: при $x=0$ (в заделке) $w=0$ и $\frac{dw}{dx}=0$; при $x=H$ $M_1=0$ и $Q=0$.

Следовательно, согласно выражениям (19) и (20) при $x=H$ $\frac{d^2w}{dx^2}$ и $\frac{d^3w}{dx^3}=0$.

На основании этих условий составляем четыре уравнения для определения постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4:

$$C_2+C_4=-\frac{\gamma H}{4k^4D};$$

$$C_1-C_2+C_3+C_4=\frac{\gamma}{4k^5D}; \quad (25)$$

$$-C_1e^{-kH}\cos kH+C_2e^{-kH}\sin kH+C_3e^{kH}\cos kH-C_4e^{kH}\sin kH=0;$$

$$C_1e^{-kH}(\sin kH+\cos kH)+C_2e^{-kH}(\cos kH-\sin kH)+C_3e^{kH}(\cos kH-\sin kH)-$$

$$-C_4e^{kH}(\cos kH+\sin kH)=0.$$

Исключая C_3 и C_4, получим

$$-C_1[e^{-kH}\cos kH+e^{kH}\cos kH]+C_2[e^{-kH}\sin kH+e^{kH}(2\cos kH+\sin kH)]=$$

$$=-\frac{\gamma}{4k^5D}e^{kH}\cos kH-\frac{\gamma H}{4k^4D}e^{kH}(\sin kH+\cos kH);$$

$$C_1[e^{-kH}(\sin kH+\cos kH)-e^{kH}(\cos kH-\sin kH)]+$$

$$+C_2[e^{-kH}(\cos kH-\sin kH)+e^{kH}(3\cos kH-\sin kH)]=$$

$$=-\frac{\gamma}{4k^5D}e^{kH}(\cos kH-\sin kH)-\frac{\gamma H}{4k^4D}2e^{kH}\cos kH.$$

Согласно выражению (17)

$$k=\sqrt[4]{\frac{3(1-0{,}09)}{100^2\cdot0{,}5^2}}=0{,}18178\ см^{-1};$$

$$kH=91.$$

Очевидно, величина $e^{-kH} = e^{-91}$ совершенно ничтожна по сравнению с $e^{kH} = e^{91}$, поэтому, пренебрегая в двух последних уравнениях величинами e^{-kH}, получим

$$C_1 = \frac{\gamma}{4k^4D}\left(\frac{1}{k} - H\right); \quad C_2 = -\frac{\gamma H}{4k^4D};$$

$$C_3 = C_4 = 0.$$

Строго говоря, постоянные C_3 и C_4 не равны нулю, а имеют порядок по сравнению с C_1 и C_2 такой же, как e^{-kH} по сравнению с e^{+kH}.

Если бы была необходимость уточнить полученные результаты, то тогда для решения системы (25) было бы удобно применить метод последовательных приближений, подставляя в третье и четвертое уравнения (25) найденные значения C_1 и C_2 и определяя из них величину C_3 и C_4.

Возвращаясь к выражению (24), заметим, что вследствие чрезвычайной малости постоянных C_3 и C_4 вторым членом

$$e^{kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx)$$

можно пренебречь по сравнению с первым

$$e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx).$$

При этом погрешность такого пренебрежения будет тем меньше, чем меньше x. Лишь при больших значениях x, близких к H, такое пренебрежение не оправдывается малостью C_3 и C_4, так как e^{kx} становится весьма большим и оба слагаемых обращаются в величины одного порядка. Однако и в этом случае сделанное пренебрежение не вносит существенных погрешностей, поскольку, как это будет видно в дальнейшем, наибольшие изгибающие моменты и напряжения возникают именно в области заделок, где упрощенные формулы наиболее точны.

При этом заметим, что если нужно более точно исследовать функцию w в области $x \approx H$, то следует, переменив начало отсчета x, соответствующим образом изменить краевые условия, а затем пренебречь величинами C_3 и C_4. Полученная таким образом затухающая функция w со множителем e^{-kx} дает возможность весьма точно определить напряжения цилиндрической оболочки и в окрестности второго края.

Изложенный прием отбрасывания возрастающей части функции w и исследования остающейся затухающей функции в области отдельно взятого края позволяет во многих случаях исследовать особенности напряженного состояния (или, как говорят, краевой эффект) на обоих контурах оболочки независимо друг от друга.

Ясно, что этот метод может применяться только в том случае, если длина цилиндра H настолько велика, что величиной e^{-kH} можно пренебречь по сравнению с e^{+kH}.

Если принять 5%-ную погрешность допустимой, то тогда следует положить

$$0{,}05e^{kH} < e^{-kH},$$

откуда

$$kH > -\frac{1}{2}\ln 0{,}05 = 1{,}5.$$

В этом случае согласно обозначению (17)

$$\frac{H}{\sqrt{Rh}} > \frac{1.5}{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}} = 1{,}16 \approx 1.$$

Таким образом, возможность независимого исследования краевого эффекта на обоих контурах определяется величиной $\frac{H}{\sqrt{Rh}}$.

Иными словами, рассмотренное выше пренебрежение допустимо в том случае, если высота цилиндра не меньше среднего геометрического между его толщиной и радиусом:

$$H > \sqrt{Rh}. \tag{26}$$

Но вернемся к рассматриваемой задаче.

Подставляя полученные C_1 и C_2 в выражения (24), получим

$$w = \frac{\gamma}{4k^4D}\left\{e^{-kx}\left[\left(\frac{1}{k} - H\right)\sin kx - H\cos kx\right] + H - x\right\}; \tag{27}$$

$$\vartheta = -\frac{\gamma}{4k^4D}\left\{e^{-kx}\left[(2kH-1)\sin kx + \cos kx\right] - 1\right\};$$

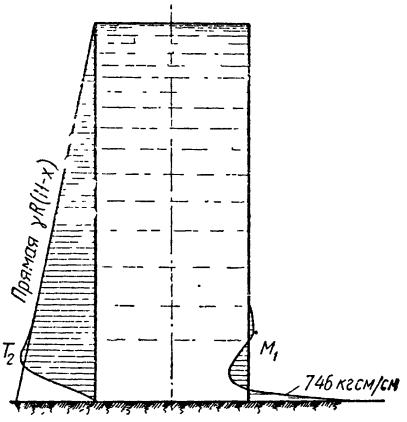
$$M_1 = -\frac{\gamma}{2k^2}e^{-kx}\left[H\sin kx + \left(\frac{1}{k} - H\right)\cos kx\right];$$

$$M_2 = \mu M_1; \quad T_2 = \frac{Eh}{R}w;$$

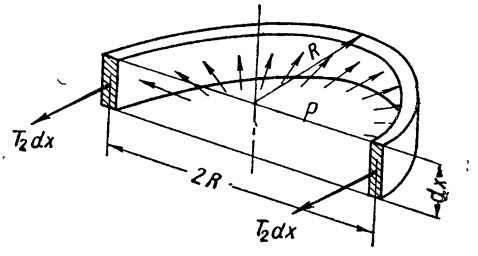
$$Q = \frac{\gamma}{4k^2}e^{-kx}\left[\sin kx + (1-2kH)\cos kx\right].$$

Для определения максимальных напряжений построим эпюры усилия T_2 и изгибающего момента M_1 (фиг. 133).

Из построенных графиков видно, что изгибающий момент имеет наибольшее значение в заделке и чрезвычайно быстро уменьшается по мере удаления от дна цилиндра. Растягивающее усилие T_2 в заделке равно нулю и сначала быстро возрастает, а затем убывает, приближаясь к прямой. Уравнение



Фиг. 133.



Фиг. 134.

этой прямой легко найти из выражений (27) и (16). При достаточно большом x

$$w = \frac{\gamma}{4k^4D}(H - x);$$

$$T_2 = \gamma R(H - x).$$

Существенно заметить, что последнее выражение совпадает с тем, что дает безмоментная теория тонкостенных оболочек. В самом деле, из условия равновесия половины цилиндрического кольца (фиг. 134) имеем

$$2pRdx = 2T_2dx;$$

$$T_2 = pR = \gamma R(H - x).$$

Следовательно, на достаточном удалении от заделки подсчет напряжений по изложенной теории может быть заменен подсчетом напряжений по безмоментной теории, так как изгибающие моменты в этом случае не имеют существенного значения.

Наиболее напряженными точками цилиндра являются точки, расположенные у внутренней и внешней поверхности цилиндра, вблизи заделки.

Согласно формулам (21) главные напряжения у внутренней поверхности будут

$$\sigma_1 = \frac{0}{0{,}5} + \frac{6 \cdot 7{,}46}{0{,}5^2} = 179 \ кг/см^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{0}{0{,}5} + 0{,}3\,\frac{6 \cdot 7{,}46}{0{,}5^2} = 54 \ кг/см^2;$$

$$\sigma_3 = 0.$$

Эквивалентное напряжение по теории наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{экв} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 179 \ кг/см^2.$$

У внешней поверхности $\sigma_1 = -179$ *кг/см*^{2}; $\sigma_2 = -54$ *кг/см*^{2}; $\sigma_3 = 0$; $\sigma_{экв} = 179$ *кг/см*^{2}.

Эквивалентное напряжение остается тем же.

Если определить максимальные напряжения по безмоментной теории, как это часто делается, не считаясь с изгибом и полагая растягивающее напряжение наибольшим в заделке,

$$T_2 = \gamma RH,$$

то получим

$$\sigma = \frac{T_2}{h} = \frac{10^{-3} \cdot 100 \cdot 500}{0{,}5} = 100 \ кг/см^2.$$

При этом, как видим, допускается не только двукратная числовая ошибка, которая могла бы быть и 10- и 20-кратной, но и принципиальная ошибка, так как расчет по растяжению в точках, где это растяжение отсутствует, совершенно ничем не оправдывается.

Из всего сказанного не следует, однако, делать вывод о бесполезности безмоментной теории в подобных случаях. Выше было указано, что в тех случаях, когда в оболочке отсутствуют резкие переходы или жесткие контурные защемления, определение напряжений по безмоментной теории оказывается достаточно точным для всех точек оболочки, когда же имеются контурные защемления, безмоментная теория теряет свой смысл лишь для точек, расположенных вблизи соответствующего контура, и дает опять же вполне приемлемые результаты для точек общего положения.

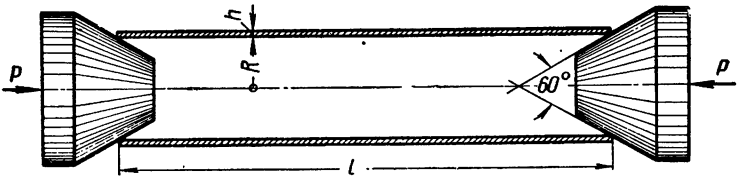
Не всегда также вычисленные выше изгибные напряжения следует рассматривать как расчетные. Дело в том, что эти напряжения в задачах, подобных рассмотренной, носят ярко выраженный местный характер, между тем известно, что для пластических материалов резкие перенапряжения в узкой области при статическом нагружении не сказываются существенным образом на несущей способности системы.

Например, если бы рассмотренный цилиндрический бак, изготовленный из пластического материала, был предназначен для долговременного хранения заполняющей его жидкости с ограниченным числом опорожнений и заполнений, то местными напряжениями изгиба можно было бы свободно пренебречь и проверочный расчет вести по безмоментной теории, так как эти напряжения носят общий характер и превышение ими определенной нормы привело бы к разрушению системы.

Если бак, подобный рассмотренному, сооружается в расчете на неограниченно многократное заполнение и спуск заполняющей его

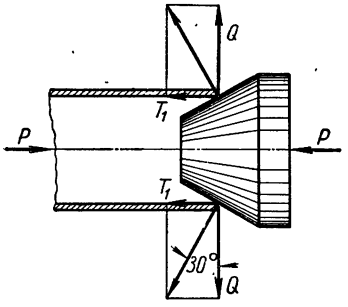
жидкости, то следует обратить внимание на запас его усталостной прочности. В этом случае основную роль играют местные напряжения изгибного характера. Здесь безмоментная теория уже не может быть применена.

Надо все же сказать, что трудно точно указать границу между возможностью применения безмоментной теории и необходимостью ведения расчета на изгиб. Выбор того или иного метода расчета определяется, с одной стороны, глазомером расчетчика, умеющего заранее правильно установить степень влияния изгиба, а с другой — ответственностью конструкции. Более ответственные конструкции рассчитываются, естественно, более совершенными методами и исследуются более детально.



Фиг. 135.

Пример 2. В отверстия тонкостенной трубки вставляются с усилием P две конические пробки (фиг. 135). Определить закон распределения нормальных сил и изгибающих моментов в трубке, если дано $l = 30$ *см*; $R = 5$ *см*; $h = 0{,}5$ *см*; $\mu = 0{,}3$.



Фиг. 136.

В этом примере $p_n = p_t = 0$.

Интенсивность осевой силы

$$T_1 = -\frac{P}{2\pi R}.$$

Пренебрегая трением поверхности конуса о цилиндр, определим контурную перерезывающую силу Q (фиг. 136):

$$Q = \frac{P\sqrt{3}}{2\pi R}.$$

Согласно выражению (18)

$$w^* = \frac{\mu T_1}{4k^4 DR}$$

или

$$w^* = \frac{\mu P}{2\pi E h}.$$

Тогда согласно уравнению (23)

$$w = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + \frac{\mu P}{2\pi E h}.$$

Один из торцов цилиндра примем за начало координат.

Повторяя все рассуждения предыдущего примера, можно сказать, что пренебрежение постоянными C_3 и C_4 при исследовании напряженного состояния трубки вблизи этого торца допустимо при условии, что величиной e^{-kl} можно пренебречь по сравнению с e^{kl}.

Вычислим kl:

$$kl = \sqrt[4]{\frac{3(1-0{,}09)}{5^2 \cdot 0{,}5^2}}\, 30 = 24{,}4.$$

Совершенно очевидно, что такое пренебрежение допустимо. Поэтому

$$w = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + \frac{\mu P}{2\pi Eh};$$

$$w' = ke^{-kx}[-(C_1 + C_2)\sin kx + (C_1 - C_2)\cos kx];$$

$$w'' = 2k^2 e^{-kx}(C_2 \sin kx - C_1 \cos kx);$$

$$w''' = 2k^3 e^{-kx}[(C_1 - C_2)\sin kx + (C_1 + C_2)\cos kx].$$

Установим граничные условия.

При $x = 0$ $M_1 = 0\,(w'' = 0)$ и $Q = Dw''' = \frac{P\sqrt{3}}{2\pi R}$.

Из первого условия вытекает, что $C_1 = 0$, а из второго —

$$C_2 = \frac{P\sqrt{3}}{4\pi k^3 RD}.$$

Следовательно,

$$w = \frac{P}{\pi Eh}\left[kR\sqrt{3}\, e^{-kx}\cos kx + \frac{\mu}{2}\right].$$

Усилия

$$T_1 = -\frac{P}{2\pi R};$$

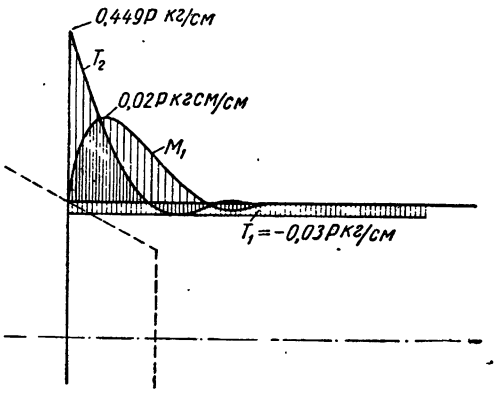
$$T_2 = \frac{P}{\pi} k\sqrt{3}\, e^{-kx}\cos kx.$$

Моменты

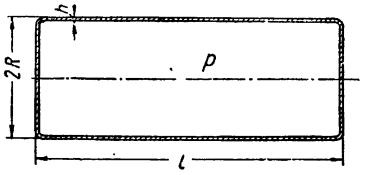
$$M_1 = \frac{P\sqrt{3}}{2\pi kR} e^{-kx}\sin kx;$$

$$M_2 = \mu M_1.$$

Согласно этим выражениям строим эпюры изгибающего момента и усилий T_1 и T_2 (фиг. 137).



Фиг. 137.



Фиг. 138.

Здесь, как и в предыдущем примере, вблизи контура наблюдается возмущение напряженного состояния. На достаточном удалении от торцов сохраняется только сжимающее усилие T_1, постоянное для всех точек.

Наиболее напряженными в трубке будут точки, расположенные около торцов. Согласно формулам (21)

$$\sigma_1 = -\frac{0{,}0318P}{0{,}5} = -0{,}0636P \ кг/см^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{0{,}449P}{0{,}5} = +0{,}898P \ кг/см^2;$$

$$\sigma_{экв} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 0{,}952P \ кг/см^2.$$

Пример 3. Замкнутый цилиндр постоянной толщины h находится под воздействием внутреннего давления p (фиг. 138). Требуется, учитывая деформацию плоских днищ, установить величину местных изгибных напряжений в зоне соединения цилиндра с днищами.

Дано $p=1{,}0$ *кг/см*^{2}; $\mu=0{,}3$; $R=50$ *см*; $l=2$ *м*; $h=1$ *см*.

В данном примере имеет место сочетание цилиндрической оболочки с пластиной, что и должно быть учтено при наложении граничных условий. Поскольку длина цилиндра достаточно велика, можно, выбрав один из торцов за начало отсчета x, положить, как и прежде, константы C_3 и C_4 равными нулю.

$$T_1 = \frac{p\pi R^2}{2\pi R} = \frac{pR}{2}.$$

Тогда согласно формулам (18) и (23) имеем

$$w = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + \frac{p}{4k^4D}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right);$$

$$\vartheta = w' = ke^{-kx}[-(C_1 + C_2)\sin kx + (C_1 - C_2)\cos kx];$$

$$w'' = 2k^2e^{-kx}(C_2 \sin kx - C_1 \cos kx);$$

$$w''' = 2k^3e^{-kx}[(C_1 - C_2)\sin kx + (C_1 + C_2)\cos kx].$$

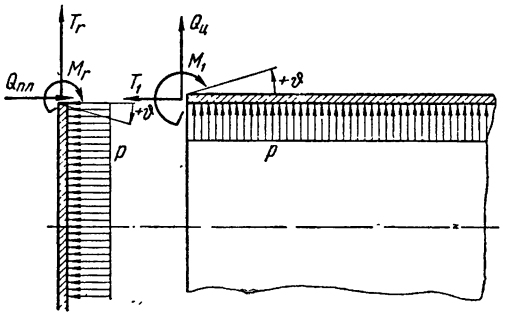
Для круглой равномерно загруженной давлением p пластины имеем (см. пример 1 § 1 гл. I т. II)

$$\vartheta = C_1'r + \frac{C_2'}{r} - \frac{pr^3}{16D}.$$

Так как при $r=0$ угол ϑ не может обращаться в бесконечность, то $C'_2=0$. Поэтому

$$\vartheta = C_1'r - \frac{pr^3}{16D}.$$

Отделим от цилиндра плоское дно (фиг. 139) и по контуру освобожденной пластины приложим перерезывающую силу $Q_{пл}$ и изгибающий момент M_r так, чтобы их направление совпадало с тем направлением, которое принималось за положительное при выводе формул изгиба пластины.



Фиг. 139.

Плоское дно бака, кроме изгиба, будет испытывать еще радиальное растяжение. При малых прогибах это растяжение не будет зависеть от изгиба, и поэтому деформации, создаваемые усилием T_r, будем рассматривать как самостоятельные.

По контуру цилиндра также приложим изгибающий момент M_1, растягивающую и перерезывающую силы T_1 и $Q_ц$. Их направления также совпадают с положительными направлениями для этих сил.

На фиг. 139, кроме перечисленных сил, показаны положительные направления отсчета углов ϑ.

Свяжем теперь цилиндр и пластину условиями неразрывности.

На контуре сопряжения имеем:

1) $M_{1\,(x=0)} = -M_{r\,(r=R)}$;

2) $Q_{ц\,(x=0)} = -T_{r\,(r=R)}$;

3) $w_{ц\,(x=0)} = \Delta R_{пл\,(r=R)}$;

4) $\vartheta_{ц\,(x=0)} = -\vartheta_{пл\,(r=R)}$.

Что касается условия $T_{1ц} = Q_{пл}$, то оно уже было использовано выше, поскольку

$$T_{1ц} = Q_{пл} = \frac{pR}{2}.$$

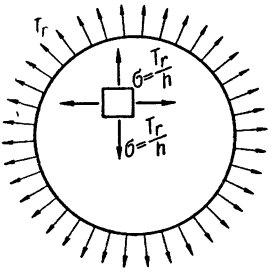
Таким образом, получены четыре уравнения по числу неизвестных: C_1, C_2, C_1' и T_r.

Раскроем условия неразрывности. В порядке последовательности получим:

1) $-2k^2DC_1 = -DC_1'(1+\mu) + \frac{pR^2}{16}(3+\mu)$;

2) $D2k^3(C_1 + C_2) = -T_r$;

3) перемещение ΔR в пластине возникает вследствие ее растяжения силами T_r, при этом все точки пластины находятся в состоянии равномерного растяжения с напряжением $\sigma = \frac{T_r}{h}$ (фиг. 140).



Фиг. 140

По обобщенному закону Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}(1-\mu);$$

$$\Delta R = \varepsilon R = \frac{T_r R}{Eh}(1-\mu).$$

Уравнение неразрывности принимает вид

$$C_2 + \frac{p}{4k^4D}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) = \frac{T_r R}{Eh}(1-\mu);$$

4) $k(C_1 - C_2) = -C_1'R + \frac{pR^3}{16D}$.

Решая совместно эти уравнения, получим

$$C_1 = -\frac{pR^4}{16Dz^3} \cdot \frac{2z^3 + (1-\mu)z^2 + 2(1+\mu)(2-\mu)}{2z^2 + 2z + 1 - \mu^2};$$

$$C_2 = \frac{pR^4}{16Dz^3} \cdot \frac{z^2(1-\mu) - 4z(2-\mu) - 2(1+\mu)(2-\mu)}{2z^2 + 2z + 1 - \mu^2};$$

$$C_1' = \frac{pR^2}{16Dz} \cdot \frac{2z^3 + 4z^2 + z(3+\mu)(1-\mu) - 4(2-\mu)}{2z^2 + 2z + 1 - \mu^2};$$

$$T_r = \frac{pR}{4} \cdot \frac{z^3 + 2z(2-\mu) + 2(1+\mu)(2-\mu)}{2z^2 + 2z + 1 - \mu^2},$$

где $z = kR$.

После того как постоянные определены, усилия и моменты в пластине и цилиндре могут быть написаны в следующем виде:

пластина

$$M_r = DC_1'(1+\mu) - \frac{pr^2}{16}(3+\mu);$$

$$M_t = DC_1'(1+\mu) - \frac{pr^2}{16}(3\mu+1);$$

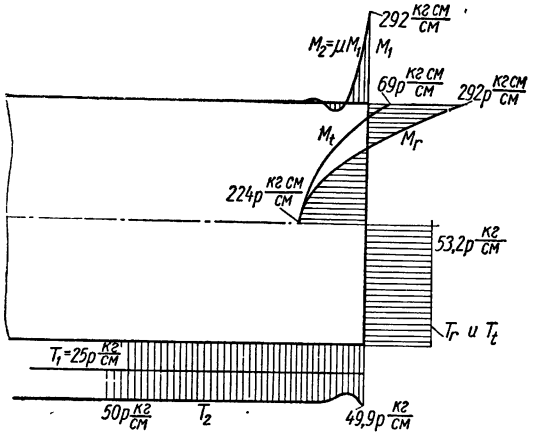
цилиндр $T_1 = \frac{pR}{2}$;

$$T_2 = \frac{Eh}{R} e^{-kx} [C_1 \sin kx + C_2 \cos kx] + pR;$$

$$M_1 = 2k^2 De^{-kx} [C_2 \sin kx - C_1 \cos kx].$$

По этим формулам нетрудно подсчитать усилия и моменты и построить их эпюры (фиг. 141).

Очевидно, наиболее напряженные точки будут находиться в зоне сопряжения цилиндра с пластиной.



Фиг. 141.

Для цилиндра у внутренней поверхности при $p = 1$ *кг/см²* [формулы (21)].

$$\sigma_1 = \frac{25}{1} + \frac{6 \cdot 292}{1^2} = 1775 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{50}{1} + 0{,}3\frac{6 \cdot 292}{1^2} = 575 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_3 = 0.$$

По теории наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{экв} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 1775 \text{ кг/см}^2.$$

У внешней поверхности

$$\sigma_1 = \frac{25}{1} - \frac{6 \cdot 292}{1^2} = -1725 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{50}{1} - 0{,}3\frac{6 \cdot 292}{1^2} = -475 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_3 = 0.$$

По теории наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{экв} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 1725 \text{ кг/см}^2.$$

При определении напряжений, возникающих в пластине, следует учитывать также и напряжения растяжения за счет усилий T_r (фиг. 140) и суммировать их с изгибными напряжениями. Поэтому у внутренней поверхности пластины получим:

$$\sigma_r = \frac{53{,}2}{1} + \frac{6 \cdot 292}{1^2} = 1803 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_t = \frac{53{,}2}{1} + \frac{6 \cdot 69}{1^2} = 467 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_z = 0.$$

По теории наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{экв} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 1803 \text{ кг/см}^2.$$

У внешней поверхности на контуре пластин имеем:

$$\sigma_r = \frac{53{,}2}{1} - \frac{6 \cdot 292}{1^2} = -1697 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_t = \frac{53{,}2}{1} - \frac{6 \cdot 69}{1^2} = -361 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_z = 0;$$

$$\sigma_{экв} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 1697 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно, наиболее напряженными оказываются точки пластины, расположенные у внутренней поверхности вблизи линии сочленения с цилиндром.

Для цилиндра в точках, достаточно удаленных от контура,

$$\sigma_{экв} = 50p \text{ кг/см}^2.$$

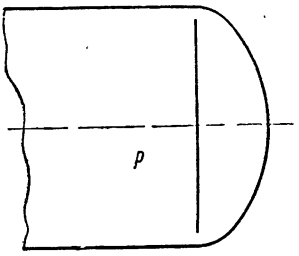
Таким образом, можно заключить, что вблизи контуров сопряжения цилиндра с пластинами возникают весьма высокие сравнительно с остальными частями цилиндра напряжения. Числовыми подсчетами можно убедиться, что столь же высокие напряжения возникают и в центральной части пластин.

При сравнительно малой нагрузке стенок рассматриваемая конструкция дает перегрузку днищ, что может привести к их выпучиванию с последующим раскрытием швов.

Конструкция, следовательно, является нерациональной с точки зрения восприятия внутреннего давления.

Гораздо более равномерное распределение напряжений дает сферическое днище (фиг. 142). В центральной части сферы изгибные напряжения сказываются весьма слабо, для уменьшения же контурных моментов должен быть сделан плавный переход от цилиндра к сфере.

Этот вопрос будет специально рассмотрен в § 7.



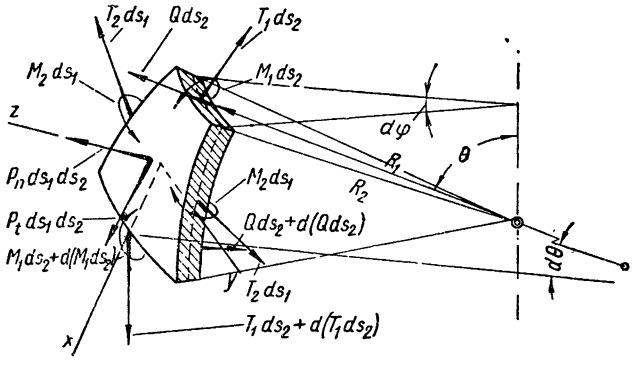
Фиг. 142.

§ 3. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК

А. Уравнения равновесия

Составим уравнения равновесия элемента симметричной оболочки в общем случае нагружения с учетом изгибающих моментов.

Вернемся к элементу $ds_1 ds_2$ (см. фиг. 116), выделенному из оболочки. Теперь, однако, будем считать, что напряжения по толщине оболочки распределены неравномерно. Тогда в гранях выделенного



Фиг. 143.

элемента будут действовать не только растягивающие силы, но и изгибающие моменты (фиг. 143) и перерезывающие силы.

Для выделенного элемента составим теперь уравнения равновесия.

Равенство нулю суммы проекции всех сил на ось z, направленную по нормали к срединной поверхности (фиг. 143), дает

$$T_2 ds_1 \frac{ds_2}{R_2} + T_1 ds_2 \frac{ds_1}{R_1} + d(Q ds_2) = p_n ds_1 ds_2.$$

Так как

$$ds_1 = R_1 d\theta; \quad ds_2 = R_2 \sin\theta d\varphi,$$

где $d\varphi$ — центральный угол, образуемый меридиональными сечениями,

то

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}+\frac{1}{R_1R_2\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}(QR_2\sin\theta)=p_n. \qquad (28)$$

Проектируем все силы, действующие на элемент, на ось симметрии оболочки, тогда

$$T_1ds_2\sin\theta-[T_1ds_2+d(T_1ds_2)]\sin(\theta+d\theta)+Qds_2\cos\theta-$$
$$-[Qds_2+d(Qds_2)]\cos(\theta+d\theta)+p_nds_1ds_2\cos\theta-p_tds_1ds_2\sin\theta=0,$$

откуда

$$\frac{d}{d\theta}[R_2\sin\theta(T_1\sin\theta+Q\cos\theta)]=R_1R_2\sin\theta(p_n\cos\theta-p_t\sin\theta). \qquad (29)$$

Возьмем, наконец, сумму моментов всех сил относительно оси y (фиг. 143), тогда

$$Qds_1ds_2-d(M_1ds_2)+M_2ds_1\cos\theta d\varphi=0$$

или

$$QR_1R_2\sin\theta-\frac{d}{d\theta}(M_1R_2\sin\theta)+M_2R_1\cos\theta=0. \qquad (30)$$

Остальные уравнения равновесия вследствие симметрии удовлетворяются тождественно.

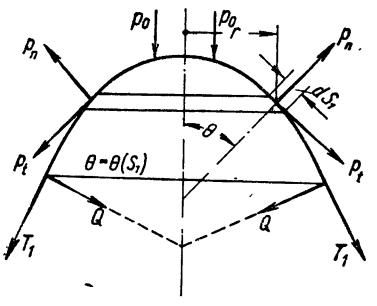
Интегрируя уравнение (29) по θ, получим

$$R_2\sin\theta(T_1\sin\theta+Q\cos\theta)=C+\int R_1R_2\sin\theta(p_n\cos\theta-p_t\sin\theta)\,d\theta. \qquad (31)$$

Если учесть, что

$$R_1d\theta=ds_1,\ \text{а}\ R_2\sin\theta=r, \qquad (32)$$

где r — расстояние до оси симметрии, то легко установить, что уравнение (31) отражает условие равновесия части оболочки, отсеченной параллельным кругом радиуса r. Постоянная C соответствует возможному приложению сосредоточенных сил, дающих осевую составляющую.



Фиг. 144.

В самом деле, рассматривая условия равновесия части оболочки (фиг. 144), получаем

$$(T_1\sin\theta+Q\cos\theta)2\pi r=$$
$$=P_0+\int(p_n\cos\theta-p_t\sin\theta)2\pi r\,ds_1,$$

где $P_0=2\pi C$ — осевая составляющая сосредоточенных сил (на фиг. 144 не показана).

После подстановки в последнюю зависимость выражений (32) она приводится к уравнению (31).

Для дальнейших преобразований уравнение (31) удобно переписать в следующем виде:

$$F(\theta)=R_2\sin\theta(T_1\sin\theta+Q\cos\theta), \qquad (33)$$

или

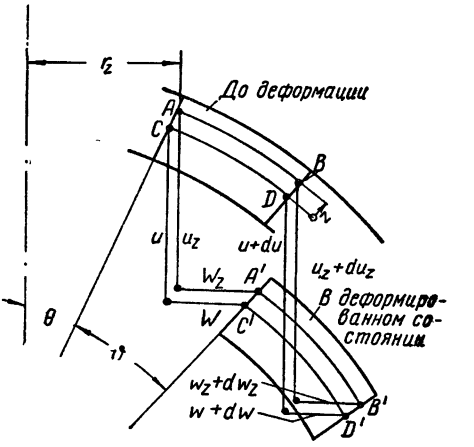
$$F(\theta) = C + \int R_1 R_2 \sin\theta \,(p_n \cos\theta - p_t \sin\theta)\, d\theta. \qquad (33)$$

В основных случаях функция $F(\theta)$ может быть найдена из условий равновесия. Эту функцию будем называть первой функцией нагрузки.

Б. Уравнения совместности перемещений и деформаций

Рассмотрим криволинейный отрезок AB (фиг. 145), лежащий в плоскости меридионального сечения оболочки на расстоянии z от срединной поверхности. При деформации оболочки этот отрезок перемещается и становится равным $A'B'$.

Обозначим через u_z осевое, w_z — радиальное перемещение точки, отстоящей на расстоянии z от срединной поверхности; u и w — то же для точек срединной поверхности ($z=0$); ϑ — угол поворота нормали (фиг. 145). Обозначим также ε_{1z} — меридиональное, ε_{2z} — окружное удлинение оболочки в точке, отстоящей на расстоянии z от срединной поверхности; ε_1 и ε_2 — то же для точек срединной поверхности.



Фиг. 145.

Таким образом,

$$A'B' = AB(1 + \varepsilon_{1z});$$

$$C'D' = CD(1 + \varepsilon_1).$$

Рассмотрим теперь многоугольник $CDC'D'$ (фиг. 145) и спроектируем его на горизонтальную и вертикальную оси, тогда, пользуясь известной теоремой о том, что проекция ломаной равна проекции замыкающей, получим

$$w + CD(1 + \varepsilon_1)\cos(\theta + \vartheta) - w - dw - CD\cos\theta = 0;$$

$$u + CD(1 + \varepsilon_1)\sin(\theta + \vartheta) - u - du - CD\sin\theta = 0,$$

откуда, учитывая, что ϑ мало по сравнению с θ, а $CD = R_1 d\theta$, имеем:

$$\frac{dw}{R_1 d\theta} = -\vartheta\sin\theta + \varepsilon_1\cos\theta; \qquad (34)$$

$$\frac{du}{R_1 d\theta} = \vartheta\cos\theta + \varepsilon_1\sin\theta. \qquad (35)$$

Аналогично можно записать

$$\frac{dw_z}{(R_1 + z)\,d\theta} = -\vartheta\sin\theta + \varepsilon_{1z}\cos\theta; \qquad (36)$$

$$\frac{du_z}{(R_1 + z)\,d\theta} = \vartheta\cos\theta + \varepsilon_{1z}\sin\theta. \qquad (37)$$

Проектируем теперь замкнутый многоугольник $AA'C'C$ на горизонтальную и вертикальную оси. Тогда получаем[1]

$$\left.\begin{aligned} w_z &= w + z\vartheta\cos\theta \\ u_z &= u + z\vartheta\sin\theta \end{aligned}\right\}. \tag{38}$$

Подставляя w_z в выражение (36), имеем

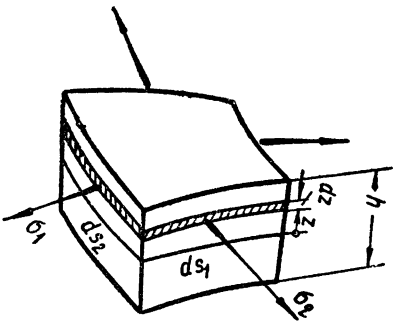
$$\frac{dw}{(R_1+z)\,d\theta} + \frac{\tau}{R_1+z}\cdot\frac{d(\vartheta\cos\theta)}{d\theta} = \vartheta\sin\theta + \varepsilon_{1z}\cos\theta.$$

Исключим отсюда w при помощи выражения (34), тогда

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + \frac{z}{R_1+z}\cdot\frac{d\vartheta}{d\theta},$$

а за малостью z

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + \frac{\tau}{R_1}\cdot\frac{d\vartheta}{d\theta}. \tag{39}$$



Фиг. 146.

Относительное удлинение ε_{2z} в окружном направлении для точки A (фиг. 145) определяется отношением абсолютного удлинения окружности радиуса r_z к ее начальной длине $2\pi r_z$, т. е.

$$\varepsilon_{2z} = \frac{w_z}{(R_2+z)\sin\theta}.$$

Аналогично для точки C, лежащей в серединной поверхности

$$\varepsilon_2 = \frac{w}{R_2\sin\theta}. \tag{40}$$

Согласно выражениям (38)

$$\varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 + z\frac{\vartheta}{R_2}\operatorname{ctg}\theta. \tag{41}$$

Подставим далее w из выражения (40) в зависимость (34), тогда получим

$$R_1\vartheta = \operatorname{ctg}\theta\,(R_1\varepsilon_1 - R_2\varepsilon_2) - \frac{d}{d\theta}(R_2\varepsilon_2). \tag{42}$$

Теперь свяжем удлинения ε_{1z} и ε_{2z} с соответствующими напряжениями σ_{1z} и σ_{2z} (фиг. 146).

В. Связь между усилиями и перемещениями

Согласно закону Гука

$$\sigma_{1z} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{1z} + \mu\varepsilon_{2z});$$

$$\sigma_{2z} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{2z} + \mu\varepsilon_{1z}).$$

---

[1] Указанный прием составления уравнений совместности перемещений путем проектирования замкнутых многоугольников обладает особенно заметными преимуществами в случае несимметричных систем, так как позволяет установить искомые зависимости путем формальных операций, аналогичных операции составления уравнений равновесия.

Подставим сюда ε_{1z} из выражения (39) и ε_{2z} из выражения (41), тогда получим

$$\sigma_{1z} = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) + z\left(\frac{1}{R_1}\cdot\frac{d\vartheta}{d\theta} + \mu\frac{\vartheta}{R_2}\operatorname{ctg}\theta\right)\right];$$

$$\sigma_{2z} = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) + z\left(\frac{\vartheta}{R_2}\operatorname{ctg}\theta + \mu\frac{1}{R_1}\cdot\frac{d\vartheta}{d\theta}\right)\right].$$

Теперь нетрудно определить интенсивности сил и моментов:

$$T_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{1z}dz; \quad T_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{2z}dz;$$

$$M_1 = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{1z}z dz; \quad M_2 = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{2z}z dz.$$

Поскольку σ_{1z} и σ_{2z} предполагаются возрастающими по z, результирующие моменты в сечениях приобретают знак, противоположный тому, который предполагался при составлении уравнений равновесия (см. фиг. 143). Поэтому при интегралах, выражающих изгибающие моменты, стоит знак минус.

После подстановки σ_{1z} и σ_{2z} в последние выражения и последующего интегрирования имеем

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1); \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -D\left[\frac{1}{R_1}\cdot\frac{d\vartheta}{d\theta} + \mu\frac{\vartheta}{R_2}\operatorname{ctg}\theta\right]; \\ M_2 &= -D\left[\frac{\vartheta}{R_2}\operatorname{ctg}\theta + \mu\frac{1}{R_1}\cdot\frac{d\vartheta}{d\theta}\right], \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

где по-прежнему

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Из уравнений (43) определяем

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{Eh}(T_1 - \mu T_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{Eh}(T_2 - \mu T_1). \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Таким образом, в результате получены восемь уравнений (28), (29), (30), (42), (44), (45), в которые входят восемь неизвестных T_1, T_2, M_1, M_2, Q, ϑ, ε_1 и ε_2. Ближайшей целью будет преобразование этих уравнений и приведение их к симметричной форме.

Г. Приведение уравнений к симметричной форме

Подставим ε_1 и ε_2 по зависимостям (45) в уравнение (42):

$$ER_1\vartheta = \operatorname{ctg}\theta\left[\frac{T_1}{h}(R_1+\mu R_2) - \frac{T_2}{h}(R_2+\mu R_1)\right] - \frac{d}{d\theta}\left[\frac{R_2}{h}(T_2-\mu T_1)\right]. \qquad (46)$$

Вернемся теперь к уравнениям равновесия. Первое уравнение (33) перепишем в виде

$$T_1 = \frac{F(\theta)}{R_2\sin^2\theta} - Q\operatorname{ctg}\theta.$$

Подставляя T_1 в уравнение (28), получаем

$$T_2 = p_n R_2 - \frac{F(\theta)}{R_1\sin^2\theta} - \frac{1}{R_1}\cdot\frac{d}{d\theta}(QR_2).$$

Обозначим

$$\frac{d}{d\theta}(*) = (*)'; \quad QR_2 = V. \qquad (47)$$

После подстановки T_1 и T_2 в уравнение (46) имеем

$$\begin{aligned} EhR_1\vartheta = {} & \frac{R_2}{R_1}V'' + \left[\frac{R_2}{R_1}\operatorname{ctg}\theta + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)'\right]V' - \frac{R_1}{R_2}\operatorname{ctg}^2\theta\, V - \\ & - \frac{h'}{h}\cdot\frac{R_2}{R_1}V' - \mu V\left[\operatorname{ctg}^2\theta + h\left(\frac{\operatorname{ctg}\theta}{h}\right)'\right] + \\ & + \frac{F(\theta)}{\sin^2\theta}\left\{\left(\frac{R_1}{R_2}-\frac{R_2}{R_1}\right)\operatorname{ctg}\theta + h\left(\frac{R_2}{hR_1}+\frac{\mu}{h}\right)'\right\} - \\ & - h\left(\frac{R_2^2 p_n}{h}\right)' - (R_2+\mu R_1)R_2 p_t. \end{aligned}$$

Подставим теперь выражения M_1 и M_2 по формулам (44) в уравнение равновесия (30):

$$\begin{aligned} & \frac{R_2}{R_1}\vartheta'' + \left[\frac{R_2}{R_1}\operatorname{ctg}\theta + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)'\right]\vartheta' - \frac{R_1}{R_2}\vartheta\operatorname{ctg}^2\theta + \\ & + 3\frac{h'}{h}\cdot\frac{R_2}{R_1}\vartheta' + \frac{\mu}{h}(3h'\operatorname{ctg}\theta - h)\vartheta = -\frac{R_1}{D}V. \end{aligned}$$

Оба последних уравнения содержат только неизвестные V и ϑ. Обозначим

$$l(*) = \frac{R_2}{R_1}(*)'' + \left[\frac{R_2}{R_1}\operatorname{ctg}\theta + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)'\right](*)' - \frac{R_1}{R_2}\operatorname{ctg}^2\theta\,(*) \qquad (48)$$

и перепишем последние два уравнения в следующем окончательном виде:

$$\left.\begin{aligned} & L(V) + \mu V + \frac{h'}{h}\left(\mu V\operatorname{ctg}\theta - \frac{R_2}{R_1}V'\right) = EhR_1\vartheta + \Phi(\theta); \\ & L(\vartheta) - \mu\vartheta + 3\frac{h'}{h}\left(\mu\vartheta\operatorname{ctg}\theta + \frac{R_2}{R_1}\vartheta'\right) = -\frac{R_1}{D}V, \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

где

$$\Phi(\theta)=h\left(\frac{R_2^2 p_n}{h}\right)'+(R_2+\mu R_1)R_2 p_t-$$

$$-\frac{F(\theta)}{\sin^2\theta}\left\{\left(\frac{R_1}{R_2}-\frac{R_2}{R_1}\right)\operatorname{ctg}\theta+h\left(\frac{R_2}{hR_1}+\frac{\mu}{h}\right)'\right\}. \tag{50}$$

Так выглядят общие уравнения симметричных оболочек. Иногда взамен независимой переменной θ вводится переменное r (расстояние от точки срединной поверхности до оси симметрии), тогда уравнения (49) несколько упрощаются за счет изменения оператора $L(*)$ (см. [4], [8]). При этом, однако, затрудняется расчет оболочек, включающих особую точку при $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Уравнения (49) после выражения радиусов кривизны R_1 и R_2 в функции угла θ приводятся к уравнениям частных типов оболочек. Если последние решены относительно ϑ и V, то нетрудно определить все внутренние усилия и моменты, а также деформации ε_1, ε_2, а затем и перемещения u и w.

Окончательно

$$\left.\begin{aligned} M_1&=-D\left[\frac{1}{R_1}\cdot\frac{d\vartheta}{d\theta}+\mu\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}\vartheta\right];\\ M_2&=-D\left[\frac{1}{R_2}\vartheta\operatorname{ctg}\theta+\mu\frac{1}{R_1}\cdot\frac{d\vartheta}{d\theta}\right];\end{aligned}\right\} \tag{44a}$$

$$Q=\frac{V}{R_2}. \tag{47a}$$

Из уравнения (33)

$$T_1=\frac{F(\theta)}{R_2\sin^2\theta}-\frac{V}{R_2}\operatorname{ctg}\theta. \tag{51}$$

Из уравнения (28)

$$T_2=p_nR_2-\frac{F(\theta)}{R_1\sin^2\theta}-\frac{1}{R_1}\cdot\frac{dV}{d\theta}. \tag{52}$$

И, наконец, из уравнений (45)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1&=\frac{1}{Eh}\left[\frac{F(\theta)}{R_2\sin^2\theta}-\frac{V}{R_2}\operatorname{ctg}\theta-\mu\left(p_nR_2-\frac{F(\theta)}{R_1\sin^2\theta}-\frac{1}{R_1}\cdot\frac{dV}{d\theta}\right)\right];\\ \varepsilon_2&=\frac{1}{Eh}\left[p_nR_2-\frac{F(\theta)}{R_1\sin^2\theta}-\frac{1}{R_1}\cdot\frac{dV}{d\theta}-\mu\left(\frac{F(\theta)}{R_2\sin^2\theta}-\frac{V}{R_2}\operatorname{ctg}\theta\right)\right].\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Величины w и u определяются из выражений (34) и (35) как

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta}&=R_1(\varepsilon_1\cos\theta-\vartheta\sin\theta);\\ \frac{du}{d\theta}&=R_1(\varepsilon_1\sin\theta+\vartheta\cos\theta)\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Напряжения равны

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{1z}&=\frac{T_1}{h}+z\frac{12M_1}{h^3};\\ \sigma_{2z}&=\frac{T_2}{h}+z\frac{12M_2}{h^3}.\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

В случае, когда толщина оболочки h постоянна, уравнения (49) и (50) несколько упрощаются и принимают вид

$$\left.\begin{aligned} L(V)+\mu V &= EhR_1\vartheta+\Phi(\theta);\\ L(\vartheta)-\mu\vartheta &= -\frac{R_1}{D}V, \end{aligned}\right\} \tag{49a}$$

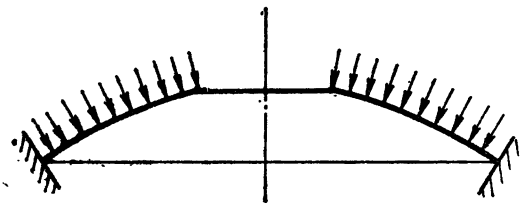
где

$$\Phi(\theta)=h\left(\frac{R_2^2 p_n}{h}\right)'+(R_2+\mu R_1)R_2 p_t- \\ -\frac{F(\theta)}{\sin^2\theta}\left\{\left(\frac{R_1}{R_2}-\frac{R_2}{R_1}\right)\operatorname{ctg}\theta+\left(\frac{R_2}{R_1}\right)'\right\}. \tag{50a}$$

Д. Граничные условия

При интегрировании системы двух уравнений второго порядка (49) получаем четыре произвольные постоянные интегрирования, которые определяются в зависимости от граничных условий.

Так как эти условия для данного способа закрепления или нагружения являются общими, т. е. не зависят от формы оболочки, то уместно остановиться на этом вопросе до рассмотрения частных форм оболочек и установить общие принципы, которыми следует руководствоваться при определении произвольных постоянных.



Фиг. 147.

В зависимости от способа закрепления на контуре оболочки могут быть заданы усилия или смещения.

Элементы оболочки, расположенные у ее контура, подобно всем прочим элементам оболочки при приложении всех контурных и внутренних сил и моментов прежде всего должны находиться в равновесии, а затем деформироваться таким образом, чтобы были соблюдены геометрические ограничения, наложенные на контур. Иными словами, для элемента оболочки (фиг. 148), выделенного у контура таким образом, что одна из его граней совпадает с контурной поверхностью, усилия должны подчиняться условиям равновесия (28) — (30), а деформации — условиям совместности (34), (35) и (40), составленным для точек общего положения.

Это соображение, между прочим, является руководящим при составлении граничных условий вообще для всех упругих систем.

Рассмотрим основные характерные случаи контурных условий для симметричных оболочек.

1. Край оболочки наглухо защемлен (фиг. 147). Для защемленного края угол поворота дуги меридиана равен нулю:

$$\vartheta=0.$$

Кроме того, на контуре обращается в ноль радиальное перемещение w. Следовательно, согласно выражению (40)

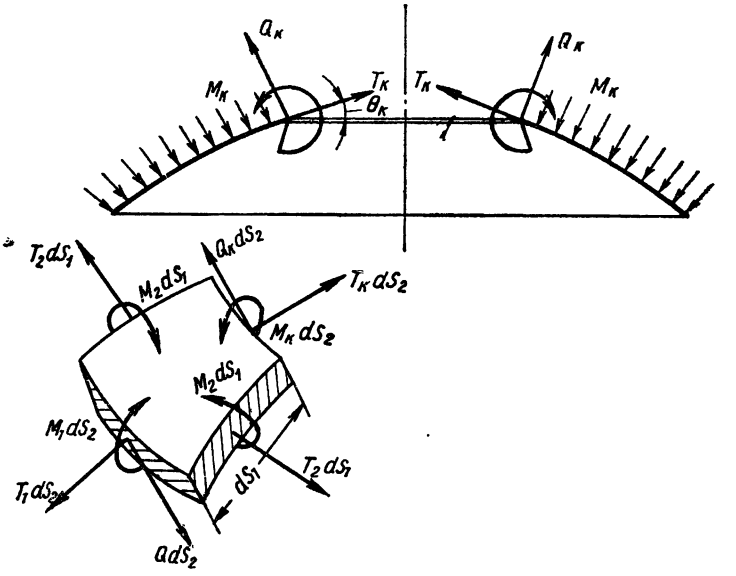
$$\varepsilon_2=0.$$

Два других граничных условия для этой оболочки должны быть составлены на основании способа закрепления второго края. Таким образом будут получены все четыре уравнения, необходимые для определения четырех произвольных постоянных.

Заметим, между прочим, что для рассматриваемого наглухо защемленного контура обращается также в ноль и осевое перемещение u. Эта величина, однако, получается путем интегрирования функций ϑ и ε_1 согласно уравнениям (54), поэтому в уравнение

$$u = 0$$

войдет лишняя (пятая) постоянная последнего интегрирования, т. е. одновременно с дополнительным уравнением появляется и новая не-



Фиг. 148.

известная постоянная. Следовательно, для определения упомянутых четырех постоянных рассмотрение осевого перемещения u ничего не дает. Исключение представляет случай одновременного жесткого крепления обоих контуров оболочки, на котором остановимся ниже.

2. Край оболочки нагружен контурными силами $T_к$ и $Q_к$ и моментами $M_к$ (фиг. 148). Этот случай контурного нагружения является самым общим. Положив $T_к = Q_к = 0$ и $M_к = 0$, можно перейти к случаю свободного края, приняв, что только $M_к = 0$, — перейти к случаю силового нагружения и т. д.

Рассматривая условия равновесия контурного элемента (фиг. 148), при $ds_1 \to 0$, получаем

$$T_1 = T_к; \quad Q = Q_к; \quad M_1 = M_к.$$

Первые два условия, однако, не независимы. Если выполняется одно из них, то выполняется и другое. В самом деле, функция $F(\theta)$ в уравнении (33) определяется из условия равновесия. Согласно уравнению (33) для контура уже заранее известно, что

$$T_1 \sin\theta_к + Q\cos\theta_к = T_к \sin\theta_к + Q_к \cos\theta_к.$$

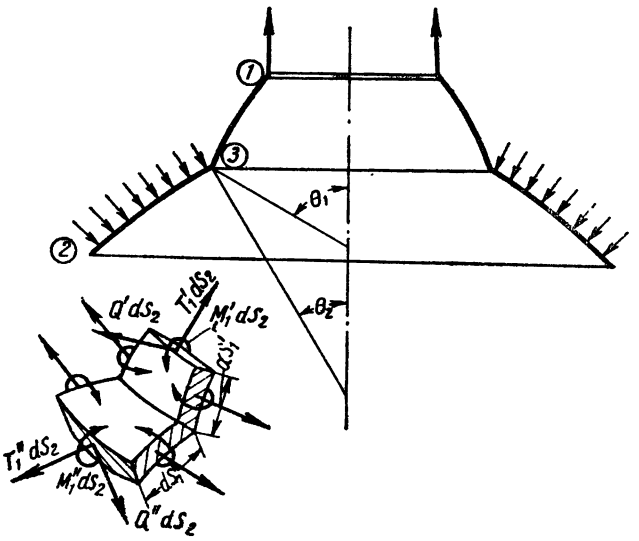
Таким образом, если $T_1 = T_к$, то и $Q = Q_к$, поэтому окончательно для рассматриваемого края оболочки имеют место два условия:

$$Q = Q_к \quad \text{и} \quad M_1 = M_к.$$

Если край свободен, то

$$Q = 0 \quad \text{и} \quad M_1 = 0.$$

3. Случай сопряжения двух оболочек (фиг. 149). Для определения восьми постоянных (по четыре на каждую оболочку) необходимо составить восемь уравнений. Четыре условия (по два на контур) составляются для краев *1* и *2* (фиг. 149). Для общего контура *3*



Фиг. 149.

необходимо, следовательно, составить еще четыре условия. Два из них можно ввести из условий равновесия элемента, выделенного на границе сопряжения обеих оболочек (фиг. 149).

Полагая $ds_1' \to 0$ и $ds_1'' \to 0$, получим прежде всего, что

$$M_1' = M_1'',$$

т. е. изгибающие моменты M_1 у первой и второй оболочек на общем контуре равны.

Из предыдущего примера уже известно, что условие равенства нулю суммы проекций всех сил на ось симметрии удовлетворяется заранее путем надлежащего выбора функции $F(\theta)$. Проектируем все силы, действующие на составной элемент, на какую-либо ось, непараллельную оси симметрии, например на направление Q' (фиг. 149), тогда

$$Q' = Q'' \sin(\theta_1 - \theta_2) - T_1'' \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Остальные два уравнения могут быть получены из условия неразрывности общей дуги меридиана оболочки.

На общем контуре имеем

$$\vartheta' = \vartheta''$$

и

$$w' = w'' \quad (\varepsilon_2' = \varepsilon_2'').$$

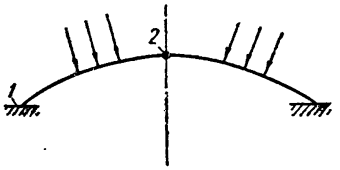
Перемещение u согласно сказанному выше не рассматривается.

4. Замкнутая оболочка. Выше было показано, что граничные условия составляются по два на каждый контур (всего четыре). Если оболочка замкнута в вершине (т. е. радиус одного контура равен нулю) (фиг. 150), то при произвольных значениях искомых постоянных интегрирования напряжения в точке *2* обращаются в бесконечность, поэтому граничные условия для контура (точки) *2* представляют собой обычно требование ограниченности (конечной величины) внутренних сил и деформаций [1], например

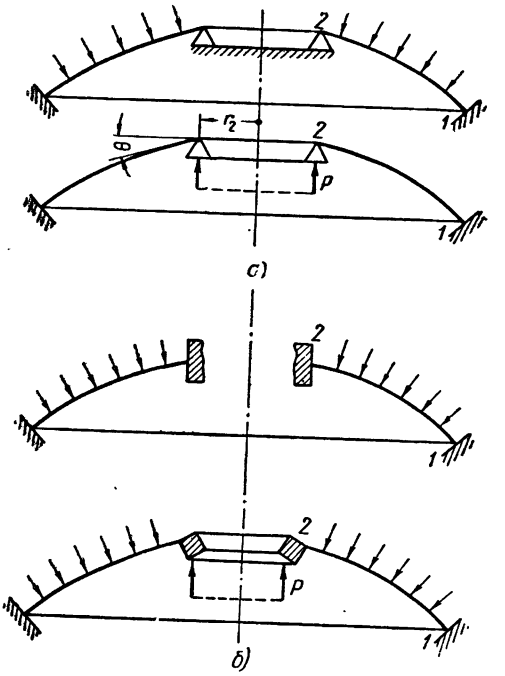
$$\vartheta \neq \infty;$$

$$T_1 \neq \infty.$$

5. Случай двух закрепленных контуров. Функция нагрузки $F(\theta)$ в уравнении (33) может быть определена из условий равновесия только в том случае, если задана нагрузка на одном из контуров оболочки.



Фиг. 150.



Фиг. 151.

Встречаются, однако, случаи, когда закрепление оболочки исключает возможность определения функции $F(\theta)$ обычным методом (фиг. 151) из условий равновесия. Такие оболочки можно назвать статически неопределимыми.

Ясно, что понятие «статическая неопределимость» как в этом, так и в обычном понимании статической неопределимости балок имеет смысл только для определенного метода решения задачи. Если бы мы повысили порядок уравнений (49) так, чтобы в них входила не сама функция $F(\theta)$, а только ее производные по θ, то тогда приведенное выше определение статической неопределимости оболочки не имело бы смысла. Точно так же не имел бы смысла термин «статическая неопределимость балки», если бы взамен обычного дифференциального уравнения упругой линии балки

$$EJv'' = M$$

[1] Особый случай приложения сосредоточенной силы в вершине не рассматривается (подробно см. [4]).

мы пользовались бы уравнением

$$[EJv'']'' = M'' = q,$$

тогда все балки с заданной интенсивностью q были бы в обычном понимании статически определимыми.

Определение краевых условий для статически неопределимых оболочек производится по обычной схеме расчета статически неопределимых систем.

На одном из контуров вводится сила P, заменяющая опору (фиг. 151), затем составляется функция $F(\theta$ в предположении, что P — величина известная. Наконец, последняя определяется из условия, что осевое перемещение и на контуре *2* (фиг. 151) равно нулю.

Следовательно, при шести неизвестных [четыре постоянные интегрирования системы (49), одна постоянная интегрирования уравнения (35) и реакция P] имеют место следующие шесть условий:

Пример а (фиг. 151, *а*).

На контуре *1*

$$\vartheta = 0; \quad \varepsilon_2 = 0; \quad u = 0$$

На контуре *2*

$$M_1 = 0; \quad Q = \frac{P}{2\pi r_2}\cos\theta; \quad u = 0.$$

Пример б (фиг. 151, *б*).

На контуре *1*

$$\vartheta = 0; \quad \varepsilon_2 = 0; \quad u = 0.$$

На контуре *2*

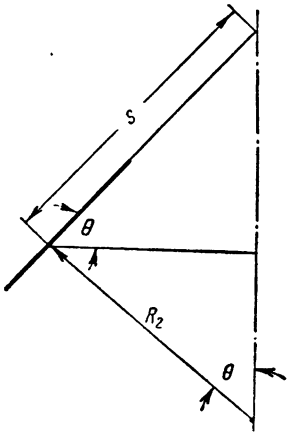
$$\vartheta = 0; \quad \varepsilon_2 = 0; \quad u = 0.$$

Переходим к рассмотрению симметричных оболочек некоторых основных типов.

§ 4. КОНИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА

А. Преобразование уравнений

Для конической оболочки угол θ является величиной постоянной, а радиус кривизны меридиана $R_1 = \infty$. Поэтому все выведенные выше уравнения следует привести к какой-либо новой независимой переменной. В качестве таковой удобнее всего взять расстояние s от вершины конуса по его образующей (фиг. 152).



Фиг. 152.

Положим сначала во всех уравнениях

$$R_1 d\theta = ds,$$

а затем примем

$$R_1 = \text{const} = \infty.$$

Очевидно, при $R_1 = \text{const}$

$$\frac{d(*)}{d\theta} = R_1 \frac{d(*)}{ds};$$

$$\frac{d^2(*)}{d\theta^2} = R_1^2 \frac{d^2(*)}{ds^2}.$$

Оператор (48) примет вид

$$L(*)=R_1\left[R_2\frac{d^2(*)}{ds^2}+\left(\frac{R_2}{R_1}\operatorname{ctg}\theta+\frac{dR_2}{ds}\right)\frac{d(*)}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{R_2}(*)\right].$$

Уравнения (49) перепишутся теперь так:

$$R_1\left[R_2\frac{d^2V}{ds^2}+\left(\frac{R_2}{R_1}\operatorname{ctg}\theta+\frac{dR_2}{ds}\right)\frac{dV}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{R_2}V\right]+\mu V+$$

$$+\frac{R_1}{h}\cdot\frac{dh}{ds}\left(\mu V\operatorname{ctg}\theta-R_2\frac{dV}{ds}\right)=EhR_1\vartheta+R_1h\frac{d}{ds}\left(\frac{R_2^2p_n}{h}\right)+$$

$$+(R_2+\mu R_1)R_2p_t-\frac{F(s)}{\sin^2\theta}\left\{\left(\frac{R_1}{R_2}-\frac{R_2}{R_1}\right)\operatorname{ctg}\theta+hR_1\frac{d}{ds}\left(\frac{R_2}{hR_1}+\frac{\mu}{h}\right)\right\};$$

$$R_1\left[R_2\frac{d^2\vartheta}{ds^2}+\left(\frac{R_2}{R_1}\operatorname{ctg}\theta+\frac{dR_2}{ds}\right)\frac{d\vartheta}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{R_2}\vartheta\right]-$$

$$-\mu\vartheta+3\frac{R_1}{h}\cdot\frac{dh}{ds}\left(\mu\vartheta\operatorname{ctg}\theta+R_2\frac{d\vartheta}{ds}\right)=-\frac{R_1}{D}V,$$

где согласно выражениям (33)

$$\left.\begin{aligned}&F(s)=R_2\sin\theta(T_1\sin\theta+Q\cos\theta);\\&F(s)=C+\int R_2\sin\theta(p_n\cos\theta-p_t\sin\theta)\,ds.\end{aligned}\right\}\qquad(56)$$

Если теперь положить $R_1=\infty$, то получим

$$R_2\frac{d^2V}{ds^2}+\frac{dR_2}{ds}\cdot\frac{dV}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{R_2}V+\frac{1}{h}\cdot\frac{dh}{ds}\left(\mu V\operatorname{ctg}\theta-R_2\frac{dV}{ds}\right)=$$

$$=Eh\vartheta+h\frac{d}{ds}\left(\frac{R_2^2p_n}{h}\right)+\mu R_2p_t-\frac{F(s)}{\sin^2\theta}\left(\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}-\frac{\mu}{h}\cdot\frac{dh}{ds}\right);$$

$$R_2\frac{d^2\vartheta}{ds^2}+\frac{dR_2}{ds}\cdot\frac{d\vartheta}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{R_2}\vartheta+\frac{3}{h}\cdot\frac{dh}{ds}\left(\mu\vartheta\operatorname{ctg}\theta+R_2\frac{d\vartheta}{ds}\right)=-\frac{V}{D}.\qquad(57)$$

Согласно фиг. 152 для конуса

$$R_2=s\operatorname{ctg}\theta,$$

тогда

$$s\frac{d^2V}{ds^2}+\frac{dV}{ds}-\frac{V}{s}+\frac{1}{h}\cdot\frac{dh}{ds}\left(\mu V-s\frac{dV}{ds}\right)=$$

$$=Eh\vartheta\ \mathrm{g}\,\theta+\operatorname{ctg}\theta h\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2p_n}{h}\right)+\mu sp_t-\frac{F(s)}{\sin\theta\cos\theta}\left(\frac{1}{s}-\frac{\mu}{h}\cdot\frac{dh}{ds}\right);$$

$$s\frac{d^2\vartheta}{ds^2}+\frac{d\vartheta}{ds}-\frac{\vartheta}{s}+\frac{3}{h}\cdot\frac{dh}{ds}\left(\mu\vartheta+s\frac{d\vartheta}{ds}\right)=-\frac{V}{D}\operatorname{tg}\theta.$$

Обозначим

$$L_1(*)=s\frac{d^2(*)}{ds^2}+\frac{d(*)}{ds}-\frac{(*)}{s};$$

$$\Phi(s)=\operatorname{ctg}\theta\left[\frac{1}{h}\cdot\frac{dh}{ds}\left(\frac{\mu F(s)}{\cos^2\theta}-s^2p_n\right)-\frac{F(s)}{s\cos^2\theta}+\right.$$

$$\left.+\mu p_ts\operatorname{tg}\theta+\frac{d}{ds}(p_ns^2)\right],\qquad(58)$$

тогда

$$\left.\begin{aligned} L_1(V) + \frac{1}{h}\cdot\frac{dh}{ds}\left(\mu V - s\frac{dV}{ds}\right) &= Eh\vartheta\operatorname{tg}\theta + \Phi(s);\\ L_1(\vartheta) + \frac{3}{h}\cdot\frac{dh}{ds}\left(\mu\vartheta - s\frac{d\vartheta}{ds}\right) &= -\frac{V}{D}\operatorname{tg}\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Кроме того, из выражений (44), (47), (51) — (56) имеем

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -D\left(\frac{d\vartheta}{s} + \mu\frac{\vartheta}{s}\right);\\ M_2 &= -D\left(\frac{\vartheta}{s} + \mu\frac{d\vartheta}{ds}\right);\\ Q &= \frac{V}{s}\operatorname{tg}\theta;\\ T_1 &= \frac{F(s)}{s\sin\theta\cos\theta} - \frac{V}{s};\\ T_2 &= p_n s\operatorname{ctg}\theta - \frac{dV}{ds}; \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh}\left[\frac{F(s)}{s\cos\theta\sin\theta} - \frac{V}{s} - \mu\left(p_n s\operatorname{ctg}\theta - \frac{dV}{ds}\right)\right];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{Eh}\left[p_n s\operatorname{ctg}\theta - \frac{dV}{ds} - \mu\left(\frac{F(\,)}{s\cos\theta\sin\theta} - \frac{V}{s}\right)\right];$$

$$\frac{dw}{ds} = \varepsilon_1\cos\theta - \vartheta\sin\theta;$$

$$\frac{du}{ds} = \varepsilon_1\sin\theta + \vartheta\cos\theta;$$

$$F(s) = s\cos\theta(T_1\sin\theta + Q\cos\theta).$$

Б. Случай оболочки постоянной толщины

В случае оболочки постоянной толщины уравнения (59) значительно упрощаются и принимают вид

$$\left.\begin{aligned} L_1(V) &= Eh\vartheta\operatorname{tg}\theta + \Phi(s);\\ L_1(\vartheta) &= -\frac{V}{D}\operatorname{tg}\theta;\\ \Phi(s) &= \operatorname{ctg}\theta\left[-\frac{F(s)}{s\cos^2\theta} + \mu p_t s\operatorname{tg}\theta + \frac{d}{ds}(p_n s^2)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Рассмотрим сначала однородную систему, положив функцию нагрузки $\Phi(s) = 0$, тогда

$$\left.\begin{aligned} L_1(V) &= Eh\vartheta\operatorname{tg}\theta;\\ L_1(\vartheta) &= -\frac{V}{D}\operatorname{tg}\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

Над каждым из уравнений произведем операцию $L_1(*)$, что дает

$$L_1L_1(\vartheta) = -\frac{\operatorname{tg}\theta}{D}L_1(V);$$

$$L_1L_1(V) = Eh\operatorname{tg}\theta L_1(\vartheta).$$

Подставляя $L_1(V)$ и $L_1(\vartheta)$ в первоначальные уравнения, получим

$$\left.\begin{aligned} L_1L_1(V) + \lambda^2 V &= 0; \\ L_1L_1(\vartheta) + \lambda^2\vartheta &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

где обозначено

$$\lambda^2 = \frac{Eh\,\mathrm{tg}^2\theta}{D} = \frac{12(1-\mu^2)}{h^2}\,\mathrm{tg}^2\theta. \tag{64}$$

Уравнения (63) построены совершенно одинаково, поэтому решение одного из них распространяется и на другое. Рассмотрим первое уравнение (63).

Нетрудно показать, что если функция V удовлетворяет уравнению

$$L_1(V) - i\lambda V = 0$$

или

$$L_1(V) + i\lambda V = 0,$$

то она удовлетворяет также и уравнению (63). Другими словами, уравнение

$$L_1L_1(V) + \lambda^2 V = 0$$

распадается на два сопряженных:

$$\left.\begin{aligned} L_1(V) - i\lambda V &= 0 \\ \text{и} \qquad\qquad & \\ L_1(V) + i\lambda V &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

каждое из которых имеет второй порядок. Е. Мейсснером [13] было показано, что подобное преобразование возможно вообще для оболочек, имеющих постоянный радиус кривизны R_1 (конус, тор, сфера).

Согласно первому выражению (58) получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2V}{ds^2}s + \frac{dV}{ds} - \frac{1}{s}V \quad i\lambda V &= 0; \\ \frac{d^2V}{ds^2}s + \frac{dV}{ds} - \frac{1}{s}V + i\lambda V &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Если первое из этих уравнений даст решение вида

$$V = C_1V_1 + C_2V_2,$$

где V_1 и V_2 — комплексные функции переменного s, то решение второго уравнения имеет вид:

$$V = C_3V_3 + C_4V_4,$$

причем V_1 и V_3, а также V_2 и V_4 будут сопряженными комплексными функциями s.

Введем новое независимое переменное z, связанное с s следующим образом:

для первого уравнения

$$z = (1-i)\sqrt{2\lambda s};$$

для второго

$$z = (1+i)\sqrt{2\lambda s}.$$

Тогда

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dz}\frac{(1 \mp i)^2 \lambda}{z};$$

$$\frac{d^2V}{ds^2} = \left[\frac{d^2V}{dz^2}\frac{(1 \pm i)^2 \lambda}{z} - \frac{dV}{dz}\cdot\frac{(1 \pm i)^2 \lambda}{z^2}\right]\frac{(1 \pm i)^2 \lambda}{z}.$$

Теперь уравнения (66) приведутся к виду

$$z^2\frac{d^2V}{dz^2} + z\frac{dV}{dz} + (z^2 - 2^2)\,V = 0. \tag{67}$$

Вообще уравнение

$$z^2\frac{d^2y}{dz} + z\frac{dv}{dz} + (z^2 - p^2)\,y = 0, \tag{68}$$

где p — постоянная величина, называется уравнением Бесселя индекса p *; в нашем случае $p=2$. Следовательно, задача о расчете конической оболочки сводится к уравнению Бесселя индекса 2.

К уравнению Бесселя сводятся многие задачи физики, механики и теории упругости, поэтому уравнения типа (68) подробно исследованы, и решение их не представляет большого труда.

Линейно независимыми частными решениями уравнения Бесселя являются функции $H_p^{(1)}(z)$ и $H_p^{(2)}(z)$, называемые функциями Ганкеля первого и второго рода.

$H_p^{(1)}(z)$ и $H_p^{(2)}(z)$ — комплексные функции комплексного переменного z.

Разбивая эти функции на вещественную и мнимую части, для первого уравнения (66), получим

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= H_2^{(1)}(z) = X_1 + iY_1; \\ V_2 &= H_2^{(2)}(z) = X_2 + iY_2. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Для второго уравнения

$$\left.\begin{aligned} V_3 &= H_2^{(1)}(\bar{z}) = X_1 - iY_1; \\ V_4 &= H_2^{(2)}(\bar{z}) = X_2 - iY_2. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Функции X_1, X_2, Y_1 и Y_2 — вещественные функции вещественного аргумента

$$v = \frac{z}{1-i} = \sqrt{2\lambda s}. \tag{71}$$

Линейно независимые функции V_1, V_2, V_3 и V_4 удовлетворяют уравнениям (66), а следовательно, и первому уравнению (63). Любая линейная комбинация этих функций будет также удовлетворять этому уравнению. Таким образом, можно получить вещественное решение уравнения (63) в виде

$$V = C_1\frac{V_1 + V_3}{2} + C_2\frac{V_2 + V_4}{2} + C_3\frac{V_1 - V_3}{2i} + C_4\frac{V_2 - V_4}{2i},$$

* См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ОГИЗ, 1941.

или

$$V = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3Y_1 + C_4Y_2, \tag{72}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Функции X_1, X_2, Y_1 и Y_2 зависят от v в формуле (71) и определяются разделением функций Ганкеля на вещественную и мнимую части.

Возвращаясь к однородной системе (62), выразим теперь угол ϑ через введенные функции X_1, X_2, Y_1, Y_2.

Так как первое из уравнений (65) удовлетворяется функциями V_1 и V_2 согласно выражению (69), а второе функциями V_3 и V_4 выражения (70), то после подстановки и разделения вещественной и мнимой частей получаем

$$\begin{aligned} L_1(X_1) &= -\lambda Y_1;\\ L_1(X_2) &= -\lambda Y_2;\\ L_1(Y_1) &= \lambda X_1;\\ L_1(Y_2) &= \lambda X_2. \end{aligned}$$

Теперь подставим V из выражения (72) в первое уравнение (62). Учитывая последние соотношения, имеем

$$\vartheta = \frac{\lambda}{Eh\operatorname{tg}\theta}(C_3X_1 + C_4X_2 - C_1Y_1 - C_2Y_2).$$

К полученным функциям V и ϑ следует добавить еще частное решение (V^* и ϑ^*) системы уравнений (61), тогда

$$\left.\begin{aligned} V &= C_1X_1 + C_2X_2 + C_3Y_1 + C_4Y_2 + V^*;\\ \vartheta &= \frac{\lambda}{Eh\operatorname{tg}\theta}(C_3X_1 + C_4X_2 - C_1Y_1 - C_2Y_2) + \vartheta^*. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Заметим, между прочим, что для обычных систем нагрузок V^* и ϑ^* определяются чрезвычайно просто в виде несложных алгебраических функций переменного s.

После того как функции V и ϑ по формуле (73) найдены, без труда определяются все внутренние силы и моменты.

Из выражений (60)

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{\operatorname{tg}\theta}{s}(C_1X_1 + C_2X_2 + C_3Y_1 + C_4Y_2) + \frac{\operatorname{tg}\theta}{s}V^*;\\ T_1 &= \frac{F(s)}{s\sin\theta\cos\theta} - \frac{1}{s}V^* - \frac{1}{s}(C_1X_1 + C_2X_2 + C_3Y_1 + C_4Y_2);\\ T_2 &= p_n s\operatorname{ctg}\theta - C_1\left(\frac{1}{s}X_1 + \lambda\tilde{X}_1\right) - C_2\left(\frac{1}{s}X_2 + \lambda\tilde{X}_2\right) -\\ &\quad - C_3\left(\frac{1}{s}Y_1 + \lambda\tilde{Y}_1\right) - C_4\left(\frac{1}{s}Y_2 + \lambda\tilde{Y}_2\right);\\ M_1 &= -D\frac{\lambda}{Eh\operatorname{tg}\theta}\left\{C_3\left[(1+\mu)\frac{X_1}{s} + \lambda\tilde{X}_1\right] +\right.\\ &\quad + C_4\left[(1+\mu)\frac{X_2}{s} + \lambda\tilde{X}_2\right] - C_1\left[(1+\mu)\frac{Y_1}{s} + \lambda\tilde{Y}_1\right] -\\ &\quad \left. - C_2\left[(1+\mu)\frac{Y_2}{s} + \lambda\tilde{Y}_2\right]\right\} - D\left(\frac{d\vartheta^*}{ds} + \mu\frac{\vartheta^*}{s}\right);\\ M_2 &= -D\frac{\lambda}{Eh\operatorname{tg}\theta}\left\{C_3\left[(1+\mu)\frac{X_1}{s} + \mu\lambda\tilde{X}_1\right] +\right. \end{aligned}\right\}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+C_4\left[(1+\mu)\frac{X_2}{s}+\mu\lambda\tilde{X}_2\right]-C_1\left[(1+\mu)\frac{Y_1}{s}+\mu\lambda\tilde{Y}_1\right]-\\
&-C_2\left[(1+\mu)\frac{Y_2}{s}+\mu\lambda\tilde{Y}_2\right]\Big\}-D\left(\frac{\vartheta^*}{s}+\mu\frac{d\vartheta^*}{ds}\right);\\
\varepsilon_1=&\frac{1}{Eh}\left[\frac{F(s)}{s\sin\theta\cos\theta}-\mu p_n s\operatorname{ctg}\theta\right]-\frac{1}{Eh}\left(\frac{V^*}{s}+\mu\frac{dV^*}{ds}\right)\\
&-\frac{1}{En}\left\{C_1\left[(1+\mu)\frac{X_1}{s}+\mu\lambda\tilde{X}_1\right]+C_2\left[(1+\mu)\frac{X_2}{s}+\mu\lambda\tilde{X}_2\right]+\right.\\
&\left.+C_3\left[(1+\mu)\frac{Y_1}{s}+\mu\lambda\tilde{Y}_1\right]+C_4\left[(1+\mu)\frac{Y_2}{s}+\mu\lambda\tilde{Y}_2\right]\right\};\\
\varepsilon_2=&\frac{1}{Eh}\left[\frac{\mu F(s)}{s\sin\theta\cos\theta}-p_n s\operatorname{ctg}\theta\right]-\frac{1}{Eh}\left(\frac{dV^*}{ds}+\mu\frac{V^*}{s}\right)-\\
&-\frac{1}{Eh}\left\{C_1\left[(1+\mu)\frac{X_1}{s}+\lambda\tilde{X}_1\right]+C_2\left[(1+\mu)\frac{X_2}{s}+\lambda\tilde{X}_1\right]+\right.\\
&\left.+C_3\left[(1+\mu)\frac{Y_1}{s}+\lambda\tilde{Y}_1\right]+C_4\left[(1+\mu)\frac{Y_2}{s}+\lambda\tilde{Y}_2\right]\right\}
\end{aligned}
\right\}
\qquad (74)
$$

где функции $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$, $\tilde{Y}_1$ и $\tilde{Y}_2$ выражаются через λ_1, X_2, Y_1, Y_2 следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_1&=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{dX_1}{ds}-\frac{X_1}{s}\right);\\
\tilde{X}_2&=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{dX_2}{ds}-\frac{X_2}{s}\right);\\
\tilde{Y}_1&=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{dY_1}{ds}-\frac{Y_1}{s}\right);\\
\tilde{Y}_2&=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{dY_2}{ds}-\frac{Y_2}{s}\right).
\end{aligned}
$$

Таким образом, в итоге всех произведенных выкладок получена возможность определять все внутренние усилия, а следовательно, и напряжения, действующие в конической оболочке. Постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 должны быть установлены из граничных условий для каждой конкретной задачи, функции же X_1, X_2, Y_1, Y_2, $\tilde{X}_1$, X_2, $\tilde{Y}_1$ и Y_2 в зависимости от v уравнения (71) определяются по следующим формулам (см. [7], [8]):

$$
\left.
\begin{aligned}
X_1&=-\frac{2^{\frac{1}{4}}e^v}{\pi^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}}\left[x_2^{(1)}\cos\left(v-\frac{\pi}{8}\right)-y_2^{(1)}\sin\left(v-\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
Y_1&=-\frac{2^{\frac{1}{4}}e^v}{\pi^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}}\left[y_2^{(1)}\cos\left(v-\frac{\pi}{8}\right)+x_2^{(1)}\sin\left(v-\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
X_2&=-\frac{2^{\frac{1}{4}}e^{-v}}{\pi^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}}\left[x_2^{(2)}\cos\left(v-\frac{3\pi}{8}\right)-y_2^{(2)}\sin\left(v-\frac{3\pi}{8}\right)\right];
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
Y_2 &= -\frac{2^{\frac{1}{4}} e^{-v}}{\pi^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}}\left[y_2^{(2)}\cos\left(v-\frac{3\pi}{8}\right)-x_2^{(2)}\sin\left(v-\frac{3\pi}{8}\right)\right];\\
\tilde{X}_1 &= +\frac{2^{\frac{3}{4}} e^{v}}{\pi^{\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}}}\left[y_3^{(1)}\cos\left(v-\frac{3\pi}{8}\right)+x_3^{(1)}\sin\left(v-\frac{3\pi}{8}\right)\right];\\
\tilde{Y}_1 &= +\frac{2^{\frac{3}{4}} e^{v}}{\pi^{\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}}}\left[-x_3^{(1)}\cos\left(v-\frac{3\pi}{8}\right)+y_3^{(1)}\sin\left(v-\frac{3\pi}{8}\right)\right];\\
\tilde{X}_2 &= +\frac{2^{\frac{3}{4}} e^{-v}}{\pi^{\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}}}\left[-y_3^{(2)}\cos\left(v-\frac{\pi}{8}\right)+x_3^{(2)}\sin\left(v-\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
\tilde{Y}_2 &= +\frac{2^{\frac{3}{4}} e^{-v}}{\pi^{\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}}}\left[x_3^{(2)}\cos\left(v-\frac{\pi}{8}\right)+y_3^{(2)}\sin\left(v-\frac{\pi}{8}\right)\right],
\end{aligned}
\right\} \qquad (75)
$$

где

$$
\begin{aligned}
x_2^{(1)} &= 1+\frac{0{,}9375}{v}+\frac{0{,}07690}{v^3}-\ldots;\\
y_2^{(1)} &= +\frac{0{,}9375}{v}+\frac{0{,}4102}{v^2}-\frac{0{,}07690}{v^3}-\ldots;\\
x_2^{(2)} &= 1-\frac{0{,}9375}{v}-\frac{0{,}07690}{v^3}\ldots;\\
y_2^{(2)} &= -\frac{0{,}9375}{v}+\frac{0{,}4102}{v^2}+\frac{0{,}07690}{v^3}\ldots;\\
x_3^{(1)} &= 1+\frac{2{,}1875}{v}-\frac{0{,}8460}{v^3}+\frac{0{,}344}{v^4}\ldots;\\
y_3^{(1)} &= +\frac{2{,}1875}{v}+\frac{3{,}691}{v^2}+\frac{0{,}8460}{v^3}\ldots;\\
x_3^{(2)} &= 1-\frac{2{,}1875}{v}+\frac{0{,}8460}{v^3}+\frac{0{,}344}{v^4}\ldots;\\
y_3^{(2)} &= -\frac{2{,}1875}{v}+\frac{3{,}691}{v^2}-\frac{0{,}8460}{v^3}\ldots
\end{aligned}
$$

Эти выражения составлены для больших значений переменного v ($v>5$). Меньшие значения v в практических задачах встречаются редко.

В. Пример. Расчет бродильного резервуара

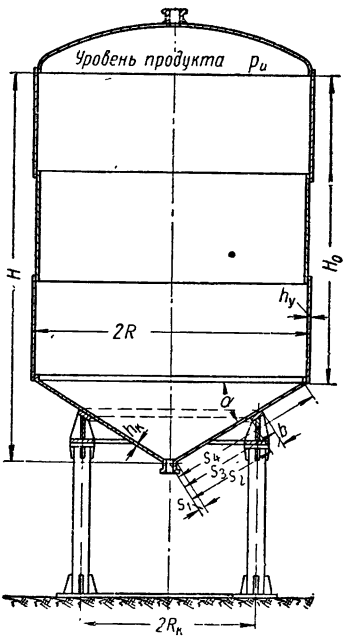
Бродильный резервуар (фиг. 153) представляет собой тело вращения и состоит из трех основных частей: конического днища, цилиндрической стенки и сферической крышки. Резервуар покоится на опорном кольце диаметром $2R_к$, меньшем внешнего диаметра резервуара.

Через центрально расположенное в крышке отверстие резервуар заполняется до верхней кромки цилиндра жидкостью, вес единицы объема которой равен γ *кг/см*^{3}.

Во время брожения давление над уровнем жидкости может подниматься над атмосферным до величины p_u=0,2 *кг/см*^{2}.

В коническом днище имеется отверстие для спуска содержимого после процесса брожения.

Ввиду неодинаковой степени нагружения толщина основных частей резервуара принимается различной. Так, толщина конического днища бака больше толщины цилиндрической стенки, толщина же стенки в свою очередь больше толщины крышки резервуара, в пределах же каждого из трех участков толщина остается постоянной.



Фиг. 153.

Конструкция целиком сварная. Коническое днище приваривается к опорному кольцу.

Высокая емкость резервуара (порядка 50 *м*^{3}) и большой вес делают необходимым расчет системы на прочность.

Проведем проверочный расчет при следующих данных: $H_0 = 4{,}80$ *м*; $h_ц = 6$ *мм*; $E = 2 \cdot 10^4$ *кг/мм*^{2}; $R = 1{,}8$ *м*; $\alpha = 30°$; $\mu = 0{,}3$; $R_к = 1{,}3$ *м*; $b = 160$ *мм*; $H = 5{,}84$ *м*; $s_1 = 60$ *мм*; $h = 8$ *мм*; $\gamma = 1$ *г/см*^{3}; $p_u = 0{,}2$ *ат*.

При расчете ограничимся рассмотрением только конического днища и нижней части цилиндра в предположении весьма большой жесткости опорного кольца. При этом, поскольку днище плотно приваривается к опорному кольцу, такое предположение позволяет рассматривать внутренний участок днища независимо от внешнего.

Выпускной кран, вваренный в центре днища, будем считать абсолютно жестким.

Расчетная схема резервуара показана на фиг. 154.

Из рассмотрения условия равновесия части внутреннего конуса (фиг. 155) получаем

$$\gamma \pi r^2 H - \frac{2}{3} \gamma r^2 s \sin \alpha + p_u \pi r^2 = 2\pi r (T_\tau \sin \alpha + Q \cos \alpha),$$

где $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$.

Так как $r = s \cos \alpha$, то согласно выражениям (56)

$$F(s) = \frac{s^2}{2} \cos^2 \alpha \left(\gamma H + p_u - \frac{2}{3} \gamma s \sin \alpha \right).$$

Давление, нормальное к поверхности,

$$p_n = \gamma (H - s \sin \alpha) + p_u;$$

$$\frac{dp_n}{ds} = -\gamma \sin \alpha.$$

Из второго выражения (58) получим

$$\Phi(s) = \frac{3}{2} s (\gamma H + p_u) \operatorname{ctg} \alpha - \frac{8}{3} \gamma s^2 \cos \alpha.$$

Система уравнений (61) для внутреннего конуса принимает вид

$$\frac{d^2V}{ds^2} s + \frac{dV}{ds} - \frac{V}{s} = Eh\vartheta \operatorname{tg} \alpha + \frac{3}{2} s (\gamma H + p_u) \operatorname{ctg} \alpha - \frac{8}{3} \gamma s^2 \cos \alpha;$$

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} s + \frac{d\vartheta}{ds} - \frac{\vartheta}{s} = -\frac{V}{D} \operatorname{tg} \alpha.$$

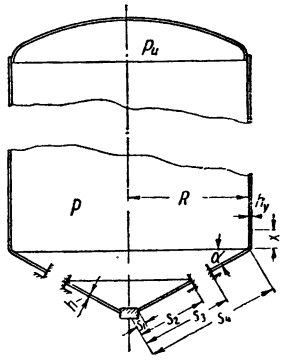
Частное решение системы будет

$$V^* = -\frac{8\gamma D}{Eh}\cdot\frac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}\,s;$$

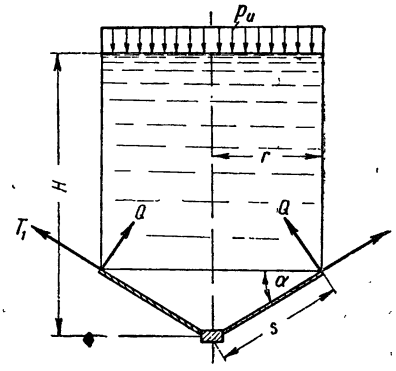
$$\vartheta^* = -\frac{3}{2Eh}(p_u+\gamma H)\,s\,\operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{8\gamma}{3Eh}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,s^2.$$

Полное решение системы (61) будет

$$\left.\begin{aligned} V &= C_1X_1 + C_2X_2 + C_3Y_1 + C_4Y_2 + V^*;\\ \vartheta &= \frac{\lambda}{Eh\operatorname{tg}\alpha}(C_3X_1 + C_4X_2 - C_1Y_1 - C_2Y_2) + \vartheta^*. \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$



Фиг. 154.



Фиг. 155.

Так как у внутренней части днища оба контура жестко заделаны, то при $s = s_1$

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 = 0;\\ \text{при } s = s_2 \qquad &\vartheta = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

При заданных размерах $s_1 = 60$ *мм*; $s_2 = 1420$ *мм*.
Согласно выражению (71) $v_1 = 5{,}349$; $v_2 = 26{,}03$.
По формулам (75) определяем:

при $s = s_1$

$$X_1 = -0{,}2858\cdot10^2; \qquad Y_1 = +0{,}6686\cdot10^2;$$

$$X_2 = +0{,}03954\cdot10^{-2}; \qquad Y_2 = -0{,}10867\cdot10^{-2};$$

$$\tilde{X}_1 = -0{,}2394\cdot10^2; \qquad \tilde{Y}_1 = +0{,}04151\cdot10^2;$$

$$\tilde{X}_2 = -0{,}01859\cdot10^{-2}; \qquad \tilde{Y}_2 = +0{,}01536\cdot10^{-2};$$

при $s = s_2$

$$X_1 = -0{,}2363\cdot10^{11}; \qquad Y_1 = -0{,}1432\cdot10^{11};$$

$$X_2 = -0{,}06079\cdot10^{-11}; \qquad Y_2 = 0{,}01483\cdot10^{-11};$$

$$\tilde{X}_1 = -0{,}003029\cdot10^{11}; \qquad \tilde{Y}_1 = -0{,}01545\cdot10^{11};$$

$$\tilde{X}_2 = +0{,}001816\cdot10^{-11}; \qquad \tilde{Y}_2 = +0{,}002683\cdot10^{-11}.$$

Наконец, выражая условия (77) по зависимостям (74), получим следующие четыре уравнения для определения констант C_1, C_2, C_3 и C_4:

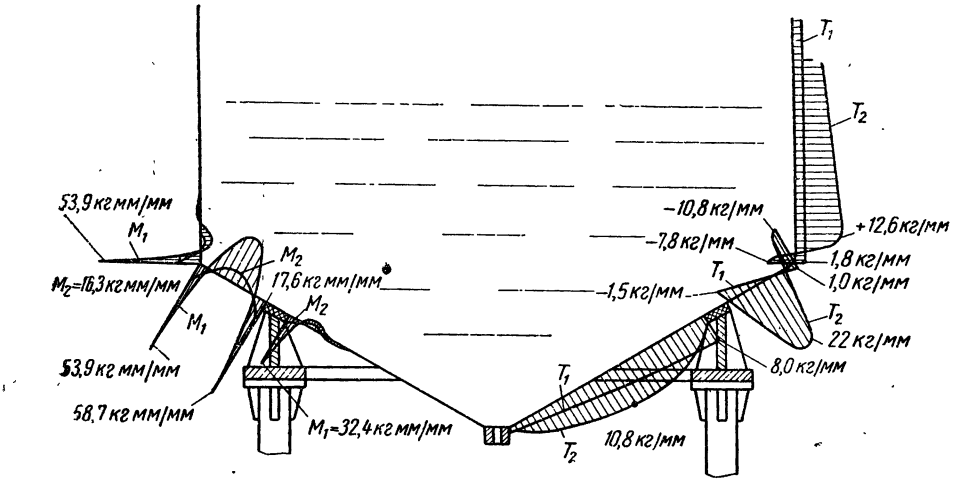
$$-0{,}06042\cdot10^2C_1 - 0{,}003972\cdot10^{-2}C_2 + 0{,}017699\cdot10^2C_3 +$$
$$+0{,}002395\cdot10^{-2}C_4 = 0{,}6898;$$

$$-0{,}6686\cdot10^{2}C_1+0{,}10867\cdot10^{-2}C_2-0{,}2858\cdot10^{2}C_3+$$
$$+0{,}03954\cdot10^{-2}C_4=5{,}089;$$
$$-0{,}0008389\cdot10^{11}C_1+0{,}0004031\cdot10^{-11}C_2-0{,}003756\cdot10^{11}C_3+$$
$$+0{,}0006325\cdot10^{-11}C_4=14{,}819;$$
$$+0{,}1432\cdot10^{11}C_1+0{,}01483\cdot10^{-11}C_2-0{,}2363\cdot10^{11}C_3-$$
$$-0{,}06078\cdot10^{-11}C_4=104{,}19,$$

откуда

$$C_1=4225{,}6\cdot10^{-11};\qquad C_2=-3615;$$
$$C_3=-3001{,}6\cdot10^{-11};\qquad C_4=+22\,807.$$

Теперь по формулам (74) можно найти контурное значение изгибающих моментов M_1 и M_2 и растягивающих усилий T_1 и T_2.



Фиг. 156.

Если вычислить дополнительно функции X_1, X_2, ... для нескольких промежуточных значений s, можно установить также полную картину распределения моментов и усилий по всей длине образующей конуса. Результаты таких вычислений представлены в виде эпюр на фиг. 156.

Теперь рассмотрим внешнюю часть конического днища.

Из условия равновесия (фиг. 157) при $s_3\leqslant s\leqslant s_4$ получаем

$$\gamma\pi r^2H-\frac{2}{3}\gamma\pi r^2s\sin\alpha+p_u\pi r^2-P=2\pi r\,(T_1\sin\alpha+Q\cos\alpha),$$

откуда

$$F(s)=\frac{s^2}{2}\cos^2\alpha\left(\gamma H-\frac{2}{3}\gamma s\sin\alpha+p_u\right)-\frac{P}{2\pi},$$

где P — реакция опоры, равная весу заполненного бака.

Выражение (58) для $\Phi(s)$ принимает вид

$$\Phi(s)=\frac{3}{2}s(\gamma H+p_u)\operatorname{ctg}\alpha-\frac{8}{3}\gamma s^2\cos\alpha+\frac{P}{\pi s\sin2\alpha}.$$

Частное решение системы (61) в этом случае будет следующим:

$$V^*=-\frac{8\gamma D}{Eh}\cdot\frac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}s;$$
$$\vartheta^*=-\frac{3}{2}\cdot\frac{s}{Eh}(p_u+\gamma H)\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{8\gamma}{3Eh}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}s^2-\frac{P}{2\pi sEh\sin^2\alpha}.$$

Полное решение по-прежнему будет иметь вид, аналогичный формуле (76). Для цилиндрической оболочки, с которой сопряжен конус, имеем

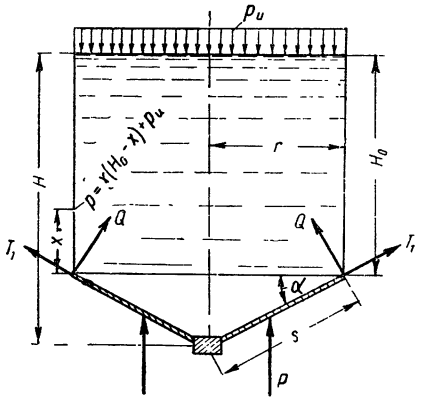
$$T = \frac{p_u R}{2}.$$

Согласно уравнению (18)

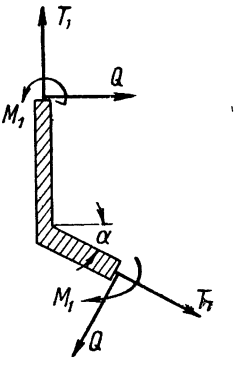
$$w^{(IV)} + 4k^4 w = \frac{1}{D_ц}\left(\gamma H_0 + p_u - \frac{1}{2}\mu p_u\right) - \frac{\gamma x}{D_ц}.$$

Частное решение этого уравнения

$$w^* = \frac{R^2}{Eh_ц}\left[\gamma H_0 + p_u\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\right] - \frac{\gamma R^2}{Eh_ц}x.$$



Фиг. 157.



Фиг. 158

Учитывая, что цилиндр достаточно высок, положим в выражение (23), как и ранее, C_3 и C_4 равными нулю, тогда функция w для цилиндра примет вид

$$w = e^{-kx}\left(C_1' \sin kx + C_2' \cos kx\right) + \\ + \frac{R^2}{E_ц}\left[\gamma H_0 + p_u\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\right] - \frac{\gamma R^2}{Eh_ц}x.$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4, C_1' и C_2' должны быть определены из условий защемления конической оболочки на внутреннем контуре и условий непрерывности деформаций и усилий конической и цилиндрической оболочек на контуре сопряжения.

При $s = s_3$ (фиг. 154) имеем для конуса

$$\varepsilon_2 = 0 \quad \text{и} \quad \vartheta = 0, \tag{78}$$

На общем контуре

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Конус } (s = s_4) & & \text{Цилиндр } (x = 0) \\ \varepsilon_2 & = & \varepsilon_2; \\ \vartheta & = & \vartheta; \\ M_1 & = & M_1; \\ Q & = & -T_1 \cos\alpha + Q \sin\alpha. \end{array}\right\} \tag{79}$$

Первые пять условий понятны без пояснений, последнее же вытекает из условия равновесия элемента оболочки, выделенного на контуре сопряжения (фиг. 158).

Для конической оболочки $s_3 = 1580$ *мм*; $s_4 = 2078$ *мм*; $v_3 = 27{,}45$; $v_4 = 31{,}48$;

Из выражений (75) получаем:

при $s = s_3$

$$X_1 = +0{,}4200 \cdot 10^{11}; \qquad Y_1 = -1{,}0247 \cdot 10^{11};$$
$$X_2 = -0{,}005700 \cdot 10^{-11}; \qquad Y = +0{,}01366 \cdot 10^{-11};$$
$$\tilde{X}_1 = +0{,}05606 \cdot 10^{11}; \qquad \tilde{Y}_1 = -0{,}02058 \cdot 10^{11};$$
$$\tilde{X}_2 = +0{,}0006604 \cdot 10^{-11}; \qquad \tilde{Y}_2 = -0{,}0003081 \cdot 10^{-11};$$

при $s = s_4$

$$X_1 = -0{,}5541 \cdot 10^{13}; \quad Y_1 = +0{,}1698 \cdot 10^{13};$$
$$X_2 = -0{,}01159 \cdot 10^{-13}; \quad Y_2 = -0{,}02178 \cdot 10^{-13};$$
$$\widetilde{X}_1 = -0{,}02341 \cdot 10^{13}; \quad \widetilde{Y}_1 = -0{,}01363 \cdot 10^{13};$$
$$\widetilde{X}_2 = -0{,}0002697 \cdot 10^{-13}; \quad \widetilde{Y}_2 = +0{,}0010303 \cdot 10^{-13}.$$

Согласно выражениям (74), (12), (16), (19) и (20) раскрываем условия (78) и (79). Тогда получим следующую систему шести уравнений:

$$0{,}01356 \cdot 10^{11} C_1 + 0{,}0001550 \cdot 10^{-11} C_2 - 0{,}005362 \cdot 10^{11} C_3 - 0{,}00006743 \cdot 10^{-11} C_4 + C_1' 0 + C_2' 0 = +20{,}27;$$

$$1{,}0247 \cdot 10^{11} C_1 - 0{,}01366 \cdot 10^{-11} C_2 + 0{,}4200 \cdot 10^{11} C_3 - 0{,}005700 \cdot 10^{-11} C_4 + C_1' 0 + C_2' 0 = 169{,}4;$$

$$-0{,}5770 \cdot 10^{11} C_1 - 0{,}0000006822 \cdot 10^{-11} C_2 - 0{,}3193 \cdot 10^{11} C_3 + 0{,}000002383 \cdot 10^{-11} C_4 + C_1' 0 + 88{,}89 C_2' = +8{,}04;$$

$$-16{,}98 \cdot 10^{11} C_1 + 0{,}0002178 \cdot 10^{-11} C_2 - 55{,}41 \cdot 10^{11} C_3 - 0{,}0001159 \cdot 10^{-11} C_4 + 4791 C_1' - 4791 C_2' = 193{,}6;$$

$$+0{,}3143 \cdot 10^{11} C_1 - 0{,}000002321 \cdot 10^{-11} C_2 - 0{,}5930 \cdot 10^{11} C_3 - 0{,}0000007156 \cdot 10^{-11} C_4 - 50{,}00 C_1' + C_2 0 = +0{,}0563;$$

$$-55{,}41 \cdot 10^{11} C_1 - 0{,}0001159 \cdot 10^{-11} C_2 + 16{,}98 \cdot 10^{11} C_3 - 0{,}0002178 \cdot 10^{-11} C_4 - 2695 C_1' - 2695 C_2' = +5611,$$

откуда

$$C_1 = -63{,}216 \cdot 10^{-11}; \quad C_2 = +58111 \cdot 10^{11}; \quad C_3 = +3{,}9467 \cdot 10^{-11};$$
$$C_4 = -180050 \cdot 10^{11}; \quad C_1' = -0{,}44542; \quad C_2' = -0{,}30044.$$

Теперь по формулам (15), (19), (74) можно определить контурные усилия и моменты, а после дополнительных вычислений функций X_1, X_2, Y_1,... (75) установить величину внутренних силовых факторов для промежуточных точек конуса и цилиндра. Результаты этих вычислений представлены в виде эпюр на фиг. 156.

Нетрудно показать, что наибольшее эквивалентное напряжение $\sigma_{экв}$ имеет место во внутренних точках цилиндрической оболочки вблизи контура сопряжения с коническим днищем, где согласно выражениям (55) $\sigma_1 = 930$ *кг/см²*; $\sigma_2 = 140$ *кг/см²*; $\sigma_3 = 0$; $\sigma_{экв} = 930$ *кг/см²*.

Это напряжение для мягкой стали сварного шва можно считать допустимым, особенно если учесть их локальный характер распределения.

§ 5. СФЕРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА

А. Вывод уравнений

При рассмотрении сферической симметричной оболочки ограничимся случаем $h = \text{const}$, тогда общие уравнения (48) — (50) при условии $R_1 = R_2 = R$ (где R — радиус сферы) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &L(*) = (*)'' + (*)' \operatorname{ctg}\theta - (*) \operatorname{ctg}^2\theta; \\ &L(V) + \mu V = EhR\vartheta + \Phi(\theta); \\ &L(\vartheta) - \mu\vartheta = -\frac{R}{D} V; \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

$$\Phi(\theta) = R^2 p_n' + R^2 (1 + \mu) p_t.$$

Рассмотрим однородную систему

$$\left.\begin{aligned} L(V)+\mu V &= EhR\vartheta; \\ L(\vartheta)-\mu\vartheta &= -\frac{R}{D}V. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Проделав над обоими уравнениями операции L(*), получим

$$LL(V)+\mu L(V)=EhRL(\vartheta);$$

$$LL(\vartheta)-\mu L(\vartheta)=-\frac{R}{D}L(V).$$

Произведем разделение функций V и ϑ, тогда

$$\left.\begin{aligned} LL(V)+\lambda^2 V &= 0; \\ LL(\vartheta)+\lambda^2\vartheta &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

где

$$\lambda^2=\frac{EhR^2}{D}-\mu^2. \tag{83}$$

Уравнения (82) подобно уравнениям (63), выведенным для конической оболочки, распадаются на два сопряженных:

$$\left.\begin{aligned} L(V)+i\lambda V &= 0; \\ L(V)-i\lambda V &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

или

$$V''+V'\operatorname{ctg}\theta-(\operatorname{ctg}^2\theta-i\lambda)V=0;$$
$$V''+V'\operatorname{ctg}\theta-(\operatorname{ctg}^2\theta+i\lambda)V=0.$$

Как и при расчете конической оболочки, частные решения обоих уравнений могут быть написаны в виде

$$V_1=X_1+iY_1;\quad V_2=X_2+iY_2;$$
$$V_3=X_1-iY_1;\quad V_4=X_2-iY_2.$$

Искомая функция V будет

$$V=C_1X_1+C_2X_2+C_3Y_1+C_4Y_2. \tag{85}$$

Подставляя далее V_1, V_2 в первое уравнение (75), а V_3 и V_4 — во второе уравнение (84), получим

$$L(X_1)=-\lambda Y_1;$$
$$L(X_2)=-\lambda Y_2;$$
$$L(Y_1)=\lambda X_1;$$
$$L(Y_2)=\lambda X_2.$$

Если подставить V согласно формуле (85) в первое уравнение (81), то

$$\vartheta=\frac{1}{EhR}[X_1(C_3\lambda+\mu C_1)+X_2(C_4\lambda+\mu C_2)+$$
$$+Y_1(-\lambda C_1+\mu C_3)+Y_2(-\lambda C_2+\mu C_4)]+\vartheta^*, \tag{86}$$

где ϑ^* — частное решение системы (81).

Теперь можно выразить все внутренние силовые факторы через введенные функции X_1, X_2, Y_1 и Y_2.

Из уравнения (47)

$$Q = \frac{1}{R}(C_1X_1 + C_2X_2 + C_3Y_1 + C_4Y_2) + \frac{V^*}{R}. \tag{87}$$

Из выражений (33) получим

$$\left.\begin{aligned} F(\theta) &= C + R^2\int (p_n\cos\theta - p_t\sin\theta)\sin\theta d\theta; \\ F(\theta) &= R\sin\theta(T_1\sin\theta + Q\cos\theta), \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

откуда

$$T_1 = \frac{F(\theta)}{R\sin^2\theta} - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R}(C_1X_1 + C_2X_2 + C_3Y_1 + C_4Y_2) - \frac{V^*}{R}\operatorname{ctg}\theta. \tag{89}$$

Из выражения (52)

$$T_2 = p_nR - \frac{F(\theta)}{R\sin^2\theta} - \frac{1}{R}\left(C_1\frac{dX_1}{d\theta} + C_2\frac{dX_2}{d\theta} + C_3\frac{dY_1}{d\theta} + C_4\frac{dY_2}{d\theta}\right) - \frac{1}{R}\cdot\frac{dV^*}{d\theta}. \tag{90}$$

Из выражения (44)

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -\frac{D}{R}\left(\frac{d\vartheta}{d\theta} + \mu\vartheta\operatorname{ctg}\theta\right); \\ M_2 &= -\frac{D}{R}\left(\vartheta\operatorname{ctg}\theta + \mu\frac{d\vartheta}{d\theta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Из выражений (53)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh}\left[(1+\mu)\frac{F(\theta)}{R\sin^2\theta} - \mu p_nR - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R}(C_1X_1 + C_2X_2 + C_3Y_1 + C_4Y_2) + \frac{\mu}{R}\left(C_1\frac{dX_1}{d\theta} + C_2\frac{dX_2}{d\theta} + C_3\frac{dY_1}{d\theta} + C_4\frac{dY_2}{d\theta}\right) - \frac{V^*}{R}\operatorname{ctg}\theta + \frac{\mu}{R}\cdot\frac{dV^*}{d\theta}\right]; \tag{92}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{Eh}\left[-(1+\mu)\frac{F(\theta)}{R\sin^2\theta} + p_nR + \mu\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R}(C_1X_1 + C_2X_2 + C_3Y_1 + C_4Y_2) - \frac{1}{R}\left(C_1\frac{dX_1}{d\theta} + C_2\frac{dX_2}{d\theta} + C_3\frac{dY_1}{d\theta} + C_4\frac{dY_2}{d\theta}\right) - \frac{1}{R}\cdot\frac{dV^*}{d\theta} + \frac{\mu}{R}V^*\operatorname{ctg}\theta\right]. \tag{93}$$

Функции X_1, X_2, Y_1 и Y_2 определяются через функции Лежандра. Не останавливаясь на преобразованиях, приведем готовые выражения этих функций для не слишком малых значений ϑ (см. [4]):

$$X_1 \sim +\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi\sin\theta}}\,e^{\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}\left[\left(1 - \frac{3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\theta}{8\sqrt{\lambda}}\right)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$Y_1 \sim -\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi\sin\theta}}\, e^{\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}\left[\cos\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}-\frac{\pi}{8}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\theta}{8\sqrt{\lambda}}\right)\sin\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$X_2 \sim +\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\sin\theta}}\, e^{-\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}\left[\cos\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+\frac{\pi}{8}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(1+\frac{3\sqrt{2}}{8\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}\theta\right)\sin\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$Y_2 \sim +\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\sin\theta}}\, e^{-\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}\left[\left(1+\frac{3\sqrt{2}}{8\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}\theta\right)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+\frac{\pi}{8}\right)+\right.$$
$$\left.+\sin\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$\frac{dX_1}{d\theta} \sim -\sqrt{\frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{2\pi\sin\theta}}\, e^{\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}\left[\frac{7\sqrt{2}}{16\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}\theta\cos\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}-\frac{\pi}{8}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{7\sqrt{2}}{16\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}\theta\right)\sin\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$\frac{dY_1}{d\theta} \sim -\sqrt{\frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{2\pi\sin\theta}}\, e^{\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}\left[\left(1-\frac{7\sqrt{2}}{16\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}\theta\right)\times\right.$$
$$\left.\times\cos\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{7\sqrt{2}}{16\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}\theta\sin\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$\frac{dX_2}{d\theta} \sim -\sqrt{\frac{2\lambda\sqrt{\lambda}}{\pi\sin\theta}}\, e^{-\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}\left[\left(1+\frac{7\sqrt{2}}{16\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}\theta\right)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\pi}{8}\right)-\frac{7\sqrt{2}}{16\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}\theta\sin\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$\frac{dY_2}{d\theta} \sim -\sqrt{\frac{2\lambda\sqrt{\lambda}}{\pi\sin\theta}}\, e^{-\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}\left[\frac{7\sqrt{2}}{16\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}\theta\cos\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\pi}{8}\right)+\left(1+\frac{7\sqrt{2}}{16\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}\theta\right)\sin\left(\theta\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right]. \qquad (94)$$

Если оболочка замкнута в вершине, то возникает необходимость вычисления этих функций при θ, близком к нулю.

Функции X_2 и Y_2 при $\theta=0$ обращаются в бесконечность. Следовательно, обращаются в бесконечность и функции V (85) и ϑ (86), на самом же деле эти функции в вершине оболочки равны нулю. Поэтому для замкнутой оболочки постоянные C_2 и C_4 следует положить — равными нулю.

Функции X_1 и Y_1 в непосредственной окрестности точки $\theta=0$ определяются из выражений

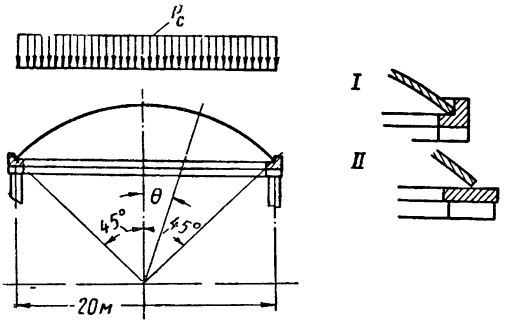
$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{8}\theta-\frac{\lambda^2}{16}\theta^3\ldots; \\ Y_1 &= -\frac{1}{2}\lambda\theta-\frac{1}{12}\lambda\theta^3\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (95)$$

Б. Пример расчета

Сферический цельнометаллический стальной купол (фиг. 159) находится под действием собственного веса и снеговой нагрузки, дающей на единицу горизонтальной плоскости давление $p_c=0{,}02$ *кг/см*^{2}. Определить напряжения, возникающие в куполе, в двух случаях закрепления контура (*I* и *II* на фиг. 159), если дано $R=14{,}14$ *м*; $h=1$ *см*; $E=2\cdot 10^6$ *кг/см*^{2}; $\mu=0{,}3$.

Собственный вес при этих условиях дает нагрузку на единицу поверхности $p=0{,}008$ *кг/см*^{2}.

Суммарная вертикальная сила, действующая на единицу поверхности, будет



Фиг. 159.

$$p = p_0 + p_c \cos\theta;$$

нормальные и касательные к поверхности составляющие

$$p_n = -p_c \cos^2\theta - p_0 \cos\theta;$$

$$p_t = p_c \sin\theta\cos\theta + p_0 \sin\theta.$$

Из выражений (88) получаем

$$F(\theta) = -\frac{1}{2} p_c R^2 \sin^2\theta - p_0 R^2 (1-\cos\theta),$$

а из выражения (83)

$$\Phi(\theta) = p_c R^2 (3+\mu)\sin\theta\cos\theta + p_0 R^2 (2+\mu)\sin\theta.$$

При этой функции $\Phi(\theta)$ частное решение системы (80) будет

$$\left.\begin{aligned} V^* &= -\frac{1+\mu}{\lambda^2+1} p_c R^2 (2+\mu)\sin\theta - \frac{5+\mu}{\lambda^2+25} p_c R^2 (3+\mu)\sin\theta\cos\theta; \\ \vartheta^* &= -\frac{1}{\lambda^2+1}\cdot\frac{R^3}{D} p_0 (2+\mu)\sin\theta - \frac{3+\mu}{\lambda^2+25}\cdot\frac{R^3}{D} p_c \sin\theta\cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad (96)$$

По формуле (83) определяем λ:

$$\lambda = 4673.$$

Так как оболочка замкнута в вершине, то согласно изложенному выше

$$C_2 = C_4 = 0.$$

По формулам (94) подсчитываем для $\theta = 45°$ значения функций X_1 и Y_1 и их производных:

$$X_1 = 9{,}47\cdot 10^{16}; \quad Y_1 = -7{,}42\cdot 10^{16};$$

$$\frac{dX_1}{d\theta} = 94{,}4\cdot 10^{16}; \quad \frac{dY_1}{d\theta} = -813\cdot 10^{16}.$$

Для обоих случаев закрепления контура оболочки $M_1=0$.

Согласно выражениям (46), (86) и (96) получаем

$$\frac{1}{EhR}\left\{(\lambda C_3 + \mu C_1)\frac{dX_1}{d\theta} + (-\lambda C_1 + \mu C_3)\frac{dY_1}{d\theta} + \mu\operatorname{ctg}\theta\,[(\lambda C_3 + \mu C_1)X_1 + (-\lambda C_1 + \mu C_3)Y_1]\right\} -$$

$$-\frac{R^3}{D}\cdot\frac{2+\mu}{\lambda^2+1} p_0 (1+\mu)\cos\theta - \frac{R^3}{D}\cdot\frac{3+\mu}{\lambda^2+25} p_c (\cos 2\theta + \mu\cos^2\theta)\Big|_{\theta=45°} = 0,$$

откуда

$$381\cdot 10^{16} C_1 + 45{,}4\cdot 10^{16} C_3 = 5{,}36. \quad (97)$$

В первом случае закрепления оболочки (см. фиг. 159) опорное кольцо будем считать абсолютно жестким, тогда при $\theta = 45°$ имеем $\varepsilon_2|_{\theta=45°} = 0$.

Согласно выражениям (93) и (96) получаем

$$91{,}6 \cdot 10^{16} C_1 - 811 \cdot 10^{16} C_3 = 6870.$$

Решаем это уравнение совместно с уравнением (97), тогда

$$C_1 = 1{,}010 \cdot 10^{-16}; \quad C_3 = -8{,}357 \cdot 10^{-16}.$$

Во втором случае закрепления (при свободной опоре, см. фиг 159) горизонтальная составляющая контурных сил

$$| Q \sin\theta - T_1 \cos\theta |_{\theta=45^\circ} = 0.$$

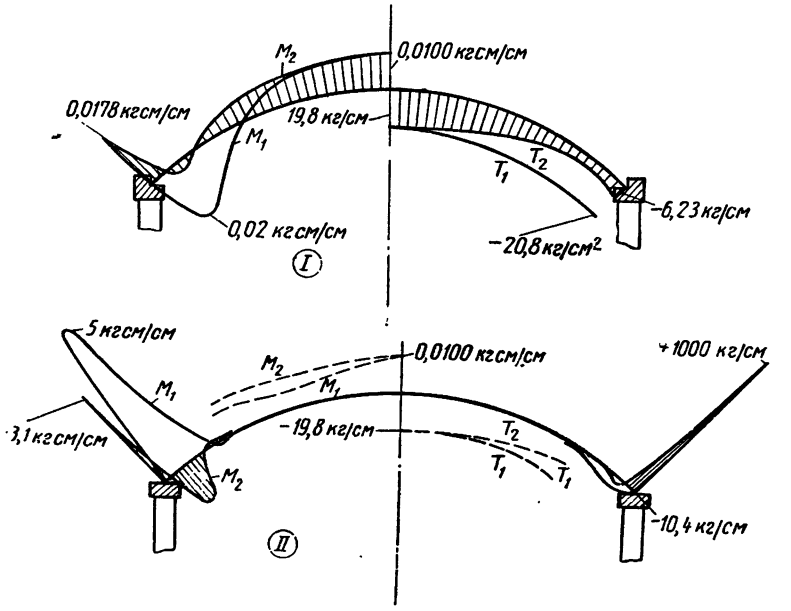
После подсчетов по формулам (87) и (89) получаем

$$9{,}47 \cdot 10^{16} C_1 - 7{,}42 \cdot 10^{16} C_3 = -14\,686.$$

Решим это уравнение совместно с уравнением (97), тогда

$$C_1 = -208 \cdot 10^{-16}; \quad C_3 = 1718 \cdot 10^{-16}.$$

Теперь для обоих случаев закрепления можно по формулам (87)—(91) определить все внутренние усилия и моменты при любых значениях угла θ.



Фиг. 160.

Результаты этих подсчетов представлены в виде эпюр на фиг. 160. Кривые, проведенные пунктиром, дают значения силовых факторов в центральной части в увеличенном масштабе. Из приведенных эпюр следует, что способ закрепления купола существенным образом меняет как величину внутренних усилий, так и характер их распределения. При установке купола без радиального упора внутреннее усилие и моменты резко возрастают.

Подсчитаем наибольшие напряжения σ_1 и σ_2, возникающие у контура купола ($\theta = 45^\circ$), по формулам (55) в обоих случаях закрепления.

Случай I. У внешней поверхности

$$\sigma_1 = -20{,}8 \ кг/см^2;$$

$$\sigma_2 = -6{,}23 - 6 \cdot 0{,}0178 = -6{,}34 \ кг/см^2;$$

$$\sigma_{экв} = 20{,}8 \ кг/см^2.$$

У внутренней поверхности

$$\sigma_1 = -20{,}8 \ кг/см^2;$$

$$\sigma_2 = -6{,}23 + 6 \cdot 0{,}0178 = -6{,}12 \ кг/см^2;$$

$$\sigma_{экв} = 20{,}8 \ кг/см^2.$$

Случай II. У внешней поверхности

$$\sigma_1 = -10{,}4 \ кг/см^2;$$

$$\sigma_2 = 1000 - 6 \cdot 3{,}1 = 982 \ кг/см^2;$$

$$\sigma_{экв} = 992 \ кг/см^2.$$

У внутренней поверхности

$$\sigma_1 = -10{,}4 \ кг/см^2;$$

$$\sigma_2 = 1000 + 6 \cdot 3{,}1 = 1018 \ кг/см^2;$$

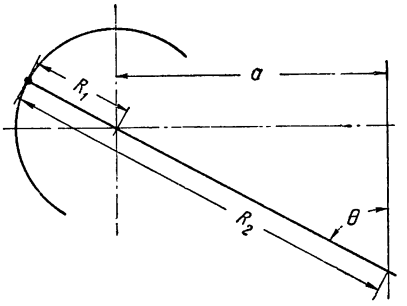
$$\sigma_{экв} = 1028 \ кг/см^2.$$

Таким образом, более рациональным способом крепления купола является способ I, дающий значительный эффект снижения внутренних напряжений.

§ 6. ТОРООБРАЗНАЯ ОБОЛОЧКА

А. Основные положения

Для торообразной оболочки (фиг. 161)



Фиг. 161.

$$R_1 = R = \text{const};$$

$$R_2 = \frac{a + R\sin\theta}{\sin\theta} = R\frac{k + \sin\theta}{\sin\theta},$$

где

$$k = \frac{a}{R},$$

тогда общие уравнения (48)—(50) при условии постоянства толщины h приводятся к виду

$$L(*) = \frac{k + \sin\theta}{\sin\theta}(*)'' + \operatorname{ctg}\theta\,(*)' - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\,(k + \sin\theta)}(*);$$

$$\left.\begin{aligned} L(V) + \mu V &= EhR\vartheta + \Phi(\theta); \\ L(\vartheta) - \mu\vartheta &= -\frac{R}{D}V; \end{aligned}\right\} \qquad (98)$$

$$\Phi(\theta) = R^2\left[p_n\frac{(k + \sin\theta)^2}{\sin^2\theta}\right]' + p_t R^2\frac{k + \sin\theta}{\sin\theta}\left(\mu + \frac{k + \sin\theta}{\sin\theta}\right) + $$

$$+ kF(\theta)\frac{2k + 3\sin\theta}{\sin^4\theta\,(k + \sin\theta)}\cos\theta.$$

Подобно системе (62) (коническая оболочка) или системе (82) (сферическая оболочка) однородная система уравнений

$$L(V) + \mu V = EhR\vartheta;$$

$$L(\vartheta) - \mu\vartheta = -\frac{R}{D}V$$

для торообразной оболочки распадается на независимые сопряженные уравнения второго порядка

$$L(V)+i\lambda V=0;$$
$$L(V)-i\lambda V=0;$$
$$L(\vartheta)+i\lambda\vartheta=0;$$
$$L(\vartheta)-i\lambda\vartheta=0,$$

где

$$\lambda=\frac{EhR^2}{D}-\mu^2.$$

Подстановкой $\sin\theta=z$ каждое из этих уравнений сводится к уравнению класса Фукса [1]

$$(k+z)^2(1-z^2)\frac{d^2V}{dz^2}+(k+z)(1-kz-2z^2)\frac{dV}{dz}-$$
$$-[1+i\lambda kz+(i\lambda-1)z^2]V=0$$

с четырьмя особыми точками $z_1=1$; $z_2=-1$; $z_3=-k$; $z_4=\infty$.

Решение такого уравнения может быть произведено путем разложения функции V в окрестности точки z_i в ряд типа

$$V=(z-z_i)^\rho\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_i)^n.$$

Особенности подобных разложений и доказательство их сходимости достаточно подробно изложены, например, в курсе В. И. Смирнова. Расчет торообразных оболочек путем применения указанных рядов дается в работах [15] и [16].

Однако указанный путь решения задачи не является единственным. С таким же успехом можно решать и непосредственно систему уравнений (98), представляя функции V и ϑ в виде других рядов (см. [7]). Этот путь решения и будет показан на примере следующей задачи.

Б. Пример расчета

Определить, сколько тороидальных температурных компенсаторов (фиг. 162) следует установить на длине трубопровода, если нагрев трубопровода не превышет 100° над температурой сборки; диаметр трубопровода D=574 *мм*; длина трубопровода L=3 *м*; его толщина h_T=6 *мм*; радиус закругления компенсатора R=19,1 *мм*; толщина компенсатора h=2 *мм*; материал компенсатора — сталь; $E=2\cdot10^6$ *кг/см*^{2}; $\mu=0{,}3$; допускаемое напряжение для компенсатора $[\sigma]_p=6000$ *кг/см*^{2}.

Из фиг. 162 видно, что компенсатор представляет собой торообразную оболочку. Параметр

$$k=\frac{a}{R}=\frac{D}{2R}\approx 15{,}0.$$

Условия симметрии позволяют ограничиться рассмотрением половины компенсатора в пределах изменения угла θ от нуля до $\frac{\pi}{2}$ (фиг. 163).

Пренебрегая давлением внутри трубопровода, будем считать, что торообразная оболочка (компенсатор) находится под воздействием только контурных сил P, M_1 и T_1 (фиг. 163), возникающих в результате температурного удлинения трубопровода. В дальнейшем величина осевой силы P будет определена из условий допускаемого напряжения.

---

[1] Теория этих уравнений изложена, например, в книге В. И. Смирнова, Курс высшей математики, т. III, ОГИЗ, 1941.

Теперь определим функцию $F(\theta)$ из равнения (33а). Рассматривая условия равновесия части оболочки, изображенной на фиг. 163, получим

$$(T_1 \sin\theta + Q\cos\theta)\,2\pi R_2 \sin\theta = P.$$

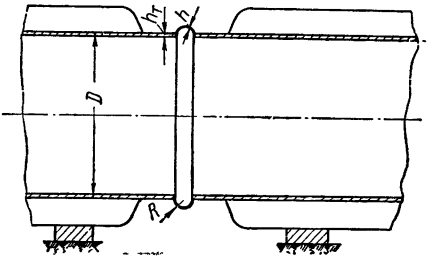
Согласно уравнению (33*а*)

$$F(\theta) = \frac{P}{2\pi}.$$

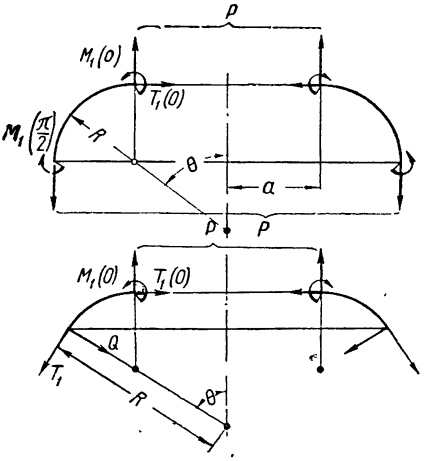
из выражений (98)

$$\frac{k+\sin\theta}{\sin\theta}V'' + \operatorname{ctg}\theta V' - \left(\frac{\cos\theta\operatorname{ctg}\theta}{k+\sin\theta} - \mu\right)V =$$
$$= EhR\vartheta + \frac{P}{2\pi}k\frac{\cos\theta}{\sin^4\theta}\cdot\frac{2k+3\sin\theta}{k+\sin\theta}; \qquad (99)$$

$$\frac{k+\sin\theta}{\sin\theta}\vartheta'' + \operatorname{ctg}\theta\vartheta' - \left(\frac{\cos\theta\operatorname{ctg}\theta}{k+\sin\theta} + \mu\right)\vartheta = -\frac{R}{D}V.$$



Фиг. 162.



Фиг. 163.

Введем новые неизвестные функции W и Θ, связанные с V и ϑ следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{k+\sin\theta}\left(W + \frac{Pk}{2\pi}\operatorname{ctg}\theta\right); \\ \vartheta &= \frac{\Theta}{k+\sin\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (100)$$

После подстановки V и ϑ по формулам (100) в уравнения (99) последние принимают вид:

$$W''(k+\sin\theta) - W'\cos\theta + (1+\mu)W\sin\theta = EhR\,\Theta\sin\theta - \frac{Pk}{2\pi}(1+\mu)\cos\theta;$$

$$\Theta''(k+\sin\theta) - \Theta'\cos\theta + (1-\mu)\Theta\sin\theta = -\frac{EhR}{D}W\sin\theta - \frac{R}{D}\cdot\frac{Pk}{2\pi}\cos\theta.$$

Введем, наконец, взамен угла θ дополнительный угол α:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha: \qquad (101)$$

тогда

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2W}{d\alpha^2}(k+\cos\alpha)+\frac{dW}{d\alpha}\sin\alpha+(1+\mu)W\cos\alpha&=EhR\Theta\cos\alpha-\frac{Pk}{2\pi}(1+\mu)\sin\alpha;\\ \frac{d^2\Theta}{d\alpha^2}(k+\cos\alpha)+\frac{d\Theta}{d\alpha}\sin\alpha+(1-\mu)\Theta\cos\alpha&=-\frac{R}{D}W\cos\alpha-\frac{R}{D}\cdot\frac{Pk}{2\pi}\sin\alpha.\end{aligned}\right\}\quad(102)$$

Решение этой системы будем искать в виде

$$W=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\alpha^i;\quad \Theta=\sum_{i=0}^{\infty}b_i\alpha^i.\qquad(103)$$

Подставляя эти выражения W и Θ в уравнения (102) и раскладывая $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в ряды по степеням α, т. е. полагая

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\ldots$$

и

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\ldots,$$

придем к следующим рекуррентным формулам для определения коэффициентов a_i и b_i рядов (103):

$$a_2 2(k+1)+a_1 0+a_0(1+\mu)=EhRb_0;$$

$$b_2 2(k+1)+b_1 0+b_0(1-\mu)=-\frac{R}{D}a_0;$$

$$a_3 6(k+1)+a_2 0-a_1(-1-1-\mu)+a_0 0=EhRb_1-\frac{Pk}{2\pi}(1+\mu);$$

$$b_3 6(k+1)+b_2 0-b_1(-1-1+\mu)+b_0 0=-\frac{R}{D}a_1-\frac{R}{D}\cdot\frac{Pk}{2\pi};$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a_q q(q-1)(k+1)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\nu=q}a_{q-\nu}\frac{(-1)^{\nu-1}-1}{2}(-1)^{\frac{\nu}{2}-1}\left[\frac{(q-\nu)(q-\nu-1)}{\nu!}-\frac{q-\nu}{(\nu-1)!}-\frac{1+\mu}{(\nu-2)!}\right]=$$

$$=-EhR\sum_{\nu=1}^{\nu=q}b_{q-\nu}\frac{(-1)^{\nu-1}-1}{2}\cdot\frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}-1}}{(\nu-2)!}-\frac{(-1)^q-1}{2}\cdot\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{(q-2)!}\cdot\frac{Pk}{2\pi}(1+\mu);$$

$$b_q q(q-1)(k+1)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\nu=q}b_{q-\nu}\frac{(-1)^{\nu-1}-1}{2}(-1)^{\frac{\nu}{2}-1}\left[\frac{(q-\nu)(q-\nu-1)}{\nu!}-\frac{q-\nu}{(\nu-1)!}-\frac{1-\mu}{(\nu-2)!}\right]=$$

$$=\frac{R}{D}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}a_{q-\nu}\frac{(-1)^{\nu-1}-1}{2}\cdot\frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}-1}}{(\nu-2)!}-\frac{(-1)^q-1}{2}\cdot\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{(q-2)!}\cdot\frac{R}{D}\cdot\frac{Pk}{2\pi}.\qquad(104)$$

Можно показать, что ряды (103), полученные таким образом, сходятся абсолютно и равномерно в круге

$$\alpha<\sqrt{\ln^2 2k+\pi^2}.$$

В нашем случае

$$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},$$

но

$$\sqrt{\ln^2 2k + \pi^2} = 4{,}6 > \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, ряды (103) пригодны для определения функций W и Θ во всех точках оболочки.

По рекуррентным формулам (104) можно определить коэффициенты a_q и b_q вплоть до любого индекса Первые четыре коэффициента остаются неопределенными.

Задаваясь этими коэффициентами по произволу, например,

при $P = 0$

$$a_0 = b_0 = 0; \quad a_1 = b_1 = 1; \tag{105}$$

при $P = 0$

$$a_0 = b_0 = 1; \quad a_1 = b_1 = 0, \tag{106}$$

можно получить два решения однородной системы ($P = 0$), а затем, полагая, что при $P \neq 0$

$$a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 0, \tag{107}$$

находим и частное решение.

Линейная комбинация этих решений дает полное решение системы (102) в виде

$$W = C_1 \sum_{i=0}^{\infty} a_i' \alpha^i + C_2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i'' \alpha^i + \sum_{i=0}^{\infty} a_i''' \alpha^i;$$

$$\Theta = C_3 \sum_{i=0}^{\infty} b_i' \alpha^i + C_4 \sum_{i=0}^{\infty} b_i'' \alpha^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i''' \alpha^i.$$

или сокращенно

$$\left.\begin{aligned} W &= \sum_{i=0}^{\infty} A_i \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^i; \\ \Theta &= \sum_{i=0}^{\infty} B_i \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^i, \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_i &= C_1 a_i' + C_2 a_i'' + a_i'''; \\ B_i &= C_3 b_i' + C_4 b_i'' + b_i'''. \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

Коэффициенты a_i' и b_i' вычисляются по формулам (104), при условии (105), a_i'' и b_i'' — при условии (106), а a_i''' и b_i''' — при условии (107).

Теперь согласно выражениям (100) можно написать, что

$$V = \frac{1}{k + \sin\theta}\left[\sum_{i=0}^{\infty} A_i \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^i - \frac{Pk}{2\pi} \operatorname{ctg}\theta\right];$$

$$\vartheta = \frac{1}{k + \sin\theta} \sum_{i=0}^{\infty} B_i \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^i. \tag{110}$$

Из формул (47), (51), (52) и (44) следует, что

$$Q = \frac{1}{R(k + \sin\theta)^2}\left[\sin\theta \sum_{i=0}^{\infty} A_i \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^i + \frac{Pk}{2\pi}\cos\theta\right];$$

$$T_1 = \frac{P}{2\pi R}\cdot\frac{1+k\sin\theta}{(k+\sin\theta)^2} - \frac{\cos\theta}{R(k+\sin\theta)^2}\sum_{i=0}^{\infty} A_i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^i;$$

$$T_2 = -T_1 + \frac{1}{R(k+\sin\theta)}\sum_{i=0}^{\infty} A_i i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^{i-1}; \qquad (111)$$

$$M_1 = \frac{D}{R}\cdot\frac{1}{(k+\sin\theta)^2}\left[(1-\mu)\cos\theta\sum_{i=0}^{\infty} B_i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^i + \right.$$

$$\left. + (k+\sin\theta)\sum_{i=0}^{\infty} B_i i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^{i-1}\right];$$

$$M_2 = \frac{D}{R}\cdot\frac{1}{(k+\sin\theta)^2}\left[-(1-\mu)\cos\theta\sum_{i=0}^{\infty} B_i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^i + \right.$$

$$\left. + \mu(k+\sin\theta)\sum_{i=0}^{\infty} B_i i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^{i-1}\right].$$

Прежде чем приступить к вычислениям, рассмотрим граничные условия, которым должны подчиняться полученные функции.

Из условий симметрии при $\theta = \frac{\pi}{2}$ очевидно $Q = 0$ и $\vartheta = 0$.

Для контура, где происходит сопряжение компенсатора с трубопроводом (точка $\theta = 0$), следует написать

$$\vartheta = \vartheta_T; \quad w_0 = w_T,$$

где ϑ_T и w_T — угол поворота и радиальное перемещение соответствующего контура трубопровода.

Однако, пренебрегая деформациями трубопровода (толщина его стенок достаточно велика), получим

$$\vartheta = 0 \quad \text{и} \quad w = 0.$$

Согласно выражению (40) последнее условие заменяется следующим:

$$\varepsilon_2 = 0$$

или из выражения (45)

$$T_2 = \mu T_1.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0; \quad Q\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0; \\ &\vartheta|_{\theta=0} = 0; \quad T_2|_{\theta=0} = \mu T_1|_{\theta=0}. \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Из первых двух условий в соответствии с выражениями (110) и (111) получаем

$$P_0 = 0 \quad \text{и} \quad A_0 = 0.$$

Но из выражений (109) следует, что

$$C_1 a_0' + C_2 a_0'' + a_0''' = 0;$$

$$C_3 b_0' + C_4 b_0'' + b_0''' = 0,$$

откуда, учитывая, что

$$a_0' = b_0' = a_0''' = b_0''' = 0,$$

$$C_2 = C_4 = 0.$$

Таким образом, отпадает необходимость вычисления коэффициентов a_i'' и b_i''.

Из двух последних условий (112) получаем

$$C_3 = \frac{-\sum_{i=0}^{\bullet} b_i'''\left(\frac{\pi}{2}\right)^i}{\sum_{i=0}^{\infty} b_i'\left(\frac{\pi}{2}\right)^i}; \qquad (113)$$

$$C_1 = \frac{(1+\mu)\frac{P}{2\pi k} - \sum_{i=0}^{\infty} a_i''' i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{i-1} - \frac{1+\mu}{k}\sum_{i=0}^{\infty} a_i'''\left(\frac{\pi}{2}\right)^i}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i' i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{i-1} + \frac{1+\mu}{k}\sum_{i=0}^{\infty} a_i'\left(\frac{\pi}{2}\right)^i}. \qquad (114)$$

Теперь по рекуррентным формулам (104) вычисляем коэффициенты a_i', a_i''', b_i' и b_i''', учитывая, что $k = 15$, а согласно выражению (83) $\lambda \approx 1000$.

Вычисления дают:

$a_1' = 1$ $\qquad$ $b_1' = 1$

$a_3' = +7958{,}3$ $\qquad$ $b_3' = -0{,}01772$

$a_5' = -1268{,}3$ $\qquad$ $b_5' = -0{,}03076$

$a_7' = +26{,}15$ $\qquad$ $b_7' = +0{,}009717$

$a_9' = +14{,}32$ $\qquad$ $b_9' = -0{,}001018$

$a_{11}' = -2{,}860$ $\qquad$ $b_{11}' = +0{,}00003063$

$a_{13}' = +0{,}2463$ $\qquad$ $b_{13}' = +0{,}000004511$

$a_{15}' = -0{,}008976$ $\qquad$ $b_{15}' = -0{,}0000007849$

$a_1''' = 0$ $\qquad$ $b_1''' = 0$

$a_3''' = -0{,}03233P$ $\qquad$ $b_3''' = -324{,}2\cdot 10^{-7}P$

$a_5''' = -0{,}07565P$ $\qquad$ $b_5''' = +18{,}234\cdot 10^{-7}P$

$a_7''' = +0{,}02000P$ $\qquad$ $b_7''' = 0{,}5954\cdot 10^{-7}P$

$a_9''' = -0{,}001281P$ $\qquad$ $b_9''' = -0{,}6085\cdot 10^{-7}P$

$a_{11}''' = -0{,}000004507P$ $\qquad$ $b_{11}''' = +0{,}09671\cdot 10^{-7}P$

$a_{13}''' = +0{,}00001187P$ $\qquad$ $b_{13}''' = -0{,}006252\cdot 10^{-7}P$

$a_{15}''' = -0{,}000001572P$ $\qquad$ $b_{15}''' = +0{,}00009683\cdot 10^{-7}P$

Дальнейшие подсчеты не дают заметных уточнений. Все коэффициенты четного индекса обращаются в ноль.

Вычисляем далее

$$\sum_{i=0}^{15} a_i'\left(\frac{\pi}{2}\right)^i = +19\,840; \qquad \sum_{i=0}^{15} a_i' i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{i-1} = +25\,600;$$

$$\sum_{i=0}^{15} b_i'\left(\frac{\pi}{2}\right)^i = +1{,}383; \qquad \sum_{i=0}^{15} b_i' i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{i-1} = +0{,}6521;$$

$$\sum_{i=0}^{15} a_i'''\left(\frac{\pi}{2}\right)^i = -0{,}4492P; \qquad \sum_{i=0}^{15} a_i''' i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{i-1} = -0{,}8493P;$$

$$\sum_{i=0}^{15} b_i'''\left(\frac{\pi}{2}\right)^i = -10{,}92\cdot 10^{-5}P; \qquad \sum_{i=0}^{15} b_i''' i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{i-1} = -19{,}05\cdot 10^{-5}P.$$

Обращаясь к выражениям (113) и (114), находим постоянные C_1 и C_3:

$$C_1 = +3{,}301\cdot 10^{-5}P; \quad C_3 = 7{,}895\cdot 10^{-5}P.$$

Теперь по формулам (111) могут быть определены усилия T_1, T_2 и Q и моменты M_1 и M_2 в любой точке тора. Результаты этих подсчетов представлены в виде эпюр на фиг. 164. Наибольшие напряжения возникают у контура оболочки, причем, как легко подсчитать по формулам (55),

$$\sigma_{экв} = 1{,}07P \ кг/см^2. \qquad (115)$$

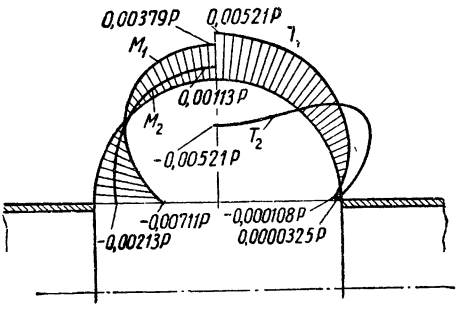
Теперь определим осевые перемещения компенсатора, находящегося под действием силы P.

Из уравнений (54) получим

$$R_1\vartheta = \frac{du}{d\theta}\cos\theta - \frac{dw}{d\theta}\sin\theta.$$

Подставим в это выражение значение w из формулы (40), тогда

$$R_1\vartheta = \frac{du}{d\theta}\cos\theta - \sin\theta\frac{d}{d\theta}(R_2\varepsilon_2\sin\theta).$$



Фиг. 164.

Исключим теперь из этого выражения и из зависимости (42) относительное удлинение ε_2:

$$\frac{du}{d\theta} = R_1\varepsilon_1\sin\theta + R_1\vartheta\cos\theta.$$

Первое слагаемое правой части этого выражения соответствует осевым перемещениям оболочки, обусловленным ее растяжением, а второе слагаемое — перемещениями изгибного характера. Ясно, что второе слагаемое много больше первого. Если бы этого не было, применение подобного компенсатора не имело бы смысла, поэтому можно считать, что

$$u = R_1\int_0^{\pi}\vartheta\cos\theta d\theta = 2R_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\vartheta\cos\theta d\theta.$$

Согласно второму выражению (110)

$$u = 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{k+\sin\theta}\sum_{i=0}^{\infty}B_i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^i d\theta.$$

Поскольку k достаточно велико (в нашем случае k=15), можно принять, что

$$\frac{1}{k+\sin\theta} \approx \frac{1}{k+1}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+1}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2\right].$$

Разлагая далее $\cos\theta$ в ряд по степеням $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, получим

$$\cos\theta\sum_{i=0}^{\infty}B_i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^i = \sum_{i=1}^{\infty}C_i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^i,$$

где

$$C_1 = C_3 = C_5 = \ldots = 0;$$

$$C_2 = B_1;$$

$$C_4 = -\frac{B_1}{3!} + B_3;$$

$$C_6 = \frac{B_1}{5!} - \frac{B_3}{3!} + B_5;$$

$$C_8 = -\frac{B_1}{7!} + \frac{B_3}{5!} - \frac{B_5}{3!} + B_7; \qquad (116)$$

. . . . . .

тогда

$$u = \frac{2R}{k+1}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C_i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^i d\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^{i+2} d\theta\right],$$

или

$$u = \frac{2R}{k+1}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{i+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{i+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{i+3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{i+3}\right].$$

Согласно выражениям (109) и (116) вычисляем коэффициенты C_i:

$$C_2 = +7{,}895 \cdot 10^{-5}P \qquad C_4 = -4{,}698 \cdot 10^{-5}P$$

$$C_6 = +0{,}5690 \cdot 10^{-5}P \qquad C_8 = +0{,}06300 \cdot 10^{-5}P$$

$$C_{10} = -0{,}02771 \cdot 10^{-5}P \qquad C_{12} = +0{,}004253 \cdot 10^{-5}P$$

$$C_{14} = -0{,}0003626 \cdot 10^{-5}P \qquad C_{16} = +0{,}00001236 \cdot 10^{-5}P$$

После этого получаем

$$u = 8{,}055 \cdot 10^{-5}P \text{ мм}.$$

Из выражения (115) определяем допускаемую нагрузку:

$$P \leqslant \frac{[\sigma]_p}{1{,}07} = \frac{6000}{1{,}07} = 5607 \text{ кг},$$

тогда $u \leqslant 0{,}452$ мм.

Минимальное расстояние l между двумя компенсаторами определится из очевидного соотношения

$$\alpha l t = u.$$

Полагая для стали $\alpha = 0{,}000012$, получим $l \approx 380$ мм.

Число компенсаторов

$$n = \frac{L}{l} = \frac{3000}{380} \approx 8.$$

Если давление внутри трубопровода невелико, длину l можно увеличить путем уменьшения толщины компенсатора, взяв вместо $h=2$ мм, например, $h=0{,}5$ или 0,3 мм, тогда допустимое перемещение u значительно увеличится и соответственно ему может быть увеличено и расстояние между компенсаторами l.

§ 7. ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧКАХ В ЗОНЕ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА

А. Сущность метода

Выше, при рассмотрении цилиндрической оболочки (см. § 2), было установлено, что перемещение w и все внутренние силовые факторы могут быть представлены в зависимости от x при помощи функций дво-

якого рода — быстро затухающих и столь же быстро возрастающих. Это дает возможность для достаточно длинной оболочки рассматривать деформации и напряжения в окрестности одного края независимо от условий закрепления на втором краю, что приводит к заметным упрощениям вычислительного характера.

В связи со сказанным возникает вопрос, не обладают ли тем же свойством уравнения для конической, сферической и других осесимметричных оболочек. Оказывается, что это действительно так. Например, обращаясь к функциям (75), характеризующим деформацию конической оболочки, можно установить, что функции X_1, Y_1, $\tilde{X}_1$ и $\tilde{Y}_1$ являются быстровозрастающими — в них входит множителем e^v. Функции X_2, Y_2, $\tilde{X}_2$ и $\tilde{Y}_2$ столь же быстро затухают. Ту же закономерность можно наблюдать и для функций (94) (сферическая оболочка).

Таким образом, те упрощения, которые были получены в граничных условиях цилиндрической оболочки, могут быть если не во всех, то в ряде случаев использованы и при рассмотрении других осесимметричных оболочек.

Например, в рассмотренной выше задаче о расчете бродильного резервуара (см. разд. В § 4) можно было бы ввести в граничные условия некоторые упрощения. Положим, нас интересует распределение внутренних усилий в зоне сопряжения цилиндра с конусом. В этом случае можно было бы рассмотреть внешний контур конуса изолированно от внутреннего и систему граничных условий (79) решить независимо от условий (78). Для этого надо считать, что в конической оболочке на внутреннем контуре (при $s=s_3$) основную роль играют быстрозатухающие функции, а на внешнем ($s=s_4$) быстровозрастающие. Тогда вместо шести уравнений следовало бы решать совместно только четыре последних, пренебрегая в них членами, содержащими быстрозатухающие функции, т. е. вычеркивая постоянные C_2 и C_4. Тогда

$$-0{,}5770\cdot 10^{11}C_1 - 0{,}3193\cdot 10^{11}C_3 + C_1'0 + 88{,}89C_2' = +8{,}04;$$

$$-16{,}98\cdot 10^{11}C_1 - 55{,}41\cdot 10^{11}C_3 + 4791C_1' - 4791C_2' = 193{,}6;$$

$$+0{,}3143\cdot 10^{11}C_1 - 0{,}5930\cdot 10^{11}C_3 - 50{,}00C_1' + 0C_2' = +0{,}0563;$$

$$-55{,}41\cdot 10^{11}C_1 + 16{,}98\cdot 10^{11}C_3 - 2695C_1' - 2695C_2' = +5611,$$

откуда находим

$$C_1 = -63{,}419\cdot 10^{-11};\quad C_3 = +3{,}9160\cdot 10^{-11};$$

$$C_1' = -0{,}44623;\qquad C_2' = -0{,}30716.$$

Прежние значения (см. разд. В § 4) были соответственно

$$-63{,}216\cdot 10^{-11};\qquad +3{,}9467\cdot 10^{-11};$$

$$-0{,}44542;\qquad -0{,}30044.$$

Ошибка приближенного подхода к граничным условиям, как видим, сравнительно невелика. Небольшой получается она и при оценке внутренних сил и изгибающих моментов.

Так, например, изгибающий момент на контуре сопряжения конуса с цилиндром оказывается равным 54,1 вместо 53,9 *кгмм/мм*.

Таким образом, представляется возможность во многих случаях упрощать определение постоянных C_1, C_2,... Но это еще не все.

Особенности поведения функций, описывающих напряженное состояние оболочек в окрестности контура, позволяют провести значительные упрощения самих дифференциальных уравнений осесимметричных оболочек.

В окрестности как внутреннего, так и внешнего контура все функции, описывающие состояние оболочки, являются быстроизменяющимися. Поэтому можно считать, что эти функции в зоне края малы по

сравнению со своими производными по углу θ. В свою очередь каждая производная n-го порядка мала по сравнению с производной $n+1$-го порядка. Тогда оператор $L(*)$ (48) принимает вид

$$L(*) \approx \frac{R_2}{R_1}(*)''.$$

Такое упрощение, очевидно, допустимо только в том случае, если угол θ не слишком мал, т. е. если оболочка не является пологой. Для пологой оболочки $\operatorname{ctg}\theta$ будет величиной большой, и пренебрегать вторым и третьим слагаемыми в выражении $L(*)$ нельзя.

Далее, поскольку речь идет о быстроизменяющихся функциях в сравнительно узкой краевой области, можно считать, что геометрия оболочки в зоне краевого эффекта меняется незначительно. Тогда величины R_1 и R_2 могут рассматриваться как постоянные. Точно так же можно считать слабо изменяющимися p_n и p_t. В этом случае функции $F(\theta)$ и $\Phi(\theta)$ также являются слабо изменяющимися.

В таком случае уравнения (49) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{R_2}{R_1} V'' &= EhR_1\vartheta + \Phi(\theta); \\ \frac{R_2}{R_1}\vartheta'' &= -\frac{R_1}{D} V, \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

откуда, исключая V, находим

$$\vartheta^{(IV)} + 4\lambda^4\vartheta = -\frac{R_1^3}{DR_2^2}\Phi(\theta), \tag{118}$$

где

$$\left.\begin{aligned} 4\lambda^4 &= \frac{EhR_1^4}{DR_2^2} = \frac{12(1-\mu^2)R_1^4}{h^2R_2^2}; \\ \lambda &= R_1\sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{h^2R_2^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

Функция $\Phi(\theta)$ (50) в предположении слабой зависимости p_n, R_1 и R_2 от θ принимает вид

$$\Phi(\theta) = (R_2 + \mu R_1) R_2 p_t - \frac{F(\theta)}{\sin^2\theta}\left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1}\right)\operatorname{ctg}\theta. \tag{120}$$

Уравнение (118) решается точно так же, как и уравнение цилиндрической оболочки (18):

$$\vartheta = e^{-\lambda\theta}(C_1\sin\lambda\theta + C_2\cos\lambda\theta) + e^{+\lambda\theta}(C_3\sin\lambda\theta + C_4\cos\lambda\theta) + \vartheta^*, \tag{121}$$

где ϑ^* — частное решение уравнения (118).

Если считать, что $\Phi(\theta)$ в пределах зоны краевого эффекта меняется незначительно, то

$$\vartheta^* = -\frac{R_1^3}{DR_2^2 4\lambda^4}\Phi(\theta) = -\frac{\Phi(\theta)}{EhR_1} = \text{const}, \tag{122}$$

где угол θ берется для рассматриваемого края оболочки.

Далее, из второго уравнения (117) имеем

$$V = -\frac{R_2 D}{R_1^2}\vartheta''. \tag{123}$$

Соблюдая принцип пренебрежения низшими производными, из выражений (44а), (47а), (51) — (53), получим

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -\frac{D}{R_1}\vartheta'; \\ M_2 &= -\mu\frac{D}{R_1}\vartheta'; \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

$$Q = \frac{V}{R_2}; \tag{125}$$

$$T_1 = \frac{F(\theta)}{R_2 \sin^2\theta} - \frac{V}{R_2}\operatorname{ctg}\theta; \tag{126}$$

$$T_2 = p_n R_2 - \frac{F(\theta)}{R_1 \sin^2\theta} - \frac{V'}{R_1}; \tag{127}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{Eh}\left[\frac{F(\theta)}{R_2\sin^2\theta} - \mu\left(p_n R_2 - \frac{F(\theta)}{R_1\sin^2\theta} - \frac{1}{R_1}V'\right)\right]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{Eh}\left[p_n R_2 - \frac{F(\theta)}{R_1\sin^2\theta} - \frac{V'}{R_1} - \mu\frac{F(\theta)}{R_2\sin^2\theta}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Если моменты и силы определены, то по ним согласно обычным формулам (55) находим местные меридиональные и окружные напряжения σ_1 и σ_2.

Описанный прием отбрасывания низших производных называют в некоторых работах (см., например, [10]) методом Геккелера [12]. Следует, однако, отметить, что указанные упрощения применялись и до Геккелера не только для изотропных [11], [14], но и для анизотропных оболочек [9].

Б. Определение краевых сил и моментов в зоне сопряжения осесимметричных оболочек

Положим, имеется составная оболочка (фиг. 165) и требуется определить местные напряжения в зоне соединения оболочек.

Рассмотрим нижнюю оболочку отдельно от верхней. Разделим мысленно оболочки и по контуру сопряжения к нижней и верхней оболочкам приложим систему внутренних сил T_1, Q и моментов M_1 (фиг. 166).

Для удобства дальнейших преобразований введем в рассмотрение осевую силу в зоне сопряжения

$$F\ кг/см = T_1 \sin\theta + Q\cos\theta \tag{129}$$

и радиальную (фиг. 167)

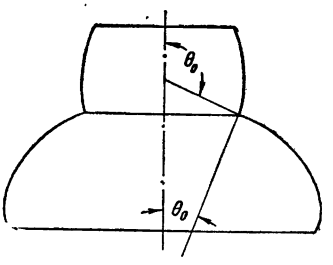
$$P\ кг/см = Q\sin\theta - T_1\cos\theta. \tag{130}$$

Эти силы независимо от углов θ_1 и θ_2 на контуре сопряжения будут одинаковыми для обеих оболочек.

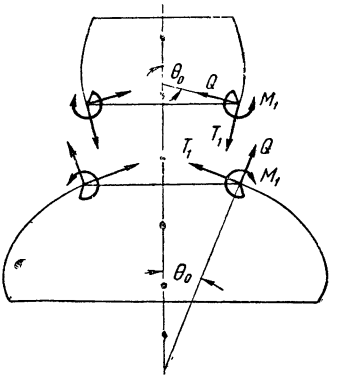
Сила F определяется из условий равновесия путем проектирования всех внешних сил на ось симметрии оболочки. Будем считать, что эта сила нам известна. Кстати, она связана с функцией $F(\theta)$ (33а) следующим очевидным соотношением:

$$F(\theta) = FR_2 \sin\theta. \qquad (131)$$

Теперь определим перемещения и внутренние силы в зоне верхнего края нижней оболочки, полагая, что последняя нагружена кон-

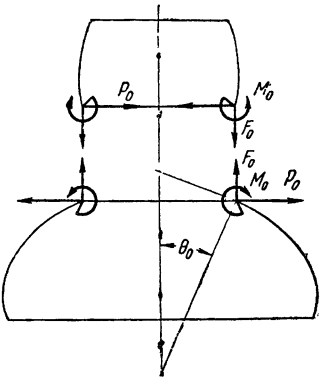


Фиг. 165.



Фиг. 166.

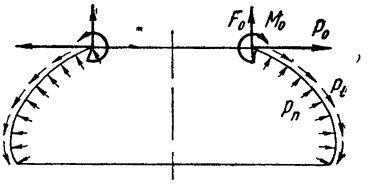
турными силами P_0, F_0, моментом M_0 и собственной распределенной нагрузкой в виде давлений p_n и p_t (фиг. 168).



Фиг. 167.

В выражении (121) отбросим возрастающую функцию и примем

$$\vartheta = e^{-\lambda\theta}(C_1 \sin\lambda\theta + C_2 \cos\lambda\theta) + \vartheta^*. \qquad (132)$$



Фиг. 168.

Далее, согласно формулам (123) — (126), (130) и (131) находим M_1 и P:

$$M_1 = \frac{D\lambda}{R_1} e^{-\lambda\theta}[(C_1 + C_2)\sin\lambda\theta + (C_2 - C_1)\cos\lambda\theta];$$

$$P = \frac{2D\lambda^2}{R_1^2 \sin\theta} e^{-\lambda\theta}[C_1 \cos\lambda\theta - C_2 \sin\lambda\theta] - F \operatorname{ctg}\theta.$$

Но при $\theta = \theta_0$ $M_1 = M_0$, а $P = P_0$. Поэтому

$$M_0 = \frac{D\lambda}{R_1} e^{-\lambda\theta_0}[(C_1 + C_2)\sin\lambda\theta_0 + (C_2 - C_1)\cos\lambda\theta_0];$$

$$P_0 = \frac{2D\lambda^2}{R_1^2 \sin\theta_0} e^{-\lambda\theta_0}[C_1 \cos\lambda\theta_0 - C_2 \sin\lambda\theta_0] - F_0 \operatorname{c\,tg}\theta_0.$$

откуда

$$C_1 = \frac{M_t R_1}{D\lambda} e^{+\lambda\theta_0} \sin\lambda\theta_0 + \frac{R_1^2 \sin\theta_0}{2D\lambda^2}(P_0 + F_0 \operatorname{ctg}\theta_0) e^{+\lambda\theta_0}(\sin\lambda\theta_0 + \cos\lambda\theta_0);$$

$$C_2 = \frac{M_0 R_1}{D\lambda} e^{+\lambda\theta_0} \cos\lambda\theta_0 - \frac{R_1^2 \sin\theta_0}{2D\lambda^2}(P_0 + F_0 \operatorname{ctg}\theta_0) e^{+\lambda\theta_0}(\sin\lambda\theta_0 - \cos\lambda\theta_0).$$

Теперь, когда постоянные C_1 и C_2 найдены, можно выразить силы и моменты в зоне краевого эффекта через контурную силу P_0 и момент M_0. Для этого воспользуемся выражениями (122) — (127), подставляя в них функцию ϑ (132) и полученные значения констант C_1 и C_2. Одновременно переходим к новому независимому переменному s— дуге меридиана, отсчитываемой от края:

$$s = R_1(\theta - \theta_0).$$

При этом

$$\left.\begin{aligned} \lambda(\theta_0 - \theta) &= \frac{\lambda s}{R_1}; \\ \frac{\lambda}{R_1} = k &= \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{R_2 h}}. \end{aligned}\right\} \qquad (133)$$

В итоге несложных преобразований получим

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= M_0 e^{-ks}(\cos ks + \sin ks) + (P_0 + F_0 \operatorname{ctg}\theta_0)\frac{\sin\theta_0}{k} e^{-ks}\sin ks; \\ M_2 &= \mu M_1; \\ Q &= -2kM_0 e^{-ks}\sin ks + (P_0 + F_0 \operatorname{ctg}\theta_0)\sin\theta_0 e^{-ks}(\cos ks - \sin ks); \end{aligned}\right\} \qquad (134)$$

$$T_1 = \frac{F_0}{\sin\theta_0} + 2kM_0 \operatorname{ctg}\theta_0 e^{-ks}\sin ks - (P_0 + F_0 \operatorname{ctg}\theta_0)\cos\theta_0 e^{-ks}(\cos ks - \sin ks);$$

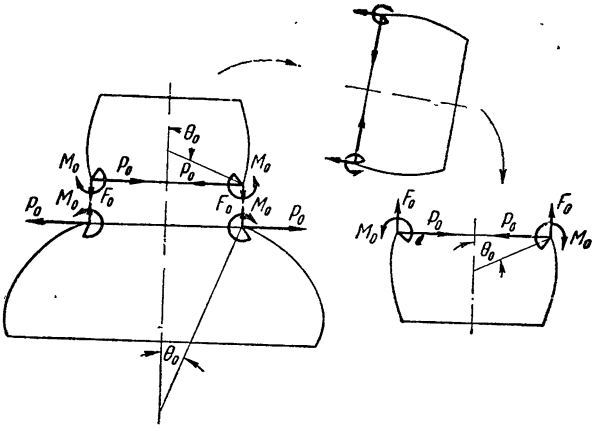
$$T_2 = p_n R_2 - \frac{R_2 F_0}{R_1 \sin\theta_0} + 2k^2 R_2 M_0 e^{-ks}(\cos ks - \sin ks) + 2kR_2 \sin\theta_0 (P_0 + F_0 \operatorname{ctg}\theta_0) e^{-ks}\cos ks.$$

Кроме того, на контуре при $s=0$ согласно выражениям (128) и (132) имеем

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_0 &= \vartheta^* + \frac{M_0}{Dk} + \frac{\sin\theta_0}{2Dk^2}(P_0 + F_0 \operatorname{ctg}\theta_0); \\ \varepsilon_{20} &= \frac{1}{Eh}\left\{p_n R_2 - \left(\frac{R_2}{R_1} + \mu\right)\frac{F_0}{\sin\theta_0} + 2k^2 R_2 M_0 + 2kR_2 \sin\theta_0 (P_0 + F_0 \operatorname{ctg}\theta_0)\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (135)$$

Совершенно такие же выражения могут быть составлены и для второй оболочки в зоне контакта. Перевертывая эту оболочку и располагая ее рядом с первой (фиг. 169), видим, что разница заключается лишь в знаке P_0. Дуга s при этом по-прежнему отсчитывается от контура сопряжения.

Угол θ_0 на контуре меняется на дополнительный до 180° (фиг. 169). Это приводит к тому, что во всех формулах $\cos\theta_0$ и $\operatorname{ctg}\theta_0$ меняют знак так же, как и P_0.



Фиг. 169.

Таким образом, для второй оболочки взамен выражений (134) и (135) получим:

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= M_0 e^{-ks}(\cos ks + \sin ks) + (-P_0 - F_0 \operatorname{ctg}\theta_0)\frac{\sin\theta_0}{k} \times \\
&\quad \times e^{-ks}\sin ks; \\
M_2 &= \mu M_1; \\
Q &= -2kM_0 e^{-ks}\sin ks + (-P_0 - F_0\operatorname{ctg}\theta_0) \times \\
&\quad \times \sin\theta_0 e^{-ks}(\cos ks - \sin ks); \\
T_1 &= \frac{F_0}{\sin\theta_0} - 2kM_0\operatorname{ctg}\theta_0 e^{-ks}\sin ks + (-P_0 - F_0\operatorname{ctg}\theta_0)\times \\
&\quad \times \cos\theta_0 e^{-ks}(\cos ks - \sin ks); \\
T_2 &= p_n R_2 - \frac{R_2 F_0}{R_1\sin\theta_0} + 2k^2 R_2 M_0 e^{-ks}(\cos ks - \sin ks) + \\
&\quad + 2kR_2\sin\theta_0(-P_0 - F_0\operatorname{ctg}\theta_0)e^{-ks}\cos ks;
\end{aligned}\right\} \quad (134a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_0 &= \vartheta^* + \frac{M_0}{Dk} + \frac{\sin\theta_0}{2Dk^2}(-P_0 - F_0\operatorname{ctg}\theta_0); \\
\varepsilon_{20} &= \frac{1}{Eh}\left\{p_n R_2 - \left(\frac{R_2}{R_1} + \mu\right)\frac{F_0}{\sin\theta_0} + 2k^2 R_2 M_0 + \right. \\
&\quad \left. + 2kR_2\sin\theta_0(-P_0 - F_0\operatorname{ctg}\theta_0)\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (135a)$$

Величины R_1, R_2, θ_0, μ, E и k берутся в этом случае соответственно второй оболочки. Величины M_0, F_0 и P_0 остаются общими.

Из условий совместности деформаций на контуре

$$(\vartheta_0)_1 = -(\vartheta_0)_2; \qquad (\varepsilon_{20})_1 = (\varepsilon_{20})_2$$

или согласно формулам (135) и (135а)

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\vartheta^* + \frac{M_0}{Dk} + \frac{\sin\theta_0}{2Dk^2}(P_0 + F_0 \operatorname{ctg}\theta_0)\right]_1 = -\left[\vartheta^* + \frac{M_0}{Dk} + \right.\\
&\left. + \frac{\sin\theta_0}{2Dk^2}(-P_0 - F_0\operatorname{ctg}\theta_0)\right]_2;\\
&\left\{\frac{1}{Eh}\left[p_n R_2 - \left(\frac{R_2}{R_1} + \mu\right)\frac{F_0}{\sin\theta_0} + 2k^2 R_2 M_0 + 2kR_2\sin\theta_0(P_0 + \right.\right.\\
&\left.\left. + F_0\operatorname{ctg}\theta_0)\right]\right\}_1 = \left\{\frac{1}{Eh}\left[p_n R_2 - \left(\frac{R_2}{R_1} + \mu\right)\frac{F_0}{\sin\theta_0} + 2k^2 R_2 M_0 + \right.\right.\\
&\left.\left. + 2kR_2\sin\theta_0(-P_0 - F_0\operatorname{ctg}\theta_0)\right]\right\}_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (136)$$

Индексы 1 и 2, стоящие за скобками, означают принадлежность величин к первой и второй оболочкам соответственно.

Из этих уравнений определяются P_0 и M_0, а затем согласно выражениям (134) и (134а) строятся зависимости моментов и сил в зоне краевого эффекта для первой и второй оболочек.

Преобразовывая уравнения (136), получим

$$\left.\begin{aligned}
&2M_0(k_1 + \alpha k_2) + P_0(\sin\theta_{01} - \alpha\sin\theta_{02}) = -2D_1k_1^2(\vartheta_1^* + \vartheta_2^*) - \\
&\quad - F_0(\cos\theta_{01} - \alpha\cos\theta_{02});\\
&2M_0\left[\left(\frac{1}{R_2}\right)_1 - \alpha\left(\frac{1}{R_2}\right)_2\right] + 2P_0 r\left[\left(\frac{1}{kR_2^2}\right)_1 + \alpha\left(\frac{1}{kR_2^2}\right)_2\right] = \\
&= -\left(\frac{p_n}{k^2R_2}\right)_1 + \alpha\left(\frac{p_n}{k^2R_2}\right)_2 + \frac{F_0}{r}\left[\left(\frac{\frac{R_2}{R_1} + \mu}{k^2R_2}\right)_1 - \right.\\
&\left. - \alpha\left(\frac{\frac{R_2}{R_1} + \mu}{k^2R_2}\right)_2\right] - 2F_0\left[\left(\frac{\cos\theta_0}{kR_2}\right)_1 + \alpha\left(\frac{\cos\theta_0}{kR_2}\right)_2\right],
\end{aligned}\right\} \qquad (137)$$

где

$$\alpha = \frac{(Dk^2)_1}{(Dk^2)_2} = \left(\frac{Eh}{k^2R_2^2}\right)_1 : \left(\frac{Eh}{k^2R_2^2}\right)_2 = \left(\frac{Eh^2}{R_2}\right)_1 : \left(\frac{Eh^2}{R_2}\right)_2; \qquad (138)$$

$$r = (R_2\sin\theta_0)_1 = (R_2\sin\theta_0)_2.$$

При этом предполагается, что коэффициент Пуассона μ является общим для обеих оболочек.

В качестве примера определения местных напряжений рассмотрим зону сопряжения цилиндра со сферическим днищем (фиг. 170). Нагрузка — внутреннее давление p.

Индекс $(\ \ )_1$ припишем цилиндрической, а индекс $(\ \ )_2$ — сферической оболочке. Тогда

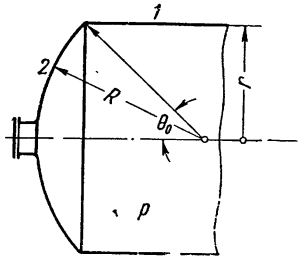
$$(R_1)_1 = \infty;\ (R_2)_1 = r;$$

$$(R_1)_2 = (R_2)_2 = R;$$

$$\theta_{01} = 90^0;\ \theta_{02} = \theta_0.$$

Из условий равновесия

$$F_0 = \frac{p\pi r^2}{2\pi r} = \frac{pr}{2}.$$



Фиг. 170.

Согласно выражениям (120), (131) и (122) для обеих оболочек имеем

$$\vartheta_{01}^{*} = \vartheta_{02}^{*} = 0.$$

Уравнения (137) для случая сопряжения цилиндра со сферой принимают вид

$$2M_0(k_1 + \alpha k_2) + P_0\left(1 - \alpha\frac{r}{R}\right) = \alpha\frac{pr}{2}\cos\theta_0;$$

$$2M_0\left(\frac{1}{r} - \frac{\alpha}{R}\right) + 2P_0 r\left(\frac{1}{k_1 r^2} + \frac{\alpha}{k_2 R^2}\right) =$$

$$= p\left[-\frac{1}{k_1^2 r}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + \frac{\alpha}{2k_2^2 R}(1-\mu) - \frac{\alpha}{k_2}\cdot\frac{r}{R}\cos\theta_0\right]. \qquad (139)$$

Рассмотрим один частный случай геометрических соотношений оболочек.

Радиус сферы вдвое больше радиуса цилиндра $R=2r$. Толщины одинаковы: $h_1=h_2$. Модули упругости также равны. Тогда согласно (133) и (138) получим

$$k_2 = k_1\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \alpha = 2; \quad \cos\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Уравнения (139) принимают вид

$$2M_0k_1(1 + \sqrt{2}) = pr\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{P_0}{k_1 r}(2 + \sqrt{2}) \approx -p\frac{1}{k_1}\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

В правой части второго уравнения (139) двумя первыми слагаемыми по сравнению с третьим пренебрегаем. В итоге

$$M_0 = \frac{pr}{k_1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4(1+\sqrt{2})} = 0{,}18\frac{pr}{k_1};$$

$$P_0 = -\,pr\frac{\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{2})} = -0{,}36\,pr.$$

Подставляем эти значения M_0 и P_0 в выражения (134). Тогда для цилиндра находим

$$M_1 = 0{,}18\frac{pr}{k_1}e^{-k_1 s}(\cos k_1 s - \sin k_1 s);$$

$$T_1 = \frac{pr}{2};$$

$$T_2 = pr\,[1 - 0{,}36\,k_1 r e^{-k_1 s}(\cos k_1 s + \sin k_1 s)].$$

Из выражений (134а) получаем для сферы

$$M_1 = 0{,}18\frac{pr}{k_1}e^{-k_2 s}(\cos k_2 s - \sin k_2 s);$$

$$T_1 = pr\,(1 - 0{,}44e^{-k_2 s}\cos k_2 s);$$

$$T_2 = pr\,[1 - 0{,}36\,k_1 r e^{-k_2 s}(\cos k_2 s + \sin k_2 s)].$$

Если воспользоваться вспомогательными графиками, приведенными на фиг. 171, можно без труда построить эпюры сил и моментов для цилиндра и сферы. Эти эпюры показаны на фиг. 172. Наибольшее эквивалентное напряжение возникает в цилиндре на контуре сопряжения со сферой у внутренней поверхности.

Меридиональное напряжение является здесь растягивающим и равно

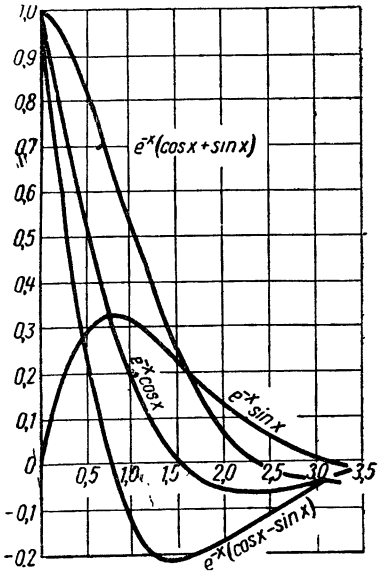
$$\sigma_1 = \frac{T_1}{h} + \frac{6M_1}{h^2}$$

или

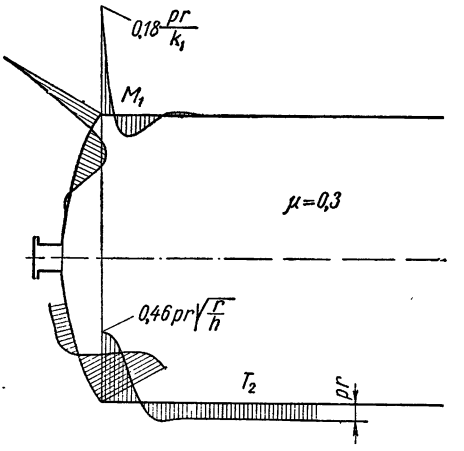
$$\sigma_1 = \frac{pr}{2h} + \frac{6 \cdot 0{,}18 pr\sqrt{2h}}{h^2\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}.$$

Первое слагаемое много меньше второго, и поэтому при $\mu = 0{,}3$

$$\sigma_1 = +0{,}84\frac{pr}{h}\sqrt{\frac{r}{h}}.$$



Фиг. 171.



Фиг. 172.

В этой же точке в окружном направлении

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{h} + \mu\frac{6M_1}{h^2},$$

или

$$\sigma_2 = -\frac{0{,}46pr}{h}\sqrt{\frac{r}{h}} + 0{,}3 \cdot 0{,}84\frac{pr}{h}\sqrt{\frac{r}{h}};$$

окончательно

$$\sigma_2 = -0{,}21\frac{pr}{h}\sqrt{\frac{r}{h}}.$$

Тогда эквивалентное напряжение, по теории наибольших касательных напряжений,

$$\sigma_{экв} = \sigma_{max} - \sigma_{min};$$

$$\sigma_{экв} = 1{,}05\frac{pr}{h}\sqrt{\frac{r}{h}}.$$

Существенно отметить, что при отсутствии краевого эффекта эквивалентное напряжение было бы величиной другого порядка, т. е. порядка $\frac{pr}{h}$ в то время как здесь местное напряжение имеет величину порядка

$$\frac{pr}{h}\sqrt{\frac{r}{h}}. \qquad (140)$$

Картина существенно меняется, если переход от цилиндра к сфере сделать плавным, т. е. ввести переходный радиус ρ (фиг. 173).

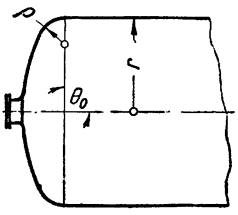
Выясним картину распределения напряжений в этом случае.

Здесь

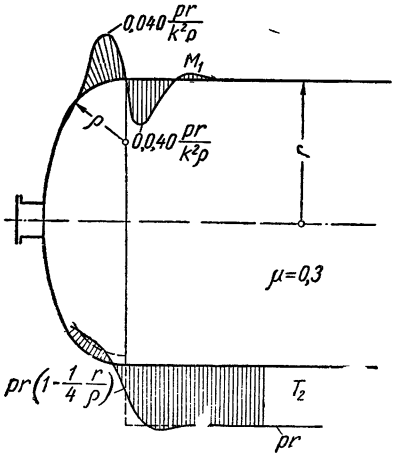
$$(R_1)_1 = \infty; \quad (R_2)_1 = r;$$

$$(R_1)_2 = \rho; \quad (R_2)_2 = r;$$

$$\theta_{01} = \theta_{02} = 90^0; \quad F_0 = \frac{pr}{2}.$$



Фиг. 173.



Фиг. 174.

Согласно выражениям (120), (131) и (122) по-прежнему

$$\vartheta_{01}^* = \vartheta_{02}^* = 0.$$

Уравнения (137) принимают вид

$$2M_0(k_1 + \alpha k_2) + P_0(1 - \alpha) = 0;$$

$$2M_0 \frac{1}{r}(1 - \alpha) + 2P_0 \frac{1}{r}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{\alpha}{k_2}\right) = \frac{p}{r}\left[-\frac{1}{k_1^2}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{k_2^2}\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{\rho} - \frac{\mu}{2}\right)\right].$$

Если оболочки будут одинаковой толщины и сделаны из одного и того же материала, то

$$k_1 = k_2 = k \text{ и } \alpha = 1.$$

Тогда

$$M_0 = 0; \quad P_0 = -\frac{pr}{8k\rho}.$$

Обращаясь к выражениям (134) для цилиндра получим:

$$M_1 = -\frac{pr}{8k^2\rho} e^{-ks} \sin ks;$$

$$T_1 = \frac{pr}{2};$$

$$T_2 = pr\left[1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{r}{\rho} e^{-ks} \cos ks\right].$$

Для переходной части оболочки выражения (134а) дают

$$M_1 = \frac{pr}{8k^2\rho} e^{-ks} \sin ks;$$

$$T_1 = \frac{pr}{2};$$

$$T_2 = pr\left[1 - \frac{r}{2\rho} + \frac{1}{4} \cdot \frac{r}{\rho} e^{-ks} \cos ks\right].$$

Теперь легко строятся эпюры внутренних сил и моментов в переходной зоне (фиг. 174).

Сопоставляя полученные кривые с эпюрами предыдущего примера, нетрудно установить, что введение плавного перехода от цилиндра к сфере резко уменьшает местные напряжения, снижая их порядок.

Например, максимальные изгибные напряжения имеют в этом случае величину

$$\frac{6M_{1\max}}{h^2} = \frac{6 \cdot 0{,}040pr}{k^2\rho h^2} = 0{,}145\,\frac{pr}{h}\cdot\frac{r}{\rho},$$

что по порядку величины отличается от напряжений предыдущего примера (140).

Таким образом, при плавном переходе местные напряжения не вызывают существенного повышения расчетного напряжения.

Изложенные вопросы определения местных напряжений в зоне сочленения симметричных оболочек рассматриваются также в работах [3] и [5].

Некоторые задачи расчета несимметричных оболочек освещаются в монографиях [1], [2], [5] и [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З., Общая теория оболочек, Гостехиздат, 1949.
2. Гольденвейзер А. Л., Теория упругих тонких оболочек, ГИТТЛ, 1953.
3. Канторович З. Б., Основы расчета химических машин и аппаратов, Машгиз, 1946.
4. Лурье А. И., Статика тонкостенных упругих оболочек, Гостехиздат, 1947.
5. Новожилов В. В., Теория тонких оболочек, Судпромгиз, 1951.
6. Тимошенко С. П., Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948.
7. Феодосьев В. И., К расчету гофрированных коробок (сильфонов), Институт механики АН СССР, «Инженерный сборник», т. IV, вып. 1, 1947.
8. Феодосьев В. И., Упругие элементы точного приборостроения, Оборонгиз, 1949.
9. Штаерман И., «Известия Киевского политехнического и с.-х. институтов», кн. 1, вып. 1, 1924.
10. Экстрем Д. Э., Тонкостенные симметричные купола, ДНВТУ, Харьков — Киев, 1936.
11. Blumenthal O., Über assimptotische Integration von Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen. „Zeitschr. f Mathem. und. Phys.“, B. 62, S. 343, 1914.
12. Geckeler I. W., Über die Festigkeit achensymmetrischer Schalen, Forschungsarbeiten aus dem Gebiet des Ing., Heft 276, Berlin 1925.
13. Meissner E., Das Elastisitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen, Kugel-oder Kegelform, „Phys. Zeitschn.“ N 8, 1913.
14. Reissner H., Müller-Breslau Festschrift, 1912.
15. Stange K., Der Spannungzustand einer Kreisringschale,„Ingenieur Archiv“, Bd. II, S. 47, 1931.
16. Wissler H., Festigkeitsberechnung von Ringflächenschalen; Promotionsarbeit. Techn. Hochschule in Zürich, 1916.

ГЛАВА IV

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ГИБКИЕ ОБОЛОЧКИ

Под гибкими оболочками понимаются такие, которые способны под действием внешних сил заметно менять свою форму без нарушения упругих свойств материала. В этом смысле понятие «гибкие оболочки» совершенно аналогично понятию «гибкие стержни».

К схеме гибкой оболочки сводится расчет многих упругих элементов, применяемых в машиностроении и главным образом в приборостроении. Такими являются диафрагмы исполнительных механизмов, чувствительные гофрированные и хлопающие мембраны и гофрированные коробки.

При расчете подобных элементов возникает в первую очередь вопрос о характеристике гибкой оболочки, т. е. зависимости перемещений от внешних действующих сил. Для оболочек эта задача представляется значительно более сложной, чем для гибких стержней. Ниже, при ее решении, будут использоваться приближенные методы.

§ 1. УРАВНЕНИЯ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПОЛОГИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК

Решение задачи о больших перемещениях оболочек в общем виде представляет значительные трудности, поэтому ограничимся исследованием частного случая оболочки, обладающей осевой симметрией формы, и способа нагружения.

Будем считать, что серединная поверхность оболочки является поверхностью вращения, а нагрузка, действующая на оболочку, расположена симметрично относительно ее оси. Примем далее, что оболочка, деформируясь, постоянно сохраняет осевую симметрию. В малых перемещениях это положение является само собой разумеющимся, в области же больших перемещений и в вопросах устойчивости симметрия деформаций, вообще говоря, не является обязательным следствием симметрии формы и нагружения тела. Однако в настоящем разделе вопросы перехода симметричных форм равновесия в несимметричные рассматриваться не будут.

Форму оболочки в недеформированном состоянии будем характеризовать углом подъема θ — углом между нормалью к серединной поверхности и осью симметрии. В общем случае этот угол является функцией радиуса r (фиг. 175). Для пластинки $\theta = 0$, для конуса $\theta = \text{const} \neq 0$.

В связи с деформацией оболочки угол θ изменяется на величину $\vartheta = f(r)$, и новый угол подъема оболочки будет $\theta + \vartheta$. Положительным будем считать угол ϑ, увеличивающий начальный угол подъема θ.

Ограничим, далее, круг рассматриваемых вопросов требованием малости угла подъема деформированной оболочки и будем считать угол $\theta+\vartheta$ настолько малым, что можно положить

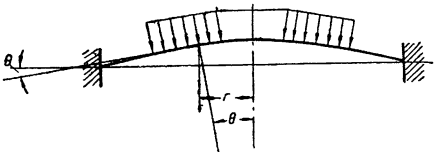
$$\sin(\theta+\vartheta)\approx \operatorname{tg}(\theta+\vartheta)\approx \theta+\vartheta.$$

Известно, что

$$\sin\alpha=\alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{3!}+\frac{\alpha^4}{5!}-\ldots\right);$$

поэтому указанное требование означает пренебрежение величиной $(\theta+\vartheta)^2$ и высшими степенями $(\theta+\vartheta)$ по сравнению с единицей.

Будем также считать, что углы θ и ϑ являются величинами одного порядка малости и указанная выше оценка распространяется не только на их сумму, но и на каждый из них в отдельности.



Фиг. 175.

В этом и сказывается основное отличие предпринимаемого вывода от решения задачи в обычной постановке, т. е. в малых перемещениях. При малых перемещениях можно было бы считать, что угол поворота дуги меридиана ϑ во много меньше угла θ. Поэтому в дальнейшем решение задачи в малых перемещениях может быть без труда получено как частный случай путем пренебрежения углом ϑ по сравнению с θ.

При выводе основных уравнений будет сохранена гипотеза неизменности нормали к срединной поверхности и, кроме того, как обычно, не будут приниматься во внимание нормальные напряжения в элементарных площадках, параллельных срединной поверхности. Кроме того, будем считать, что материал оболочки следует закону Гука и оболочка работает в области малых деформаций (но больших перемещений).

Начнем с составления уравнений равновесия. Двумя парами меридиональных и нормальных конических сечений выделим элемент деформированной оболочки размерами ds_1 и ds_2 и приложим к нему в проведенных сечениях равнодействующие силовые факторы (фиг. 176).

Обозначим, как и ранее (см. гл. III):

T_1 и T_2 — интенсивность нормальных усилий;

Q — интенсивность перерезывающих сил;

M_1 и M_2 — интенсивность изгибающих моментов. Остальные внутренние силовые факторы из условий симметрии обращаются в ноль.

Интенсивность внешней нагрузки p *кг/см*^{2}, действующей в общем случае на поверхность оболочки, разложим по нормали и касательной к дуге меридиана p_n и p_t (фиг. 177). Третья составляющая из условий симметрии обращается, очевидно, в ноль. В частности, если оболочка находится только под давлением газа или жидкости, то тогда и $p_t=0$.

Приравниваем нулю сумму моментов всех сил относительно оси y, касательной к дуге круга радиуса r (фиг. 177):

$$-p_n ds_1 ds_2\frac{ds_1}{2}-[Qds_2+d(Qds_2)]ds_1+$$

$$+(M_1 ds_2+d(M_1 ds_2)]-M_1 ds_2-M_2 ds_1 d\varphi=0.$$

При этом моментами сил $p_t ds_1 ds_2$ и $T_1 ds_2 + d(T_1 ds_2)$ относительно оси y пренебрегаем за малостью соответствующих плеч. Пренебрегая, далее, величинами высшего порядка, получим

$$-Q ds_1 ds_2 + d(M_1 ds_2) - M_2 ds_1 d\varphi = 0.$$

Но так как

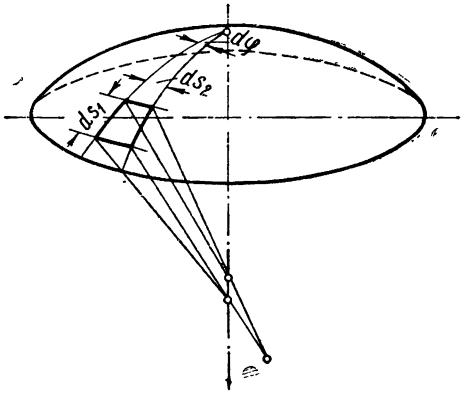
$$ds_1 = \frac{dr}{\cos(\theta + \vartheta)} \approx dr;$$

$$ds_2 = r d\varphi,$$

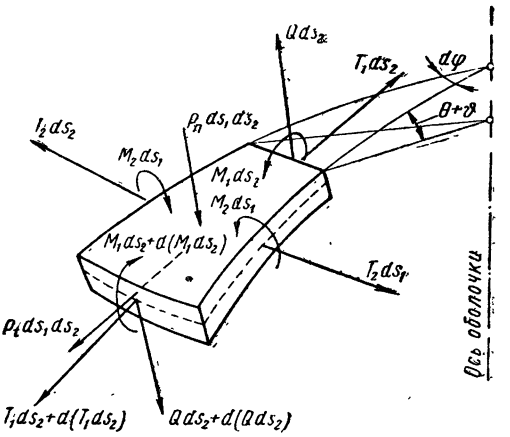
то

$$-Qr + (M_1 r)' - M_2 = 0, \tag{1}$$

где $(\,)'$ означает производную по радиусу r.



Фиг. 176.



Фиг. 177.

Спроектируем теперь все силы на ось симметрии оболочки (фиг. 177):

$$p_n ds_1 ds_2 + p_t ds_1 ds_2 (\theta + \vartheta) - Q ds_2 + [Q ds_2 + d(Q ds_2)] + \\ + [T_1 ds_2 + d(T_1 ds_2)][(\theta + \vartheta) + d(\theta + \vartheta)] - T_1 ds_2 (\theta + \vartheta) = 0,$$

откуда

$$p_n r + p_t r(\theta + \vartheta) + (Qr)' + [T_1 r(\theta + \vartheta)]' = 0.$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\{r[T_1(\theta + \vartheta) + Q]\}' = -r[p_n + p_t(\theta + \vartheta)]$$

или

$$r[T_1(\theta + \vartheta) + Q] = C - \int r[p_t(\theta + \vartheta) + p_n]\, dr,$$

где C — некоторая постоянная.

Как это обычно делается, при расчете симметричных оболочек (гл. III, т. II) обозначим

$$\left.\begin{aligned} r[T_1(\theta + \vartheta) + Q] &= F(r); \\ C - \int r[p_t(\theta + \vartheta) + p_n]\, dr &= F(r). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Функция $F(r)$ определяется только внешними силами и в основных случаях может быть определена из условий равновесия части оболочки, отсеченной конической поверхностью по кругу радиуса r (см. гл. III).

Составим, наконец, последнее уравнение равновесия.

Спроектируем систему сил на нормаль к серединной поверхности оболочки (фиг. 177). Тогда

$$p_n ds_1 ds_2 + [T_1 ds_2 + d(T_1 ds_2)]\, d(\theta + \vartheta) - Q ds_2 + \\ + Q ds_2 + d(Q ds_2) + T_2 ds_1 (\theta + \vartheta)\, d\varphi = 0,$$

откуда

$$p_n r + T_1 r (\theta + \vartheta)' + (Qr)' + T_2 (\theta + \vartheta) = 0. \tag{3}$$

Из уравнений (1) — (3) исключим Q. Для этого подставим выражение

$$Qr = F(r) - T_1 r (\theta + \vartheta),$$

полученное из первого уравнения (2), в уравнение (3), тогда

$$p_n r + T_1 r (\theta + \vartheta)' + F'(r) - [T_1 r (\theta + \vartheta)] + T_2 (\theta + \vartheta) = 0.$$

Но так как из второго уравнения (2) вытекает, что

$$F'(r) = -p_t r (\theta + \vartheta) - p_n r,$$

то

$$T_2 = r p_t + (T_1 r)', \tag{4}$$

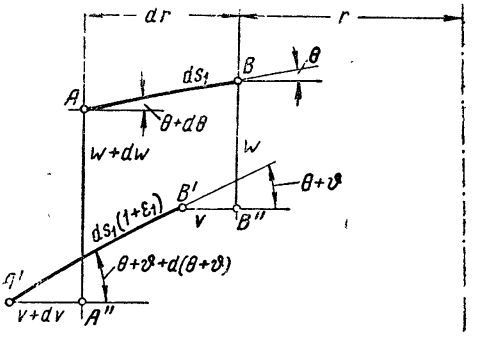
уравнение же (1) принимает вид

$$(M_1 r)' - M_2 = -T_1 r (\theta + \vartheta) + F(r). \tag{5}$$

Таким образом, в итоге преобразования условий равновесия получаем два уравнения (4) и (5) с пятью неизвестными M_1, M_2, T_1, T_2 и ϑ.

Рассмотрим теперь перемещения срединной поверхности оболочки. На фиг. 178 показан элемент дуги меридиана AB до и после деформации.

Полное перемещение любой точки дуги меридиана, например точки B (фиг. 178), можно разложить на две составляющие — по направлению оси симметрии w и по радиусу v. Третья составляющая вследствие симметрии равна нулю.



Фиг. 178.

Длина элемента дуги AB после деформации

$$A'B' = ds_1 (1 + \varepsilon_1),$$

где ε_1 — относительное удлинение срединной поверхности по направлению дуги меридиана.

Воспользуемся известной теоремой о том, что алгебраическая сумма проекций ломаной равна проекции замыкающей.

Проектируем замкнутый шестиугольник $BB''B'A'A''A$ на направление радиуса r:

$$v + ds_1(1 + \varepsilon_1)\cos(\theta + \vartheta) - (v + dv) - ds_1\cos\theta = 0$$

или

$$(1 + \varepsilon_1)\cos(\theta + \vartheta) - \frac{dv}{ds_1} - \cos\theta = 0.$$

Подставляя

$$ds_1 = dr;\ \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2};$$

$$\cos(\theta + \vartheta) = 1 - \frac{1}{2}(\theta + \vartheta)^2,$$

получим

$$\varepsilon_1 = v' + \vartheta\left(\theta + \frac{\vartheta}{2}\right). \tag{6}$$

Спроектируем этот же многоугольник на ось симметрии, тогда

$$w + ds_1(1 + \varepsilon_1)(\theta + \vartheta) - (w + dw) - ds_1\theta = 0,$$

откуда

$$w' = \vartheta. \tag{7}$$

Вычислим относительное удлинение ε_2 срединной поверхности в направлении оси y.

При деформации оболочки окружность $2\pi r$ получит вследствие увеличения радиуса r на v удлинение

$$2\pi(r + v) - 2\pi r,$$

откуда

$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi(r + v) - 2\pi r}{2\pi r}$$

или

$$\varepsilon_2 = \frac{v}{r}. \tag{8}$$

Подставляя v из этого выражения в уравнение (6), получим

$$\varepsilon_1 - (\varepsilon_2 r)' = \vartheta\left(\theta + \frac{\vartheta}{2}\right). \tag{9}$$

Найдем теперь относительное удлинение ε_{1z} и ε_{2z} в точках оболочки, находящихся на расстоянии z от срединной поверхности. Эти деформации будут складываться из деформаций срединной поверхности ε_1 и ε_2 и из добавочных деформаций, обусловленных изгибом оболочки.

Рассмотрим элемент меридионального сечения оболочки (фиг. 179) и найдем изменение длины отрезка CD, находящегося на расстоянии z от срединной поверхности.

Нормаль I поворачивается на угол ϑ, а нормаль II — на угол $\vartheta + d\vartheta$.

Удлинение отрезка CD вследствие искривления оболочки будет

$$DD' - CC' = -z\,d\vartheta,$$

тогда, добавляя относительное удлинение срединной поверхности, получим

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 - z\,\vartheta'. \tag{10}$$

Удлинение в окружном направлении в точке D (фиг. 179), возникающее вследствие поворота нормали, будет

$$\frac{2\pi(r - z\,\vartheta\cos\theta) - 2\pi r}{2\pi r} \approx -z\,\frac{\vartheta}{r},$$

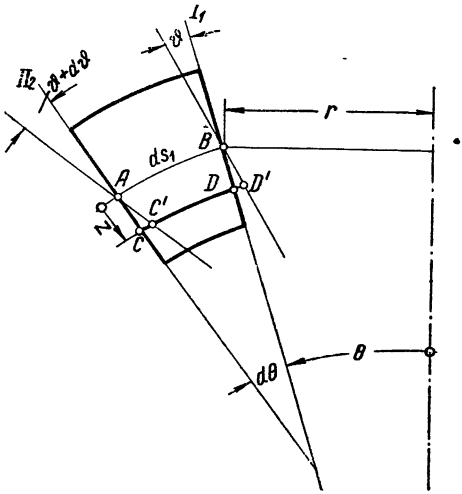
тогда

$$\varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 - z\,\frac{\vartheta}{r}. \tag{11}$$

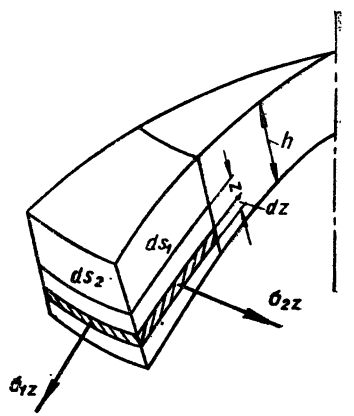
Теперь согласно закону Гука

$$\sigma_{1z} = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(\varepsilon_1 + \mu\,\varepsilon_2) - z\left(\vartheta' + \mu\,\frac{\vartheta}{r}\right)\right];$$

$$\sigma_{2z} = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(\varepsilon_2 + \mu\,\varepsilon_1) - z\left(\frac{\vartheta}{r} + \mu\vartheta'\right)\right].$$



Фиг. 179.



Фиг. 180.

Выразим, как обычно (см. гл. III т. I), усилия T_1 и T_2 и моменты M_1 и M_2 через напряжения σ_{1z} и σ_{2z} (фиг. 180):

$$T_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{1z}\,dz; \qquad T_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{2z}\,dz;$$

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\,\varepsilon_2); \qquad T_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\,\varepsilon_1),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{Eh}(T_1 - \mu\,T_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{Eh}(T_2 - \mu\,T_1). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Далее,

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{1z}\, z\, dz; \qquad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{2z}\, z dz;$$

$$M_1 = -D\left(\vartheta' + \mu\frac{\vartheta}{r}\right);$$

$$M_2 = -D\left(\frac{\vartheta}{r} + \mu\vartheta'\right); \tag{13}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \tag{14}$$

Полагая толщину h постоянной, заменим в выражении (9) ε_1 и ε_2 по зависимостям (12). Тогда

$$T_1 - \mu T_2 - (T_2 r)' + \mu (T_1 r)' = Eh\vartheta\left(\theta + \frac{\vartheta}{2}\right).$$

Подставим сюда, далее, T_2 из уравнения (4):

$$T_1 - \mu[rp_t + (T_1 r)'] - (r^2 p_t)' - [r(T_1 r)']' + \mu(T_1 r)' = Eh\vartheta\left(\theta + \frac{\vartheta}{2}\right),$$

откуда

$$-r(T_1 r)'' - (T_1 r)' + \frac{T_1 r}{r} = Eh\vartheta\left(\theta + \frac{\vartheta}{2}\right) + (r^2 p_t)' + \mu r p_t. \tag{15}$$

Вернемся теперь к уравнению равновесия (5) и исключим из него M_1 и M_2 [см. зависимости (13)]. Тогда

$$-D\left[r\left(\vartheta' + \mu\frac{\vartheta}{2}\right)\right]' + D\left(\frac{\vartheta}{r} + \mu\vartheta'\right) = -T_1 r(\theta + \vartheta) + F(r)$$

и после преобразований

$$r\vartheta'' + \vartheta' - \frac{\vartheta}{r} = \frac{T_1 r}{D}(\theta + \vartheta) - \frac{F(r)}{D}. \tag{16}$$

Таким образом, получены два уравнения (15) и (16) с двумя неизвестными T_1 и ϑ, что и являлось целью всех предыдущих выкладок.

Эти уравнения обладают достаточной общностью и путем подстановки соответствующей функции $\theta = \theta(r)$ могут быть приведены к уравнениям пологой сферы, конуса ($\theta = \text{const}$) или пластинки ($\theta = 0$) в больших перемещениях. Уравнения (15) и (16) примерно в этом же виде были получены Д. Ю. Пановым в 1941 г. [7] применительно к расчету гофрированных мембран.

Введем для удобства выкладок следующие безразмерные величины:

$$\rho = \frac{r}{r_1};$$

$$\psi = -\frac{T_1 r}{Ehr_1}, \tag{17}$$

где r_1 — радиус внешнего контура оболочки;
ρ — безразмерный радиус;
ψ — новая неизвестная функция, определяемая растягивающим усилием T_1.

Тогда

$$\rho\frac{d^2\psi}{d\rho^2}+\frac{d\psi}{d\rho}-\frac{\psi}{\rho}=\vartheta\left(\theta+\frac{\vartheta}{2}\right)+\frac{1}{Eh}[(r^2p_t)'+\mu rp_t];$$

$$\rho\frac{d^2\vartheta}{d\rho^2}+\frac{d\vartheta}{d\rho}-\frac{\vartheta}{\rho}=-\frac{Ehr_1^2}{D}\psi(\theta+\vartheta)-\frac{F(r)}{D}r_1.$$

Безразмерную величину $\frac{Ehr_1^2}{D}=12(1-\mu^2)\frac{r_1^2}{h^2}$ обозначим через k:

$$k=12(1-\mu^2)\frac{r_1^2}{h^2}; \tag{18}$$

k характеризует относительную тонкостенность оболочки.

Уравнения (15) и (16) примут теперь следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned}\rho\ddot{\psi}+\dot{\psi}-\frac{\psi}{\rho}&=\left(\theta+\frac{\vartheta}{2}\right)\vartheta+f;\\ \rho\ddot{\vartheta}+\dot{\vartheta}-\frac{\vartheta}{\rho}&=-k\psi(\theta+\vartheta)-\varphi,\end{aligned} \tag{19}$$

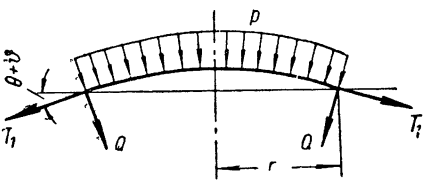
где

$$\begin{aligned}f&=\frac{1}{Eh}[(r^2p_t)'+\mu rp_t],\\ \varphi&=\frac{F(r)}{D}r_1.\end{aligned} \tag{20}$$

$\dot{\psi},\ddot{\vartheta},\dot{\psi},\ddot{\vartheta}$ означают первую и вторую производные от ψ и ϑ по ρ в отличие от ψ', ϑ', ψ'', ϑ', представляющих собой производные по r.

Уравнения (19) нелинейные, так как в первое уравнение входит квадрат неизвестной функции ϑ, а во второе — произведение неизвестных $\psi\vartheta$.

В этих уравнениях, как указывалось выше, форма недеформированной оболочки определяется функцией θ — углом подъема дуги меридиана, а система внешних сил — функциями f и φ.



Фиг. 181.

Последние могут быть получены из рассмотрения условия равновесия центральной части оболочки. Так, например (фиг. 181), при нагружении замкнутой в вершине оболочки гидростатическим давлением p имеем $p_t=0$; $p_n=p$. Тогда, по формулам (20), $f=0$.

Из условия равновесия центральной части оболочки (фиг. 181)

$$Q2\pi r+T_1(\theta+\vartheta)2\pi r+p\pi r^2=0.$$

Согласно формулам (2)

$$r[Q+T_1(\theta+\vartheta)]=F(r)=-\frac{pr^2}{2},$$

откуда φ [см. формулы (20)] равно

$$\varphi = -\frac{pr^2}{2D} r_1 = -\frac{pr_1^3}{2D}\rho^2.$$

Обозначим

$$\frac{pr_1^3}{2D} = \nu.$$

Учитывая, что

$$\frac{Ehr_1^2}{D} = k,$$

получим

$$\nu = k\frac{pr_1}{2Eh}; \tag{21}$$

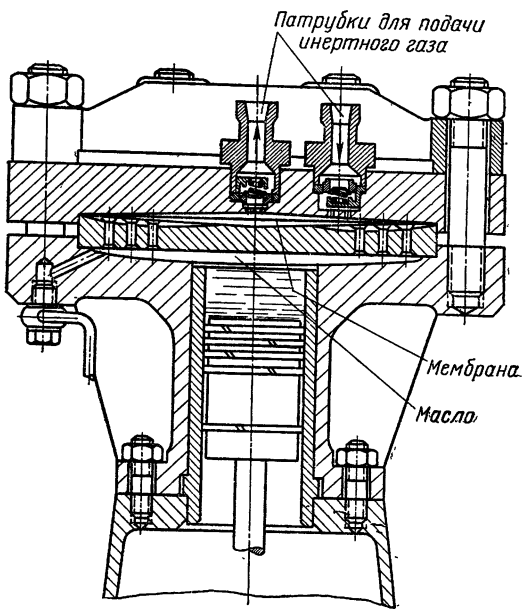
$$\varphi = -\nu\rho^2. \tag{22}$$

Теперь применим полученные уравнения к исследованию прогибов гибких оболочек.

§ 2. КРУГЛЫЕ ПЛОСКИЕ МЕМБРАНЫ

А. Типы мембран

В конструкциях машин и приборов часто встречаются плоские мембраны, которые применяются либо как разделительные перегородки, либо как элементы исполнительных механизмов.



Фиг. 182.

На фиг. 182 показана мембрана, работающая в качестве разделительной перегородки компрессора, подающего инертный газ. Здесь мембрана работает, попеременно прижимаясь к верхней и нижней профилированным поверхностям.

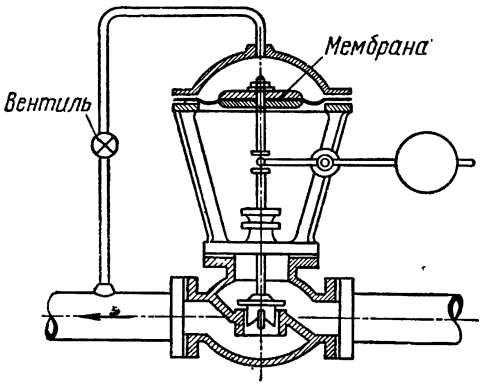
На фиг. 183 представлена гибкая мембрана исполнительного механизма регулятора давления. Сила давления, действующая на мембрану, передается через шток на клапан, который поднимается или опускается на заданную величину хода.

Плоские мембраны большей частью принято делить на металлические и неметаллические.

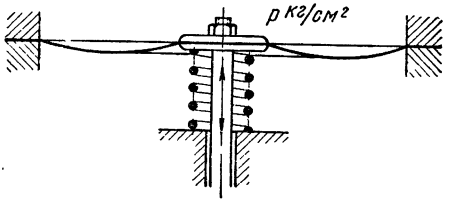
Материалом для металлических мембран служит обычно фосфористая или бериллиевая бронза, нейзильбер или нержавеющая сталь. Неметаллические мембраны изготовляются из резины, прорезиненных тканей, кожи и тому подобных материалов.

Неметаллические мембраны в отличие от металлических неспособны воспринимать изгибающие моменты, т. е. обладают весьма малой жесткостью при изгибе. Иначе говоря, при обычном характере приложенной нагрузки напряжения, возникающие в такой мембране от изгибающих моментов, значительно меньше напряжений, обусловленных растягивающими усилиями. Кроме того, неметаллические мембраны, подобно гибким нитям, неспособны к восприятию сжимающих усилий. Такие мембраны называют обычно абсолютно гибкими.

При малой толщине указанными свойствами могут обладать, разумеется, и металлические мембраны, точно так же как при большой толщине и неметаллические мембраны способны воспринимать изгибающие моменты и сжимающие усилия. Однако размеры применяемых на практике мембран таковы, что их деление на металлические и неметаллические равноценно делению мембран по



Фиг. 183.



Фиг. 184.

характеру восприятия ими изгибающих моментов и сжимающих сил. Поэтому в дальнейшем, принимая указанную терминологию, будем под неметаллическими мембранами понимать весьма гибкие мембраны, а под металлическими — мембраны, обладающие заметной жесткостью при изгибе.

Довольно часто встречается также деление мембран на мембраны большой толщины (плиты), средней толщины и малой толщины. Напряжения, возникающие в первых, определяются в основном изгибающими моментами, а теория таких мембран (плит или пластин) является обычной теорией жестких пластин (см. гл. I т. II). Напряжения, возникающие в мембранах средней толщины, обусловливаются в равной степени как изгибающими моментами, так и растягивающими усилиями. Мембраны малой толщины работают в основном на растяжение. В этой терминологии металлические мембраны являются мембранами средней толщины, а неметаллические — мембранами малой толщины.

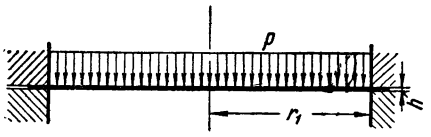
Как металлические, так и неметаллические мембраны, будучи закреплены по контуру, способны под действием давления, приложенного с какой-либо стороны, давать заметные, легко поддающиеся замеру прогибы, по которым можно судить о величине и о характере изменения действующего давления.

В тех случаях, когда упругие силы мембраны недостаточны, чтобы преодолеть силы трения присоединенных деталей, в дополнение к ней устанавливается калиброванная пружина, увеличивающая жесткость всей системы (фиг. 184). Дополнительная пружина устанавливается большей частью с неметаллическими мембранами, жесткость которых невелика.

Обратимся теперь к определению характеристики плоских мембран. Рассмотрение вопроса начнем с мембран средней толщины, т. е. с металлических мембран.

Б. Определение характеристики плоской металлической мембраны

Рассмотрим плоскую мембрану, защемленную по контуру и нагруженную равномерно распределенным давлением (фиг. 185). Определим зависимость хода мембран от давления. Такая задача уже решалась в гл. I для пластины, т. е. для мембраны большой толщины. В этом случае предполагалось, что прогибы пластины малы настолько, что в ее срединной поверхности заметных удлинений не возникает. Теперь мы не будем ограничивать величину перемещений столь строго. Будем считать, что удлинения в срединной поверхности имеют место, но в то же время прогибы не настолько велики, чтобы нельзя было считать $\sin\vartheta\approx\vartheta$.



Фиг. 185.

Деформации при этом предполагаются упругими.

Обратимся к уравнениям (19). Для плоской мембраны угол наклона дуги меридиана к плоскости контура θ равен нулю. Функция f, определяемая зависимостью (20), при $p_t=0$ обращается в ноль, а φ выражается через ρ как $\varphi=-\nu\rho^2$ [см. выражение (22)].

Таким образом, уравнения (19) принимают вид

$$\begin{aligned}&\rho\dot{\psi}+\dot{\psi}-\frac{\psi}{\rho}=\frac{\vartheta^2}{2};\\&\rho\dot{\vartheta}+\dot{\vartheta}-\frac{\vartheta}{\rho}=-k\psi\vartheta+\nu\rho^2.\end{aligned}\qquad(23)$$

Зависимости (23) известны, как уравнения пластины в больших перемещениях. Они — нелинейные. В первое из них входит квадрат функции ϑ, а во второе — произведение $\psi\vartheta$.

Если прогибы малы настолько, что в срединной поверхности пластины удлинений не возникает,

$$\psi=-\frac{T_1 r}{Ehr_1}=0,$$

и тогда первое из уравнений (23) отпадает, а второе принимает вид:

$$\rho\dot{\vartheta}+\dot{\vartheta}-\frac{\vartheta}{\rho}=\nu\rho^2.\qquad(24)$$

Это — уравнение упругих прогибов пластины в малых перемещениях (см. гл. I, т. II).

Легко проверить, что

$$\rho\dot{\vartheta}+\dot{\vartheta}-\frac{\vartheta}{\rho}=\rho\left[\frac{1}{\rho}(\vartheta\rho)\cdot\right]\cdot;$$

тогда уравнение (24) принимает вид

$$\left[\frac{1}{\rho}(\vartheta\rho)\cdot\right]\cdot=\nu\rho.$$

Дважды интегрируя, получаем

$$\vartheta = C_1\rho + \frac{C_2}{\rho} + \frac{\nu\rho^3}{8},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

В рассматриваемом примере имеют место следующие граничные условия:

$$\text{при } \rho = 0 \ (r = 0)$$
$$\vartheta \neq \infty;$$
$$\text{при } \rho = 1 \ (r = r_1)$$
$$\vartheta = 0,$$

тогда

$$C_2 = 0;\ C_1 = -\frac{\nu}{8};$$

$$\vartheta = \frac{\nu}{8}(\rho^3 - \rho). \tag{25}$$

Определим прогиб мембраны. Согласно выражению (7)

$$\vartheta = w' = \frac{dw}{d\rho} \cdot \frac{1}{r_1},$$

поэтому

$$w = \frac{\nu r_1}{8}\left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^2}{2} + C_3\right).$$

Постоянная C_3 определяется из условия; при $\rho = 1$ $(r = r_1)$ $w = 0$, тогда

$$w = \frac{\nu r_1}{32}(1 - \rho^2)^2.$$

Легко установить полную тождественность этого выражения с тем, которое было найдено при рассмотрении малых прогибов пластины в главе I т. II.

Действительно, если подставить сюда $\rho = \frac{r}{r_1}$ и $\nu = \frac{pr_1^3}{2D}$,

то получим

$$w = \frac{p}{64D}(r_1^2 - r^2)^2;$$

$$w_0 = \frac{pr_1^4}{64D} = \frac{3}{16}p\frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{r_1^4}{h^3}, \tag{26}$$

что совпадает с выражением, приведенным в табл. 2 гл. I т. II.

Таким образом, до тех пор пока прогибы мембраны малы настолько, что растяжением ее срединной поверхности можно пренебречь, перемещение центра w_0 пропорционально действующему давлению. В дальнейшем будет показано, что это верно лишь до тех пор, пока прогибы мембраны остаются значительно меньшими ее толщины, причем настолько, чтобы квадратом отношения $\frac{w_0}{h}$ можно было пренебречь по сравнению с единицей.

Понятно, что такое ограничение является весьма существенным и не позволяет применить линейное решение на практике, так как для обычных тонких мембран прогибы не только соизмеримы с толщиной, но и в несколько раз ее превосходят. Сплошь и рядом мембраны толщиной 0,2—0,3 *мм* имеют рабочие прогибы порядка 1,5—2 *мм*, а в ряде случаев и гораздо бо́льшие.

Вполне очевидно поэтому, что для практически приемлемого решения предположение о нерастяжимости срединной поверхности совершенно непригодно и для этого систему уравнений (23) необходимо решать вне предположения о малости функции ψ.

Задача о больших прогибах мембраны со времени первых исследований Феппля [12] и Кàрмана [15] решалась многими исследователями, неизменно получавшими весьма близкие и сходные друг с другом результаты ([11], [17], [16], [13] и др.).

Однако наиболее простым и удобным решением, которое будет развито в дальнейшем, нам представляется решение Д. Ю. Панова [6], которое основано на применении метода Галеркина.

Сущность этого метода была изложена в гл. VII т. I, поэтому здесь можно перейти непосредственно к решению уравнений (23).

Зададимся упругой поверхностью мембраны.

Примем, что ее поверхность при больших прогибах имеет тот же вид, что и при малых, но величина максимального прогиба в зависимости от действующего давления будет некоторой искомой функцией давления p, отличной от полученной ранее прямой пропорциональности.

Согласно выражению (25) положим, что

$$\vartheta = C(\rho^3 - \rho), \tag{27}$$

где величина C не зависит от ρ и является искомой функцией давления p или параметра ν, пропорционального p.

Принятая функция ϑ равенства (27) удовлетворяет заданным граничным условиям, т. е. обращается в ноль в центре мембраны и на ее контуре. Очевидно, приняв для ϑ закон изменения (27), можно получить тем более точное решение, чем меньше будут прогибы мембраны. При весьма малых прогибах решение совпадет с точным.

Подставляем ϑ из равенства (27) в первое уравнение (23); имеем

$$\rho\left[\frac{1}{\rho}(\psi\rho)^{\cdot}\right]^{\cdot} = \frac{C^2}{2}(\rho^3 - \rho)^2.$$

Проинтегрируем это выражение. Тогда

$$\psi = \frac{C^2}{96}\left(\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - a\rho + \frac{b}{\rho}\right). \tag{28}$$

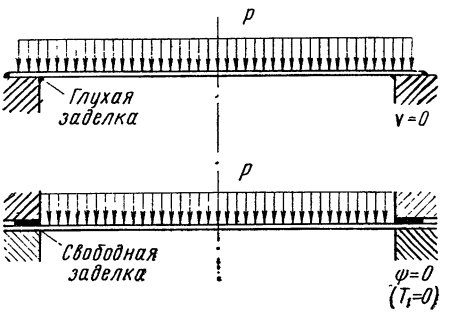
Подберем произвольные постоянные a и b.

Функция

$$\psi = -\frac{T_1 r}{Ehr_1}.$$

В центре пластины растягивающее усилие остается величиной ограниченной. Поэтому функция φ при $r = 0$ должна обращаться в ноль. Но это возможно только в том случае, если константа b будет равна нулю.

Переходя к условиям закрепления на контуре (при $r=r_1$), необходимо отметить, что заданный угол поворота на контуре (в нашем случае ноль) для мембраны, имеющей большие прогибы, еще не определяет полностью условий закрепления, так как в этом случае разрешение или запрещение радиальных смещений на контуре существенным образом отражается на величине растягивающих усилий T_1 и, следовательно, на работе мембраны в целом, при решении же задачи в малых перемещениях этот вопрос не играет роли, так как растяжение в срединной поверхности рассматривается как исчезающе малое.



Фиг. 186.

Ограничимся рассмотрением двух типов закрепления мембраны, которые будем называть глухой и свободной заделкой (фиг. 186). Как в том, так и в другом случае угол поворота ϑ на контуре равен нулю, но в первом отсутствует радиальное смещение, а во втором — радиальное усилие T_1. Первый случай соответствует плотной припайке мембраны к кольцу большой жесткости, а второй — легкому защемлению между двумя кольцами с прокладкой.

Двумя указанными случаями, конечно, не исчерпываются все возможности закрепления мембраны. На контуре могут возникать одновременно и смещения, и усилия; два указанных примера являются лишь предельными случаями.

Таким образом, для глухой заделки при $\rho=1$ $(r=r_1)$ имеем $\vartheta=0$ и $v=0$.

Если $v=0$, то согласно выражению (8) и $\varepsilon_2=0$.

Учитывая второе выражение (10), получим

$$T_2-\mu T_1=0.$$

Далее, с учетом того, что

$$T_2=rp_t+(T_1r)' \text{ и } T_1=-\frac{Ehr_1}{r}\psi$$

[см. формулы (6) и (17)], получим

$$\dot{\psi}-\mu\frac{\psi}{\rho}=\frac{r_1p_t}{Eh}\rho.$$

Если при этом $p_t=0$, то

$$\dot{\psi}-\mu\frac{\psi}{\rho}=0.$$

Следовательно, условие глухой заделки запишется в следующем окончательном виде: при $\rho=1$

$$\vartheta=0 \text{ и } \dot{\psi}-\mu\frac{\psi}{\rho}=0, \tag{29}$$

для свободной же заделки усилие $T_1=0$, поэтому при $\rho=1$

$$\vartheta=0 \text{ и } \psi=0. \tag{30}$$

Определим теперь для обоих случаев закрепления постоянную a в выражении (28).

В случае глухой заделки находим

$$a = \frac{5 - 3\mu}{1 - \mu}.$$

Для свободной заделки $a = 3$.

Таким образом, функции ϑ (27) и ψ (28) при любом C удовлетворяют граничным условиям и первому из уравнений (23). Постоянную C подбираем теперь так, чтобы приближенно удовлетворялось и второе уравнение (23).

Подставляя в него ϑ и ψ, получим

$$8C\rho^2 + \frac{kC^3}{96}(\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - a\rho)(\rho^3 - \rho) - \nu\rho^2 \neq 0.$$

В соответствии с методом Галеркина (см. гл. VII т. I) умножаем это выражение на $\rho^3 - \rho$, интегрируем по области изменения ρ, т. е. от нуля до единицы, и полученный интеграл приравниваем нулю. Таким образом получаем необходимое уравнение для определения C:

$$8C\int_0^1 \rho^2(\rho^3 - \rho)\,d\rho + \frac{kC^3}{96}\int_0^1 (\rho^3 - \rho)^2(\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - a\rho)\,d\rho - \nu\int_0^1 \rho^2(\rho^3 - \rho)\,d\rho = 0,$$

откуда после интегрирования

$$-\frac{8}{12}C + \frac{kC^3}{96}\left(\frac{1}{14} - \frac{a}{24}\right) + \frac{\nu}{12} = 0. \qquad (31)$$

Согласно выражению (7)

$$w = \int \vartheta\,dr + C_3,$$

откуда

$$w = Cr_1\int(\rho^3 - \rho)\,d\rho + C_3$$

и окончательно

$$w = Cr_1\left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^2}{2}\right) + C_3.$$

При $\rho = 1$ $w = 0$, поэтому $C_3 = C\frac{r_1}{4}$.

$$w = \frac{Cr_1}{4}(1 - \rho^2)^2.$$

В центре

$$w_0 = \frac{Cr_1}{4}. \qquad (32)$$

Поставим в выражение (31) следующие величины

$$C = \frac{4w_0}{r_1}; \quad \nu = \frac{pr_1^3}{2D}; \quad k = 12(1 - \mu^2)\frac{r_1^2}{h^2}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)},$$

тогда

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{16}{3(1-\mu^2)} \cdot \frac{w_0}{h} + \left(\frac{a}{24} - \frac{1}{14}\right) 16 \left(\frac{w_0}{h}\right)^3. \quad (33)$$

Такова окончательная зависимость между прогибом мембраны w_0 и действующим на нее давлением.

Для случая свободной заделки $a = 3$. Тогда

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{16}{3(1-\mu^2)} \cdot \frac{w_0}{h} + \frac{6}{7}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3. \quad (34)$$

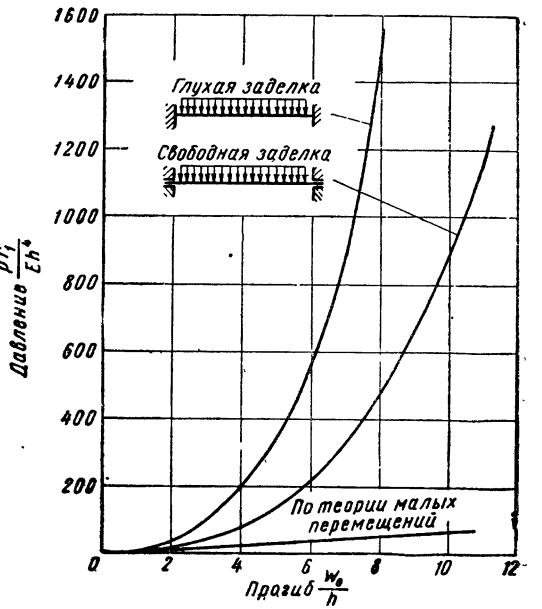
В случае глухой заделки $a = \frac{5-3\mu}{1-\mu}$, и выражение (33) принимает вид

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{16}{3(1-\mu^2)} \cdot \frac{w_0}{h} + \frac{2}{21} \cdot \frac{23-9\mu}{1-\mu}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3. \quad (35)$$

Таким образом, между максимальным прогибом мембраны и давлением p имеет место кубическая зависимость.

При малых прогибах членом, содержащим третью степень отношения $\frac{w_0}{h}$, можно пренебречь; при этом зависимости (34) и (35) переходят в выражение (26), выведенное при условии малых перемещений мембраны. Существенно отметить, что это относится как к глухой, так и к свободной заделке. Следовательно, при малых перемещениях, прогибы мембраны не зависят от того, разрешены радиальные смещения на контуре или нет.

Зависимости, даваемые выражениями (34) и (35), представлены в виде кривых на фиг. 187. Из последних видно, что с возрастанием прогибов жесткость мембран увеличивается. При свободной заделке, как и следовало ожидать, заданное давление вызывает прогибы бóльшие, чем при глухой. Линейная зависимость, даваемая теорией малых перемещений, представлена на фиг. 187 в виде прямой, касательной к обеим кубическим параболам в начале координат. Как видим, область применения линейной теории в рассматриваемом интервале прогибов весьма ограничена, поэтому расчет тонких плоских мембран следует вести с учетом больших перемещений.



Фиг. 187.

Теперь следует решить вопрос о напряжениях, возникающих в мембране. Эта задача, однако, является более сложной, чем рассмот-

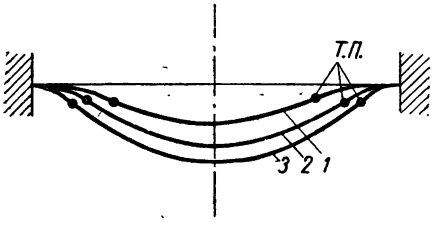
ренная. В гл. VII т. I уже указывалось, что приближенные вариационные методы дают приемлемые результаты при определении перемещений и обеспечивают сравнительно низкую точность при определении напряжений. Поэтому предварительно следует уточнить вопрос о форме упругой поверхности мембраны.

В. Уточненное решение задачи о больших прогибах плоской металлической мембраны

Выше уже указывалось, что задача о больших прогибах круглой мембраны решалась целым рядом исследователей. Результаты, полученные ими, мало отличаются друг от друга. Во всех случаях были установлены соотношения типа (33), которые можно записать в виде

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{A_1}{1-\mu^2} \cdot \frac{w_0}{h} + A_3 \left(\frac{w_0}{h}\right)^3, \tag{36}$$

где коэффициент A_1 при линейном члене во всех решениях один и тот же и равен $A_1 = \frac{16}{3}$, и нелинейная задача смыкается, таким образом, во всех случаях с линейной. Что же касается коэффициента A_3, то его величина для глухой заделки (только этот случай закрепления и разбирался в предыдущих исследованиях) колеблется в пределах от 2,76 [18] до 3,4 [16] в зависимости от способа апроксимации.



Фиг. 188.

Дальнейшие исследования этого вопроса (см. [18], [5], [10]) показывают, что все эти формулы, в том числе и выведенные выше зависимости (34) и (35), отражают с достаточной точностью характеристику мембраны лишь в пределах прогиба, не превышающего трех-четырех ее толщин:

$$\frac{w_0}{h} < 3.$$

Таким образом, перечисленные решения не учитывают, очевидно, некоторых существенных особенностей работы мембраны при больших перемещениях.

И в самом деле, все существующие решения были основаны на предположении, что упругая поверхность мембраны, работающей в области больших перемещений, является той же самой поверхностью четвертого порядка, которая имеет место и при малых прогибах.

В работе [10] показано, что упругая поверхность мембраны заметно меняет свою форму по мере роста прогибов. На фиг. 188 показан характер изменения осевого сечения упругой поверхности при различных прогибах мембраны. Из этой фигуры видно, что по мере увеличения прогиба точка перегиба на дуге осевого сечения сдвигается к контуру. При весьма больших перемещениях точка перегиба (т. п.) почти совпадает с контуром.

При подсчете напряжений это обстоятельство необходимо принимать во внимание во всех случаях. Точно так же следует его учитывать и при определении перемещений, если $w_0 > 3h$.

Попробуем задаться формой упругой поверхности в виде

$$\vartheta = C(\rho^z - \rho). \tag{37}$$

Это выражение отличается от зависимости (27) только тем, что здесь вместо показателя степени 3 введен неопределенный показатель z. При $z=3$ уравнение (37) обращается в функцию (27). По мере увеличения z точка перегиба (фиг. 188) смещается к контуру. В пределе при $z=\infty$ она располагается на самом контуре. Таким образом, подбирая должным образом z, имеется возможность уточнить решение.

Из первого уравнения (23) после интегрирования получаем

$$\psi = \frac{1}{2} C^2 \left[\frac{\rho^{2z+1}}{2z(2z+2)} - \frac{2\rho^{z+2}}{(z+1)(z+3)} + \frac{\rho^3}{8} - a\rho \right]. \tag{38}$$

В рассмотренных выше случаях закрепления мембраны имеем:

а) для глухой заделки

$$\left| \dot{\psi} - \mu \frac{\psi}{\rho} \right|_{\rho=1} = 0,$$

откуда

$$a = \frac{(z-1)^2}{4(z+1)(z+3)} \left[\frac{1}{1-\mu} + \frac{z+6}{2z} \right];$$

б) для свободной заделки

$$\psi_{\rho=1} = 0;$$

$$a = \frac{(z-1)^2(z+6)}{8z(z+1)(z+3)}.$$

Теперь подставим ψ и ϑ во второе уравнение (23). В результате этой подстановки получим функцию-ошибку (см. гл. VII т. I) в виде

$$C^3 \frac{1}{2} \left[\frac{\rho^{2z+1}}{4z(z+1)} - \frac{2\rho^{z+2}}{(z+1)(z+3)} + \frac{\rho^3}{8} - a\rho \right] (\rho^z - \rho) + \\ + \frac{C}{k} (z^2 - 1) \rho^{z-1} - \frac{\nu}{k} \rho^2 = f(\rho).$$

Поскольку в решении имеются два неопределенных параметра C и z, то умножаем $f(\rho)$ согласно выражению (30) (гл. VII т. I) последовательно на

$$\delta \vartheta_C = \frac{\partial \vartheta}{\partial C} \delta C = (\rho^z - \rho) \delta C$$

и на

$$\delta \vartheta_z = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \delta z = C \rho^z \ln \rho \delta z.$$

Полученные произведения интегрируем по ρ в пределах от нуля до единицы.

Тогда получим следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} C^3 a_3 + \frac{C}{k} a_1 &= \frac{\nu}{k} a_0; \\ C^3 b_3 + \frac{C}{k} b_1 &= \frac{\nu}{k} b_0, \end{aligned} \tag{39}$$

где коэффициенты a_3, b_3, a_1, ... имеют следующие значения:

$$a_0 = -\frac{z-1}{4(z+3)};$$

$$a_1 = -\frac{(z-1)^2}{2z}.$$

Для глухой заделки

$$a_3 = -\frac{1}{32}\cdot\frac{(z-1)^4}{(z+1)^2(z+3)^2}\left\{\frac{1}{1-\mu}+\frac{2z^3+39z^2+167z+174}{6(2z+1)(z+2)(z+5)}\right\}.$$

Для свободной заделки

$$a_3 = -\frac{1}{192}\cdot\frac{(z-1)^4(2z^3+39z^2+167z+174)}{(z+1)^2(z+3)^2(2z+1)(z+2)(z+5)}.$$

Далее,

$$b_0 = -\frac{1}{(z+3)^2};$$

$$b_1 = -\frac{z^2-1}{4z^2}.$$

Для глухой заделки

$$b_3 = \frac{z-1}{2}\left\{\frac{7z+5}{144z(z+1)^3(2z+1)^2}-\frac{5z+7}{18(z+1)^3(z+2)^2(z+3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{3(z+3)}{32(z+2)^2(z+5)^2}-\frac{(z-1)^2(3z+5)}{16(z+1)^3(z+3)^3}\left[\frac{1}{1-\mu}+\frac{z+6}{2z}\right]\right\}.$$

Для свободной заделки:

$$b_3 = \frac{z-1}{2}\left\{\frac{7z+5}{144z(z+1)^3(2z+1)^2}-\frac{5z+7}{18(z+1)^3(z+2)^2(z+3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{3(z+3)}{32(z+2)^2(z+5)^2}-\frac{(z-1)^2(3z+5)(z+6)}{32z(z+1)^3(z+3)^3}\right\}.$$

Перемещение

$$w = Cr_1\int(\rho^z-\rho)\,d\rho + C_3,$$

откуда

$$w = Cr_1\left(\frac{\rho^{z+1}-1}{z+1}-\frac{\rho^2-1}{2}\right),$$

где постоянная C_3 подобрана из условия равенства нулю прогиба w на контуре.

В центре мембраны

$$w_0 = Cr_1\frac{z-1}{2(z+1)}. \tag{40}$$

Исключаем из первого уравнения (39) величины C, ν и k. Тогда получим, как и прежде,

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{A_1}{1-\mu^2}\cdot\left(\frac{w_0}{h}\right)+A_3\left(\frac{w_0}{h}\right)^3. \tag{41}$$

Но здесь A_1 и A_3 зависят от z.

Действительно,

$$A_1 = \frac{2}{3z}(z+1)(z+3). \tag{42}$$

Для глухой заделки

$$A_3 = 2\frac{z+1}{z+3}\left\{\frac{1}{1-\mu} + \frac{2z^3+39z^2+167z+174}{6(2z+1)(z+2)(z+5)}\right\}. \tag{43}$$

Для свободной заделки

$$A_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{(z+1)(2z^3+39z^2+167z+174)}{(2z+1)(z+2)(z+3)(z+5)}. \tag{44}$$

Возвращаясь к уравнениям (39), исключаем из них $\frac{\nu}{k}$, тогда

$$C^2\left(\frac{a_3}{a_0} - \frac{b_3}{b_0}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0}\right).$$

Если исключить отсюда C, воспользовавшись зависимостью (40) и k, используя выражение (18), то получим:

$$\left(\frac{w_0}{h}\right)^2 = \frac{B}{1-\mu^2}, \tag{45}$$

где B следующим образом зависит от z:

$$B = \frac{1}{48}\cdot\frac{\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0}}{\frac{a_3}{a_0} - \frac{b_3}{b_0}}\cdot\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}.$$

Для глухой заделки

$$B = \frac{(z^2-9)(z+1)(z+3)}{z^2}:\left\{\frac{6}{1-\mu} + \right.$$
$$\left. + \frac{16z^6+296z^5+2178z^4+7892z^3+14\,533z^2+12\,726z+4011}{(2z+1)^2(z+2)^2(z+5)^2}\right\}. \tag{46}$$

Для свободной заделки

$$B = \frac{(z^2-9)(z+1)(z+3)(2z+1)^2(z+2)^2(z+5)^2}{z^2(16z^6+296z^5+2178z^4+7892z^3+14\,533z^2+12\,726z+4011)}. \tag{47}$$

Теперь имеется возможность, задаваясь параметром z, найти по формулам (46) или (47) величину B, а потом и отношение $\frac{w_0}{h}$ [см. выражение (45)]. Затем при известных z и $\frac{w_0}{h}$ из формулы (41) определяется p.

Заметим, между прочим, что при $z=3$ величина $B=0$ и $\frac{w_0}{h}=0$, т. е. решение совпадает с точным.

Если произвести указанные выкладки, характеристику мембраны можно дать в виде таблицы (см. табл. 8, составленную при условии, что $\mu=0{,}3$).

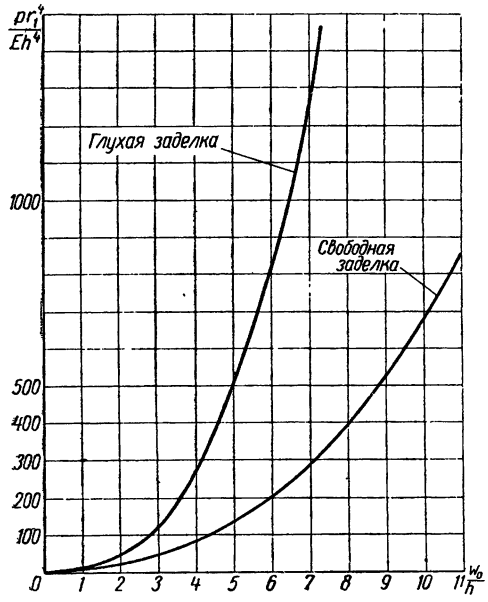
Таблица 8

К построению характеристики плоской мембраны

z	Свободная заделка		Глухая заделка		z	Свободная заделка		Глухая заделка	
	$\frac{w_0}{h}$	$\frac{pr_1^4}{Eh^4}$	$\frac{w_0}{h}$	$\frac{pr_1^4}{Eh^4}$		$\frac{w_0}{h}$	$\frac{pr_1^4}{Eh^4}$	$\frac{w_0}{h}$	$\frac{pr_1^4}{Eh^4}$
4	1,521	12,49	1,029	8,569	19	9,979	646,4	5,953	749,9
5	2,250	24,08	1,488	19,91	21	11,04	833,2	6,554	989,3
7	3,474	56,27	2,224	50,88	23	12,09	1050	7,151	1273
9	4,605	103,30	2,884	99,56	25	13,15	1299	7,748	1607
11	5,701	167,7	3,514	169,8	27	14,19	1587	8,346	1995
13	6,782	251,9	4,134	266,4	29	15,26	1915	8,942	2442
15	7,876	365,2	4,759	395,8	31	16,30	2276	9,534	2944
17	8,917	488,9	5,351	552,5	33	17,36	2690	10,13	3518

На основании этой таблицы может быть построена характеристика мембраны в двух случаях закрепления, при глухой и свободной заделках (фиг. 189).

Опыт показывает, что полученная таким образом расчетная характеристика дает хорошее совпадение с экспериментом до прогибов порядка 15—20 толщин, т. е. практически на всем диапазоне встречающихся рабочих упругих перемещений мембран.



Фиг. 189.

Перейдем теперь к определению напряжений, возникающих в мембране при больших прогибах.

Г. Напряжения в плоской мембране при больших прогибах

Максимальные напряжения при больших прогибах возникают в мембране на контуре защемления. Эти напряжения могут быть представлены в виде суммы растягивающих и изгибных напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{h} \pm \frac{6M_1}{h^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{h} \pm \frac{6M_2}{h^2}.$$

Знак «плюс» или «минус» берется в зависимости от того, для какой (верхней или нижней) поверхности мембраны определяется напряжение. Обычно вычисляется максимальное (по абсолютной величине) напряжение и рассматривается та поверхность, где слагаемые суммируются. Для мембраны, показанной на фиг. 188, это будет верхняя поверхность вблизи контура защемления.

Ограничимся рассмотрением случая глухой заделки, как имеюще-

го наибольшее практическое значение. При этом креплении мембраны на ее контуре $\varepsilon_2=0$, т. е.

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}(\sigma_2-\mu\sigma_1)=0.$$

Следовательно, $\sigma_2=\mu\sigma_1$.
Определим расчетное напряжение $\sigma_1=\sigma_{экв}$.
Радиальное усилие

$$T_1=-\frac{Ehr_1}{r}\psi.$$

Для глухой заделки при $\rho=1$ из выражения (38) получаем

$$T_1=C^2\frac{Eh}{8(1-\mu)}\cdot\frac{(z-1)^2}{(z+1)(z+3)}.$$

Далее, согласно выражениям (13)

$$M_1=-\frac{D}{r_1}\left(\dot{\vartheta}+\mu\frac{\vartheta}{\rho}\right).$$

Подставим сюда ϑ по зависимости (37), тогда

$$M_1=-\frac{DC}{r_1}(z-1).$$

Исключим теперь из полученных выражений для T_1 и M_1 параметр C (40). После несложных преобразований находим

$$\sigma_1=\sigma_{экв}=\frac{Eh^2}{r_1^2}\cdot\frac{z+1}{1-\mu}\frac{w_0}{h}\cdot\left[\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+3}\cdot\frac{w_0}{h}\right]. \tag{48}$$

Подсчет напряжения производится при помощи табл. 8. По заданному давлению p вычисляем величину $\frac{pr_1^4}{Eh^4}$; затем находим из таблицы для глухой заделки z и $\frac{w_0}{h}$. После этого по формуле (48) без труда определяется напряжение $\sigma_{экв}$.

Д. Определение прогибов абсолютно гибкой мембраны

Вопрос о характеристике мембраны, обладающей исчезающе малой жесткостью на изгиб, решается при помощи уравнений (23), выведенных выше, и не содержит в себе особых трудностей.

При исчезающе малой толщине h пластина ведет себя как абсолютно гибкая мембрана. Будем считать, что величина $k=\infty$ [см. формулу (18)], тогда, учитывая выражения (21) и (22), приводим уравнения (23) к виду

$$\rho\ddot{\psi}+\dot{\psi}-\frac{\psi}{\rho}=\frac{\vartheta^2}{2}; \tag{49}$$

$$\psi\vartheta=\nu_0\rho^2,$$

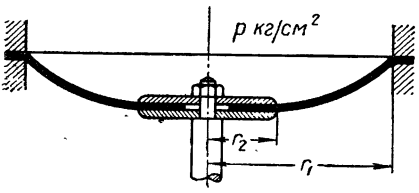
где

$$\nu_0=\frac{pr_1}{2Eh}. \tag{50}$$

Так выглядят уравнения абсолютно гибкой мембраны в случае нагружения ее равномерно распределенным давлением p.

Определим характеристику мембраны, т. е. найдем зависимость ее прогиба от величины давления. Решать эту задачу будем методом Галеркина.

Рассмотрим мембрану, имеющую жесткий центр (фиг. 190). Положим, что осевое сечение натянутой мембраны с достаточной степенью точности может быть представлено квадратичной зависимостью от радиуса r. Тогда угол ϑ должен быть линейной функцией ρ, т. е.



Фиг. 190.

$$\vartheta = C\rho. \tag{51}$$

Подставим ϑ в первое уравнение (49):

$$\rho\left[\frac{1}{\rho}(\psi\rho)^{\cdot}\right]^{\cdot} = \frac{C^2}{2}\rho^2,$$

откуда после интегрирования получим

$$\psi = \frac{C^2}{16}\left(\rho^3 + a\rho + \frac{b}{\rho}\right), \tag{52}$$

где постоянные a и b должны быть определены из граничных условий. Для мембраны, жестко закрепленной по контуру и имеющей жесткую связь с перемещающимся центром, эти условия будут следующими: при $\rho=\rho_2$ $(r=r_2)$ и при $\rho=1$ $(r=r_1)$ радиальное перемещение равно нулю.

Следовательно, как и для глухой заделки [см. зависимость (29)], имеем

$$\dot{\psi} - \mu\frac{\psi}{\rho} = 0 \text{ при } \rho=\rho_2 \text{ и } \rho=1.$$

Таким образом, получаем

$$a(1-\mu) - b(1+\mu) = -(3-\mu);$$

$$a(1-\mu) - \frac{b}{\rho_2^2}(1+\mu) = -\rho_2^2(3-\mu),$$

откуда

$$a = -\frac{3-\mu}{1-\mu}(1+\rho_2^2);$$

$$b = -\frac{3-\mu}{1+\mu}\rho_2^2.$$

Подставим теперь функции ψ и ϑ по зависимости (52) и (51) во второе уравнение (49) и, подобно тому как это делалось выше, умножим полученное произведение на ρ. Интеграл от полученного произведения, взятый в пределах от ρ_2 до единицы, приравниваем нулю:

$$\int_{\rho_2}^{1}\left[\frac{C^2}{16}\left(\rho^3 + a\rho + \frac{b}{\rho}\right)C\rho - \nu_0\rho^2\right]\rho\,d\rho = 0$$

или

$$\frac{1}{16}C^3\left[\frac{1-\rho_2^6}{6}+a\frac{1-\rho_2^4}{4}+b\frac{1-\rho_2^2}{2}\right]=\nu_0\frac{1-\rho_2^4}{4}.$$

Подставим сюда значения a и b, тогда

$$\frac{1}{16}C^3\left[\frac{1-\rho_2^6}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3-\mu}{1-\mu}(1-\rho_2^4)(1+\rho_2^2)-\frac{1}{2}\cdot\frac{3-\mu}{1+\mu}\rho_2^2(1-\rho_2^2)\right]=$$
$$=\nu_0\frac{1-\rho_2^4}{4}. \qquad (53)$$

Так как $w'=\vartheta$, то согласно выражению (51)

$$w=\frac{1}{2}Cr_1(\rho^2+C_3),$$

где постоянная C_3 выбирается из условия равенства нулю прогиба w на внешнем контуре.

Таким образом,

$$w=\frac{1}{2}Cr_1(\rho^2-1).$$

Перемещение центра мембраны

$$w_0=-\frac{1}{2}Cr_1(1-\rho_2^2),$$

откуда

$$C=-\frac{2w_0}{r_1(1-\rho_2^2)}.$$

Подставим теперь C и ν_0 в уравнение (53), тогда получим

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4}=A_3\left(\frac{w_0}{h}\right)^3, \qquad (54)$$

где

$$A_3=\frac{1}{(1-\rho_2^2)^3(1-\rho_2^4)}\left[-\frac{2}{3}(1-\rho_2^6)+\frac{3-\mu}{1-\mu}(1+\rho_2^2)(1-\rho_2^4)+\right.$$
$$\left.+2\frac{3-\mu}{1+\mu}\rho_2^2(1-\rho_2^2)\right]. \qquad (55)$$

Таким образом, характеристика абсолютно гибкой мембраны представляет собой кубическую кривую.

Если плоский центр отсутствует ($\rho_2=0$), то

$$A_3=-\frac{2}{3}+\frac{3-\mu}{1-\mu};$$

и мы получаем решение так называемой задачи Генки [14], т. е. задачи об определении прогибов абсолютно гибкой мембраны без жесткого центра:

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4}=\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(\frac{3-\mu}{1-\mu}-\frac{2}{3}\right).$$

При $\mu = 0{,}3$

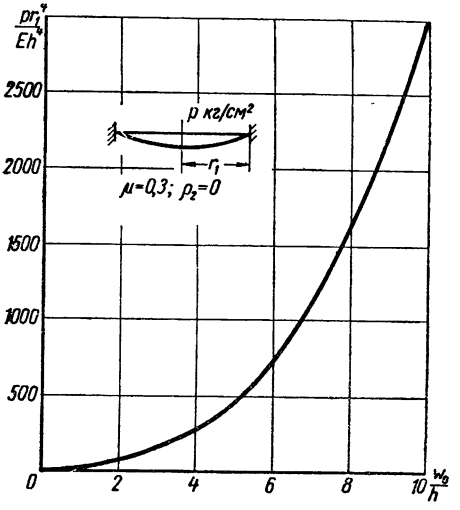
$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = 3{,}19\left(\frac{w_0}{h}\right)^3; \quad w_0 = 0{,}680\, r_1 \sqrt[3]{\frac{pr_1}{Eh}}. \tag{56}$$

Точное решение Генки, полученное при помощи рядов, будет

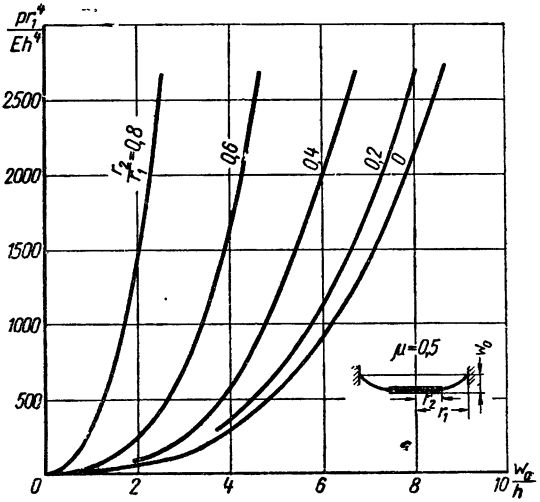
$$w_0 = 0{,}662\, r_1 \sqrt[3]{\frac{pr_1}{Eh}}.$$

Таким образом, приближенный метод Галеркина здесь дает весьма хорошие результаты (см. [6]).

Зависимость прогиба мембраны от действующего давления согласно полученному соотношению (56) представлена графически на



Фиг. 191.



Фиг. 192.

фиг. 191. Заметим, что построенная кривая касается в начале координат оси $\frac{w_0}{h}$. Следовательно, абсолютно гибкая мембрана при малых прогибах имеет нулевую жесткость. Способность мембраны противодействовать внешнему давлению возникает лишь по мере появления прогиба w_0.

Увеличение безразмерного радиуса ρ_2 сказывается, как легко заметить, на изменении масштаба кривой $p=p$ (w_0), т. е. на увеличении коэффициента A_3, характер же указанной зависимости при этом полностью сохраняется (фиг. 192).

Существенно отметить, что при весьма больших прогибах всякая мембрана ведет себя подобно абсолютно гибкой. Если, например, вернуться к разд. В настоящего параграфа и в уточненном решении положить $z=\infty$, то из выражения (46) получим

$$B = \frac{z^2}{\frac{6}{1-\mu}+4}.$$

Следовательно, согласно зависимости (45) $\frac{w_0}{h}$ пропорционально z.

Далее, из выражений (42) и (43) при $z \to \infty$ имеем

$$A_1 = \frac{2z}{3}; \qquad A_3 = \frac{2}{1-\mu} + \frac{1}{3}.$$

Обращаясь к характеристике мембраны [см. формулу (41)], видим, что, поскольку $\frac{w_0}{h}$ пропорционально z, первое слагаемое выражение (41) при неограниченном возрастании z становится малым по сравнению со вторым.

В связи с чем получаем

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \left(\frac{2}{1-\mu} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{w_0}{h}\right)^3,$$

что точно совпадает с выражением (56).

Вопрос о перестановочном усилии гибкой мембраны и ее так называемой эффективной площади подробно освещен в работе [10].

§ 3. ХЛОПАЮЩАЯ МЕМБРАНА

Под хлопающей мембраной понимается тонкостенный сферический купол малого угла подъема, изготовленный из материала с высоким пределом упругости.

Хлопающая мембрана под действием некоторых усилий, в частности распределенного по выпуклой стороне давления, при определенных условиях теряет устойчивость. Достаточная тонкостенность оболочки и высокий предел упругости материала, из которого она изготовлена, обеспечивают ей при этом полное сохранение упругих свойств.

Подобную потерю устойчивости, не сопровождающуюся разрушением детали, будем называть выщелкиванием.

Чтобы составить себе представление о том эффекте, который имеется в виду, достаточно вспомнить поведение тонкого покоробленного листа жести при его выпрямлении или же характер деформации слегка искривленной крышки какой-либо жестяной банки при надавливании на нее с выпуклой стороны.

Описанное свойство хлопающей мембраны скачкообразно изменять свой прогиб находит применение в приборостроении и в некоторых бытовых предметах. Достаточно напомнить, например, что простейшая масленка для смазки машин работает на принципе хлопающей мембраны. Развивающаяся при выщелкивании выпуклого донышка кинетическая энергия расходуется на выбрасывание масла. На этом же принципе работают простейшие распылители порошков. Хлопающая мембрана используется в ряде случаев и как датчик давления.

Построим характеристику хлопающей мембраны, т. е. определим зависимость ее прогиба от внешнего давления.

Для сферической оболочки (фиг. 193)

$$\sin\theta = \frac{r}{R} = \frac{r_1}{R}\rho.$$

Так как угол θ по условию мал, то

$$\theta = \frac{r_1}{R}\rho.$$

Обозначим

$$\theta_1 = \frac{r_1}{R}, \tag{57}$$

тогда

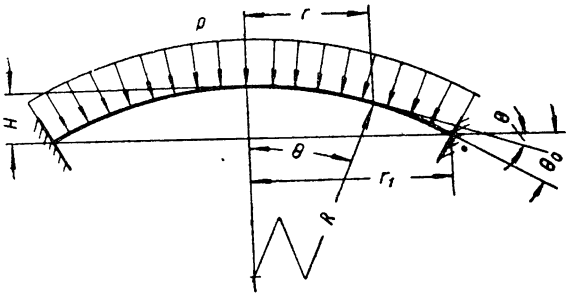
$$\theta = \theta_1 \rho.$$

Далее,

$$H = R(1 - \cos\theta_1) \approx \frac{R\theta_1^2}{2}.$$

Из этого выражения и соотношения (57) следует, что

$$\theta_1 = \frac{2H}{r_1}. \tag{58}$$



Фиг. 193.

Если оболочка находится под действием давления p, равномерно распределенного по ее выпуклой стороне, то функция f по первой формуле (20) обращается в ноль, а функция φ по второй формуле (20) будет следующей:

$$\varphi = -\nu\rho^2.$$

Уравнения (19) примут при этом вид

$$\begin{aligned} &\rho\ddot{\psi} + \dot{\psi} - \frac{\psi}{\rho} = \vartheta\left(\theta_1\rho + \frac{\vartheta}{2}\right); \\ &\rho\ddot{\vartheta} + \dot{\vartheta} - \frac{\vartheta}{\rho} = -k\psi(\theta_1\rho + \vartheta) + \nu\rho^2. \end{aligned} \tag{59}$$

При $\theta_1 = 0$ эти зависимости переходят в уравнения (23) плоской мембраны, рассмотренной выше.

При решении системы уравнений (59) используем метод Галеркина.

Зададимся упругой поверхностью оболочки. Будем считать, что вертикальные перемещения оболочки изменяются по радиусу по тому же закону, что и для круглой пластины при малых прогибах, т. е. по кривой четвертого порядка, тогда угол поворота дуги меридиана ϑ в функции радиуса ρ будет представляться уравнением третьей степени, т. е.

$$\vartheta = C(\rho^3 - \rho), \tag{60}$$

где C — некоторая постоянная, зависящая от давления p или параметра давления ν.

При $\rho = 0$ и $\rho = 1$ угол ϑ из условий симметрии и краевого защемления обращается в ноль.

Задаваясь таким законом изменения угла ϑ [см. формулу (60)], мы получаем решение тем более точное, чем меньше прогибы оболочки и чем меньше ее высота H, т. е. чем ближе ее форма к форме пластины.

Подставим принятое выражение в первое из уравнений (59), тогда

$$\rho\left[\frac{1}{\rho}(\psi\rho)^{\cdot}\right]^{\cdot} = C(\rho^3 - \rho)\left[\theta_1\rho + \frac{1}{2}C(\rho^3 - \rho)\right].$$

Двукратным интегрированием находим ψ:

$$\psi = \frac{1}{96}C^2(\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3) + \frac{1}{24}C\theta_1(\rho^5 - 3\rho^3) + A\rho + \frac{B}{\rho}, \qquad (61)$$

где A и B — произвольные постоянные, которые должны быть определены из граничных условий.

Поскольку $\psi = -\frac{T_1 r}{Ehr_1}$, а растягивающее усилие T_1 в центре оболочки остается величиной конечной, то при $\rho = 0$ $\psi = 0$. Это условие выполняется только в том случае, если $B = 0$.

Как и для мембраны, ограничимся рассмотрением двух случаев закрепления — глухой и свободной заделкой.

В первом случае угол поворота и радиальное смещение на контуре равны нулю, поэтому согласно выражению (29) при

$$\rho = 1 \qquad \dot{\psi} - \mu\frac{\psi}{\rho} = 0.$$

Для свободной заделки усилие T_1 на контуре равно нулю, и тогда при $\rho = 1$ $\psi = 0$.

Из этих условий определяем величину A. Получаем:

для свободной заделки

$$A = -\frac{3}{96}C^2 + \frac{2}{24}C\theta_1;$$

для глухой заделки

$$A = -\frac{1}{96}C^2\frac{5 - 3\mu}{1 - \mu} + \frac{1}{24}C\theta_1\frac{4 - 2\mu}{1 - \mu}.$$

Таким образом, функции ϑ (60) и ψ (61) удовлетворяют граничным условиям и первому из уравнений (59). Подставим ψ и ϑ во второе уравнение (59).

Для свободной заделки получим

$$8C\rho^2 + k\left[\frac{1}{96}C^2(\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - 3\rho) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{24}C\theta_1(\rho^5 - 3\rho^3 + 2\rho)\right]\left[\theta_1\rho + C(\rho^3 - \rho)\right] - \nu\rho^2 = f(\rho).$$

Согласно методу Галеркина умножаем это выражение на $(\rho^3-\rho)$ и интегрируем по области изменения ρ, т. е. от нуля до единицы:

$$\frac{1}{96}C^3\int_0^1(\rho^7-4\rho^5+6\rho^3-3\rho)(\rho^3-\rho)^2\,d\rho+$$

$$+C^2\theta_1\int_0^1\left[\frac{1}{96}(\rho^7-4\rho^5+6\rho^3-3\rho)(\rho^3-\rho)\rho+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{24}(\rho^5-3\rho^3+2\rho)(\rho^3-\rho)^2\right]d\rho+\frac{1}{24}C\theta_1^2\int_0^1(\rho^5-3\rho^3+2\rho)(\rho^3-\rho)\rho\,d\rho+$$

$$+\frac{8}{k}C\int_0^1\rho^2(\rho^3-\rho)\,d\rho=-\frac{\nu}{k}\int_0^1\rho^2(\rho^3-\rho)\,d\rho,$$

откуда после интегрирования имеем

$$-C^3\frac{1}{56\cdot32}+C^2\theta_1\frac{1}{4\cdot96}+C\left(-\frac{\theta_1^2}{15\cdot24}-\frac{2}{3k}\right)=-\frac{\nu}{k}\cdot\frac{1}{12}. \qquad (62)$$

Так как $w'=\vartheta$, то

$$w=\int\vartheta\,dr+C_3,$$

или

$$w=Cr_1\int(\rho^3-\rho)\,d\rho+C_3;$$

окончательно

$$w=Cr_1\left(\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^2}{2}\right)+C_3.$$

При $\rho=1$

$$w=0;\quad C_3=\frac{Cr_1}{4};$$

$$w=\frac{Cr_1}{4}(1-\rho^2)^2.$$

Наибольший прогиб w_0 в центре при $\rho=0$ будет

$$w_0=\frac{Cr_1}{4}.$$

Согласно последнему выражению и зависимости (18), (21) и (58) имеем

$$\theta_1=\frac{2H}{r_1};\quad C=\frac{4w_0}{r_1};$$

$$k=12(1-\mu^2)\frac{r_1^2}{h^2};\quad \nu=k\frac{pr_1}{2Eh},$$

тогда после подстановки этих величин в выражение (62) получим

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4}=\left(\frac{16}{15}\cdot\frac{H^2}{h^2}+\frac{16}{3(1-\mu^2)}\right)\frac{w_0}{h}-2\frac{H}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2+\frac{6}{7}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3. \qquad (63)$$

Если подобное преобразование проделать для случая глухой заделки, то можно получить аналогичное выражение, связывающее давление p с прогибом w_0:

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \left(\frac{8}{15}\cdot\frac{7+2\mu}{1-\mu}\frac{H^2}{h^2} + \frac{16}{3(1-\mu^2)}\right)\frac{w_0}{h} - 2\frac{3-\mu}{1-\mu}\cdot\frac{H}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2 + \\ + \frac{2}{21}\cdot\frac{23-9\mu}{1-\mu}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 \qquad (64)$$

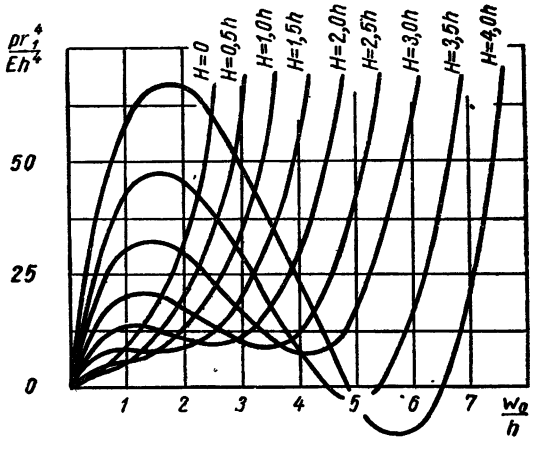
или при $\mu = 0{,}3$

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \left(4{,}88\frac{H^2}{h^2} + 5{,}87\right)\frac{w_0}{h} - 7{,}71\frac{H}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2 + 2{,}76\left(\frac{w_0}{h}\right)^3.$$

Таким образом, между давлением p и прогибом w_0 мембраны в обоих случаях получена кубическая зависимость. Теперь проследим, как изменяется характер этой зависимости с изменением величины параметра $\frac{H}{h}$, т. е. начальной выпуклости мембраны.

На фиг. 194 показано семейство кривых $\frac{pr_1^4}{Eh^4} = f\left(\frac{w_0}{h}\right)$ при параметре $\frac{H}{h}$ для случая глухой заделки.

При $\frac{H}{h} = 0$ характеристика оболочки $p = f(w_0)$ представляет собой монотонную функцию. Возрастание высоты H вызывает прежде всего повышение начальной жесткости, а затем нарушение монотонности кривой. При некотором значении $\frac{H}{h}$ (в рассматриваемом случае $\frac{H}{h} \approx 1{,}6$) на кривой появляется участок с отрицательной производной, расположенный между двумя экстремальными точками. Этот участок можно назвать участком отрицательной жесткости, поскольку возрастание прогиба в данном случае происходит при уменьшении нагрузки.



Фиг. 194.

Можно показать, что такой режим работы мембраны является неустойчивым, а давления, соответствующие экстремальным точкам, будут критическими для данной оболочки. После достижения давлением первого экстремума мембрана, минуя неустойчивый участок, скачком изменит свой прогиб. Дальнейшая работа будет происходить на правой устойчивой возрастающей части кривой.

Разгрузка мембраны вызовет обратное скачкообразное изменение прогиба, соответствующее второму критическому давлению, если только напряжения в ней при первом скачке остались чисто упругими.

Дальнейшее увеличение высоты купола H дает, как видно из кривой на фиг. 194, еще большее искривление характеристики, и при некотором $\frac{H}{h}$ (для свободной заделки при $\frac{H}{h}=7{,}6$, для глухой при $\frac{H}{h}=3{,}4$) кривая начинает пересекать ось абсцисс. Оболочка при давлении $p=0$ имеет, следовательно, в этом случае три формы равновесия, из которых две устойчивы, а третья — промежуточная — неустойчива. Такой купол после хлопка и последующей разгрузки в начальное положение не возвращается, даже если напряжения в нем останутся целиком упругими. Для того чтобы привести оболочку в исходное положение, необходимо приложить к ней нагрузку обратного знака и, после того как оболочка даст хлопок, снять эту нагрузку.

Точно та же картина при нескольких иных числовых значениях параметра $\frac{H}{h}$ повторяется и в случае свободной заделки контура купола.

Найдем то значение высоты $\frac{H}{h}$, при котором купол приобретает способность хлопка.

Предварительно выражения (63) и (64) перепишем в обобщенном виде:

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4}=\left(A_1\frac{H^2}{h^2}+A_0\frac{1}{1-\mu^2}\right)\frac{w_0}{h}-A_2\frac{H}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2+A_3\left(\frac{w_0}{h}\right)^3. \tag{65}$$

Для свободной заделки

$$A_0=\frac{16}{3};\quad A_1=\frac{16}{15};\quad A_2=2;\quad A_3=\frac{6}{7}.$$

Для глухой заделки

$$A_0=\frac{16}{3};\quad A_1=\frac{8}{15}\cdot\frac{7-2\mu}{1-\mu};\quad A_2=2\,\frac{3-\mu}{1-\mu};\quad A_3=\frac{2}{21}\cdot\frac{23-9\mu}{1-\mu}.$$

Продифференцируем выражение (65) по $\frac{w_0}{h}$ и полученную производную приравняем нулю:

$$A_1\frac{H^2}{h^2}+A_0\frac{1}{1-\mu^2}-2A_2\frac{H}{h}\cdot\frac{w_0}{h}+3A_3\left(\frac{w_0}{h}\right)^2=0. \tag{66}$$

Решая это уравнение относительно $\frac{w_0}{h}$, определим для данной характеристики экстремальные точки, которые в зависимости от величины $\frac{H}{h}$ будут обе либо действительными, либо мнимыми. Если мы получим вещественное значение $\frac{w_0}{h}$, то оболочка будет при достаточном давлении давать хлопок. Для этого необходимо, чтобы дискриминант последнего уравнения был больше нуля:

$$4A_2^2\frac{H^2}{h^2}-4\cdot 3A_3\left(A_1\frac{H^2}{h^2}+A_0\frac{1}{1-\mu^2}\right)\geqslant 0,$$

откуда

$$\frac{H}{h}\geqslant\sqrt{\frac{3A_0A_3}{(1-\mu^2)\left(A_2^2-3A_1A_3\right)}}.$$

Критическое значение параметра $\frac{H}{h}$, определяющего возможность хлопка для данной мембраны, будет:

в случае свободной заделки

$$\left(\frac{H}{h}\right)_{кр} = \sqrt{\frac{120}{11(1-\mu^2)}} \approx 3{,}5;$$

в случае глухой заделки

$$\left(\frac{H}{h}\right)_{кр} = \sqrt{\frac{40(23-9\mu)}{(1+\mu)[105(3-\mu)^2 - 4(7-2\mu)(23-9\mu)]}} \approx 1{,}6.$$

Из уравнения (66) определяем

$$\frac{w_0}{h} = \frac{1}{3A_3}\left[A_2\frac{H}{h} \pm \sqrt{\frac{H^2}{h^2}(A_2^2 - 3A_1A_3) - A_0A_3\frac{3}{1-\mu^2}}\right].$$

Подставляя это значение $\frac{w_0}{h}$ в выражение (65), после необходимых преобразований получим

$$\left(\frac{pr_1^4}{Eh^4}\right)_{\substack{кр1\\кр2}} = k_1\frac{H}{h}\left(k_2\frac{H^2}{h^2} + \frac{1}{1-\mu^2}\right) \pm k_3\left(k_4\frac{H^2}{h^2} - \frac{1}{1-\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad (67)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{A_0A_2}{A_3}; \quad k_2 = \frac{A_1A_3 - \frac{2}{9}A_2^2}{A_0A_3};$$

$$k_3 = 2A_3\left(\frac{A_0}{3A_3}\right)^{\frac{3}{2}}; \quad k_4 = \frac{\frac{1}{3}A_2^2 - A_1A_3}{A_0A_3}.$$

Знак плюс в выражении (67) соответствует верхнему критическому давлению , а минус—нижнему.

В случае свободной заделки

$$k_1 = \frac{112}{27}; \quad k_2 = \frac{1}{180}; \quad k_3 = \frac{12}{7}\left(\frac{56}{27}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 5{,}121; \quad k_4 = \frac{11}{120}.$$

В случае глухой заделки

$$k_1 = \frac{112}{3}\cdot\frac{3-\mu}{23-9\mu} \approx 4{,}96;$$

$$k_2 = \frac{7-2\mu}{10(1-\mu)} - \frac{7}{4}\cdot\frac{(3-\mu)^2}{(1-\mu)(23-9\mu)} \approx 0{,}0165;$$

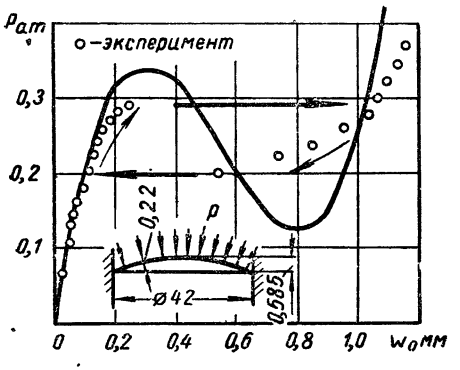
$$k_3 = \frac{4}{21}\cdot\frac{23-9\mu}{1-\mu}\left(\frac{56}{3}\cdot\frac{1-\mu}{23-9\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 2{,}85;$$

$$k_4 = \frac{21}{8}\cdot\frac{(3-\mu)^2}{(1-\mu)(23-9\mu)} - \frac{1}{10}\cdot\frac{7-2\mu}{1-\mu} \approx 0{,}432.$$

Пользуясь приведенными числовыми данными для коэффициентов k, можно без труда подсчитать величины верхнего и нижнего критического давления.

Согласно выражению (67) для свободной заделки при $\frac{H}{h} > 7{,}6$ и для глухой при $\frac{H}{h} > 3{,}4$ $p_{кр2}$ становится меньше нуля. Следовательно, при этом условии прощелкнувшая мембрана в исходное положение после снятия внешнего давления не возвращается.

Сопоставление полученных расчетных кривых с экспериментом показывает, что прощелкивание мембраны как в одну, так и в другую сторону происходит в интервале верхнего и нижнего критического давлений. Так, при нагрузке хлопок происходит при давлении p, несколько меньшем верхнего критического, а при разгрузке — при давлении большем нижнего критического.



Фиг. 195.

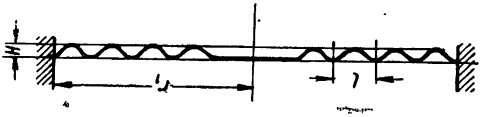
На фиг. 195 показана расчетная кривая и экспериментальные точки, снятые при испытании мембраны.

Полученное расхождение между теоретической и опытной кривой в этом, да и вообще во всех подобных случаях обусловливается, с одной стороны, приближенностью самого расчета, а с другой — несовершенством формы оболочки, т. е. неизбежными отклонениями в форме реального объекта от схематизированной расчетной схемы.

§ 4. ГОФРИРОВАННАЯ МЕМБРАНА

А. Особенности гофрированных мембран

Гофрированная мембрана представляет собой тонкую круглую пластину с концентрически нанесенными складками. Осевое сечение гофрированной мембраны представлено на фиг. 196. На контуре мембрана защемлена. В центральной части для удобства припайки или приварки соответствующего элемента передаточного механизма имеется плоский участок.

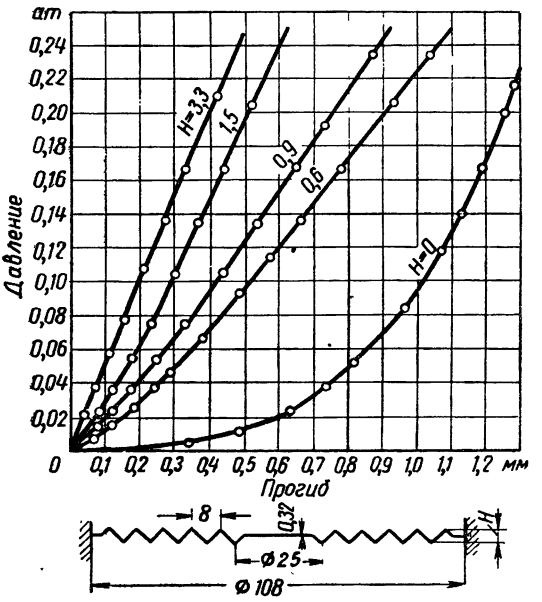


Фиг. 196.

Если мембрану нагрузить избыточным давлением, то она даст заметный прогиб, величина которого при условии предварительной тарировки позволяет определить величину давления. Таким образом, гофрированная мембрана является датчиком давления. Сравнительно небольшие размеры, простота конструкции и стабильность показаний обеспечили гофрированной мембране как упругому элементу широкое распространение в приборостроении.

Глубина и форма волнообразных складок, или, как их называют, гофр, бывает весьма разнообразной и выбор их определяется характеристикой (зависимостью между усилием и прогибом), которую желательно получить от мембраны. Так, например, экспериментальным путем установлено, что мембрана, имеющая мелкую (неглубокую) гофрировку, дает нелинейную характеристику и жесткость мембраны возрастает с прогибом примерно так же, как и для плоской мембраны, но не в столь высокой степени.

По мере уменьшения глубины гофрировки мембрана по своим свойствам приближается к обыкновенной пластине. Полное отсутствие гофрировки приводит к чрезмерно искривленной характеристике, не всегда пригодной для прибора. Кроме того, при отсутствии гофров, как показывает практика, очень трудно выдержать необходимую однородность изготовляемых мембран. Плоская мембрана склонна сохранять некоторую покоробленность, что приводит (особенно для тонких мембран) к большому разбросу характеристик в пределах одной партии.



Фиг. 197.

С углублением гофрировки характеристика мембраны выпрямляется, т. е. в этом случае в меньшей степени сказывается нелинейность перемещений, и одновременно возрастает жесткость мембраны. На фиг. 197 представлено изменение характеристики мембраны с углублением гофрировки.

Опыт производства мембран показывает, что путем подлежащего подбора глубины, формы, размеров и расположения гофр можно изменять характеристику в довольно широких пределах. Для практики приборостроения это является весьма важным свойством мембран, так как позволяет компенсировать характеристикой мембраны нелинейности замеряемого параметра по давлению и, как говорят, выпрямлять шкалу прибора.

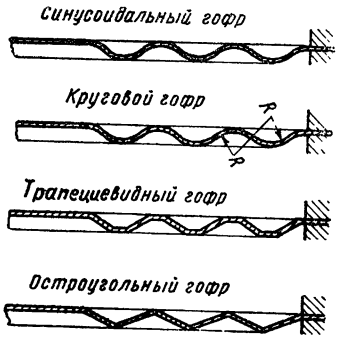
Таким образом, гофрировка мембраны играет двоякую роль. С одной стороны, она дает возможность варьировать характеристикой мембраны, а с другой — снимает нежелательное влияние случайных неоднородностей, наиболее сильно проявляющихся в плоской мембране.

Формы наиболее часто встречающихся гофров показаны на фиг. 198. Это синусоидальный, круговой, трапециевидный и остроугольный гофры. Мембраны, из которых составляются мембранные коробки, имеют в большинстве случаев (фиг. 199) краевое закругление с большим углом подъема θ — так называемый краевой гофр.

О том, как влияет форма гофрировки на вид характеристики, судить очень трудно. Экспериментальное изучение этого влияния связано со значительными технологическими трудностями. Для каждой новой

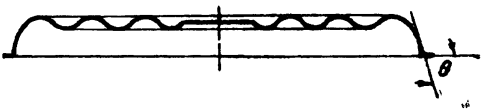
формы мембраны необходимо изготовление специальной матрицы, что исключает свободное варьирование параметрами мембраны. Эта трудность заставляет во всех случаях придерживаться более или менее удачно выбранных вариантов с определенной, иногда довольно причудливой, формой гофрировки и неизменными размерами мембраны.

Совершенно очевидно поэтому, что при конструировании новых мембран с заданной характеристикой большое значение приобретает теоретическое исследование вопроса и создание теории гофрированных мембран, которая позволила бы вскрыть сложные внутренние закономерности этого упругого элемента.



Фиг. 198.

Основной задачей, связанной с расчетом гофрированной мембраны, является определение ее характеристики при заданной форме гофрировки. В настоящее время уже имеется довольно много работ, посвященных этому вопросу. Прежде всего эта задача рассматривалась Д. Ю. Пановым [7]. Им были выведены уравнения больших прогибов гофрированной мембраны, которые затем решались путем разложения по степеням параметров.



Фиг. 199.

Полученное решение, однако, имело очень узкую область применения и не позволяло расчетным путем установить характеристику мембраны с необходимой для практики точностью.

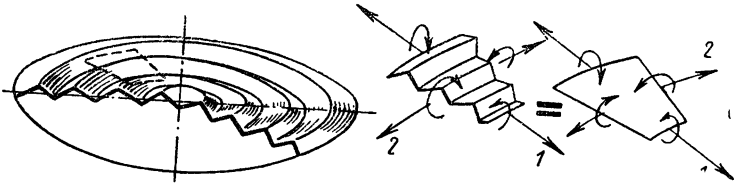
В дальнейшем нами была сделана попытка решить уравнения мембраны методом Галеркина [9], [10]. Такой прием позволил дать уравнения для характеристики мембраны, применимые в пределах прогибов, не превышающих двух толщин мембраны. Несмотря на то, что такое решение являлось заметным шагом вперед, для расчетных целей оно давало еще очень немного. Применяемые на практике мембраны имеют прогибы порядка 10 толщин и более.

В настоящее время Л. Е. Андреевой [2] удалось уточнить решение и впервые довести его до такого вида, при котором расчетная характеристика удовлетворительно согласуется с экспериментом в пределах всего практически используемого диапазона изменения прогибов мембраны. Ниже это решение и приводится.

Необходимо вместе с тем подчеркнуть, что, несмотря на то что для гофрированных мембран получены первые расчетные формулы, теория этого упругого элемента по существу еще не создана. Еще не ясно, как рассчитывать мембраны с краевым гофром. Этому вопросу пока посвящена только одна работа [1]. Совершенно ничего не сделано для решения задачи обратного вида — определения простейшей формы гофрировки для получения заданной характеристики. Все эти вопросы еще ждут своего разрешения.

Б. Выбор расчетной схемы для гофрированной мембраны

Основная идея метода расчета характеристики мембраны, предложенного Л. Е. Андреевой, заключается в том, чтобы заменить гофрированную мембрану плоской, а влияние гофрировки учесть путем введения коэффициентов анизотропии мембраны при растяжении и изгибе в окружном и радиальном направлениях. Такая идея не является новой. В работе В. А. Плотниновой [8] была предпринята, по-видимому, не первая попытка решить задачу таким же образом. Однако при этом не было получено положительного результата, поскольку недостаточно



Фиг. 200.

хорошо определялись коэффициенты анизотропии, да и сам метод решения не обеспечивал необходимой точности на случай сравнительно больших прогибов.

Понятно, что рассмотрение гофрированной мембраны как анизотропной возможно лишь в тех случаях, когда мембрана имеет однородные гофры, да и к тому же число волн гофрировки достаточно велико. О том, каково это число, можно пока судить только на основании эксперимента. Опыт показывает, что предложенный подход к определению характеристики мембраны дает приемлемые результаты уже в том случае, когда на радиусе мембраны расположено три и более полные волны гофрировки.

Рассмотрим элемент конечных размеров, выделенный из гофрированной мембраны (фиг. 200), и заменим его плоским элементом той же толщины h. Этот плоский элемент обладает свойствами анизотропии. Коэффициенты упругости для него должны быть определены из условий одинаковой жесткости на изгиб и растяжение плоского и гофрированного элементов.

Обозначим через $(E_1)_p$ и $(E_2)_p$ коэффициенты, соответствующие модулю упругости на растяжение анизотропной мембраны в радиальном и окружном направлениях. Очевидно, что в радиальном направлении гофрированная мембрана при растяжении дает большее удлинение, нежели плоская мембрана той же толщины. Следовательно, $(E_1)_p < E$. В окружном направлении гофрированная мембрана на растяжение будет более жесткой, чем такая же плоская мембрана, и $(E_2)_p > E$.

Введем коэффициенты $(k_1)_p$ и $(k_2)_p$ и примем

$$(E_1)_p = \frac{1}{(k_1)_p} E;$$
$$(E_2)_p = (k_2)_p E,$$

где оба коэффициента $(k_1)_p$ и $(k_2)_p$ больше единицы.

Аналогично можно записать модули упругости и при изгибной деформации мембраны:

$$(E_1)_u = \frac{1}{(k_1)_u} E;$$
$$(E_2)_u = (k_2)_u E.$$

Соответственно в различной форме выписывается и закон Гука для растяжения и изгиба:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_1)_p &= \frac{(\sigma_1)_p}{(E_1)_p} - (\mu_2)_p \frac{(\sigma_2)_p}{(E_2)_p};\\
(\varepsilon_2)_p &= \frac{(\sigma_2)_p}{(E_2)_p} - (\mu_1)_p \frac{(\sigma_1)_p}{(E_1)_p};\\
(\varepsilon_1)_u &= \frac{(\sigma_1)_u}{(E_1)_u} - (\mu_2)_u \frac{(\sigma_2)_u}{(E_2)_u};\\
(\varepsilon_2)_u &= \frac{(\sigma_2)_u}{(E_2)_u} - (\mu_1)_u \frac{(\sigma_1)_u}{(E_1)_u}.
\end{aligned} \tag{68}$$

Рассмотрим теперь значения приведенных коэффициентов Пуассона $(\mu_1)_p$, $(\mu_2)_p$, $(\mu_1)_u$ и $(\mu_2)_u$. Положим, что к гофрированному элементу приложены только окружные напряжения $(\sigma_2)_p$ и $(\sigma_2)_u$ (вдоль гофрировки).

Поперечное сужение, которое при этом возникнет, будет тем же, что и для плоской мембраны. Поэтому очевидно

$$(\mu_2)_p = (\mu_2)_u = \mu, \tag{69}$$

где μ — коэффициент Пуассона материала.

Согласно принципу взаимности работ (см. гл. XI т. I) относительное удлинение в радиальном направлении, вызванное напряжениями σ, приложенными в окружном направлении, будет тем же, которое возникло бы в окружном направлении под действием таких же радиальных напряжений, т. е. величины

$$(\varepsilon_1)_p = \frac{0}{(E_1)_p} - (\mu_2)_p \frac{\sigma}{(E_2)_p}$$

и

$$(\varepsilon_2)_p = \frac{0}{(E_2)_p} - (\mu_1)_p \frac{\sigma}{(E_1)_p}$$

равны и, следовательно,

$$\frac{(\mu_2)_p}{(E_2)_p} = \frac{(\mu_1)_p}{(E_1)_p}. \tag{70}$$

Аналогично имеем и для изгиба

$$\frac{(\mu_2)_u}{(E_2)_u} = \frac{(\mu_1)_u}{(E_1)_u}. \tag{71}$$

Теперь преобразуем выражения (68) с учетом полученных соотношений (69)—(71), тогда получим

$$\left.\begin{aligned}
(\varepsilon_1)_p &= \frac{(k_1)_p}{E}\left[(\sigma_1)_p - \frac{\mu}{(k_1)_p (k_2)_p}(\sigma_2)_p\right];\\
(\varepsilon_2)_p &= \frac{1}{(k_2)_p E}[(\sigma_2)_p - \mu(\sigma_1)_p];
\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\varepsilon_1)_u &= \frac{(k_1)_u}{E}\left[(\sigma_1)_u - \frac{\mu}{(k_1)_u (k_2)_u}(\sigma_2)_u\right];\\
(\varepsilon_2)_u &= \frac{1}{(k_2)_u E}[(\sigma_2)_u - \mu(\sigma_1)_u].
\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Посмотрим теперь, как преобразуются уравнения больших прогибов круглой плоской мембраны (23) с учетом коэффициентов конструктивной анизотропии $(k_1)_p$, $(k_2)_p$, $(k_1)_a$ и $(k_2)_a$.

В. Вывод уравнений больших перемещений плоской анизотропной мембраны

Возвратимся к § 1 настоящей главы. Все уравнения равновесия и совместности деформаций и перемещений остаются неизменными независимо от того, изотропной или анизотропной будет оболочка. Вводя коэффициенты геометрической анизотропии $(k_1)_p$, $(k_2)_p$,... можно обнаружить различия в выводе, лишь начиная с уравнения (12).

Повторяя вывод уравнения (12) с измененным законом Гука (72), будем, очевидно, иметь

$$\left.\begin{aligned}(\varepsilon_1)_p &= \frac{(k_1)_p}{Eh}\left[T_1 - \frac{\mu}{(k_1)_p\,(k_2)_p}\,T_2\right];\\ (\varepsilon_2)_p &= \frac{1}{(k_2)_p\,Eh}\,[T_2 - \mu\,T_1].\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Решим теперь уравнения (73) относительно $(\sigma_1)_a$ и $(\sigma_2)_a$ с учетом того, что

$$(\varepsilon_1)_a = -z\vartheta'; \quad (\varepsilon_2)_a = -z\,\frac{\vartheta}{r},$$

тогда

$$(\sigma_1)_a = -\frac{Ez}{(k_1)_a\left[1-\dfrac{\mu^2}{(k_1)_a\,(k_2)_a}\right]}\left(\vartheta' + \mu\,\frac{\vartheta}{r}\right);$$

$$(\sigma_2)_a = -\frac{(k_2)_a\,Ez}{1-\dfrac{\mu^2}{(k_1)_a\,(k_2)_a}}\left[\frac{\vartheta}{r} + \frac{\mu}{(k_1)_a\,(k_2)_a}\,\vartheta'\right],$$

откуда для изгибающих моментов вместо выражений (13) получим

$$\left.\begin{aligned}M_1 &= -\frac{D_a}{(k_1)_a}\left(\vartheta' + \mu\,\frac{\vartheta}{r}\right);\\ M_2 &= -(k_2)_a D_a\left(\frac{\vartheta}{r} + \frac{\mu}{(k_1)_a\,(k_2)_a}\,\vartheta'\right),\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

где жесткость D_a анизотропной оболочки, в отличие от обычного выражения для D, имеет следующее значение:

$$D_a = \frac{Eh^3}{12\left[1-\dfrac{\mu^2}{(k_1)_a\,(k_2)_a}\right]}. \tag{76}$$

Подставим $(\varepsilon_1)_p$ и $(\varepsilon_2)_p$ по зависимостям (74) в уравнение (9), а затем при помощи соотношения (4) исключим T_2, тогда взамен уравнения (15) получим

$$-r(T_1 r)'' - (T_1 r)' + (k_1)_p\,(k_2)_p\,\frac{T_1 r}{r} = Eh\,(k_2)_p\,\frac{\vartheta^2}{2}. \tag{77}$$

Здесь угол θ и нагрузка p_t положены равными нулю.

Исключим из уравнения равновесия (5) M_1 и M_2 [см. формулы (75)] тогда получим второе уравнение

$$r\vartheta'' + \vartheta' - (k_1)_u (k_2)_u \frac{\vartheta}{r} = \frac{(k_1)_u}{D_a} T_1 r\vartheta + \frac{(k_1)_u pr^2}{2D_a}, \qquad (78)$$

в котором также $\theta = 0$, а

$$F(r) = -\frac{pr^2}{2}.$$

Снова введем безразмерные величины:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{r_1}; \\ \psi_a &= -\frac{T_1 r}{Ehr_1 (k_2)_p}; \\ k_a &= 12\left[(k_1)_u (k_2)_u - \mu^2\right]\frac{r_1^2}{h^2}; \\ \nu_a &= \frac{pr_1^3}{2D_a}(k_1)_u; \\ m^2 &= (k_1)_p (k_2)_p; \\ n &= (k_1)_u (k_2)_u. \end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

Уравнения (77) и (78) принимают теперь вид

$$\left.\begin{aligned} \rho\ddot{\psi} + \dot{\psi} - m^2\frac{\psi}{\rho} &= \frac{\vartheta^2}{2}; \\ \rho\ddot{\vartheta} + \dot{\vartheta} - n\frac{\vartheta}{\rho} &= -k_a\psi\vartheta + \nu_a\rho^2. \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

Так выглядят уравнения плоской анизотропной мембраны, имеющей большие прогибы. В случае, если коэффициенты $(k_1)_p$, $(k_2)_p$, $(k_1)_u$ и $(k_2)_u$ равны единице, система (80) переходит в рассмотренную выше систему уравнений (23).

Определим теперь коэффициенты конструктивной анизотропии для некоторых форм гофрировки, а уже затем обратимся к решению системы (80).

Г. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОНСТРУКТИВНОЙ АНИЗОТРОПИИ

Рассмотрим прямоугольный участок $ABCD$ гофрированной мембраны (фиг. 201) и определим, как будет отличаться его жесткость на изгиб и на растяжение в радиальном и окружном направлениях от жесткости точно такого же участка $A'B'C'D'$, но не имеющего гофрировки. При этом следует еще раз оговориться, что речь идет об однородной гофрировке, имеющей явную периодичность при достаточно большом числе волн вдоль радиуса мембраны.

Очевидно, при растяжении рассматриваемых прямоугольников в направлении AB и $A'B'$, т. е. в окружном направлении, жесткость гофрированной пластины будет больше жесткости плоского прямоугольника в таком же отношении, в каком длина дуги AD больше отрезка

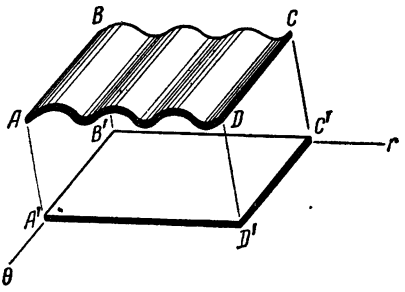
$A'D'$. Таким образом, коэффициент $(k_2)_p$ можно определить как отношение длины дуги меридиана и его проекции на направление радиуса:

$$(k_2)_p = \frac{AD}{A'D'}.$$

Если по-прежнему обозначать через θ текущий угол подъема дуги меридиана (фиг. 202), то, очевидно, что

$$(k_2)_p = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{dr}{\cos\theta}, \qquad (81)$$

где за величину l принята длина волны гофрировки.

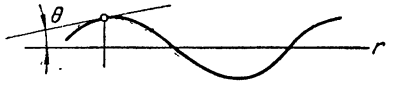


Фиг. 201.

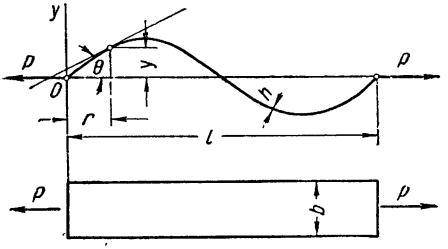
При изгибе пластин в радиальной плоскости жесткость гофрированной полоски будет меньше, чем негофрированной, также во столько раз, во сколько длина дуги AD больше, чем $A'D'$. Следовательно,

$$(k_1)_a = (k_2)_p. \qquad (82)$$

Определим коэффициент $(\kappa_1)_p$. Для этого найдем сначала удлинение гофрированной полоски (фиг. 203) под действием радиальных



Фиг. 202.



Фиг. 203.

сил P. Удлинение Δl определяется при помощи интеграла Мора (см. гл. X, т. I) в следующем виде:

$$\Delta l = \int_s \frac{M_p M_1}{EJ}\,ds + \int_s \frac{N_p N_1}{EF}\,ds,$$

где $J = \frac{bh^3}{12}$ — момент инерции полоски шириной b;

$F = bh$ — площадь поперечного сечения этой же полоски;

s — длина дуги меридиана;

M_p и N_p — изгибающий момент и нормальная сила в поперечном сечении полоски, возникающие под действием силы P;

M_1 и N_1 — то же самое от единичной нагрузки.

$$M_p = Py; \quad M_1 = 1y; \quad N_p = P\cos\theta; \quad N_1 = 1\cos\theta.$$

Через y обозначено расстояние от линии действия сил P до текущей точки дуги меридиана (фиг. 203).

Учитывая, что $ds = \frac{dr}{\cos\theta}$, получим

$$\Delta l = \frac{P}{EJ}\int_0^l \frac{y^2 dr}{\cos\theta} + \frac{P}{EF}\int_0^l \cos\theta\, dr.$$

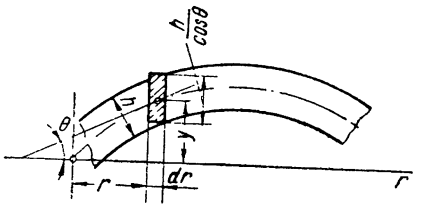
Если гофрировка отсутствует, то

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}.$$

Отношение первого значения Δl ко второму и дает величину искомого коэффициента $(k_1)_p$:

$$(k_1)_p = \frac{12}{h^2 l}\int_0^l \frac{y^2 dr}{\cos\theta} + \frac{1}{l}\int_0^l \cos\theta\, dr. \qquad (83)$$

Последние два интеграла, точно так же как и интеграл (81), зависят от формы гофрировки.



Фиг. 204.

Остается найти коэффициент $(k_2)_u$, который показывает, во сколько раз жесткость гофрированной полоски на изгиб в окружном направлении больше жесткости негофрированной полоски.

Очевидно,

$$(k_2)_u = \frac{J_z}{\frac{lh^3}{12}},$$

где J_z — момент инерции криволинейного сечения, показанного на фиг. 203, относительно оси абсцисс;

$\frac{lh^3}{12}$ — момент инерции сечения соответствующей плоской полоски шириной l.

Для элементарного прямоугольника, показанного на фиг. 204, момент инерции будет

$$\frac{dr}{12}\left(\frac{h}{\cos\theta}\right)^3 + \frac{h dr}{\cos\theta}\, y^2.$$

Производя интегрирование по r, получим

$$J_z = h\int_0^l \frac{y^2 dr}{\cos\theta} + \frac{h^3}{12}\int_0^l \frac{dr}{\cos^3\theta}.$$

Искомый коэффициент

$$(k_2)_u = \frac{12}{h^2 l}\int_0^l \frac{y^2 dr}{\cos\theta} + \frac{1}{l}\int_0^l \frac{dr}{\cos^3\theta}. \qquad (84)$$

Таким образом, выражения (81)—(84) позволяют для любой формы гофра определить искомые четыре коэффициента конструктивной анизотропии.

В табл. 9 приведены результаты подсчетов этих коэффициентов для трех наиболее часто встречающихся форм гофрировки — для трапецеидального, пильчатого и синусоидального профилей.

Д. Построение характеристики гофрированной мембраны

Вернемся теперь к уравнениям (80) и попробуем получить приближенное решение, подобно тому как это делалось выше для плоской и хлопающей мембран. Первый вопрос, который возникает при этом, заключается в выборе функции ϑ. Для плоской мембраны в первом приближении была принята зависимость, указанная в формуле (27),

$$\vartheta = C(\rho^3 - \rho).$$

Однако затем было установлено, что при таком выборе функции ϑ приемлемые результаты получаются при прогибах, не превышающих трех толщин мембраны. В дальнейшем решение было уточнено и зависимость ϑ от ρ была взята в виде, указанном в формуле (37),

$$\vartheta = C(\rho^z - \rho).$$

Подбирая параметр z, мы получили возможность определить расчетным путем характеристику мембраны в весьма широком практически неограниченном диапазоне изменения прогиба w_0.

Надо полагать, что, задаваясь такими же функциями угла поворота ϑ и для гофрированной мембраны, т. е. анизотропной пластины, можно получить аналогичные результаты. Но это значит, что если взять ϑ в упрощенном виде [выражение (27)], то область применения полученного решения будет весьма ограниченной и такое решение практического значения иметь не будет. Следовательно, при выборе функции ϑ необходимо отразить особенности формы изогнутой поверхности при больших прогибах, как это делалось выше, путем введения параметра z. Короче, надо задаться функцией ϑ в виде (37). Однако здесь можно столкнуться с большими трудностями вычислительного характера. Формулы получаются чрезвычайно громоздкими и неудобными для практического использования.

Л. Е. Андреевой [2] был предложен комбинированный способ построения функции ϑ. Он основан на следующих рассуждениях: независимо от выбора функции ϑ для пластины давление в функции прогиба (см. § 2) выражается, согласно формуле (41), следующим образом:

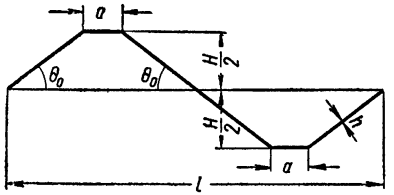
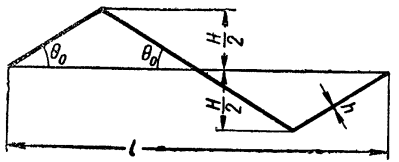
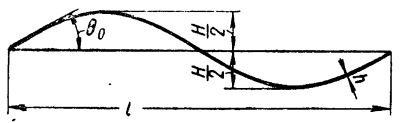
$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{A_1}{1-\mu^2} \cdot \frac{w_0}{h} + A_3 \left(\frac{w_0}{h}\right)^3.$$

Тот же результат может быть получен и для анизотропной пластины. Различие будет лишь в значениях коэффициентов A_1 и A_3.

Положим сначала, что прогибы не очень велики, тогда преобладающим слагаемым в выражении (41) является первое слагаемое с коэффициентом A_1. Но при не очень больших прогибах хорошие результаты получаются при выборе функции ϑ в виде выражения (27). Значит, функция (27) хорошо задает первое слагаемое, второе же оказывается недостаточно точным, что становится заметным при больших значениях $\frac{w_0}{h}$.

Таблица 9

Расчетные коэффициенты для гофрированных мембран

Профиль	$(k_1)_p$	$(k_2)_p = (k_1)_u$	$(k_2)_u$
Трапецеидальный: 	$\frac{H^2}{h^2}\left(\frac{1-\frac{2a}{l}}{\cos\theta_0}+\frac{6a}{l}\right)+\left(1-\frac{2a}{l}\cos\theta_0+\frac{2a}{l}\right.$	$\frac{1-\frac{2a}{l}}{\cos\theta_0}+\frac{2a}{l}$	$\frac{H^2}{h^2}\left(\frac{1-\frac{2a}{l}}{\cos\theta_0}+\frac{6a}{l}\right)+\left(1-\frac{2a}{l}\right)\frac{1}{\cos^3\theta_0}+\frac{2a}{l}$
Пильчатый 	$\frac{H^2}{h^2}\frac{1}{\cos\theta_0}+\cos\theta_0$	$\frac{1}{\cos\theta_0}$	$\frac{H^2}{h^2}\cdot\frac{1}{\cos\theta_0}+\frac{1}{\cos^3\theta_0}$
Синусоидальный пологий ($\theta_0 < 15°$) 	$\frac{3}{2}\cdot\frac{H^2}{h^2}+1$	1	$\frac{3}{2}\cdot\frac{H^2}{h^2}+1$

Теперь положим, что прогибы очень велики. В этом случае, как уже указывалось, форма изогнутой пластины приближается к форме деформированной абсолютно гибкой мембраны, и тогда в выражении (41) преобладающим становится второе слагаемое с коэффициентом A_3. Но форма абсолютно гибкой мембраны хорошо задается функцией (37) $z\to\infty$, т. е.

$$\vartheta = -C\rho. \tag{85}$$

В результате сказанного напрашивается вывод, нельзя ли образовать уравнение (41), задаваясь функциями ϑ в двух вариантах — (27) и (85). Из решения, полученного при помощи функции (27), следует взять линейное слагаемое (41), при помощи же функции (85) определяется второе слагаемое, содержащее $\left(\frac{w_0}{h}\right)^3$.

Такой способ составления характеристики легко может быть проверен на примере обычной плоской мембраны. Результаты такого комбинированного решения оказываются вполне приемлемыми, и полученная характеристика почти точно совпадает с той, которая была найдена выше путем варьирования параметра z.

Итак, обращаемся к системе (80) и в правую часть первого уравнения подставляем последовательно

$$\vartheta = C(\rho^3 - \rho) \quad \text{и} \quad \vartheta = -C\rho,$$

тогда получаем

$$\rho^m\left[\frac{1}{\rho^{2m-1}}(\psi\rho^m)'\right]' = \frac{C^2}{2}(\rho^6 - 2\rho^4 + \rho^2);$$

$$\rho^m\left[\frac{1}{\rho^{2m-1}}(\psi\rho^m)'\right]' = \frac{C^2}{2}\rho^2,$$

откуда

$$\psi = \frac{C^2}{2}\left(\frac{\rho^7}{49-m^2} - \frac{2\rho^5}{25-m^2} + \frac{\rho^3}{9-m^2} + a\rho^m + b\rho^{-m}\right);$$

$$\psi = \frac{C^2}{2}\left(\frac{\rho^3}{9-m^2} + a\rho^m + b\rho^{-m}\right).$$

Из условия равенства нулю функции ψ в начале координат получаем, как обычно $b=0$. Постоянную a определим из условия глухой заделки на контуре:

$$\left(\dot{\psi} - \mu\frac{\psi}{\rho}\right)_{\rho=1} = 0,$$

откуда последовательно находим для a следующие значения:

$$a = -\frac{1}{m-\mu}\left[\frac{7-\mu}{49-m^2} - \frac{2(5-\mu)}{25-m^2} + \frac{3-\mu}{9-m^2}\right];$$

$$a = -\frac{3-\mu}{(m-\mu)(9-m^2)}.$$

Теперь полученные функции ψ подставляем во второе уравнение (80), умножаем полученный результат в первом случае на $(\rho^3-\rho)$, а во втором на ρ и, как обычно, интегрируем по ρ в пределах от нуля до единицы.

В итоге получаем два следующих уравнения:

$$\frac{C}{2}\left(1+\frac{n}{3}\right)=\frac{C^3}{2}k_a\left[\frac{1}{210(49-m^2)}-\frac{1}{60(25-m)^2}+\frac{1}{60(9-m^2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{8a}{(m+7)(m+5)(m+3)}\right]+\frac{\nu_a}{12};$$
$$-\frac{C}{2}(1-n)=+\frac{C^3}{2}k_a\left[\frac{1}{6(9-m^2)}+\frac{a}{m+3}\right]+\frac{\nu_a}{4}.$$

Вернемся теперь к выражению (7) и найдем прогиб w:

$$w=r_1\int\vartheta d\rho+C_3,$$

Соответственно принятым функциям для ϑ получаем

$$w=Cr_1\int(\rho^3-\rho)d\rho+C_3;$$
$$w=-Cr_1\int\rho d\rho+C_3.$$

Интегрируя и подбирая C_3 так, чтобы при $\rho=1$ прогиб равнялся нулю, находим

$$w=\frac{Cr_1}{4}(1-\rho^2)^2;$$
$$w=\frac{Cr_1}{2}(1-\rho^2).$$

Максимальный прогиб соответственно обоим случаям принимает следующие значения:

$$w_0=\frac{Cr_1}{4};$$
$$w_0=\frac{Cr_1}{2}.$$

Далее, воспользовавшись обозначениями (79), исключаем из полученных уравнений k_a, ν_a и C. Тогда

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4}=\frac{4(3+n)}{3(k_2)_p\left(1-\frac{\mu^2}{n}\right)}\cdot\frac{w_0}{h}+128(k_2)_p\left[\frac{48}{(m+7)(m+5)(m+3)(m-\mu)}\times\right.$$
$$\times\left(\frac{7-\mu}{49-m^2}-\frac{2(5-\mu)}{25-m^2}+\frac{3-\mu}{9-m^2}\right)-\frac{1}{35(49-m^2)}+\frac{1}{10(25-m^2)}-$$
$$\left.-\frac{1}{10(9-m^2)}\right]\left(\frac{w_0}{h}\right)^3;$$

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4}=\frac{2(n-1)}{3(k_2)_p\left(1-\frac{\mu^2}{n}\right)}\cdot\frac{w_0}{h}+\frac{32(k_2)_p}{m^2-9}\left[\frac{1}{6}-\frac{3-\mu}{(m-\mu)(m+3)}\right]\left(\frac{w_0}{h}\right)^3.$$

Из выведенных двух уравнений составляется одно — комбинированное. Линейный член берем из первого уравнения, а кубический — из второго. Тогда уравнение характеристики мембраны принимает следующий окончательный вид:

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4}=\frac{4(n+3)}{3(k_2)_p\left(1-\frac{\mu^2}{n}\right)}\cdot\frac{w_0}{h}+\frac{32(k_2)_p}{m^2-9}\left[\frac{1}{6}-\frac{3-\mu}{(m-\mu)(m+3)}\right]\left(\frac{w_0}{h}\right)^3. \quad (86)$$

Операция построения характеристики гофрированной мембраны выглядит следующим образом.

Для заданной формы профиля по формулам (81)—(84) определяются коэффициенты конструктивной анизотропии $(k_1)_p$, $(k_2)_p$, $(k_1)_u$ и $(k_2)_u$. Если профиль будет трапецеидальным, пильчатым или синусоидальным, то можно для этого воспользоваться данными табл. 9.

Далее, по формулам (79) определяются коэффициенты m и n, после чего по формуле (86) легко строится зависимость давления от прогиба, т. е. характеристика мембраны.

Рассмотрим пример построения характеристики мембраны.

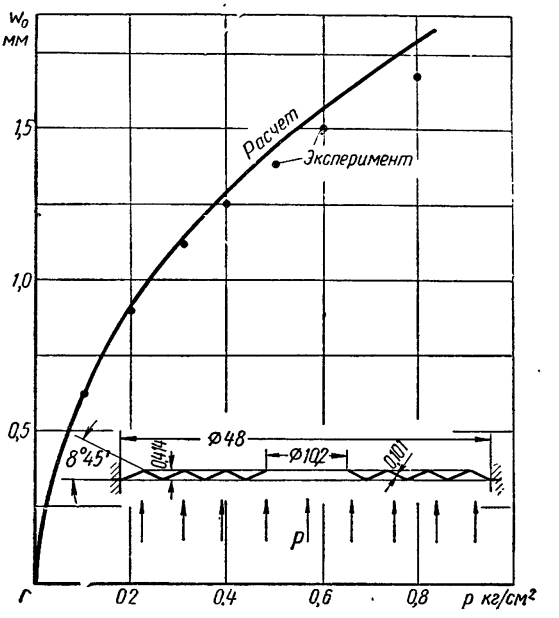
Пример[1]. Построить характеристику гофрированной мембраны с пильчатым профилем (фиг. 205).

Материал мембраны — бериллиевая бронза;
$E = 1{,}35 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}; $\mu = 0{,}3$.

Геометрические размеры мембраны: $r_1 = 24$ *мм*; $H = 0{,}414$ *мм*; $h = 0{,}101$ *мм*; $\theta_0 = 8°45'$.

При расчете плоский центральный участок заменяется гофрированным. По формулам табл. 9 определяем

$$(k_1)_p \approx (k_2)_u \approx 18{,}0;$$
$$(k_2)_p = (k_1)_u = 1{,}01.$$



Фиг. 205.

По формулам (79) находим

$$m^2 = 18{,}2; \quad m = 4{,}26; \quad n = 1.$$

Уравнение характеристики (86) после подстановки числовых величин принимает вид

$$p = 0{,}118 w_0 + 0{,}1055 w_0^3,$$

где w_0 должно подставляться в *мм*, а p — в *кг/см*^{2}.

Построенная характеристика представлена на фиг. 205. Там же отмечены экспериментальные точки. Как видим, расчет дает вполне удовлетворительные результаты в весьма широком диапазоне изменения прогиба w_0. Так, например, при прогибе $w_0 = 1{,}8$ *мм*, т. е. при $\frac{w_0}{h} = 17{,}8$ (!), погрешность расчета по прогибам составляет всего 9,3%.

Проверка формулы (86) на многих примерах позволяет уверенно рекомендовать ее для практических расчетов характеристики гофрированной мембраны без краевого гофра.

§ 5. ГОФРИРОВАННЫЕ КОРОБКИ (СИЛЬФОНЫ)

А. Типы гофрированных коробок и их назначение

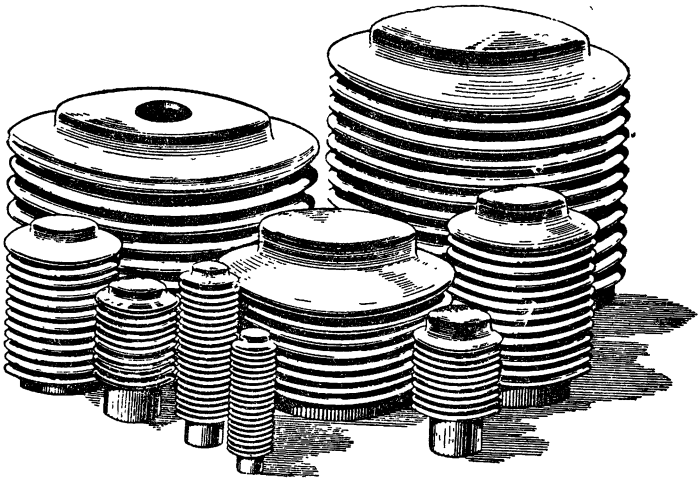
Гофрированная коробка, или сильфон, представляет собой цилиндрический сосуд с нанесенными по поверхности поперечными гофрами.

[1] Пример заимствован, как и изложенный метод расчета, из работы Л. Е. Андреевой [2].

Образно выражаясь, это металлическая «гармошка» цилиндрической формы.

На фиг. 206 показано несколько сильфонов. Форма поперечного сечения гофр дается на фиг. 207.

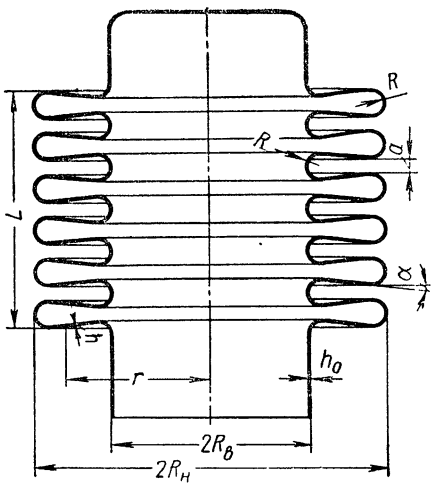
Гофрированная коробка, изготовленная из упругого материала, способна под действием осевых сил давать заметные удлинения при



Фиг. 206.

сравнительно малых изгибных напряжениях. Это свойство сильфонов широко используется в технике.

Сильфоны имеют двоякое применение. С одной стороны, они используются как упругие компенсаторы монтажных и эксплуатационных смещений в системе трубопроводов, с другой — как чувствительные элементы датчиков давлений в приборостроении.



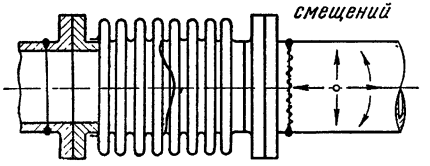
Фиг. 207.

В первом случае сильфону сообщаются заданные осевые, поперечные и угловые смещения (фиг. 208). Жесткостью сильфона при этом обычно не интересуются. Ее считают исчезающе малой по сравнению с жесткостью трубопроводов. Важно лишь, чтобы напряжения в сильфоне при заданных комбинированных смещениях не превышали определенного предела статической или усталостной прочности.

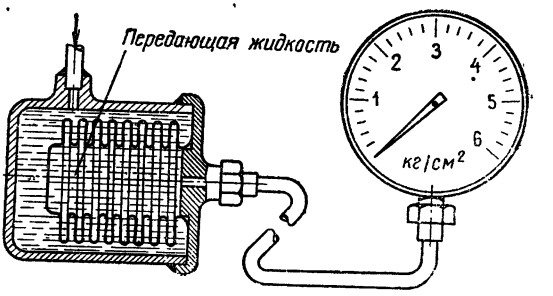
Во втором случае, когда сильфон используется как датчик давления, например в дистанционном манометре, показанном на фиг. 209, существенным является определение его жесткости или построение полной характеристики, т. е. зависимости хода от давления. При этом, естественно, нужно, чтобы напряжения в сильфоне также не превосходили определенной нормы. Здесь, однако, величина предельного напряжения определяется не столько соображениями проч-

ности, сколько гистерезисными явлениями в упругом элементе, вследствие которых прибор дает застой показаний при разгрузке.

Геометрия сильфонов заметно меняется в зависимости от способа изготовления. В настоящее время сильфоны изготовляются либо гидравлическим способом, либо же путем обкатки на роликах. В обоих



Фиг. 208.



Фиг. 209.

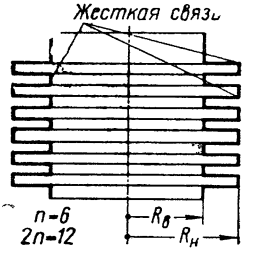
случаях в качестве заготовки используется тонкостенная цилиндрическая гильза, на которой в процессе обработки наносятся волны гофрировки.

При гидравлическом способе заготовка имеет диаметр, равный внутреннему диаметру сильфона. Под действием давления происходит вытяжка наружу на полную высоту гофр. В результате большой вытяжки толщина оболочки по мере углубления гофра уменьшается примерно в отношении диаметров сильфона. При обкатке на роликах заготовка выбирается диаметром, ориентировочно равным среднему диаметру сильфона. Вытяжка происходит в обе стороны, и толщина сильфона по длине меридиана изменяется слабо.

Теперь рассмотрим отдельно сильфон как компенсатор смещений и как датчик давления.

Б. СИЛЬФОН КАК КОМПЕНСАТОР СМЕЩЕНИЙ

Для компенсации смещений в системе трубопроводов используются сильфоны, изготовленные как гидравлически, так и путем обкатки. Первые применяются большей частью при малых диаметрах трубопроводов, а вторые при больших.

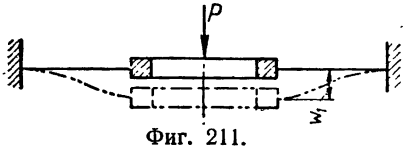


Фиг. 210.

В качестве расчетной схемы рассмотрим сильфон-компенсатор как систему кольцевых пластин, связанных по внешнему и внутреннему контурам попеременно (фиг. 210). Такая расчетная схема была, насколько нам известно, впервые предложена Н. Н. Бабаевым [3] для определения характеристики сильфона при осевом растяжении, а в дальнейшем использована В. И. Королевым [4] для определения жесткости сильфона и при угловых смещениях. Понятно, что такой подход к расчету сильфона будет справедливым только в том случае, если радиусы закругления гофр невелики по сравнению с глубиной гофра. Если гофрировка будет неглубокой, да к тому же еще с сильно развитыми закруглениями, предлагаемая расчетная схема может привести к заметным погрешностям.

За внутренний диаметр пластин будем принимать внутренний диаметр сильфона $2R_в$, а за внешний — наружный диаметр сильфона $2R_н$. Толщина пластин принимается постоянной, равной h. Для гидравлически изготовленного сильфона нужно будет брать среднюю толщину гофра. Число полных волн гофрировки будем обозначать через n, тогда число пластин будет равно $2n$. Поскольку все пластины предполагаются работающими в одинаковых условиях, угол поворота пластин на внутреннем и наружном контурах равен нулю, т. е. на контурах осуществляется условие защемления.

Прогибы пластин будем считать малыми. В первом приближении это вполне допустимо, так как каждая пластина прогибается на величину порядка одной толщины h. Кроме того, эксперимент показывает, что характеристика сильфона в пределах рабочих прогибов с большой степенью точности может рассматриваться как прямая. Следовательно, нелинейностями, связанными с большими перемещениями, можно пренебречь.



Фиг. 211.

Из сказанного следует, что сильфон хотя и является гибкой оболочкой, способной давать большие перемещения, однако он остается все же линейным упругим элементом, подобным, например, витой пружине.

Рассмотрим поочередно все виды смещений и нагрузок, которые сообщаются сильфону как компенсатору. В случае если сильфон находится под действием комбинированных факторов, напряжения будем определять методом наложения, основываясь на принципе независимости действия сил.

Начнем с осевого растяжения сильфона. Для этого обратимся к расчетной схеме, т. е. к пластине с защемленными контурами при нагрузке осевой силой P (фиг. 211).

Перерезывающая сила в пластине

$$Q = \frac{P}{2\pi r}.$$

Обращаясь к выражению (10) гл. I т. II, получим

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{Pr}{4\pi D}\left(\ln r - \frac{1}{2}\right)$$

или после простого преобразования, изменяющего значение константы C_1,

$$\vartheta = C_1' r + \frac{C_2}{r} - \frac{Pr}{4\pi D}\ln\frac{r}{R_в}.$$

Постоянные C_1' и C_2 определяются из условия равенства нулю угла ϑ при $r = R_в$ и $r = R_н$. В итоге получаем

$$\vartheta = \frac{P}{4\pi D}\left[\frac{R_н^2 \ln\frac{R_н}{R_в}}{R_н^2 - R_в^2}\left(r - \frac{R_в^2}{r}\right) - r\ln\frac{r}{R_в}\right].$$

Вертикальное смещение внутреннего контура относительно наружного по абсолютной величине будет следующим:

$$w_1 = \int_{R_в}^{R_н} \vartheta \, dr = \frac{PR_в^2}{4\pi D}\left[\frac{k^2-1}{4} - \frac{k^2}{k^2-1}\ln^2 k\right],$$

где

$$k = \frac{R_н}{R_в}. \tag{87}$$

Удлинение сильфона ΔL будет в $2n$ раз больше. Следовательно:

$$\Delta L = \frac{PR_в^2 n}{2\pi D}\left[\frac{k^2-1}{4} - \frac{k^2}{k^2-1}\ln^2 k\right]. \tag{88}$$

Наибольший изгибающий момент возникает в пластине вблизи внутреннего контура [см. формулы (5) гл. I т. II].

$$M_r = D\left(\vartheta' + \mu\frac{\vartheta}{r}\right)_{r=R_в} = \frac{P}{4\pi}\left[2\,\frac{k^2\ln k}{k^2-1} - 1\right]; \tag{89}$$

$$M_t = \mu M_r.$$

Если из выражений (88) и (89) исключить силу P, то можно установить зависимость изгибающего момента в функции осевого смещения трубопроводов:

$$M_{rв} = \frac{\Delta L}{2n} \cdot \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)R_в^2} \cdot \frac{4(2k^2\ln k - k^2 + 1)}{(k^2-1)^2 - 4k^2\ln^2 k}.$$

Напряжение изгиба

$$\sigma_{rв} = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{\Delta L}{n} \cdot \frac{Eh}{(1-\mu^2)R_в^2} \cdot \frac{2k^2\ln k - (k^2-1)}{(k^2-1)^2 - 4k^2\ln^2 k}$$

или же

$$\sigma_{rв} = \frac{\Delta L}{n} \cdot \frac{Eh}{(1-\mu^2)R_в^2} K_{1в}. \tag{90}$$

Коэффициент $K_{1в}$ для различных значений k дается в табл. 10

Таблица 10

Значения коэффициентов $K_{1в}$, $K_{1н}$ к формулам (90) и (91), $K_{2в}$, $K_{2н}$ к формуле (92) и $K_{3в}$, $K_{3н}$ к формуле (95)

k	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40
$K_{1в}$	155	70,0	39,9	25,9	18,3	13,6	10,57
$K_{1н}$	145	63,7	35,4	22,3	15,33	11,16	8,45
$K_{2в}$	165	76,7	45,2	30,2	21,9	16,8	13,3
$K_{2н}$	150	66,6	37,7	24.1	16,8	12,4	9,50
$K_{3в}$	0,0051	0,0116	0,0207	0,0327	0,0476	0,0656	0,0861
$K_{3н}$	0,0049	0,0109	0,0191	0,0292	0,0420	0,0565	0,0725

У внешнего контура напряжение будет равно

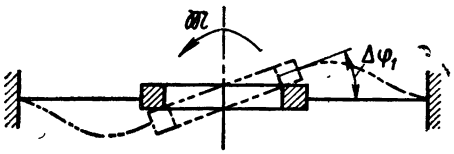
$$\sigma_{rн} = \frac{\Delta L}{n} \cdot \frac{Eh}{(1-\mu^2)R_в^2} \cdot \frac{k^2 - 1 - 2\ln k}{(k^2-1)^2 - 4k^2\ln^2 k},$$

или

$$\sigma_{rн} = \frac{\Delta L}{n} \cdot \frac{Eh}{(1-\mu^2)R_в^2} K_{1н}. \tag{91}$$

Коэффициент $K_{1н}$ также дается в табл. 10.

Здесь и в последующем напряжения вычисляются по абсолютной величине без какого-либо правила знаков. При комбинированных деформациях и суммировании напряжений следует учесть знаки в соответствии с тем, как изгибаются и нагружаются гофры сильфона.



Фиг. 212.

Теперь рассмотрим работу сильфона при угловых смещениях трубопроводов. Сохраняя расчетную схему прежней, определим угол поворота жесткого внутреннего контура пластины под действием момента $\mathfrak{M}$ (фиг. 212).

Эта задача была рассмотрена выше, в гл. I, в качестве примера, иллюстрирующего способы расчета круглых пластин. С тем чтобы не повторятся, воспользуемся этим решением.

Угол поворота центра при неподвижном внешнем контуре [см. формулу (105) гл. I, т. II] будет

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\mathfrak{M}}{4\pi D} \cdot \frac{(k^2+1)\ln k - k^2 + 1}{k^2+1},$$

а абсолютные величины радиальных изгибающих моментов [см. формулы (106) и (107) гл. I т. II] вблизи внутреннего и наружного контуров имеют следующие значения:

$$M_{rв} = \frac{2D\Delta\varphi_1}{R_в} \cdot \frac{k^2-1}{(k^2+1)\ln k - k^2 + 1};$$

$$M_{rн} = \frac{2D\Delta\varphi_1}{R_в} \cdot \frac{\frac{1}{k}(k^2-1)}{(k^2+1)\ln k - k^2 + 1}.$$

Так как сильфон состоит из $2n$ пластин, то взаимный угол поворота торцов сильфона $\Delta\varphi$ под действием момента $\mathfrak{M}$ будет

$$\Delta\varphi = \frac{\mathfrak{M}n}{2\pi D} \cdot \frac{(k^2+1)\ln k - k^2 + 1}{k^2+1},$$

а изгибающие моменты

$$M_{rв} = \frac{D\Delta\varphi}{nR_в} \cdot \frac{k^2-1}{(k^2+1)\ln k - k^2 + 1};$$

$$M_{rн} = \frac{D\Delta\varphi}{nR_в} \cdot \frac{\frac{1}{k}(k^2-1)}{(k^2+1)\ln k - k^2 + 1}.$$

Для напряжений получим формулы

$$\sigma_{rв} = \frac{6M_{rв}}{h^2} = \frac{\Delta\varphi}{n} \cdot \frac{Eh}{1-\mu^2)R_в} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2-1}{(k^2+1)\ln k - k^2 + 1};$$

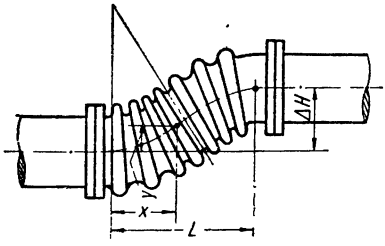
$$\sigma_{rн} = \frac{6M_{rн}}{h^2} = \frac{\Delta\varphi}{n} \cdot \frac{Eh}{(1-\mu^2)R_в} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{k}(k^2-1)}{(k^2+1)\ln k - k^2 + 1}.$$

или же

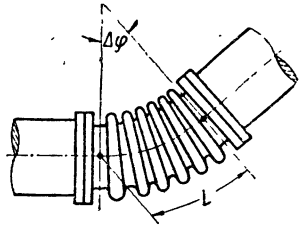
$$\sigma_{тв} = \frac{\Delta\varphi}{n} \cdot \frac{Eh}{(1-\mu^2)R_в} K_{2в};$$
$$\sigma_{тн} = \frac{\Delta\varphi}{n} \cdot \frac{Eh}{(1-\mu^2)R_в} K_{2н}. \qquad (92)$$

Коэффициенты $K_{2в}$ и $K_{2н}$ при различных значениях k приведены в табл. 10.

Кроме осевых и угловых смещений, трубопроводы могут иметь поперечные смещения ΔH при сохранении параллельности осей (фиг. 213). Легко, однако, догадаться, что такой случай и ему подобные



Фиг. 213.



Фиг. 214.

сводятся к только что рассмотренному. Изгибные напряжения в гофрах будут определяться кривизной оси сильфона. В рассмотренном выше случае кривизна этой оси была

$$\frac{\Delta\varphi}{L}, \qquad (93)$$

где L—длина сильфона (фиг. 214).

При параллельном смещении трубопроводов упругая линия оси сильфона (фиг. 213) как стержня с постоянной жесткостью, нагруженного по концам, описывается кривой третьего порядка:

$$y = \Delta H \frac{x^2}{L^2}\left(3 - 2\frac{x}{L}\right).$$

Кривизна оси сильфона у левого конца будет

$$y''_{x=0} = \Delta H \frac{6}{L^2}.$$

Приравниваем это значение кривизны величине (93) и устанавливаем эквивалентность углового смещения $\Delta\varphi$ и параллельного смещения ΔH:

$$\Delta\varphi = \frac{6\Delta H}{L}. \qquad (94)$$

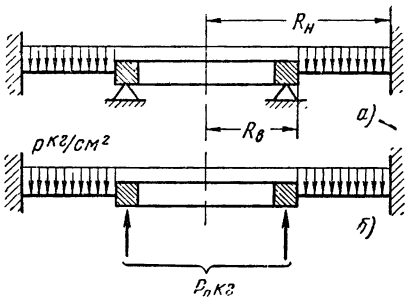
Таким образом, напряжения в гофрах при параллельном смещении трубопроводов определяются по-прежнему по формулам (92), в которых $\Delta\varphi$ заменяется величиной $\frac{6\Delta H}{L}$.

Остается определить напряжения, возникающие в гофрах сильфона под действием внутреннего давления. Если концы сильфона закреплены

неподвижно (трубопроводы не смещаются), каждая из пластин должна рассматриваться в условиях неподвижно закрепленных контуров (фиг. 215, *а*). Вводя реакцию P_0 со стороны соседней пластины, получим схему нагружения, показанную на фиг. 215, *б*.

Перерезывающая сила

$$Q = \frac{p\pi\left(r^2 - R_в^2\right) - P_0}{2\pi r} = \frac{pr}{2} - \frac{P_0 + p\pi R_в^2}{2\pi r}.$$



Фиг. 215.

Согласно выражению (10) гл. I т. II получим

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{pr^3}{16D} + \frac{P_0 + p\pi R_в^2}{4\pi D} r\left(\ln r - \frac{1}{2}\right).$$

Или, обозначая

$$\frac{P_0 + p\pi R_в^2}{4\pi D} = C_3$$

и изменяя постоянную C_1, получим

$$\vartheta = C_1' r + \frac{C_2}{r} + C_3 r \ln \frac{r}{R_в} - \frac{p r^3}{16D}.$$

Три постоянные C_1', C_2 и C_3 определяются из следующих условий:

при $r = R_в$ $\vartheta = 0$;
при $r = R_н$ $\vartheta = 0$.

Наконец,

$$\int_{R_в}^{R_н} \vartheta dr = 0.$$

Таким образом, составим три уравнения:

$$C_1' R_в + \frac{C_2}{R_в} = \frac{pR_в^3}{16D};$$

$$C_1' R_н + \frac{C_2}{R_н} + C_3 R_н \ln \frac{R_н}{R_в} = \frac{pR_н^3}{16D};$$

$$C_1' \frac{R_н^2 - R_в^2}{2} + C_2 \ln \frac{R_н}{R_в} + C_3\left[\frac{R_н^2}{2} \ln \frac{R_н}{R_в} - \frac{R_н^2 - R_в^2}{4}\right] = \frac{p}{16D} \cdot \frac{R_н^4 - R_в^4}{4}.$$

Отсюда

$$C_1' = \frac{pR_в^2}{16D}\left[1 - k^2(k^2-1)\frac{(k^2+1)\ln k - (k^2-1)}{(k^2-1)^2 - 4k^2\ln^2 k}\right];$$

$$C_2 = \frac{pR_в^4}{16D}k^2(k^2-1)\frac{(k^2+1)\ln k - (k^2-1)}{(k^2-1)^2 - 4k^2\ln^2 k};$$

$$C_3 = \frac{pR_в^2}{16D}(k^2-1)\frac{k^4 - 1 - 4k^2\ln k}{(k^2-1)^2 - 4k^2\ln^2 k},$$

где по-прежнему $k = \frac{R_н}{R_в}$.

Теперь находим изгибающие моменты у внутреннего и наружного контуров по формуле

$$M_r = D\left(\vartheta' + \mu\frac{\vartheta}{r}\right),$$

тогда по абсолютной величине изгибающие моменты принимают следующие значения:

$$M_{rв} = \frac{pR_в^2}{16}\left[2 + (k^2-1)\frac{2k^2(k^2+3)\ln k - (k^2-1)(3k^2+1)}{(k^2-1)^2 - 4k^2\ln^2 k}\right];$$

$$M_{rн} = \frac{pR_в^2}{16}\left[2k^2 + (k^2-1)\frac{2(1+3k^2)\ln k - (k^2-1)(k^2+3)}{(k^2-1)^2 - 4k^2\ln^2 k}\right].$$

Изгибные напряжения равны

$$\sigma_{rв} = \frac{3pR_в^2}{8h^2}\left[2 + (k^2-1)\frac{2k^2(k^2+3)\ln k - (k^2-1)(3k^2+1)}{(k^2-1)^2 - 4k^2\ln^2 k}\right];$$

$$\sigma_{rн} = \frac{3pR_в^2}{8h^2}\left[2k^2 + (k^2-1)\frac{2(1+3k^2)\ln k - (k^2-1)(k^2+3)}{(k^2-1)^2 - 4k^2\ln^2 k}\right]$$

или

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rв} &= \frac{pR_в^2}{h^2}K_{3в};\\ \sigma_{rн} &= \frac{pR_в^2}{h^2}K_{3н}.\end{aligned}\right\} \qquad (95)$$

Значения коэффициентов $K_{3в}$ и $K_{3н}$ приведены также в табл. 10.

Выведенные соотношения дают возможность определить напряжения в сильфоне по величинам заданных смещений и внутреннего давления.

Пример. Определить напряжения, возникающие в сильфоне-компенсаторе, имеющем следующие размеры: внутренний диаметр $2R_в = 100$ *мм*; наружный диаметр $2R_н = 130$ *мм*; толщина $h = 0{,}3$ *мм*; число полных волн гофрировки $n = 10$; длина сильфона $L = 110$ *мм*; материал — нержавеющая сталь; $E = 2{,}0 \cdot 10^4$ *кг/мм*^{2}; $\mu = 0{,}3$.

Правый трубопровод получает периодически смещения, поворачиваясь относительно точки A (фиг 216), расположенной на расстоянии $2L$ от правого конца сильфона. Это угловое смещение таково, что перемещение правого конца сильфона оказывается равным $\pm 1{,}5$ *мм*.

Внутреннее избыточное давление $p = 1{,}5$ *кг/см*^{2}.

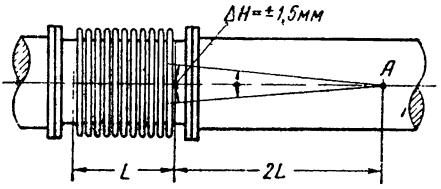
Прежде всего устанавливаем, какую наибольшую кривизну получает ось сильфона. Предполагаем, что форма оси имеет вид кубической параболы (фиг. 217)

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

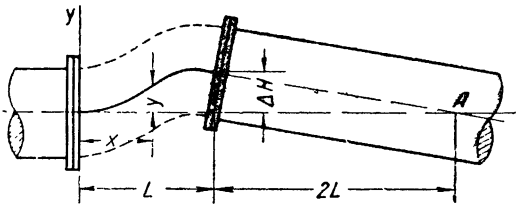
Постоянные a_0, a_1 определяются из следующих граничных условий: при $x=0$ $y=0$ и $y'=0$, следовательно, $a_0=0$ и $a_1=0$; при $x=L$ $y=\Delta H$ и $y'=-\frac{\Delta H}{2L}$, тогда

$$a_2=\Delta H\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{L^2};\quad a_3=-\Delta H\frac{5}{2L^3};$$

$$y=\frac{\Delta H}{2L^3}(7Lx^2-5x^3).$$



Фиг. 216.



Фиг. 217.

Наибольшая по абсолютной величине кривизна имеет место у правого конца сильфона при $x=L$:

$$y''=\frac{\Delta H}{2L^3}(14L-30x);$$

$$(y'')_{\max}=\frac{8\Delta H}{L^2}.$$

Приравнивая эту величину выражению (93), находим

$$\Delta\varphi=\frac{8\Delta H}{L}.$$

Это тот угол $\Delta\varphi$, на который следовало бы повернуть правый торец сильфона относительно левого путем приложения момента, с тем чтобы во всех гофрах возникали те же максимальные напряжения, что и у крайних правых гофров рассматриваемого сильфона.

Величина

$$k=\frac{R_н}{R_в}=1{,}3.$$

По формулам (92) и табл. 10 находим изгибные напряжения: $\sigma_{гв}=31{,}6$ *кг/мм²*; $\sigma_{гн}=24{,}1$ *кг/мм²*.

Напряжения изгиба, возникающие под действием давления p, определяются по формулам (95). Учитывая данные табл. 10, получаем $\sigma_{гв}=19{,}8$ *кг/мм²*; $\sigma_{гн}=17{,}5$ *кг/мм²*.

Заданные знакопеременные смещения сильфона $\pm 1{,}5$ *мм* соответственно меняют знак напряжений, а давление дает постоянную составляющую. Поэтому у внутреннего контура $\sigma_{гв}=19{,}8\pm 31{,}6$ *кг/мм²*, а у наружного $\sigma_{гн}=17{,}5\pm\pm 24{,}1$ *кг/мм²*.

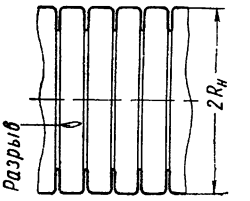
Теперь можно решать вопрос об усталостной прочности сильфона при помощи методов, излагаемых в т. III, если, понятно, для данной конструкции это имеет значение.

Рассматривая формулы (90)—(92), можно видеть, что при заданных смещениях напряжения будут тем меньше, чем меньше толщина сильфона. При заданном давлении напряжения, определяемые формулой (95), напротив, с уменьшением толщины резко возрастают. Когда сильфон работает как компенсатор при наличии внутреннего давления, требования к толщине становятся противоречивыми, и здесь следует обычно подбирать толщину из условий оптимума в зависимости от за-

данных значений давления и смещений. В качестве конструктивной меры, позволяющей в значительной степени разрешить этот вопрос, применяются многослойные сильфоны, которые формуются из тонких вставленных друг в друга гильз. Такой сильфон подобно листовой рессоре способен давать большие смещения и выдерживать значительное давление.

В конструкциях одноразового действия сильфон-компенсатор на изгибные напряжения не рассчитывается. Проверка сильфона на прочность производится по разрушающему давлению.

Опыт показывает, что разрушению сильфона под действием внутреннего давления предшествует полное смятие внутренних закруглений гофра и развертывание внешних (фиг. 218).



Фиг. 218.

В дальнейшем на внешней поверхности происходит разрыв оболочки вдоль образующей (фиг. 218). Разрушающее давление достаточно точно определяется по формуле (как для цилиндра)

$$p_{разр} = \frac{\sigma_{вг} h}{R_н},$$

где $\sigma_{вг}$ — предел прочности материала.

При расчете сильфона в конструкции одноразового действия рабочее давление назначается как часть разрушающего.

В. Характеристика сильфона, используемого как чувствительный элемент

В том случае, когда сильфон используется в качестве чувствительного элемента, наиболее важной задачей является построение его характеристики, т. е. зависимости хода сильфона от осевого усилия или избыточного давления. Выше, однако, уже упоминалось, что характеристика сильфона является линейной. Поэтому нет необходимости строить характеристику целиком, как это делалось для гофрированной мембраны. Достаточно определить тангенс угла наклона характеристики, представляющий собой отношение силы к вызываемому ею прогибу. Это отношение, как и для всех упругих элементов с линейной характеристикой, носит название жесткости. Величина, обратная жесткости, называется чувствительностью.

Для того чтобы установить соответствие между жесткостью сильфона при нагружении силой и при нагружении внутренним давлением, вводится понятие «эффективная площадь» $F_э$. Под эффективной площадью понимается отношение силы P к давлению p при одинаковом изменении длины сильфона ΔL. Поскольку характеристика линейная, это отношение представляет собой постоянную величину, не зависящую от удлинения сильфона. Обычно считают, что эффективная площадь приближенно равна

$$F_э = \pi R_{ср}^2, \tag{96}$$

где $R_{ср}$ — средний радиус сильфона:

$$R_{ср} = \frac{R_в + R_н}{2}.$$

Вводя понятие «эффективная площадь», мы получаем возможность сравнивать жесткость гофрированной коробки при нагружении осевым усилием с ее жесткостью при нагружении избыточным давлением. Этим самым обходится вопрос о влиянии избыточного давления на работу каждого гофра в отдельности и оценивается только их суммарный эффект. Такое толкование работы сильфона не вносит противоречий в определение характеристики, при определении же напряжений замена давления p усилием P через эффективную площадь является неприемлемой, что нетрудно установить хотя бы на формулах предыдущего раздела.

Ниже будет рассматриваться жесткость сильфона, нагруженного осевой силой P. Если сильфон имеет донышко (см. фиг. 206) и нагружен избыточным давлением p, то сила P должна быть в расчетных формулах заменена величиной $pF_э = p\pi R_{ср}^2$.

В первом приближении характеристика сильфона может быть определена при помощи рассмотренной выше расчетной схемы, по которой сильфон представляется в виде набора плоских пластин. В этом случае зависимость удлинения сильфона ΔL от силы P представляется формулой (88).

Надо, однако, сказать, что точность этой формулы не всегда удовлетворяет запросам практики. При ее выводе не учитывался прежде всего так называемый угол уплотнения сильфона α, показанный на фиг. 207. Этот угол создается путем осадки изготовленного сильфона на специальной оправке. В зависимости от угла уплотнения жесткость сильфона существенно меняется. Далее, формула (88) не учитывает изменения толщины сильфона вдоль дуги меридиана при гидравлическом способе изготовления. Таким образом, формулой (88) можно пользоваться только для сильфонов, изготовленных накаткой, при отсутствии угла уплотнения и не слишком больших, как уже говорилось, радиусах закругления гофр.

Задача об определении характеристики сильфона с учетом всех перечисленных особенностей (угол α, переменная толщина и произвольная величина радиуса закругления) может быть решена энергетическим методом. Не останавливаясь на ходе вычислений, приведем здесь только окончательную расчетную формулу, позволяющую определить жесткость гидравлически изготовленного сильфона по его геометрическим размерам. Вывод формулы подробно изложен в работе [10].

$$\Delta L = P\frac{1-\mu^2}{Eh_0}\cdot\frac{n}{A_0 - \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + B_0\dfrac{h_0^2}{R_в^2}}; \qquad (97)$$

здесь h_0 — толщина сильфона у внутреннего диаметра, примерно равная толщине заготовки;

α — угол уплотнения (см. фиг. 207);

$R_в$ — внутренний радиус сильфона;

n — число полных рабочих волн гофрировки.

Коэффициенты A_0, A_1, A_2 и B_0 зависят от двух безразмерных параметров:

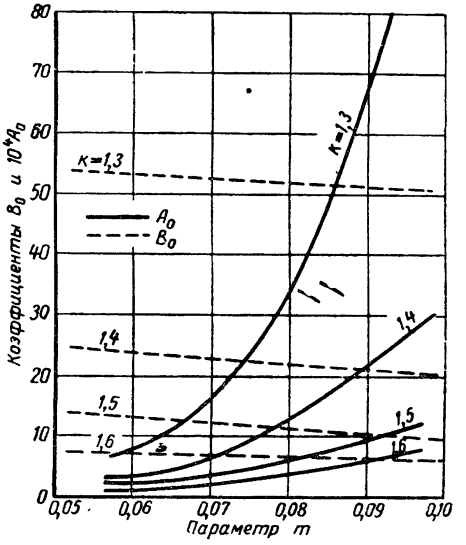
$$k = \frac{R_н}{R_в}; \quad m = \frac{R}{R_в},$$

где R — радиус закругления гофр (см. фиг. 207).

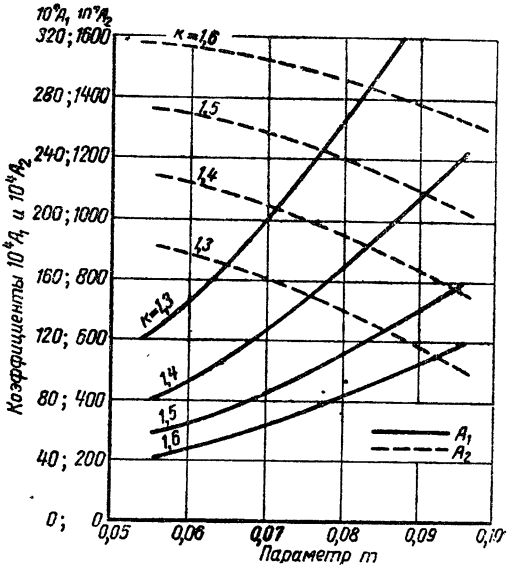
Зависимость A_0, A_1, A_2 и B_0 от k и m представлена ввиде кривых на фиг. 219 и 220.

Проделаем числовой пример.

Рассмотрим гофрированную коробку размерами, показанными на фиг. 221 (все размеры даны по срединному контуру): $R = 2{,}05$ *мм*; $R_в = 27{,}6$ *мм*; $R_н = 39{,}0$ *мм*; $L = 81$ *мм*; $h_0 = 0{,}2$ *мм*; полное число рабочих гофр принимаем равным $n = 12$; материал — латунь 80; $E = 1{,}0 \cdot 10^4$ *кг/мм*^{2}; $\mu = 0{,}3$.



Фиг. 219.



Фиг. 220.

В этом случае

$$m = \frac{R}{R_в} = 0{,}0743;$$

$$k = \frac{R_н}{R_в} = 1{,}413.$$

По заданным размерам легко определить угол уплотнения α. Сначала находим шаг волны, т. е. расстояние между вершинами двух соседних волн — от точки A до B (фиг. 221):

$$AB = \frac{81 - 2 \cdot 2{,}05}{12} = 6{,}4 \text{ мм}.$$

Если отсюда вычесть величину $2R$, то найдем зазор между гофрами:

$$a = 6{,}4 - 2 \cdot 2{,}05 = 2{,}3 \text{ мм}.$$

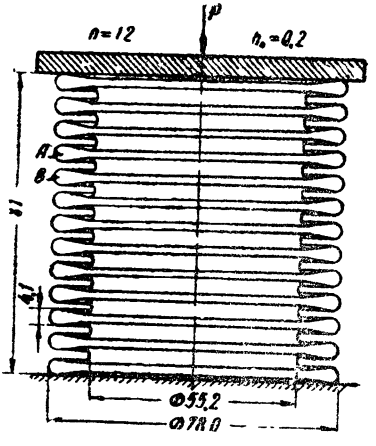
Угол

$$\alpha = \frac{R - \frac{a}{2}}{R_н - R_в - 2R} = 0{,}123.$$

Из графиков фиг. 219 и 220 находим

$$A_0 = 8 \cdot 10^{-4}; \quad B_0 = 21; \quad A_1 = 136 \cdot 10^{-4};$$

$$A_2 = 1030 \cdot 10^{-4}.$$



Фиг. 221.

Согласно формуле (97)

$$\Delta L = P\frac{1-0{,}3^2}{1{,}0\cdot 10^4\cdot 0{,}2}\times$$

$$\times\frac{12}{8\cdot 10^{-4}-0{,}123\cdot 136\cdot 10^{-4}+0{,}123^2\cdot 1030\cdot 10^{-4}+21\left(\frac{0{,}2}{27{,}6}\right)^2},$$

откуда

$$\Delta L\ мм = 3{,}05 P\ кг.$$

Опыт в этом случае дает

$$\Delta L\ мм = 3{,}10 P\ кг.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева Л. Е., Расчет мембран, имеющих линейную характеристику по давлению, «Сборник трудов МВТУ» № 16, Машгиз, 1952.
2. Андреева Л. Е., Расчет гофрированных мембран, сб. МВТУ «Расчет на прочность в машиностроении» № 46, Машгиз, 1955.
3. Бабаев Н. Н, О расчете гармониковых мембран регуляторов давления паровых турбин, «Инженерный сборник института механики АН СССР», т. II, вып. 1, 1943.
4. Королев В. И., Расчет сильфонов, «Вестник Московского университета» № 9, 1954.
5. Панов Д. Ю., О больших прогибах круглой пластинки, «Труды ЦАГИ», вып. 450, 1939.
6. Панов Д. Ю., Применение метода акад. Б. Г. Галеркина для решения некоторых нелинейных задач теории упругости, «Прикладная математика и механика», т. III, вып. 2, 1939, стр. 139.
7. Панов Д. Ю., О больших прогибах круглых мембран со слабым гофром, «Прикладная математика и механика», т. V, вып. 2, 1941, стр. 303.
8. Плотвинова В. А., К расчету гофрированных мембран авиационных приборов, «Труды ЛКВВИА», 1951.
9. Феодосьев В. И., О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой, «Прикладная математика и механика», т. IX, вып. V, 1945, стр. 389.
10. Феодосьев В. И., Упругие элементы точного приборостроения, Оборонгиз, 1949.
11. Federhofer K., Über die Berechnung der dünnen Kreisplatte mit grossen Ausbiegung. „Der Eisenbau", Bd. 9, 1918, S. 152.
12. Föppl A., Vorlesungen über technische Mechanik Bd. 5., §24, 1907.
13. Griffith A., The theory of pressure capsules, British aeronautical research committee, „Report and memoranda" N 1136, 1927.
14. Hencky H., Über den Spannungzustand in kreisrunden Platten mit verschwindenden Biegungssteifigheit, „Zs. für Mathematik und Physik", Bd 63, Hf.3, 1914, s. 311.
15. Kàrman Th., Enzyklopedie der mathematiken wissenschaften, Bd. IV, 2, II, § 38, Leipzig 1910.
16. Nadai A., Elastische Platten, §73, Berlin, 1925.
17. Prescott I., The equations of equilibrium of an elastic plate under normal pressure, „Phylosophical magazine and journal of Science" v. XLIII, London 1922, p. 97.
18. Way S.. Bending of circular plates with large deflection, „Trans. Am. Soc. Mech, Eng.", v. 56, 1934, p. 627.

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБ. КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. РАСЧЕТ РЕЗИНОВЫХ ДЕТАЛЕЙ

ГЛАВА V

РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ

В настоящей главе рассмотрен расчет толстостенных цилиндров (труб), нагруженных внешним или внутренним давлением, как постоянным, так и изменяющимся по длине.

Теория расчета цилиндров, нагруженных постоянным по длине давлением, позволяет определять напряжения в трубах, цилиндрах машин, в напрессованных деталях и т. п., когда давление распределено равномерно и концевые эффекты, связанные, например, с наличием днищ, отсутствуют. Она пригодна также и для тех случаев, когда постоянное давление распределено только по части длины детали или когда концы цилиндра закреплены. В этих случаях, однако, теория дает возможность установить лишь напряжения, возникающие на достаточном расстоянии от мест изменения давления или от концов цилиндра.

Напряжения вблизи мест изменения нагрузки или вблизи концов цилиндра могут быть определены с помощью теории расчета цилиндров, нагруженных переменным давлением.

Отметим главнейшие из практических задач, решаемых этой теорией:

а) определение напряжений в цилиндре, загруженном давлением на части длины; вопрос этот является актуальным, например, при расчете цилиндров двигателя, где максимальное давление в рабочем пространстве имеет место лишь на небольшой части хода поршня и, следовательно, воздействует только на сравнительно узкий кольцевой поясок поверхности цилиндра;

б) определение напряжений около мест сопряжения полого цилиндра с днищами;

в) расчет прессовых посадок в том случае, если сопрягаемые детали имеют различную длину;

г) определение температурных напряжений вблизи торцов толстостенной трубы, температура внутренней и наружной поверхностей которой различна, и др.

§ 1. РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ, НАГРУЖЕННЫХ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ПО ДЛИНЕ ДАВЛЕНИЕМ (ЗАДАЧА ЛЯМЕ)

Рассмотрим сначала деформации тонкой шайбы, имеющей толщину dz (фиг. 222), нагруженной внутренним давлением p_1 и наружным p_2. Боковые плоскости шайбы свободны от напряжений.

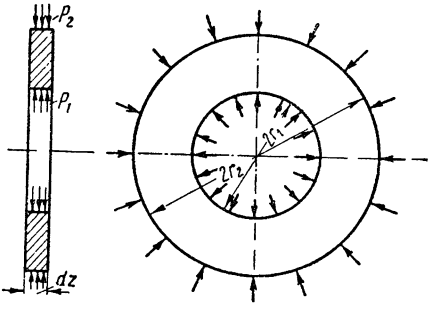
Как будет показано далее, боковые плоскости шайбы остаются плоскими и после деформации, и, следовательно, длинную трубу можно

рассматривать как составленную из ряда шайб. Условия работы шайбы не изменяются в зависимости от того, рассматривается ли она изолированно или как часть трубы (фиг. 223).

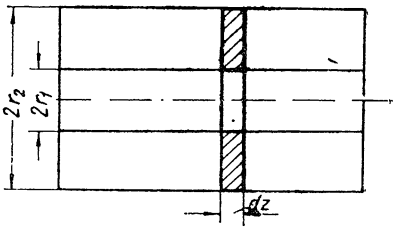
Радиальное перемещение u точки, лежащей на расстоянии r от оси цилиндра, зависит только от этого расстояния:

$$u = f(r).$$

Величину относительных деформаций в кольцевом и в радиальном направлениях легко выразить через смещение u.



Фиг. 222.



Фиг. 223.

Кольцевое волокно, имеющее до деформации радиус r, после деформации обращается в окружность радиуса $r+u$; соответственно относительное удлинение этого волокна равно

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}. \qquad (1)$$

Длина dr радиального элемента AB (фиг. 224) после деформации становится равной

$$A'B' = dr + \frac{du}{dr}\,dr.$$

Относительное удлинение в радиальном направлении

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{du}{dr}. \qquad (2)$$

Нормальные напряжения в цилиндрическом сечении σ_r и в радиальном сечении σ_t определяются по формулам гл. III т. I для плоского напряженного состояния:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r}\right); \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Эти напряжения являются главными напряжениями, поскольку плоскость радиального сечения является плоскостью симметрии.

Рассмотрим равновесие элемента шайбы, изображенного на фиг. 225 и имеющего толщину dz. Проектируя силы на радиус, имеем

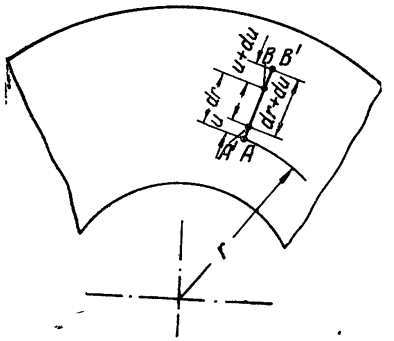
$$\sigma_r r d\theta\, dz + d(\sigma_r r)\, d\theta\, dz - \sigma_r r d\theta\, dz - \sigma_t dr dz d\theta = 0$$

или

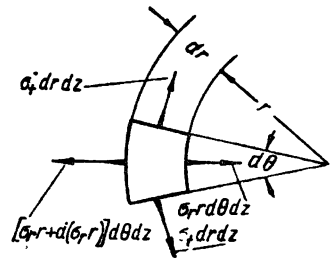
$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_t = 0. \tag{4}$$

Заменяя в уравнении равновесия (4) напряжения их выражениями через перемещения (3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее величину радиальных перемещений u:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2}u = 0. \tag{5}$$



Фиг. 224.



Фиг. 225.

Левая часть этого уравнения тождественно равна выражению

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(ru)\right].$$

Таким образом, уравнение (5) можно записать в виде

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(ru)\right] = 0. \tag{5а}$$

Последовательно интегрируя это уравнение дважды, получим

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(ru) = 2C_1;$$

$$ru = C_1 r^2 + C_2,$$

откуда

$$u = C_1 r + C_2\frac{1}{r}. \tag{6}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Обычно давления на внутренней $r=r_1$ и наружной $r=r_2$ поверхностях цилиндра бывают заданы. В этом случае уравнения граничных условий можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_r)_{r=r_1} &= -p_1\ ;\\ (\sigma_r)_{r=r_2} &= -p_2\ ,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где p_1 — внутреннее; p_2 — наружное давление; знаки минус в условиях (7) определяются правилом знаков, выбранным для напряжений, по которому положительными считаются напряжения растяжения.

Подставляя выражение (6) в формулы для напряжений (3), получим

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= A - B\frac{1}{r^2};\\ \sigma_t &= A + B\frac{1}{r^2},\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где A и B — новые постоянные, связанные с C_1 и C_2 зависимостями

$$A = \frac{E}{1-\mu} C_1;$$

$$B = \frac{E}{1+\mu} C_2.$$

Из выражений (8) находим, что

$$\sigma_r + \sigma_t = 2A = \text{const}$$

и, следовательно, продольная деформация

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_r + \sigma_t)$$

не зависит от радиуса r.

Таким образом, торцовые плоскости шайбы остаются плоскими и после деформации, и сделанное предположение о том, что длинный цилиндр можно рассматривать как набранный из отдельных независимо работающих шайб, является справедливым. Благодаря этому все формулы, которые будут получены ниже, в равной мере применимы как к длинным, так и к коротким цилиндрам.

Из граничных условий (7) следует

$$A - B\frac{1}{r_1^2} = -p_1;$$

$$A - B\frac{1}{r_2^2} = -p_2,$$

откуда

$$A = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2};$$

$$B = \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Используя эти значения постоянных, получим следующие общие формулы для напряжений в любой точке трубы:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\cdot\frac{1}{r^2};\\ \sigma_t &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\cdot\frac{1}{r^2}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Для радиальных перемещений, выражая в формуле (6) C_1 и C_2 через A и B, окончательно имеем

$$u=\frac{1-\mu}{E}\cdot\frac{p_1 r_1^2-p_2 r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\,r+\frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{(p_1-p_2)\,r_1^2\,r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\cdot\frac{1}{r}. \qquad (10)$$

В случае если цилиндр, кроме радиальных давлений, воспринимает еще и продольную силу N, то в поперечных сечениях его возникает напряжение

$$\sigma_z=\frac{N}{F}=\frac{N}{\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)},$$

а к выражению для радиальных перемещений добавляется слагаемое

$$\Delta u=-\mu\frac{\sigma_z}{E}r.$$

Напряжения σ_r и σ_t при этом не изменяются.

Если напряжения на радиусе r цилиндра уже определены, то радиальное перемещение u может быть вычислено не по формуле (10), а по более простой зависимости (11), которая непосредственно следует из формулы (1):

$$u=r\frac{1}{E}\left(\sigma_t-\mu\sigma_r-\mu\sigma_z\right). \qquad (11)$$

В том случае, когда задано не напряжение σ_z, а продольная деформация цилиндра ε_z, удобно воспользоваться формулой

$$u=r\left[\frac{1-\mu^2}{E}\sigma_t-\frac{\mu(1+\mu)}{E}\sigma_r-\mu\varepsilon_z\right]. \qquad (12)$$

Формула (12) получается путем исключения величины σ_z из выражения (11) и зависимости

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left(\sigma_z-\mu\sigma_t-\mu\sigma_r\right).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи нагружения цилиндра.

а) цилиндр нагружен только внутренним давлением ($p_1=p$; $p_2=0$).

Напряжения и радиальные перемещения у внутренней поверхности цилиндра определяются выражениями

$$(\sigma_r)_{r=r_1}=-p;$$

$$(\sigma_t)_{r=r_1}=p\frac{1+k^2}{1-k^2};$$

$$(u)_{r=r_1}=\frac{pr_1}{E}\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}+\mu\right), \qquad (13)$$

где обозначено $k=\frac{r_1}{r_2}$.

Напряжения и перемещение у наружной поверхности цилиндра определяются формулами

$$(\sigma_r)_{r=r_2}=0;$$

$$(\sigma_t)_{r=r_2}=p\frac{2k^2}{1-k^2};$$

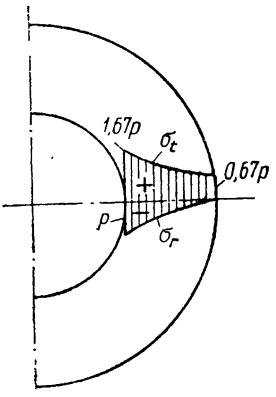
$$(u)_{r=r_2} = \frac{pr_2}{E} \cdot \frac{2k^2}{1-k^2}.$$

Эпюры напряжений σ_r и σ_t в зависимости от радиуса при $k = \frac{r_1}{r_2} = 0{,}5$ приведены на фиг. 226. Наиболее опасной является точка, лежащая у внутренней поверхности цилиндра, эквивалентное напряжение в которой, вычисленное по теории прочности О. Мора (см. гл. VI т. I), равно

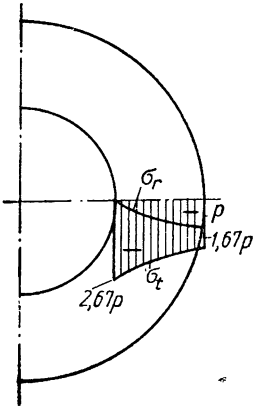
$$\sigma_{экв} = \sigma_t - \nu\sigma_r = p\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + \nu\right), \qquad (14)$$

где

$$\nu = \frac{\sigma_{sz}}{\sigma_{sd}}.$$



Фиг. 226.



Фиг. 227.

Если цилиндр дополнительно растягивается продольной силой N, возникающей вследствие давления p на его днища, то

$$N = p\pi r_1^2$$

и в его поперечных сечениях возникают равномерно распределенные напряжения

$$\sigma_z = \frac{N}{E} = p\frac{k^2}{1-k^2}.$$

Величины радиальных перемещений на внутреннем и наружном радиусах равны в этом случае

$$(u)_{r=r_1} = \frac{pr_1}{E}\left(\frac{1+k^2-\mu k^2}{1-k^2} + \mu\right);$$

$$(u)_{r=r_2} = \frac{pr_2}{E} \cdot \frac{2k^2-\mu k^2}{1-k^2}.$$

б) Цилиндр нагружен только внешним давлением ($p_1 = 0$; $p_2 = p$).

В этом случае у внутренней поверхности цилиндра

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0;$$

$$(\sigma_t)_{r=r_1} = -p\frac{2}{1-k^2};$$

$$(u)_{r=r_1} = -\frac{pr_1}{E}\cdot\frac{2}{1-k^2},$$

у наружной поверхности цилиндра

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = -p;$$

$$(\sigma_t)_{r=r_2} = -p\frac{1+k^2}{1-k^2};$$

$$(u)_{r=r_2} = -\frac{pr_2}{E}\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} - \mu\right). \qquad (15)$$

Эпюры распределения напряжений σ_t и σ_r при $k = \frac{1}{2}$ представлены на фиг. 227.

Наиболее опасной и в этом случае является точка у внутренней поверхности, где

$$\sigma_{экв} = -\nu\sigma_t = p\frac{2\nu}{1-k^2}. \qquad (16)$$

§ 2. РАСЧЕТ ПРЕССОВЫХ ПОСАДОК ПРИ ОДИНАКОВОЙ ДЛИНЕ СОПРЯГАЕМЫХ ДЕТАЛЕЙ

При прессовой или горячей посадке цилиндрических деталей прочное соединение этих деталей достигается за счет того, что внутренний диаметр охватывающей детали делается несколько меньше, чем наружный диаметр охватываемой детали (величина разности диаметров называется натягом δ). В результате после запрессовки на поверхности прилегания сопрягаемых деталей возникает контактное давление, обеспечивающее появление сил трения, препятствующих взаимному перемещению деталей. Если сопрягаемые путем прессовой посадки детали имеют одинаковую длину, то контактное давление равномерно распределено по поверхности касания, и для расчета можно воспользоваться теорией, изложенной в предыдущем параграфе.

Поскольку после соединения деталей внутренний диаметр охватывающей детали и наружный диаметр охватываемой детали становятся одинаковыми, то очевидно, что сумма абсолютных значений радиальных перемещений обеих деталей, вызванных контактным давлением, равна разности радиусов посадочных поверхностей до запрессовки (т. е. половине натяга δ):

$$|u_1| + |u_2| = \frac{\delta}{2}. \qquad (17)$$

Обозначим (фиг. 228):

d — диаметр посадочной поверхности;

$k_1 = \frac{d_1}{d}$ — отношение диаметров внутренней детали;

E_1 — модуль упругости материала внутренней детали;

μ_1 — коэффициент Пуассона для материала внутренней детали.

$k_2 = \frac{d}{d_2}$; E_2, μ_2 — соответствующие величины для наружной детали.

На основании формулы (15) радиальное перемещение на посадочной поверхности внутренней детали по абсолютной величине равно

$$|u_1| = \frac{pd}{2E_1}\left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1\right),$$

где p — контактное давление на посадочной поверхности.

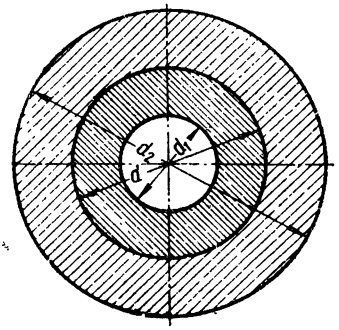
Аналогично по формуле (13) получим

$$|u_2| = \frac{pd}{2E_2}\left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2\right).$$

Подставляя величины u_1 и u_2 в уравнение (17), определяем величину контактного давления:

$$p = \frac{\frac{\delta}{d}}{\frac{1}{E_1}\left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1\right) + \frac{1}{E_2}\left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2\right)}. \qquad (18)$$

Следует иметь в виду, что поверхность деталей никогда не бывает абсолютно гладкой, на ней всегда имеются следы обработки — гребешки. В процессе запрессовки эти гребешки обминаются, поэтому действительный натяг δ всегда несколько меньше, чем определенный по замерам деталей до запрессовки (при шлифованных поверхностях разница между действительным и измеренным натягом составляет 10—20 *мк*). Необходимо иметь в виду, что формула (18) выведена в предположении справедливости закона Гука и неприменима, если предел пропорциональности в одной из сопрягаемых деталей превзойден. В этом случае контактное давление оказывается меньшим, чем значение, даваемое формулой (18). Оно может быть определено методами теории пластичности.



Фиг. 228.

Если сопрягаемые детали изготовляются из одинакового материала ($E_1=E_2=E$; $\mu_1=\mu_2=\mu$), то формула (18) упрощается. В этом случае

$$p = \frac{E\frac{\delta}{d}}{\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2}}. \qquad (18а)$$

Если, наконец, внутренняя деталь представляет собой сплошной цилиндр ($k_1=0$), то

$$p = E\frac{\delta}{d}\cdot\frac{1-k_2^2}{2}. \qquad (18б)$$

Эквивалентные напряжения в деталях определяются по формулам (14) и (16).

Усилие запрессовки можно найти по формуле

$$P = fp\pi dl, \tag{19}$$

где f — коэффициент трения;

l — длина запрессовки.

Величина коэффициента трения при наличии смазки лежит в пределах 0,06—0,1.

В качестве примера рассмотрим запрессовку сплошного цилиндра диаметром d в деталь весьма больших размеров (запрессовка штифта). В этом случае $k_1=0$ и $k_2 \approx 0$. Контактное давление равно

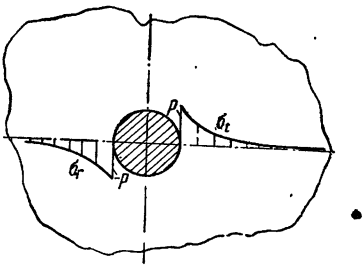
$$p = E\frac{\delta}{2d}.$$

Около отверстия по внешней детали возникают напряжения (фиг. 229) $\sigma_r = -p$; $\sigma_t = p$.

Поскольку в рассматриваемой точке $\sigma_r = -\sigma_t$, то напряженное состояние представляет собой чистый сдвиг. Интересно отметить, что в данном случае напряженное состояние чистого сдвига имеет место во всех точках наружной детали.

Эквивалентное напряжение

$$\sigma_{экв} = p(1+\nu).$$



Фиг. 229.

Если сопрягаемые путем прессовой посадки детали имеют различную длину (посадка короткой втулки или диска на более длинный вал), то для расчета следует воспользоваться методом, изложенным в § 9.

§ 3. СКРЕПЛЕНИЕ ЦИЛИНДРОВ

А. Основные соображения

Из формулы (14), определяющей величину эквивалентного напряжения в опасной точке цилиндра, нагруженного внутренним давлением, видно, что это напряжение

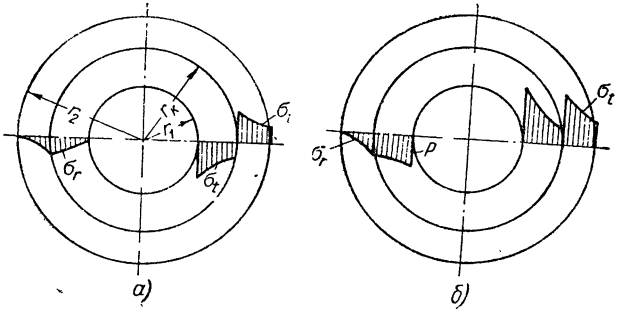
$$\sigma_{экв} = p\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + \nu\right)$$

не может быть меньше определенной величины, как бы ни изменялись размеры цилиндра. Действительно, даже при $k = \frac{r_1}{r_2} \to 0$, что соответствует бесконечно большому наружному диаметру цилиндра, эквивалентное напряжение в опасной точке равно

$$\sigma_{экв} = p(1+\nu).$$

Таким образом, если руководствоваться условием, что эквивалентное напряжение не должно достигать предела текучести σ_s, то невозможно изготовить цилиндр на давление большее, чем $\frac{\sigma_s}{1+\nu}$ (для стали $\frac{\sigma_s}{2}$, поскольку $\nu=1$), ни при каком выборе толщины его стенок. Причиной этого является то обстоятельство, что в толстостенных цилиндрах, нагруженных внутренним давлением, напряжения σ_r и σ_t очень быстро затухают с удалением от внутренней поверхности цилиндра и наружные слои материала являются малоактивными, поэтому утолщение стенок цилиндра не сопровождается пропорциональным увеличением его прочности.

В случае если цилиндр должен выдержать весьма большое давление, его делают составным из двух или более труб, которые с натягом надеваются друг на друга (обычно с помощью горячей посадки). Окружные напряжения, возникающие при посадке, во внутренней трубе являются напряжениями сжатия, а во внешней — растяжения. Эпюры распределения напряжений, возникающих после посадки, представлены на фиг. 230, *а*. Если теперь составной цилиндр подвергнуть внутреннему давлению, то в нем возникнут дополнительные напряжения, причем в наружном цилиндре они будут складываться с начальными напряжениями посадки, а во внутреннем — вычитаться из них.



Фиг. 230.

Суммарные эпюры напряжений после приложения давления будут иметь вид, примерно представленный на фиг. 230, *б*.

Таким образом, благодаря скреплению удается разгрузить внутренние волокна цилиндра за счет более интенсивного использования наружных.

Б. Расчет скрепленного цилиндра

Обозначим (фиг. 230, *а*):

$k_1 = \frac{r_1}{r_к}$ — отношение внутреннего радиуса r_1 цилиндра к радиусу $r_к$ посадочной поверхности;

$k_2 = \frac{r_к}{r_2}$ — отношение радиуса посадочной поверхности к наружному радиусу цилиндра r_2;

$k = \frac{r_1}{r_2} = k_1 k_2$ — отношение внутреннего радиуса составного цилиндра к наружному;

p_0 — контактное давление после запрессовки при отсутствии внутреннего рабочего давления p;

p_1 — контактное давление на посадочной поверхности при наличии внутреннего давления.

Напряжения в опасной точке внутренней трубы, нагруженной изнутри давлением p, а снаружи давлением p_1, равны

$$\sigma_r = -p;\ \sigma_t = p\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - p_1\frac{2}{1-k_1^2}.$$

Соответственно эквивалентное напряжение в этой точке (при $\nu = 1$) определяется по формуле

$$\sigma_{экв} = \sigma_t - \sigma_r = (p - p_1)\frac{2}{1-k_1^2}. \qquad (20)$$

Для внешней трубы, которая нагружена давлением p_1, эквивалентное напряжение в опасной точке определяется при $\nu = 1$ по формуле

$$\sigma_{экв_2} = p_1 \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + 1 \right) = p_1 \frac{2}{1 - k_2^2}. \qquad (21)$$

Для того чтобы внешняя и внутренняя трубы составного цилиндра были равнопрочными, необходимо, чтобы $\sigma_{экв_2}$ равнялось $\sigma_{экв_1}$. Это условие определяет желательную величину контактного давления между трубами при нагрузке цилиндра рабочим давлением:

$$p_1 = p \frac{1 - k_2^2}{2 - k_1^2 - k_2^2}. \qquad (22)$$

Величину контактного давления после запрессовки (при отсутствии рабочего давления) найдем, вычитая из давления p_1 величину радиального напряжения на радиусе $r_к$ соответствующего действию внутреннего давления p на цельный цилиндр с наружным радиусом r_2. По формуле (9) найдем это напряжение:

$$|\sigma_r| = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{r_2^2}{r_к^2} - 1 \right),$$

или, используя принятые обозначения,

$$|\sigma_r| = p \frac{k_1^2 (1 - k_2^2)}{1 - k_1^2 k_2^2}.$$

Необходимое для обеспечения равнопрочности груб контактное давление, осуществляемое посадкой, равно

$$p_0 = p_1 - |\sigma_r| = p \left[\frac{1 - k_2^2}{2 - k_1^2 - k_2^2} - \frac{k_1^2 (1 - k_2^2)}{1 - k_1^2 k_2^2} \right]. \qquad (23)$$

При заданных величинах внутреннего и наружного диаметров составного цилиндра наиболее выгодным является такой выбор диаметра посадки ($2r_к$), который соответствует наименьшей величине эквивалентного напряжения.

При правильном, в соответствии с формулами (22) и (23), выборе величины контактного давления эквивалентные напряжения во внутренней и наружной трубах [см. формулы (20) и (21)] одинаковы и равны

$$\sigma_{экв} = p \frac{2}{2 - k_1^2 - k_2^2}.$$

Так как отношение внутреннего радиуса составного цилиндра к наружному

$$k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{r_к} \cdot \frac{r_к}{r_2} = k_1 k_2,$$

является заданным, то, заменяя k_2 на $\frac{k}{k_1}$, можно эквивалентное напряжение $\sigma_{экв}$ выразить только в зависимости от k_1

$$\sigma_{экв} = p\frac{2}{2-k_1^2-\frac{k^2}{k_1^2}}.$$

Теперь дифференцируя $\sigma_{экв}$ по k_1 и приравнивая производную нулю, определим такое значение k_1, которое будет соответствовать наименьшей величине $\sigma_{экв}$.

Эквивалентное напряжение достигает минимума, равного

$$\sigma_{экв} = \frac{p}{1-k} \tag{24}$$

при $k_1 = \sqrt{k}$, т.е. при

$$r = \sqrt{r_1 r_2}. \tag{25}$$

Таким образом, при материале, одинаково работающем на растяжение и сжатие, выгодно в качестве посадочного диаметра составного цилиндра выбирать среднее геометрическое между внутренним и внешним его диаметрами.

Необходимая величина контактного давления, создаваемая при посадке, определяется в этом случае по формуле (23), которая при $k_1 = k_2 = \sqrt{k}$ принимает вид

$$p_0 = p\frac{1-k}{2(1+k)},$$

где p — расчетное внутреннее давление (рабочее) в составном цилиндре.

Соответствующую величину натяга δ можно найти по формуле (18а), произведя в ней необходимые подстановки:

$$\delta = \frac{p}{E} 2r. \tag{26}$$

Если радиус посадочной поверхности выбран по зависимости (25), а натяг — по формуле (26), то при действии на составной цилиндр внутреннего давления p эквивалентное напряжение в опасной точке определяется формулой (24). Сравнивая эту величину с величиной эквивалентного напряжения в несоставном цилиндре [формула (14) при $\nu = 1$], найдем, что их отношение равно

$$\frac{\sigma_{сост}}{\sigma_{спл}} = \frac{1+k}{2}.$$

Таким образом, изготовляя толстостенный цилиндр составным, можно почти вдвое уменьшить величину эквивалентного напряжения.

Составные цилиндры из двух насаженных друг на друга труб часто применяются в качестве стволов артиллерийских орудий и в других конструкциях, испытывающих высокое давление.

Метод скрепления цилиндров является, однако, не единственным методом, позволяющим повысить их несущую способность.

Такие же примерно результаты достигаются, если изготовленный цельный цилиндр подвергнуть нагрузке высоким внутренним давлением так, чтобы во внутренних волокнах цилиндра возникли пластические деформации. После разгрузки в цилиндре остаются остаточные напряжения, распределенные подобно напряжениям, возникающим при насадке цилиндров с натягом (внутренние кольцевые волокна сжаты, наружные — растянуты).

Остаточные напряжения у внутренней поверхности цилиндра имеют знак, обратный знаку напряжений, возникающих при воздействии на цилиндр внутреннего давления. Благодаря этому суммарные напряжения в опасных зонах цилиндра снижаются и прочность его увеличивается. Этот метод повышения несущей способности носит название автофреттирования или автоскрепления цилиндра. Метод расчета автоскрепленных цилиндров изложен в гл. X т. II, см. также [10].

§ 4. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРАХ

В работе [7] предложен графический метод определения напряжений в толстостенных цилиндрах. Этот метод позволяет эффективно решать задачи о расчете составных или неравномерно нагретых цилиндров, о прессовых посадках.

Введем обозначение

$$\frac{1}{r^2} = x \,, \tag{27}$$

тогда уравнения (8), дающие общий закон изменения напряжений по толщине стенки цилиндра, примут форму

$$\sigma_r = A - Bx \,; \tag{28}$$

$$\sigma_t = A + Bx \,. \tag{29}$$

Таким образом, зависимости напряжений σ_r и σ_t от величины $x = \frac{1}{r^2}$ выражаются прямыми линиями, отличающимися друг от друга знаком углового коэффициента.

Если взять системы координат $x\sigma_t$ и $x\sigma_r$ и расположить их так чтобы начало координат и оси σ_t и σ_r были совмещены, а оси абсцисс x направлены в противоположные стороны, то прямые по уравнениям (28) и (29), построенные в этих координатах, будут одна продолжением другой. Участок этой линии по одну сторону от оси ординат изображает напряжение σ_r, по другую σ_t.

Переход от графиков $x\sigma$ к эпюрам напряжений в зависимости от радиуса удобно выполнять также графически с помощью гиперболы $x = \frac{1}{r^2}$, показанной на фиг. 231 справа внизу.

На фиг. 231 дано графическое построение для случая, когда задано внутреннее p_1 и внешнее p_2 давления на цилиндр.

Отложив в системе $x\sigma_r$ от точек $x_1 = \frac{1}{r_1^2}$ и $x_2 = \frac{1}{r_2^2}$ значения $\sigma_{r1} = -p_1$ и $\sigma_{r2} = -p_2$ и соединив полученные точки прямой линией, получим эпюру напряжения σ_r. Продолжив эту прямую вправо, получаем в системе $x\sigma_t$ эпюру напряжения σ_t.

В качестве второго примера применения графического метода рассмотрим задачу о подборе наружного диаметра цилиндра, нагруженного внутренним давлением p.

Опасная точка лежит на внутренней поверхности. Максимальным главным напряжением является напряжение σ_t, минимальным — радиальное напряжение $\sigma_r = -p$. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{экв} = \sigma_t + \nu p \leqslant [\sigma],$$

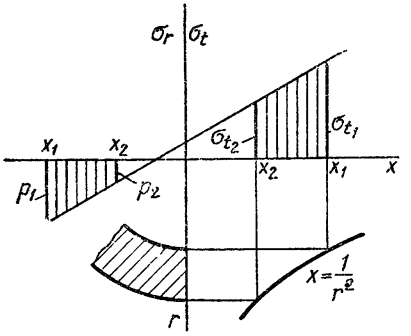
где

$$\nu = \frac{\sigma_{sz}}{\sigma_{sd}},$$

а $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на растяжение.

Следовательно, допустимое кольцевое напряжение $\sigma_{t\,доп}$ равно

$$\sigma_{t\,доп} = [\sigma] - \nu p.$$

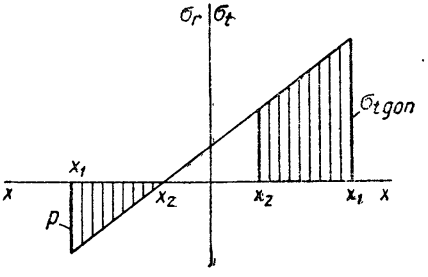


Фиг. 231.

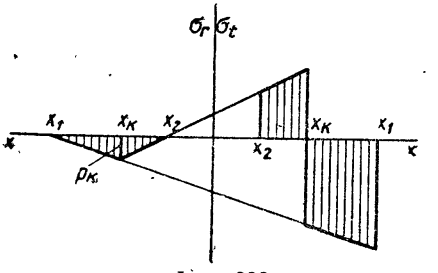
На диаграмме $x\sigma$ (фиг. 232) при $x = x_1 = \frac{1}{r_1^2}$ откладываем слева значение $\sigma_r = -p$, а справа $\sigma_{t\,доп}$.

Соединим полученные точки прямой. Точка пересечения этой прямой с осью абсцисс дает значение $x_2 = \frac{1}{r_2^2}$, где r_2 — искомый наружный радиус цилиндра.

С помощью графического метода можно рассчитывать и составные цилиндры. Для расчета составных цилиндров необходимо дополни-



Фиг. 232.



Фиг. 233.

тельно использовать формулы (11) или (12), связывающие радиальное перемещение u с напряжениями.

Рассмотрим, например, применение графического метода к расчету прессовой посадки. На фиг. 233 представлено построение для этого случая.

Отложив при $x = x_к = \frac{1}{r_к^2}$ контактное давление $p_к$, соединяем полученную точку прямыми с точками x_1 и x_2 ($p_1 = p_2 = 0$).

Указанные прямые дают эпюры напряжения σ_r во внутренней и внешней деталях, а продолжения этих прямых в правой части графика — эпюры напряжения σ_t.

Натяг δ, необходимый для получения нужного контактного давления, определяется по формуле (17), причем u_1 и u_2 подсчитываются по формуле (11) при $\sigma_z = 0$.

Таким образом, находим

$$\delta = 2r_к\left[\frac{|\sigma_{t1}| - \mu_1 p_к}{E_1} + \frac{\sigma_{t2} + \mu_2 p_к}{E_2}\right], \tag{30}$$

где E_1, μ_1, E_2 и μ_2 — модули упругости и коэффициенты Пуассона для внутренней и наружной деталей; напряжения σ_{t1} и σ_{t2} берутся непосредственно с чертежа.

Если заданным является не контактное давление, а натяг, то построение производится сначала при произвольном значении $p'_к$, а затем действительное давление определяется по формуле

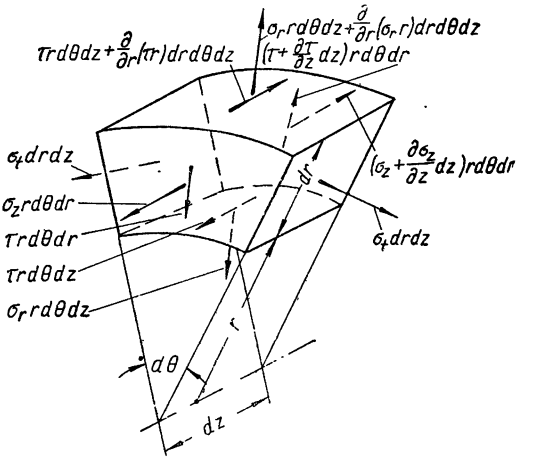
$$p_к = p'_к \frac{\delta}{\delta'},$$

где δ — заданный натяг;

δ' — натяг, соответствующий давлению $p'_к$, вычисленный по формуле (30).

§ 5. ДЕФОРМАЦИИ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ, НАГРУЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫМ ПО ДЛИНЕ ДАВЛЕНИЕМ

Если давление, нагружающее цилиндр, изменяется по его длине, то в поперечных сечениях цилиндра возникают, вообще говоря, касательные напряжения τ и нормальные напряжения σ_z, зависящие от радиуса r (фиг. 234). Радиальные сечения цилиндра являются плоскостями симметрии, и поэтому в них возникают только нормальные напряжения σ_t. Полное перемещение любой точки (r, z) трубы в процессе деформации можно разложить на два компонента: радиальное перемещение $u(r,z)$ и перемещение w в направлении оси z. Компоненты деформации выражаются через эти перемещения следующим образом.



Фиг. 234.

Радиальная деформация [ср. с формулой (2)]

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{31}$$

Деформация кольцевого волокна [ср. с формулой (1)]

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} \tag{32}$$

Деформация в осевом направлении (см. гл. II т. I)

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{33}$$

Относительный сдвиг радиального и осевого волокон [см. формулу (47) гл. II т. I]

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} . \qquad (34)$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем вместо r и z безразмерные величины

$$\frac{r}{r_2} = \rho ; \quad \frac{z}{r_2} = \zeta ,$$

где r_2 — наружный радиус цилиндра.

Величина ρ изменяется от

$$\rho = \frac{r_1}{r_2} = k$$

на внутренней поверхности цилиндра до $\rho = 1$ на внешней его поверхности.

При этих обозначениях получим следующие формулы для деформаций.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} ; \qquad (31а)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{u}{\rho} ; \qquad (32а)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta} ; \qquad (33а)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{1}{r_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) . \qquad (34а)$$

На основании закона Гука (см. гл. III т. I) деформации связаны с напряжениями следующим образом:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu\sigma_t - \mu\sigma_z) ; \qquad (35)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{u}{\rho} = \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu\sigma_r - \mu\sigma_z) ; \qquad (36)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu\sigma_r - \mu\sigma_t) ; \qquad (37)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{1}{r_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau . \qquad (38)$$

Рассмотрим условия равновесия выделенного из цилиндра элемента, изображенного на фиг. 234. Проектируя все приложенные к элементу силы на направление σ_r, получим

$$\frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r r) dr d\theta dz - \sigma_t dr d\theta dz + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz r d\theta dr = 0 .$$

Проектируя силы на ось цилиндра z, имеем

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz r d\theta dr + \frac{\partial}{\partial r} (\tau r) dr d\theta dz = 0 .$$

Сокращая в этих уравнениях общие множители и переходя к безразмерным координатам ρ, ζ можно записать уравнения равновесия в следующей форме:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{\rho} = 0 \; ; \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\tau) + \rho \frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta} = 0 . \tag{40}$$

Кроме уравнений равновесия (39) и (40) и уравнений (35) — (38), связывающих напряжения с перемещениями должны удовлетворяться также граничные условия на внутренней и наружной поверхностях цилиндра. Радиальные напряжения на этих поверхностях должны равняться приложенным давлением со знаком минус, а касательные напряжения должны отсутствовать, так как внешних поверхностных касательных сил нет:

$$(\sigma_r)_{\rho = \kappa} = -p_1; \; (\sigma_r)_{\rho = 1} = -p_2; \tag{41}$$

$$\tau_{\rho = \kappa} = 0; \; \tau_{\rho = 1} = 0. \tag{42}$$

Также должны быть удовлетворены условия, наложенные на напряжения или деформации на торцах цилиндра.

Решение задачи является точным, если установлены выражения для напряжений, удовлетворяющие уравнениям равновесия (39) и (40) и граничным условиям (41) и (42), причем существуют две непрерывные функции u и w, связанные с напряжениями формулами (35) — (38).

Точное решение нескольких задач о симметричной деформации сплошного цилиндра принадлежит Л. Файлону [15]. Им получено решение путем разложения нагрузки в ряд Фурье по длине цилиндра. Каждая элементарная синусоидальная нагрузка вызывает в материале цилиндра напряжения и деформации, выражающиеся в зависимости от радиуса через Бесселевы функции мнимого аргумента. Полные напряжения и смещения в каждой точке находятся с помощью суммирования соответствующих величин, вызванных каждой из элементарных нагрузок.

Метод Файлона может быть использован лишь в тех случаях, когда внешние нагрузки, действующие на цилиндр, можно разложить в быстро сходящийся ряд Фурье. Однако указанное условие на практике выполняется редко.

Если нагрузка действует только на малом участке цилиндра, последний целесообразно рассматривать как бесконечно длинный и заменить ряд Фурье интегралом Фурье.

Таким путем Г. С. Шапиро [13] и А. Ренкин [16] получили решение задачи о нагружении давлением, равномерно распределенным по участку боковой поверхности сплошного (Ренкин) и полого (Шапиро) цилиндров.

Для цилиндров конечной длины аналогичное решение дано В. К. Прокоповым [9].

Эти решения связаны с необходимостью определения интегралов Фурье численным методом, что крайне затрудняет вычисления.

Единственная попытка обойтись при точном решении задачи без численного интегрирования принадлежит, насколько известно, А. и Л. Феппль [12].

Рассматривая задачу о сплошном цилиндре, стянутом сосредоточенным кольцевым давлением (см. [10], § 85), эти авторы предположили, что асимптотическое представление функций Бесселя можно применять и при значениях аргумента, близких к нулю. Однако это предположение является необоснованным.

В результате полученные авторами значения напряжений оказались неправильными.

Таким образом, по-видимому, единственным методом точного решения задачи является численный метод.

Приближенное решение задачи, основанное на применении вариационной формулы Кастилиано предложено автором главы [1]. Это решение, изложено в следующем § 6.

Позднее С. В. Бояршиновым [2] предложен аналогичный метод расчёта, причем использована не формула Кастилиано, а метод Ритца.

Метод С. В. Бояршинова изложен в § 7.

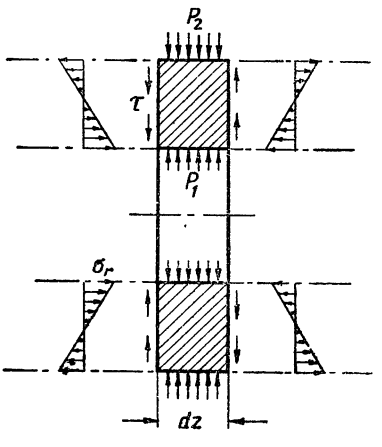
Применение вариационной формулы Кастилиано приводит к завышенным значениям перемещений, тогда как метод Ритца дает заниженную их величину.

Таким образом, применение обоих приближенных методов расчета позволяет получить «вилку», внутри которой заключено точное решение.

§ 6. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ, НАГРУЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫМ ПО ДЛИНЕ ДАВЛЕНИЕМ

А. Основные уравнения

Рассматриваемый ниже метод расчета [1] основан на строгом выполнении уравнений равновесия и статических граничных условий. Условия совместности деформаций и, в частности, условия существования функции w не выполняются. Они заменяются условием минимума потенциальной энергии деформации.



Фиг .235.

Рассмотрим деформации шайбы, вырезанной из цилиндра двумя близкими перпендикулярными к оси сечениями (фиг. 235).

Каждая из таких шайб деформируется по-разному, так как давления p_1 и p_2 изменяются вдоль оси. Чтобы восстановить непрерывность деформации, приложим силы взаимодействия элементов, т. е. напряжения σ_z и τ, связанные между собой уравнением (40). Если приложенные напряжения σ_z и τ совпадают с истинными, кольцевые элементы окажутся плотно соединенными. Показателем этого будет служить существование функции смещения w, удовлетворяющей одновременно уравнениями (37) и (38). В этом случае решение будет точным.

Задаваясь приближенными выражениями для σ_z и τ, будем требовать не точного выполнения уравнений совместности, но лишь наилучшего приближения. Это приближение будет достигнуто, если потенциальная энергия деформации, выраженная через напряжения, обратится в минимум (начало Кастилиано).

Зададимся величиной тангенциального напряжения τ в виде ряда

$$\tau = Z_1'(\zeta)\, V_1'(\rho) + Z_2'(\zeta)\, V_2'(\rho) + \ldots \tag{43}$$

Здесь $Z_1'(\zeta)$, $Z_2'(\zeta)$—функции только абсциссы, а $V_1'(\rho)$, $V_2'(\rho)$ зависят только от ρ. Для удобства дальнейших выкладок функции эти представлены в виде производных от некоторых первообразных функций $Z_1(\zeta)$, $Z_2(\zeta)$, ..., $V_1(\rho)$, $V_2(\rho)$, ...

Функции $Z_1(\zeta)$, $Z_2(\zeta)$, ... будут определены в дальнейшем из условия минимума потенциальной энергии, функциями же $V_1(\rho)$, $V_2(\rho)$, ... следует задаться.

Эти функции должны вследствие условий (42) удовлетворять равенствам

$$V'(k) = 0;\ V'(1) = 0. \tag{44}$$

При выборе в качестве функций $V_1(\rho)$, $V_2(\rho)$,... какой-либо полной системы функций и при учете достаточного числа членов ряда (43) решение задачи может быть как угодно приближено к точному. Желая получить приближенное решение, мы ограничимся учетом только двух первых членов ряда (43).

Подставляя принятое выражение (43) в уравнение (40) и интегрируя по ζ, находим

$$\sigma_z = -Z_1(\zeta)\frac{1}{\rho}(\rho\, V_1')' - Z_2(\zeta)\frac{1}{\rho}(\rho\, V_2')'. \tag{45}$$

Определим деформации и напряжения в шайбе, выделенной из цилиндра сечениями, перпендикулярными к оси (фиг. 235).

Решая совместно уравнения (35) и (36), находим

$$\sigma_r = \frac{E}{r_2(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \mu\frac{u}{\rho}\right) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z; \tag{46}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{r_2(1-\mu^2)}\left(\frac{u}{\rho} + \mu\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z. \tag{47}$$

Заменяя в уравнении равновесия (39) напряжения их значениями по формулам (43), (45), (46) и (47), получим следующее дифференциальное уравнение относительно функции радиального смещения u:

$$\frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{1}{r_2}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho u)\right] = \frac{\mu}{1-\mu}Z_1\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}(\rho V_1')'\right] - Z_1''V_1' + \frac{\mu}{1-\mu}Z_2\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}(\rho V_2')'\right] - Z_2''V_2'. \tag{48}$$

Дважды интегрируя уравнение (48) по ρ, найдем

$$\frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{u}{r_2} = A(\zeta)\rho + B(\zeta)\frac{1}{\rho} + \frac{\mu}{1-\mu}Z_1(\zeta)V_1'(\rho) - Z_1'(\zeta)\frac{1}{\rho}\int_k^\rho V_1\rho\, d\rho + \frac{\mu}{1-\mu}Z_2(\zeta)V_2'(\rho) - Z_2'(\zeta)\frac{1}{\rho}\int_k^\rho V_2\rho\, d\rho, \tag{49}$$

где $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ — произвольные функции ζ, подлежащие определению из граничных условий.

Подставляя полученное выражение для u из формулы (49) в зависимость (46) и заменяя в последней σ_z его значением по формуле (45), определим радиальное напряжение σ_r. Приравнивая напряжение σ_r на внутренней и наружной поверхностях трубы заданным давлениям p_1 и p_2, найдем значения функций $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$.

Подставляя эти значения $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ в уравнение (49), получим окончательно

$$E\frac{u}{r_2} = A_0(\zeta)(1-\mu)\rho + B_0(\zeta)(1+\mu)\frac{1}{\rho} + \mu(1+\mu)Z_1(\zeta)V_1' +$$

$$+ Z_1''(\zeta)\left[J_1(1-\mu)\rho + J_1(1+\mu)\frac{k^2}{\rho} - \frac{1-\mu^2}{\rho}\int_k^\rho V_1\rho\,d\rho\right] + \mu(1+\mu)Z_2(\zeta)V_2' +$$

$$+ Z_2''(\zeta)\left[J_2(1-\mu)\rho + J_2(1+\mu)\frac{k^2}{\rho} - \frac{1-\mu^2}{\rho}\int_k^\rho V_2\rho\,d\rho\right]. \qquad (50)$$

При выводе формулы (50) предположено, что функции V_1 и V_2 на внутреннем радиусе трубы обращаются в ноль.

В формуле (50) обозначено

$$A_0(\zeta) = \frac{k}{1-k^2}p_1(\zeta) - \frac{1}{1-k^2}p_2(\zeta); \qquad (51)$$

$$B_0(\zeta) = \frac{k^2}{1-k^2}[p_1(\zeta) - p_2(\zeta)]; \qquad (52)$$

$$J_1 = \frac{1}{1-k^2}\left[V_1(1) - (1-\mu)\int_k^1 V_1\rho\,d\rho\right]; \qquad (53)$$

$$J_2 = \frac{1}{1-k^2}\left[V_2(1) - (1-\mu)\int_k^1 V_2\rho\,d\rho\right]. \qquad (53а)$$

Так как давления p_1 и p_2 изменяются по длине цилиндра, то $A_0(\zeta)$ и $B_0(\zeta)$ являются заданными функциями ζ. Величины J_1 и J_2 являются постоянными при определенном выборе функций $V_1(\rho)$ и $V_2(\rho)$ и зависят только от соотношения радиусов цилиндра $\frac{r_1}{r_2} = k$.

Используя выражения (46) и (47), находим напряжения σ_r и σ_t:

$$\sigma_r = A_0(\zeta) - B_0(\zeta)\frac{1}{\rho^2} - \mu Z_1\frac{1}{\rho}V_1' + Z_1''\left[J_1\left(1-\frac{k^2}{\rho^2}\right) - V_1 +\right.$$

$$\left. + \frac{1-\mu}{\rho^2}\int_k^\rho V_1\rho\,d\rho\right] - \mu Z_2\frac{1}{\rho}V_2' + Z_2''\left[J_2\left(1-\frac{k^2}{\rho^2}\right) - V_2 +\right.$$

$$\left. + \frac{1-\mu}{\rho^2}\int_k^\rho V_2\rho\,d\rho\right]. \qquad (54)$$

$$\sigma_t = A_0(\zeta) + B_0(\zeta)\frac{1}{\rho^2} - \mu Z_1V_1'' + Z_1''\left[J_1\left(1+\frac{k^2}{\rho^2}\right) -\right.$$

$$\left. - \mu V_1 - \frac{1-\mu}{\rho^2}\int_k^\rho V_1\rho\,d\rho\right] - \mu Z_2V_2'' +$$

$$+ Z_2''\left[J_2\left(1+\frac{k^2}{\rho^2}\right) - \mu V_2 - \frac{1-\mu}{\rho^2}\int_k^\rho V_2\rho\,d\rho\right]. \qquad (55)$$

Формулы (43), (45), (54) и (55) позволяют определить все напряжения в цилиндре в зависимости от функций $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$. Первые два члена в каждой из формул (50), (54) и (55) соответствуют обычным формулам Ляме; члены, зависящие от Z_1 и Z_2, определяют собой отклонения от формул Ляме в связи с изменением нагрузок по длине цилиндра.

Функции $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$ определим из условий минимума потенциальной энергии деформации цилиндра.

Удельная потенциальная энергия деформации, выраженная через напряжения [см. формулу (35) гл. III т. I],

$$W = \frac{1}{2E}\left[\sigma_r^2 + \sigma_t^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_r\sigma_t + \sigma_t\sigma_z + \sigma_z\sigma_r) + 2(1+\mu)\tau^2\right].$$

Умножая эту величину на элементарный объем

$$dv = r_2^3\, 2\pi\rho\, d\rho\, d\zeta$$

и интегрируя по всему объему цилиндра, получим для полной потенциальной энергии деформации цилиндра формулу

$$U = \frac{\pi r_2^3}{E}\int_0^{\frac{l}{r_2}}\int_k^1 \left[\sigma_r^2 + \sigma_t^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_r\sigma_t + \sigma_t\sigma_z + \sigma_z\sigma_r) + 2(1+\mu)\tau^2\right]\rho\, d\rho\, d\zeta,$$

где l — общая длина цилиндра.

Подставляя сюда значения напряжений и интегрируя по ρ, можно выразить U через $p_1(\zeta)$, $p_2(\zeta)$, $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$:

$$U = \frac{\pi r_2^3}{E}\int_0^{\frac{l}{r_2}} F(Z_1, Z_1', Z_1'', Z_2, Z_2', Z_2'', \zeta)\, d\zeta, \qquad (56)$$

где

$$F = 2(1-k^2)\left[Z_1'' J_1 + Z_2'' J_2\right]^2 + (1-\mu^2)\int_k^1 \left[Z_1'' V_1(\rho) + Z_2'' V_2(\rho)\right]^2 \rho\, d\rho -$$

$$-(1+\mu)\left[Z_1'' V_1(1) + Z_2'' V_2(1)\right]^2 + 2(1+\mu)\int_k^1 \left[Z_1' V_1'(\rho) + Z_2' V_2'(\rho)\right]^2 \rho\, d\rho +$$

$$+2\mu(1+\mu)\int_k^1 \left[Z_1 V_1'(\rho) + Z_2 V_2'(\rho)\right]\left[Z_1'' V_1'(\rho) + Z_2'' V_2'(\rho)\right]\rho\, d\rho +$$

$$+(1-\mu^2)\int_k^1 \left[Z_1 \frac{1}{\rho}(\rho V_1')' + Z_2 \frac{1}{\rho}(\rho V_2')'\right]^2 \rho\, d\rho +$$

$$+2A_0(1-\mu)\left\{Z_1''\left[V_1(1) - 2\int_k^1 V_1\rho\, d\rho\right] + Z_2''\left[V_2(1) - 2\int_k^1 V_2\rho\, d\rho\right]\right\} +$$

$$+2B_0(1+\mu)\left\{Z_1'' V_1(1) + Z_2'' V_2(1)\right\} + f(\zeta). \qquad (57)$$

В выражении (57) через $f(\zeta)$ обозначены слагаемые, не зависящие от функций Z_1 и Z_2.

Для того чтобы потенциальная энергия деформации по формуле (56) была минимальной, функции $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$ должны удовлетворять следующим уравнениям Эйлера[1]:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial Z_1}-\frac{d}{d\zeta}\cdot\frac{\partial F}{\partial Z_1'}+\frac{d^2}{d\zeta^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial Z_1''}=0;\\ \frac{\partial F}{\partial Z_2}-\frac{d}{d\zeta}\cdot\frac{\partial F}{\partial Z_2'}+\frac{d^2}{d\zeta^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial Z_2''}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(58)$$

Уравнения (58) представляют собой линейные дифференциальные уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Эти уравнения можно представить в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned}K_{11}Z_1^{IV}+K_{12}Z_1''+K_{13}Z_1+K_5Z_2^{IV}+K_6Z_2''+K_7Z_2=-\frac{d^2}{d\zeta^2}K_{14};\\ K_{21}Z_2^{IV}+K_{22}Z_2''+K_{23}Z_2+K_5Z_1^{IV}+K_6Z_1''+K_7Z_1=-\frac{d^2}{d\zeta^2}K_{24}.\end{aligned}\right\}\qquad(59)$$

Коэффициенты уравнений (59) вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned}K_{11}=2(1-k^2)J_1^2+(1-\mu^2)\int_k^1 V_1^2\rho\,d\rho-(1+\mu)V_1^2(1);\\ K_{12}=-2(1-\mu^2)\int_k^1 (V_1')^2\rho\,d\rho;\\ K_{13}=(1-\mu^2)\int_k^1\left[\frac{1}{\rho}(\rho V_1')'\right]^2\rho\,d\rho;\\ K_{14}=p_1(\zeta)\,2k^2J_1-p_2(\zeta)[2J_1-(1+\mu)V_1(1)].\end{aligned}\right\}\qquad(60)$$

Коэффициенты K_{21}, K_{22}, K_{23}, K_{24} определяются по тем же формулам (60) с заменой J_1 на J_2 и V_1 на V_2.

Коэффициенты K_5, K_6 и K_7 в уравнениях (59) определяются по формулам (61):

$$\left.\begin{aligned}K_5=2(1-k^2)J_1J_2+(1-\mu^2)\int_k^1 V_1V_2\rho\,d\rho-(1+\mu)V_1(1)V_2(1);\\ K_6=-2(1-\mu^2)\int_k^1 V_1'V_2'\rho\,d\rho;\\ K_7=(1-\mu^2)\int_k^1(\rho V_1')'(\rho V_2')'\frac{d\rho}{\rho}.\end{aligned}\right\}\qquad(61)$$

Задаваясь на основании тех или иных соображений функциями $V_1(\rho)$ и $V_2(\rho)$, можно по формулам (60) и (61) определить коэффициенты уравнений системы (59), решить эти уравнения относительно Z_1 и Z_2 и затем по формулам (43), (45), (50), (54) и (55) определить все напряжения и радиальные смещения.

[1] См., например, „Курс высшей математики" В. И. Смирнова, Гостехтеоретиздат, т. IV, 1953.

Для полого цилиндра можно апроксимировать различные вероятные законы распределения напряжений в поперечном сечении, если задать функции $V_1(\rho)$ и $V_2(\rho)$ в следующей форме [1]:

$$V_1 = \frac{1}{18(1+k)}\left[-2(1+k)\rho^3 + 3(1+k+k^2)\rho^2 - k^2(k^2+k+3) - 6k^2 \ln\frac{\rho}{k}\right]; \quad (62)$$

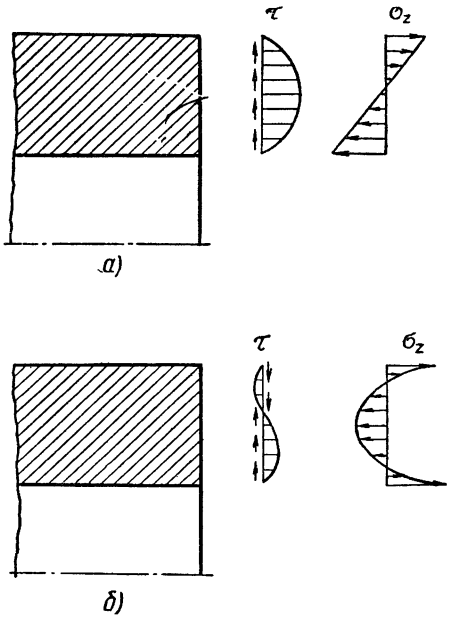
$$V_2 = \frac{1}{4}(\rho-k)^2(1-\rho)^2 + \lambda\frac{1}{6}(\rho-k)^2(3-2\rho-k). \quad (63)$$

Формула для V_1 (ρ) выбрана так, что она соответствует линейному закону изменения напряжений σ_z в зависимости от радиуса. Действительно, как следует из формулы (45), напряжение σ_z, соответствующее первому члену ряда (43), пропорционально величине

$$\frac{1}{\rho}(\rho V_1')' = \frac{2}{3}\cdot\frac{1-k^3}{1-k^2} - \rho, \quad (64)$$

которая изменяется по линейному закону. Касательное напряжение, соответствующее функции V_1, пропорционально величине V_1' [см. формулу (43)]:

$$V_1' = \frac{1}{3(1+k)}\left[-(1+k)\rho^2 + (1+k+k^2)\rho - \frac{k^2}{\rho}\right]. \quad (65)$$



Фиг. 236.

Эпюры распределения напряжений σ_z и τ, соответствующие принятой зависимости $V_1(\rho)$, представлены на фиг. 236,*а*.

В выражении для V_2 по формуле (63) основным является первый член, малый же коэффициент λ выбирается так, чтобы обращался в ноль коэффициент K_5 по формуле (61). При $\mu=0{,}3$ коэффициент λ в зависимости от отношения радиусов цилиндра k имеет следующие значения:

k	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
$\frac{10^3}{(1-k)^2}\lambda$	88,133	60,292	52,485	47,324	39,393	35,00

Нормальные напряжения σ_z, соответствующие выбранной функции $V_2(\rho)$, пропорциональны величине

$$\frac{1}{\rho}(\rho V_2')' = \frac{1}{2}\left[8\rho^2 - 9(1+k)\rho + 2(1+4k+k^2) - k(1+k)\frac{1}{\rho}\right] + \lambda\left[-3\rho + 2(1+k) - \frac{k}{\rho}\right]. \quad (66)$$

Касательные напряжения пропорциональны величине

$$V_2 = \left(\frac{1+k}{2} - \rho\right)(\rho - k)(1 - \rho) + \lambda(\rho - k)(1 - \rho). \qquad (67)$$

Распределение напряжений σ_z и τ, соответствующее принятой зависимости $V_2(\rho)$, показано на фиг. 236, *б*.

Как видно из фигуры, суммируя напряжения, соответствующие первому и второму приближениям, можно апроксимировать самые разнообразные законы распределения напряжений по толщине стенки, которые могут иметь место в практике.

Можно показать, что если величина λ выбрана так, что коэффициент K_5 обращается в ноль, то коэффициенты K_6 и K_7 также оказываются весьма малыми, и соответствующими членами в уравнениях (59) можно пренебречь. После деления на коэффициенты при Z_1^{IV} и при Z_2^{IV} эти уравнения можно записать в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} Z_1^{IV} - 4s_1^2 Z_1'' + 4m_1^4 Z_1 &= f_1(\zeta); \\ Z_2^{IV} - 4s_2^2 Z_2'' + 4m_2^4 Z_2 &= f_2(\zeta), \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

где

$$\left.\begin{aligned} f_1(\zeta) &= \frac{d^2}{d\zeta^2}(-n_1 p_1 + q_1 p_2); \\ f_2(\zeta) &= -\frac{d^2}{d\zeta^2}(n_2 p_1 + q_2 p_2). \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Числовые значения коэффициентов дифференциальных уравнений (68) в зависимости от отношения радиусов цилиндра приведены в табл. 11, в которой с целью облегчения интерполяции приведены не сами коэффициенты, а их произведения на величину $(1-k)$ в различных степенях.

Таблица 11

Числовые значения коэффициентов дифференциальных уравнений (68)

k	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
s_1^2	1,95	1,33	1,06	0,915	0,680	0,545
$m_1^4(1-k)^3$	11,4	6,75	5,42	4,55	3,40	2,72
$n_1(1-k)^3$	4,40	7,90	9,15	9,95	11,2	12,0
$q_1(1-k)^3$	22,6	17,1	15,5	14,4	12,9	12,0
$s_2^2(1-k)^2$	8,55	6,60	6,35	6,20	6,05	6,00
$m_2^4(1-k)^4$	178	142	136	132	129	128
$n_2(1-k)^4$	18,4	28,9	32,6	35,2	39,1	42,1
$q_2(1-k)^4$	62,9	53,4	50,9	49,5	45,2	42,1

Таким образом, благодаря рациональному выбору вида функций $V_1(\rho)$ и $V_2(\rho)$ удалось вместо системы дифференциальных уравнений (59) получить два независимых дифференциальных уравнения (68), определяющие функции $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$.

Решение уравнений (62) можно представить в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} Z_1(\zeta) &= e^{-\alpha_1\zeta}(A_1\cos\beta_1\zeta + B_1\sin\beta_1\zeta) + e^{\alpha_1\zeta}(C_1\cos\beta_1\zeta + \\ &\quad + D_1\sin\beta_1\zeta) + \Phi_1(\zeta); \\ Z_2(\zeta) &= e^{-\alpha_2\zeta}(A_2\cos\beta_2\zeta + B_2\sin\beta_2\zeta) + e^{\alpha_2\zeta}(C_2\cos\beta_2\zeta + \\ &\quad + D_2\sin\beta_2\zeta) + \Phi_2(\zeta). \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

В выражениях (70) члены, содержащие экспоненциальные множители, представляют общие решения однородных уравнений, а $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$ — частные решения соответствующих дифференциальных уравнений с правой частью (A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2 и D_2 — произвольные постоянные).

В выражениях (70) введены следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{m_1^2 + s_1^2}; \\ \beta_1 &= \sqrt{m_1^2 - s_1^2}; \\ \alpha_2 &= \sqrt{m_2^2 + s_2^2}; \\ \beta_2 &= \sqrt{m_2^2 - s_2^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Графики зависимости величин α_1, β_1, n_1 q_1, а также α_2, β_2, n_2 и q_2 от соотношения радиусов цилиндра k приведены на фиг. 237—240.

Частные решения уравнения (68) при самом общем законе изменения давления можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(\zeta) &= \int_0^\zeta Y_1(\zeta - t) f_1(t)\, dt; \\ \Phi_2(\zeta) &= \int_0^\zeta Y_2(\zeta - t) f_2(t)\, dt, \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

где t — переменная интегрирования;

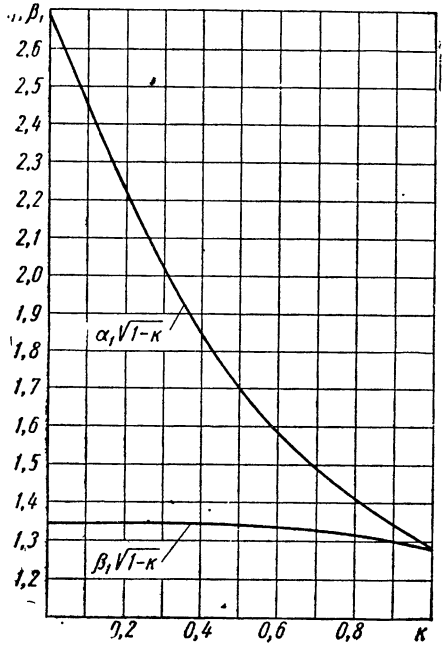
Y_1 и Y_2 — функции, представляющие собой решения однородных уравнений, соответствующих уравнениям (68), удовлетворяющие следующим условиям:

$$Y(0) = Y'(0) = Y''(0) = 0;\ Y'''(0) = 1. \qquad (73)$$

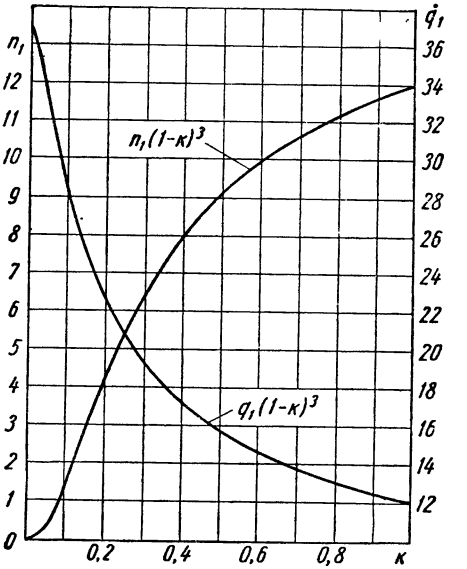
Легко непосредственной подстановкой проверить, что выражения (72) действительно обращают уравнения (68) в тождества.

Определение функций $Y_1(\zeta)$ и $Y_2(\zeta)$, удовлетворяющих условиям (73), не представляет затруднений, однако для практических вычислений эти функции не нужны, и поэтому их значения не приводятся. Уравнения (72) следует использовать для нахождения частных решений $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$ в тех случаях, когда давление изменяется вдоль образующей цилиндра по сложному закону, в большинстве же случаев решение может быть получено более простыми методами.

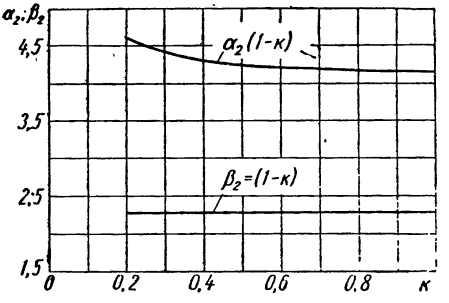
Ниже рассматривается применение изложенной теории к основным случаям распределения нагрузки по длине цилиндра. С помощью метода наложения эти основные виды нагрузок могут быть использованы для решения самых разнообразных частных задач.



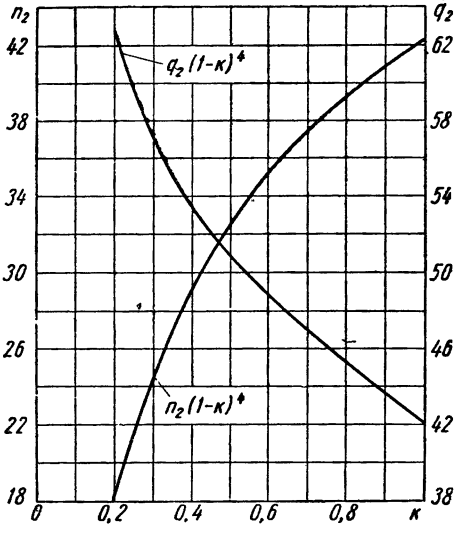
Фиг. 237.



Фиг. 238.



Фиг. 239.



Фиг. 240.

Б. Цилиндр со свободными торцами, нагруженный давлениями, изменяющимися по линейному закону

В случае, если p_1 и p_2 линейно зависят от ζ, функции $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ тождественно равны нулю, и уравнения (68) являются однородными. Так как торцы цилиндра $\left(\zeta=0 \text{ и } \zeta=\frac{l}{r_2}\right)$ свободны от нагрузок, то на них должны отсутствовать нормальные σ_z и касательные τ напряжения. Для того чтобы эти условия были выполнены, функции Z_1 и Z_2 должны, как следует из формул (43) и (45), удовлетворять следующим граничным условиям:

при $\zeta = 0$

$$Z_1(0) = 0;\ Z_2(0) = 0;$$

$$Z_1'(0) = 0;\ Z_2'(0) = 0;$$

при $\zeta = \frac{l}{r_2}$

$$Z_1\left(\frac{l}{r_2}\right) = 0;\ Z_2\left(\frac{l}{r_2}\right) = 0;$$

$$Z_1'\left(\frac{l}{r_2}\right) = 0;\ Z_2'\left(\frac{l}{r_2}\right) = 0.$$

Таким образом, уравнения граничных условий, так же как и дифференциальные уравнения, являются в этом случае однородными.

Дифференциальные уравнения и граничные условия удовлетворяются только при функциях $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$, тождественно равных нулю.

При этом формулы, определяющие напряжения σ_r и σ_t и радиальные перемещения u, превращаются в обычные формулы Ляме. Напряжения σ_z и τ отсутствуют. Легко показать, что полученное решение является точным. Действительно, это решение удовлетворяет уравнениям равновесия (39) и (40) и уравнениям (35) и (36). Остается только показать, что можно найти функцию w, удовлетворяющую одновременно уравнениям (37) и (38).

Из уравнения (38) следует, что при $\sigma_z=0$.

$$\frac{1}{r_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{\mu}{E}(\sigma_r + \sigma_t);$$

но по формуле Ляме

$$\sigma_r + \sigma_t = 2A_0(\zeta) = \frac{2}{1-k^2}(k^2 p_1 - p_2),$$

т. е. эта величина не зависит от радиуса ρ и, так же как и давления, линейно зависит от абсциссы ζ.

Для того чтобы удовлетворялось уравнение (37), должно быть

$$\frac{1}{r_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta} = a\zeta + b,$$

где a и b — постоянные.

Из уравнения (38) следует, что при $\tau = 0$

$$\frac{1}{r_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} = -\frac{1}{r_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

Так как смещение w линейно зависит от ζ, то производная $\frac{du}{d\zeta}$ от ζ не зависит, и чтобы удовлетворялось уравнение (38), необходимо соблюдение условия

$$\frac{1}{r_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} = \varphi(\rho),$$

где φ не зависит от ζ.

Функция w, удовлетворяющая одновременно уравнениям (37) и (38), существует:

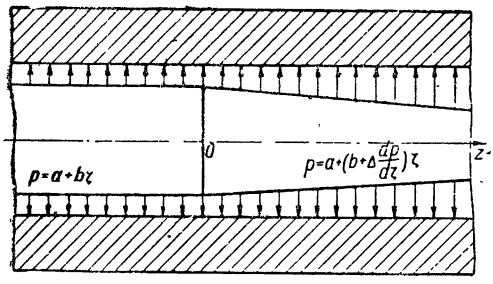
$$\frac{1}{r_2} w = \frac{a\zeta^2}{2} + b\zeta + \int \varphi(\rho)\, d\rho.$$

Из изложенного выше следует, что теория Ляме справедлива не только для равномерно нагруженного цилиндра, но и для цилиндра со свободными торцами, нагруженного давлением, изменяющимся вдоль образующей по линейному закону. Итак, при расчете труб с линейным законом изменения давления можно пользоваться формулами Ляме.

При определении напряжений и радиальных перемещений в каком-нибудь поперечном сечении цилиндра надо в формулы Ляме (см. § 1) подставлять величины давлений p_1 и p_2, которые имеют место в рассматриваемом сечении.

В. ЦИЛИНДР БОЛЬШОЙ ДЛИНЫ, НАГРУЖЕННЫЙ ДАВЛЕНИЕМ, ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ ПО ЗАКОНУ ЛОМАНОЙ (фиг. 241)

Рассмотрим тот случай, когда эпюра внутреннего или внешнего давлений или обоих давлений одновременно имеет излом в средней части цилиндра, причем расстояния от места излома до торцов цилиндра велики (на фиг. 241 изображен случай, когда имеется только внутреннее давление).



Фиг. 241.

Расположим начало координат ($\zeta=0$) в месте излома эпюры давления. Очевидно, что влияние излома эпюры давления распространяется лишь в пределах ограниченной зоны вблизи сечения $\zeta=0$. Вдали от этого сечения (при $\zeta \to \infty$ и при $\zeta \to -\infty$), где давления распределены по линейному закону, должны быть справедливы формулы Ляме.

Таким образом, при $\zeta \to \infty$ и при $\zeta \to -\infty$

$$Z_1(\zeta) \to 0;\ Z_2(\zeta) \to 0.$$

Поскольку уравнения для функций Z_1 и Z_2 по форме совершенно идентичны, ограничимся рассмотрением одной только функции $Z_1(\zeta)$.

Как в левой ($\zeta<0$), так и правой ($\zeta>0$) частях цилиндра давления изменяются по линейным законам, и, следовательно, правая часть уравнения (68) $f_1(\zeta)$ равна нулю. Поэтому на каждом из участ-

ков функция $Z_1(\zeta)$ представляет собой решение однородного уравнения и может быть записана в форме

$$\left.\begin{array}{l}\text{при } \zeta < 0\\ \overline{Z}_1(\zeta) = e^{\alpha_1\zeta}(\overline{A}\cos\beta_1\zeta + \overline{B}\sin\beta_1\zeta) + e^{-\alpha_1\zeta}(\overline{C}\cos\beta_1\zeta + \overline{D}\sin\beta_1\zeta);\\ \text{при } \zeta > 0\\ Z_1(\zeta) = e^{\alpha_1\zeta}(A\cos\beta_1\zeta + B\sin\beta_1\zeta) + e^{-\alpha_1\zeta}(C\cos\beta_1\zeta + D\sin\beta_1\zeta)\end{array}\right\} \quad (74)$$

(чертой наверху отмечены величины, относящиеся к левой части цилиндра).

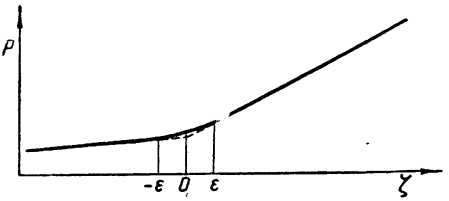
Так как в выражениях для $Z_1(\zeta)$ должны отсутствовать члены, неограниченно возрастающие с удалением от начала координат, то

$$\overline{C} = \overline{D} = 0;\ A = B = 0. \quad (75)$$

Постоянные $\overline{A}$, $\overline{B}$, C и D можно определить, исследуя поведение функции $Z_1(\zeta)$ вблизи точки $\zeta = 0$.

В этой точке функция

$$f_1(\zeta) = -\frac{d^2}{d\zeta^2}(n_1 p_1 - q_1 p_2)$$



Фиг. 242.

не имеет определенного значения, так как первая производная $\frac{d}{d\zeta}(n_1 p_1 - q_1 p_2)$ терпит разрыв. Предположим, что величина $\frac{d}{d\zeta}(n_1 p_1 - q_1 p_2)$ плавно меняется на участке $-\varepsilon < \zeta < \varepsilon$, длина которого 2ε в дальнейшем будет стремиться к нулю (фиг. 242).

В этом случае будут справедливы следующие очевидные равенства:

$$\left.\begin{array}{l}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_1(\zeta)\,d\zeta = -\frac{d}{d\zeta}(n_1 p_1 - q_1 p_2)_{\zeta=\varepsilon} + \frac{d}{d\zeta}(n_1 p_1 - q_1 p_2)_{\zeta=-\varepsilon} =\\ \quad = -n_1\Delta\frac{dp_1}{d\zeta} + q_1\Delta\frac{dp_2}{d\zeta};\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int f_1(\zeta)\,d\zeta^2 = 0;\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\int\int f_1(\zeta)\,d\zeta^3 = 0;\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\int\int\int f_1(\zeta)\,d\zeta^4 = 0,\end{array}\right\} \quad (76)$$

где $\Delta\frac{dp_1}{d\zeta}$ и $\Delta\frac{dp_2}{d\zeta}$ — изменения уклонов эпюр внутреннего и внешнего давлений при переходе через начало координат.

Проинтегрируем почленно первое из уравнений (68)

$$Z_1^{IV} - 4s_1^2 Z_1'' + 4m_1^4 Z_1 = f_1(\zeta)$$

в пределах от $-\varepsilon$ до ε и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [Z_1^{IV} - 4 s_1^2 Z_1'' + 4 m_1^4 Z_1] \, d\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_1(\zeta) \, d\zeta.$$

Функция $Z_1(\zeta)$, пропорциональная напряжениям σ_z, по самому своему смыслу ограничена $Z_1 \neq \infty$, поэтому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Z_1 \, d\zeta = 0.$$

В то же время

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Z_1^{IV} \, d\zeta = Z_1'''(\varepsilon) - Z_1'''(-\varepsilon) = \Delta Z_1'''$$

и

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Z_1'' \, d\zeta = Z_1'(\varepsilon) - Z_1'(-\varepsilon) = \Delta Z_1'.$$

Таким образом, используя первое из соотношений (76), получим

$$\Delta Z''' - 4 s_1^2 \Delta Z_1' = - n_1 \Delta \frac{dp_1}{d\zeta} + q_1 \Delta \frac{dp_2}{d\zeta}.$$

Точно так же, дважды интегрируя первое из уравнений (68) от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$, найдем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int [Z_1^{IV} - 4 s_1^2 Z_1'' + 4 m_1^4 Z_1] \, d\zeta^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int f_1(\zeta) \, d\zeta^2,$$

откуда, учитывая второе из соотношений (76),

$$\Delta Z_1'' - 4 s_1^2 \Delta Z_1 = 0.$$

Производя теперь трех- и четырехкратное интегрирование, получим

$$\Delta Z_1' = 0;$$
$$\Delta Z_1 = 0.$$

Сопоставляя все полученные выражения, окончательно имеем

$$\left.\begin{aligned} \Delta Z_1 &= 0; \\ \Delta Z_1' &= 0; \\ \Delta Z_1'' &= 0; \\ \Delta Z_1''' &= - n_1 \Delta \frac{dp_1}{d\zeta} + q_1 \Delta \frac{dp_2}{d\zeta}. \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

Величина ΔZ_1 представляет собой изменение функции $Z_1(\zeta)$ при переходе через начало координат, т. е.

$$\Delta Z_1 = Z_1(0) - \overline{Z}_1(0);$$

аналогично

$$\Delta Z_1' = Z_1'(0) - \overline{Z}_1'(0)$$

и т. д.

Подставляя значения функций Z_1 и $\overline{Z}_1$ из формулы (74) и учитывая условия (75) и (77), найдем четыре уравнения, определяющие постоянные $\overline{A}$, $\overline{B}$, C и D.

Решение этих уравнений дает

$$\overline{A} = C = -\left(n_1 \Delta \frac{dp_1}{d\zeta} - q_1 \Delta \frac{dp^2}{d\zeta}\right) \frac{1}{4\alpha_1 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)};$$

$$\overline{B} = -D = \left(n_1 \Delta \frac{dp_1}{d\zeta} - q_1 \Delta \frac{dp_2}{d\zeta}\right) \frac{1}{4\beta_1 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)}.$$

Таким образом,

при $\zeta < 0$

$$Z_1(\zeta) = -\left(n_1 \Delta \frac{dp_1}{d\zeta} - q_1 \Delta \frac{dp_2}{d\zeta}\right) \frac{1}{4\alpha_1 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{\alpha_1 \zeta} \left(\cos \beta_1 \zeta - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \sin \beta_1 \zeta\right);$$

при $\zeta > 0$

$$Z_1(\zeta) = -\left(n_1 \Delta \frac{dp_1}{d\zeta} - q_1 \Delta \frac{dp_2}{d\zeta}\right) \frac{1}{4\alpha_1 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{-\alpha_1 \zeta} \left(\cos \beta_1 \zeta + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \sin \beta_1 \zeta\right),$$

Введем специальную функцию

$$S_1(\zeta) = e^{-\alpha_1 \zeta} \left(\cos \beta_1 \zeta + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \sin \beta_1 \zeta\right), \tag{78}$$

тогда при $\zeta < 0$

$$Z_1(\zeta) = -\frac{n_1 \Delta \frac{dp_1}{d\zeta} - q_1 \Delta \frac{dp_2}{d\zeta}}{4\alpha_1 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)} S_1(-\zeta) \tag{79}$$

и при $\zeta > 0$

$$Z_1(\zeta) = -\frac{n_1 \Delta \frac{dp_1}{d\zeta} - q_1 \Delta \frac{dp_2}{d\zeta}}{4\alpha_1 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)} S_1(\zeta). \tag{79a}$$

Аналогично функция $Z_2(\zeta)$ определяется уравнениями:

при $\zeta < 0$

$$Z_2(\zeta) = -\frac{n_2 \Delta \frac{dp_1}{d\zeta} + q_2 \Delta \frac{dp_2}{d\zeta}}{4\alpha_2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2)} T_1(-\zeta); \tag{80}$$

при $\zeta > 0$

$$Z_2(\zeta) = -\frac{n_2 \Delta \frac{dp_1}{d\zeta} + q_2 \Delta \frac{dp_2}{d\zeta}}{4\alpha_2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2)} T_1(\zeta), \tag{80a}$$

где

$$T_1(\zeta) = e^{-\alpha_2 \zeta} \left(\cos \beta_2 \zeta + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \sin \beta_2 \zeta\right). \tag{81}$$

Кроме функций S_1 и T_1, введем также функции S_2, S_3, S_4, S_5 и T_2, T_3, T_4, T_5, которые имеют важное значение в излагаемой теории

$$\left.\begin{aligned} S_2(\zeta) &= e^{-\alpha_1\zeta}\frac{1}{\beta_1}\sin\beta_1\zeta;\\ S_3(\zeta) &= e^{-\alpha_1\zeta}\left(\cos\beta_1\zeta - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\sin\beta_1\zeta\right);\\ S_4(\zeta) &= e^{-\alpha_1\zeta}\left(-2\alpha_1\cos\beta_1\zeta + \frac{\alpha_1^2-\beta_1^2}{\beta_1}\sin\beta_1\zeta\right);\\ S_5(\zeta) &= e^{-\alpha_1\zeta}\left[(3\alpha_1^2-\beta_1^2)\cos\beta_1\zeta + \frac{\alpha_1}{\beta_1}(3\beta_1^2-\alpha_1^2)\sin\beta_1\zeta\right]. \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

Функции $T_2 - T_5$ определяются подобными же формулами с заменой α_1 и β_1 на α_2 и β_2. Между введенными функциями имеются следующие дифференциальные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} S_1'(\zeta) &= -(\alpha_1^2+\beta_1^2)S_2(\zeta);\\ S_2'(\zeta) &= S_3(\zeta);\\ S_3'(\zeta) &= S_4(\zeta);\\ S_4'(\zeta) &= S_5(\zeta). \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

Подобные же соотношения имеют место между функциями T_1, T_2, T_3, T_4, T_5.

Графики зависимости функций S_1—S_5 от ζ при различных значениях k приведены на фиг. 243—247. Чтобы облегчить интерполяцию при промежуточных значениях k, по оси абсцисс на графиках отложены не значения ζ, а отношения $\frac{\zeta}{\sqrt{1-k}}$; функции S_2, S_4 и S_5 с этой же целью умножены на постоянные коэффициенты.

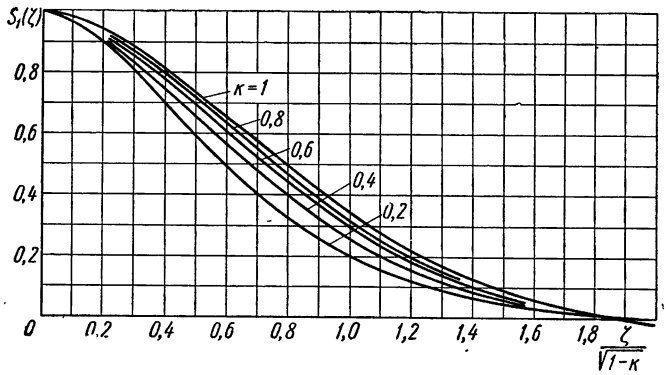
Графики изменения функций T_1—T_5 приведены на фиг. 248—252.

Имея графики функций S и T при заданной величине изменения уклона эпюры давления $\Delta\frac{dp_1}{d\zeta}$ или $\Delta\frac{dp_2}{d\zeta}$, легко определить по формулам (79) и (80) значения функций Z_1 и Z_2 при любом ζ, а с помощью соотношений (83) и производные этих функций, необходимые для вычисления напряжений и радиальных смещений.

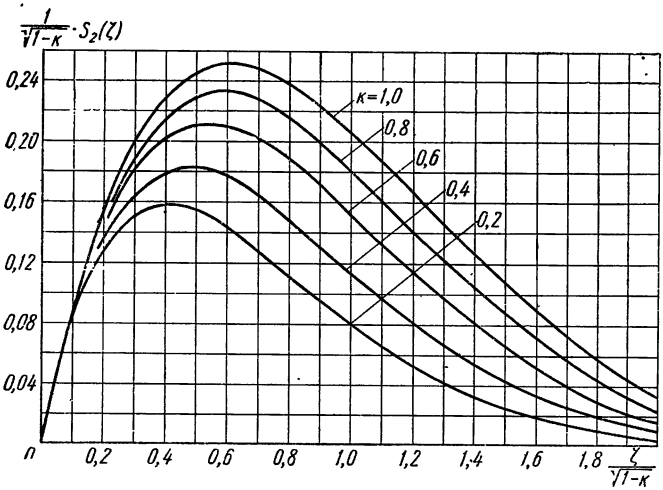
Если требуется найти напряжения и смещения у внутренней и наружной поверхностей цилиндра, то формулы для определения напряжений и перемещений значительно упрощаются.

У внутренней поверхности цилиндра ($\rho = k$)

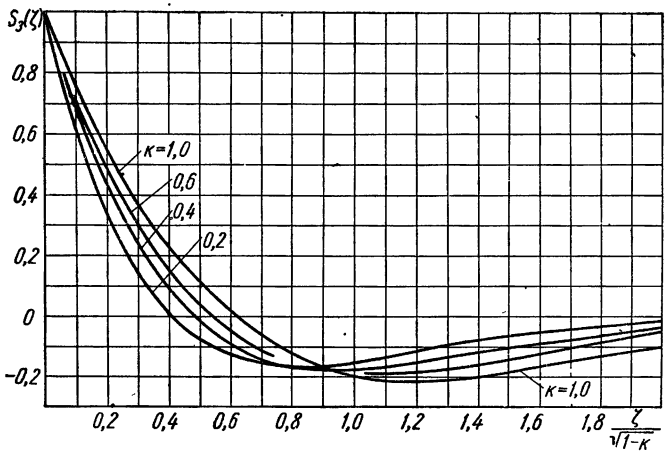
$$\left.\begin{aligned} \tau &= 0;\\ \sigma_r &= -p;\\ \sigma_z &= -Z_1(\zeta)\,V_1''(k) - Z_2(\zeta)\,V_2''(k);\\ u\frac{E}{r_1} &= p_1\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}+\mu\right) - p_2\frac{2}{1-k^2} + Z_1''\,2J_1 + Z_2''\,2J_2;\\ \sigma_t &= u\frac{E}{r_1} - \mu p_1 + \mu\sigma_z. \end{aligned}\right\} \quad (84)$$



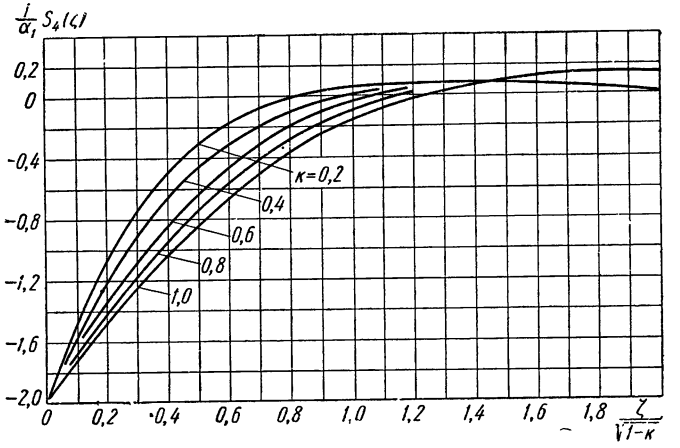
Фиг. 243.



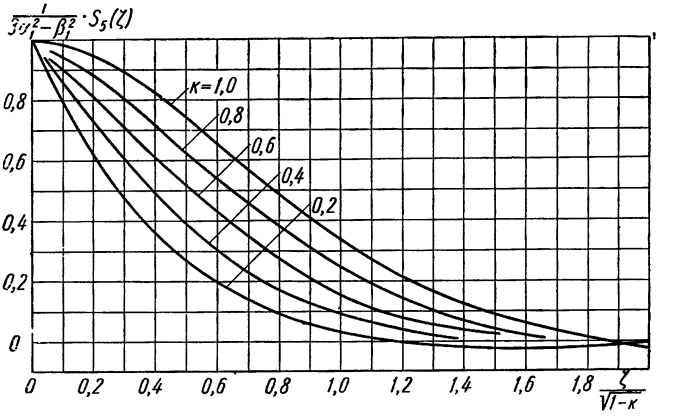
Фиг. 244.



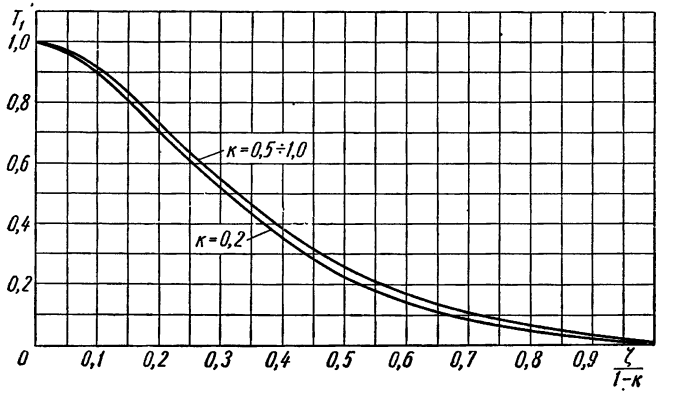
Фиг. 245.



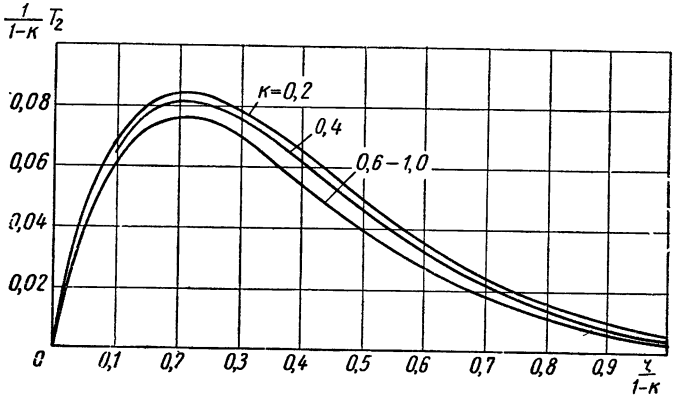
Фиг. 246.



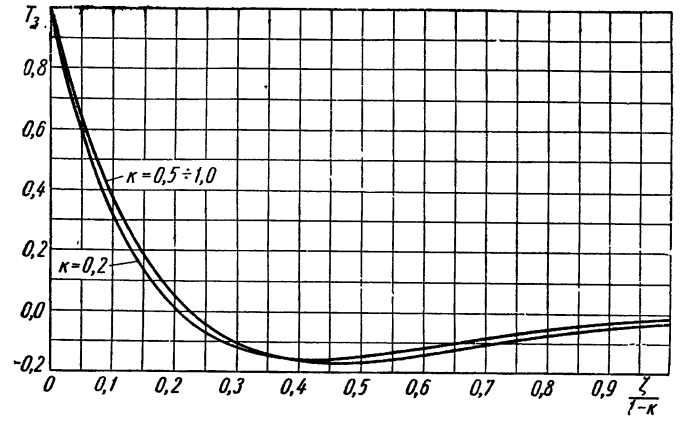
Фиг. 247.



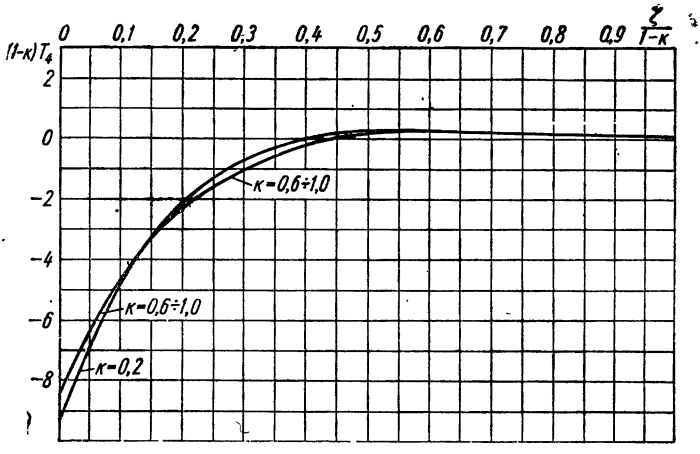
Фиг. 248.



Фиг. 249.



Фиг. 250.



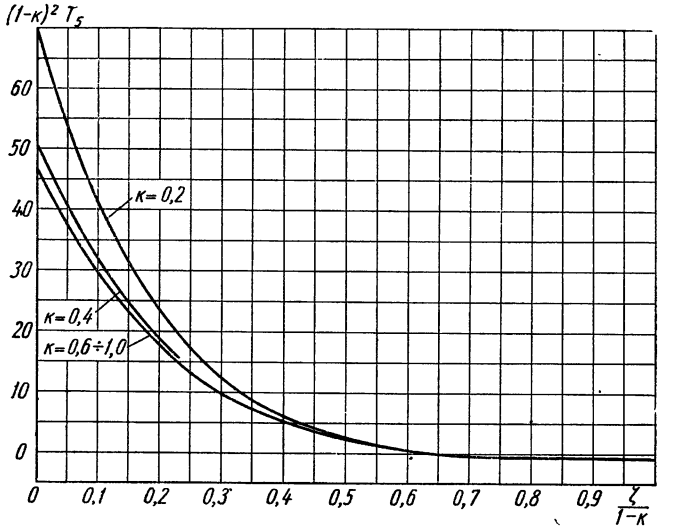
Фиг. 251.

У наружной поверхности цилиндра ($\rho = 1$)

$$\left.\begin{gathered}\tau = 0;\\ \sigma_r = -p_2;\\ \sigma_z = -Z_1 V_1''(1) - Z_2 V_2''(1);\\ u\frac{E}{r_2} = p_1\frac{2k^2}{1-k^2} - p_2\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} - \mu\right) + Z_1'' K_1 - Z_2'' K_2;\\ \sigma_t = u\frac{E}{r_2} - \mu p_2 + \mu\sigma_z,\end{gathered}\right\} \quad (85)$$

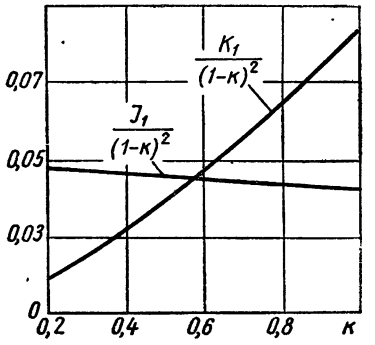
где

$$K_1 = 2J_1 - (1+\mu)V_1(1);$$
$$K_2 = (1+\mu)V_2(1) - 2J_2.$$

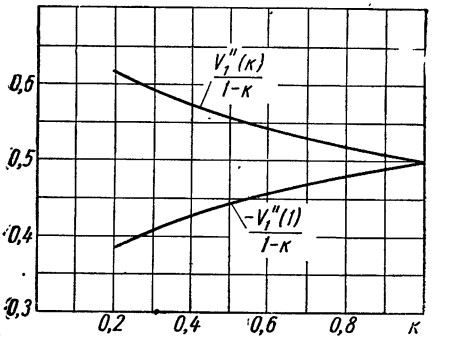


Фиг. 252.

Графики зависимости от k величин J_1, K_1, $V_1''(k)$, $V_1''(1)$ и соответствующих величин с индексом 2, необходимых для расчета по приведенным выше формулам, представлены на фиг. 253—256.



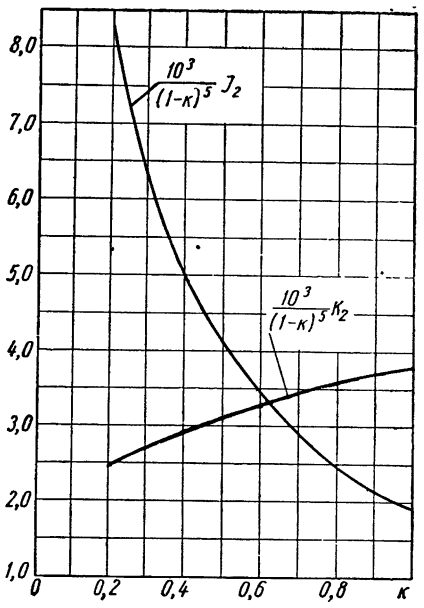
Фиг. 253.



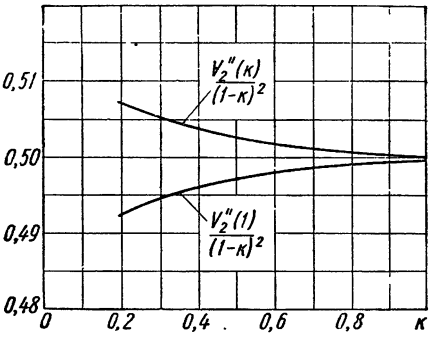
Фиг 254.

Как видно из графиков фиг. 243—252, функции S_1—S_5 и T_1—T_5 быстро затухают с удалением от начала координат. Уже при $\zeta > 2\sqrt{1-k}$ практически можно считать эти функции равными нулю. Следовательно, и функции Z_1 и Z_2 [см. формулы (79) и (80)] будут пренебрежимо малыми при $\zeta > 2\sqrt{1-k}$, что соответствует расстоянию от точки излома эпюры давления

$$d = \zeta r_2 = 2\sqrt{r_2(r_2 - r_1)}.$$



Фиг. 255.

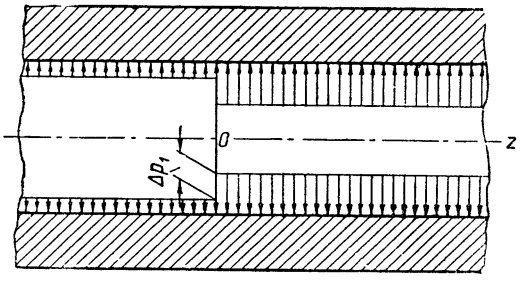


Фиг. 256.

Таким образом, влияние излома эпюры давления распространяется на расстояния $2\sqrt{r_2(r_2 - r_1)}$ в обе стороны. Вне этой зоны напряжения и смещения с достаточной точностью определяются формулами Ляме.

Г. ЦИЛИНДР БОЛЬШОЙ ДЛИНЫ, НАГРУЖЕННЫЙ ДАВЛЕНИЕМ, ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ СКАЧКООБРАЗНО

Рассмотрим загрузку цилиндра давлением, изменяющимся скачкообразно, в сечении, удаленном от концов трубы (фиг. 257). Скачок Δp может иметь или внутреннее давление p_1, или внешнее p_2, или то и другое.



Фиг. 257.

Этот случай нагрузки можно рассматривать как предельный случай давления, изменяющегося по закону ломаной (фиг. 258), когда два излома сближаются между собой. Совместим начало координат $\zeta=0$ с местом первого излома эпюры давления, тогда второй излом будет расположен в сечении $\zeta=\varepsilon$. На левом ($\zeta<0$) и на правом ($\zeta>\varepsilon$) участках цилиндра давления постоянны, а на участке $0<\zeta<\varepsilon$

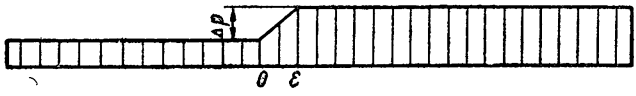
$$\frac{dp_1}{d} = \frac{\Delta p_1}{\varepsilon}; \quad \frac{dp_2}{d\zeta} = \frac{\Delta p_2}{\varepsilon}.$$

Таким образом, уклоны эпюр давления меняются дважды: в точке $\zeta = 0$

$$\Delta\left(\frac{dp_1}{d\zeta}\right) = \frac{\Delta p_1}{\varepsilon}; \quad \Delta\left(\frac{dp_2}{d\zeta}\right) = \frac{\Delta p_2}{\varepsilon};$$

в точке $\zeta = \varepsilon$

$$\Delta\left(\frac{dp_1}{d\zeta}\right) = -\frac{\Delta p_1}{\varepsilon}; \quad \Delta\left(\frac{dp_2}{d\zeta}\right) = -\frac{\Delta p_2}{\varepsilon}.$$



Фиг. 258.

Суммируя эффекты двух изломов эпюр давления, вычисленные по формулам (79) и (79а), найдем следующие выражения для функции $Z_1(\zeta)$:

при $\zeta < 0$

$$Z_1(\zeta) = -\frac{n_1\Delta p_1 - q_1\Delta p_2}{4\alpha_1(\alpha_1^2+\beta_1^2)} \cdot \frac{1}{\varepsilon}[S_1(-\zeta) - S_1(-\zeta+\varepsilon)];$$

при $0 < \zeta < \varepsilon$

$$Z_1(\zeta) = -\frac{n_1\Delta p_1 - q_1\Delta p_2}{4\alpha_1(\alpha_1^2+\beta_1^2)} \cdot \frac{1}{\varepsilon}[S_1(\zeta) - S_1(-\zeta+\varepsilon)];$$

при $\zeta > \varepsilon$

$$Z_1(\zeta) = -\frac{n_1\Delta p_1 - q_1\Delta p_2}{4\alpha_1(\alpha_1^2+\beta_1^2)} \cdot \frac{1}{\varepsilon}[S_1(\zeta) - S_1(\zeta-\varepsilon)].$$

Переходя в этих формулах к пределу при $\varepsilon \to 0$ и учитывая, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[S_1(\zeta) - S_1(\zeta-\varepsilon)] = S_1'(\zeta) = -(\alpha_1^2+\beta_1^2)S_2(\zeta),$$

получим для случая скачкообразного измененния давления в сечении $\zeta = 0$

при $\zeta < 0$

$$Z_1(\zeta) = -\frac{n_1\Delta p_1 - q_1\Delta p_2}{4\alpha_1}S_2(-\zeta);$$

при $\zeta > 0$

$$Z_1(\zeta) = \frac{n_1\Delta p_1 - q_1\Delta p_2}{4\alpha_1}S_2(\zeta). \qquad (86)$$

Для функции $Z_2(\zeta)$ получаются аналогичные формулы:

при $\zeta < 0$

$$Z_2(\zeta) = -\frac{n_2\Delta p_1 + q_2\Delta p_2}{4\alpha_2}T_2(-\zeta);$$

при $\zeta > 0$

$$Z_2(\zeta) = \frac{n_2\Delta p_1 + q_2\Delta p_2}{4\alpha_2}T_2(\zeta), \qquad (87)$$

Практическое вычисление функций $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$ по формулам (86) и (87), а затем определение напряжений и перемещений по формулам (84) и (85) не представляет затруднений. Производные функции Z_1 и Z_2 определяются с помощью соотношений (83).

Чтобы показать порядок вычислений, приведем полностью все расчеты для случая длинного цилиндра с отношением радиусов $k = \frac{r_1}{r_2} = 0{,}5$, нагруженного равномерно распределенным внешним давлением p в правой части ($\zeta > 0$) и свободного от нагрузки левой части ($\zeta < 0$).

В соответствии с формулами (86) и (87) функции Z_1 и Z_2 для этого случая определяются следующими зависимостями:

при $\zeta < 0$

$$\left.\begin{aligned} Z_1(\zeta) &= \frac{q_1}{4\alpha_1} p S_2(-\zeta); \\ Z_2(\zeta) &= -\frac{q_2}{4\alpha_2} p T_2(-\zeta); \end{aligned}\right\} \qquad (а)$$

при $\zeta > 0$

$$\left.\begin{aligned} Z_1(\zeta) &= -\frac{q_1}{4\alpha_1} p S_2(\zeta); \\ Z_2(\zeta) &= \frac{q_2}{4\alpha_2} p T_2(\zeta). \end{aligned}\right\} \qquad (б)$$

Как видно из приведенных формул, функции Z_1 и Z_2 кососимметричны относительно начала координат, и поэтому достаточно произвести их вычисление для $\zeta > 0$.

Для определения напряжений и смещений необходимы также значения $Z_1''(\zeta)$ и $Z_2''(\zeta)$.

Дифференцируя выражения (б) в соответствии с соотношениями (83) получим при $\zeta > 0$

$$Z_1''(\zeta) = -\frac{q_1}{4\alpha_1} p S_4(\zeta);$$

$$Z_2''(\zeta) = \frac{q_2}{4\alpha_2} p T_4(\zeta).$$

Функции Z_1'' и Z_2'' также кососимметричны относительно начала координат.

Вычислим значения функций Z_1, Z_2, Z_1'' и Z_2'' для сечений цилиндра, отстоящих на расстояниях $0{,}1\, r_2$ друг от друга.

Предварительно по графикам фиг. 237 — 240 для $k = 0{,}5$ находим

$$\alpha_1 = \frac{1{,}7}{\sqrt{1-k}} = \frac{1{,}7}{\sqrt{0{,}5}} = 2{,}4; \qquad q_1 = \frac{15{,}7}{(1-k)^3} = \frac{15{,}7}{0{,}5^3} = 126;$$

$$\alpha_2 = \frac{4{,}25}{1-k} = \frac{4{,}25}{0{,}5} = 8{,}50; \qquad q_2 = \frac{51}{(1-k)^4} = \frac{51}{0{,}5^4} = 815.$$

Вычисления функций Z_1, Z_2, Z_1'' и Z_2'' сведены в табл. 12.

Приведенные в этой таблице значения $\frac{1}{\sqrt{1-k}} S_2$, $\frac{1}{\alpha_1} S_4$, $\frac{1}{1-k} T_2$ и $(1-k) T_4$ взяты с графиков фиг. 244, 246, 249 и 251.

Таблица 12

К расчету напряжений и перемещений при $\kappa = 0{,}5$

а) Определение функций Z_1; Z_1''; Z_2 и Z_2''

ζ	0	,1	0.2	0.4	0,6	0,8	1,0	1,2
$\frac{1}{\sqrt{1-k}}\zeta$	0	0,141	0,283	0,566	0,848	1,130	1,414	1,700
$\frac{1}{\sqrt{1-k}} S_2\zeta$	0	0,110	0,168	0,197	0,160	0,106	0,064	0,030
$\frac{1}{\alpha}S_4(\zeta)$	−2,0	−1,50	−1,05	−0,45	−1,10	0,02	0,06	0,06
$\frac{1}{p}Z_1(\zeta)$	0	−1,02	−1,56	−1,83	−1,48	−0,92	−0,59	−0,28
$\frac{1}{p}Z_1''(\zeta)$	63,0	47,3	33,1	14,2	3,1	−0,6	−1,9	−1,9
$\frac{1}{1-k}(\zeta)$	0	0,2	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\frac{1}{1-k}T_2(\zeta)$	0	0,082	0,063	0,015	0	—	—	—
$(1-k)T_4(\zeta)$	−8,5	−2,1	−0,1	+0,1	0	—	—	—
$\frac{1}{p}Z_2(\zeta)$	0	0,98	0,76	0,18	0	—	—	—
$\frac{1}{p}Z_2''(\zeta)$	−408	−101	−5	+5	0	—	—	—

б) Определение напряжений и перемещений при $\rho = k$

ζ	0	0,1	0.2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$\frac{1}{p}Z_1V_1''(k)$	0	−2,286	−0,436	−0,512	−0,415	−0,258	−0,165	−0,078
$\frac{1}{p}Z_2V_2''(k)$	0	0,123	0,096	0,023	—	—	—	—
$\frac{1}{p}\sigma_z$	0	0,16	0,34	0,49	0,41	0,26	0,16	0,08
$\frac{1}{p}Z_1''2J_1$	1,45	1,09	0,76	0,33	0,07	−0,01	−0,04	−0,04
$\frac{1}{p}Z_2''2J_2$	−0,11	−0,03	0,00	—	—	—	—	—

Продолжение табл. 12

ζ	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$-\frac{2}{1-k^2}$	−2,67	−2,67	−2,67	−2,67	−2,67	−2,67	−2,67	−2,67
$\frac{E}{pr_1}u$	−1,33	−1,61	−1,91	−2,34	−2,60	−2,68	−2,71	−2,71
$\mu\frac{1}{p}\sigma_z$	0	0,05	0,10	0,15	0,12	0,08	0,05	0,02
$\frac{1}{p}\sigma_t$	−1,33	−1,56	−1,81	−2,19	−2,48	−2,60	−2,66	−2,69

в) Определение напряжений и перемещений при $\rho=1$

ζ	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$\frac{1}{p}Z_1V_1''(1)$	0	0,224	0,343	0,403	0,326	0,202	0,130	0,062
$\frac{1}{p}Z_2V_2''(1)$	0	0,122	0,094	0,022	—	—	—	—
$\frac{1}{p}\sigma_z$	0	−0,35	−0,44	−0,42	−0,33	−0,20	−0,13	−0,06
$\frac{1}{p}Z_1''K_1$	0,61	0,46	0,32	0,14	0,03	−0,01	−0,02	−0,02
$-\frac{1}{p}Z_2''K_2$	0,04	0,01	0,00	—	—	—	—	—
$-\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}-\mu\right)$	−1,37	−1,37	−1,37	−1,37	−1,37	−1,37	−137	−1,37
$\frac{E}{pr_2}u$	−0,72	−0,90	−1,05	−1,23	−1,34	−1,38	−1,39	−1,39
$\frac{1}{p}\mu\sigma_t$	0	−0,10	−0,13	−0,13	−0,10	−0,06	−0,04	−0,02
$\frac{1}{p}\sigma_t$	−1,02	−1,30	−1,48	−1,66	−1,74	−1,74	−1,73	−1,71

Для определения напряжений и перемещений нужны также следующие величины, которые берутся по графикам фиг. 253 — 256:

$$V_1''(k) = (1-k)\,0{,}56 = 0{,}5 \cdot 0{,}56 = 0{,}28: \qquad V_2''(k) = (1-k)^2\,0{,}502 = 0{,}126;$$

$$V_1''(1) = -(1-k)\,0{,}44 = -0{,}5 \cdot 0{,}44 = -0{,}22; \quad V_2''(1) = (1-k)^2\,0{,}497 = 0{,}124;$$

$$J_1 = (1-k)^2\,0{,}0458 = 0{,}0115; \quad J_2 = (1-k)^5\,10^{-3} \cdot 4{,}1 = 0{,}128 \cdot 10^{-3};$$

$$K_1 = (1-k)^2\,0{,}039 = 0{,}0097; \qquad K_2 = (1-k)^5\,10^{-3} \cdot 3{,}1 = 0{,}097 \cdot 10^{-3}.$$

Напряжения и перемещения вычисляются по формулам (84) и (85). Вычисления сведены в табл. 12.

По данным этой таблицы на фиг. 259 построены графики изменения вдоль оси цилиндра напряжений и перемещений при $\rho = k$ и при $\rho = 1$. При построении графиков в области $\zeta < 0$ используется условие косой симметрии функции Z.

Пунктирные кривые на графиках $\sigma_{t\rho=1}$ и $\sigma_{z\rho=1}$ представляют собой вероятную форму точной зависимости напряжений от параметра ζ. Эти кривые построены на основании данных решений плоской задачи теории упругости[1], из которых следует, что в точке, где внешняя нагрузка (а следовательно, и напряжение σ_r) претерпевает разрыв равный p, напряжение σ_z должно иметь разрыв такой же величины, а напряжение σ_t — разрыв величины $2\mu p$. [При приближенном решении задачи, конечно, нельзя получить разрывного закона распределения σ_z, см. формулу (45)].

Как показывает решение теории упругости, напряжения имеют разрывы только в самой точке скачка давления. Уже на очень небольшой глубине под поверхностью цилиндра напряжения изменяются по длине непрерывно и почти в точном соответствии с закономерностями, установленными приближенным решением.

Графики фиг. 259 позволяют сделать вывод, что напряжения, связанные со скачкообразным изменением давления, распространяются примерно на расстоянии $2\sqrt{r_2(r_2 - r_1)}$ в обе стороны от места скачка. Вне этой зоны справедливы формулы Ляме.

Следует отметить, что решение рассмотренной задачи имеет большое практическое значение, так как оно может быть использовано в качестве линии влияния при упрощенном расчете цилиндра, загруженного давлением, изменяющимся по произвольному закону.

Действительно, любой закон нагрузки может быть приближенно заменен ступенчатым, а этот последний представлен как сумма отдельных положительных и отрицательных скачков давления.

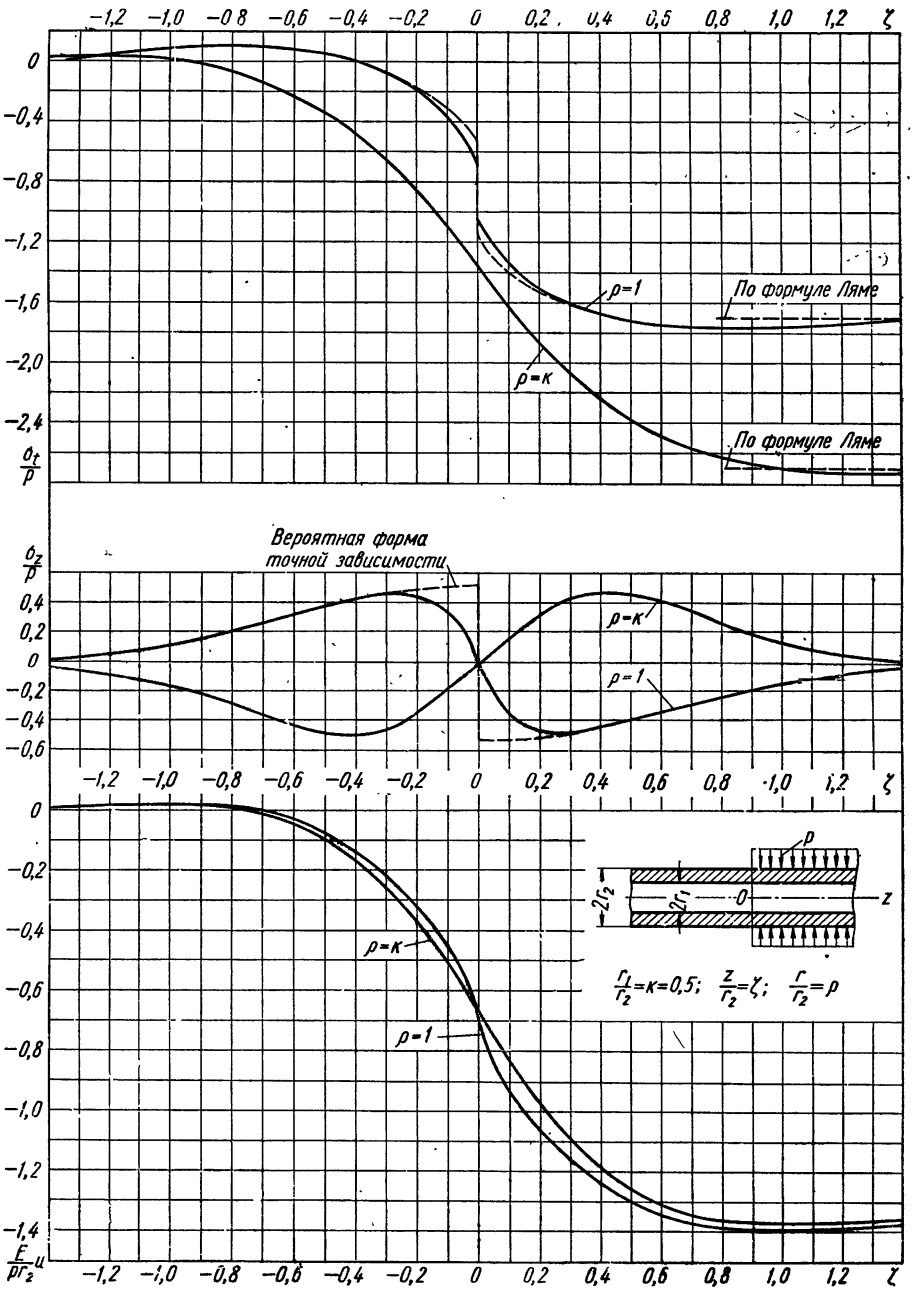
При этом напряжения и перемещения, вызываемые в данной точке каждым из скачков давления, могут быть непосредственно определены с помощью графиков, подобных графикам фиг. 259.

Д. Цилиндр большой длины, нагруженный давлением, равномерно распределенным на участке боковой поверхности

Если давление распределено на участке боковой поверхности цилиндра $0 < \zeta < a$ (фиг. 260), а остальная часть цилиндра свободна от давления, то функции $Z_1(\zeta)$, $Z_2(\zeta)$ можно найти по выведенным выше формулам, если учесть, что здесь имеются два скачка давления: один — в сечении $\zeta = 0$ и другой — в сечении $\zeta = a$.

Предполагая, что на загруженном участке цилиндра внутреннее

[1] См. С. П. Тимошенко, Теория упругости, ГТТИ, 1934.


−1,2 −1,0 −0,8 −0,6 −0,4 −0,2 0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 1,2 ζ
0
−0,4
−0,8
−1,2
−1,6
−2,0
−2,4
$\frac{\sigma_t}{p}$
ρ=1
По формуле Ляме
ρ=κ
По формуле Ляме
Вероятная форма точной зависимости
$\frac{\sigma_z}{p}$
0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
−0,6
ρ=κ
ρ=1
−1,2 −1,0 −0,8 −0,6 −0,4 −0,2 0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 1,2 ζ
0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
−1,0
−1,2
−1,4
$\frac{F}{pr_2 u}$
ρ=κ
ρ=1
p
$2r_2$
$2r_1$
0
z
$\frac{r_1}{r_2}=\kappa=0{,}5;\ \frac{z}{r_2}=\zeta;\ \frac{r}{r_2}=\rho$

Фиг. 259.

давление равно p_1, а наружное p_2, получим следующие формулы для функции $Z_1(\zeta)$:

при $\zeta < 0$

$$Z_1(\zeta) = \frac{n_1 p_1 - q_1 p_2}{4\alpha_1}[-S_2(-\zeta) + S_2(a-\zeta)]; \tag{88}$$

при $0 < \zeta < a$

$$Z_1(\zeta) = \frac{n_1 p_1 - q_1 p_2}{4\alpha_1}[S_2(\zeta) + S_2(a-\zeta)]; \tag{88а}$$

при $\zeta > a$

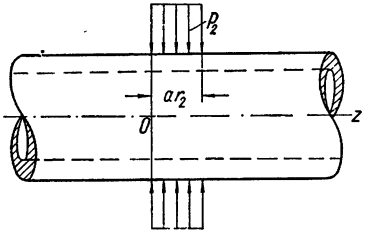
$$Z_1(\zeta) = \frac{n_1 p_1 - q_1 p_2}{4\alpha_1}[S_2(\zeta) - S_2(\zeta-a)]. \tag{88б}$$

Аналогичные формулы с заменой S_2 на T_2, α_1 и n_1 на α_2 и n_2, а q_1 на $(-q_2)$ определяют функцию $Z_2(\zeta)$.

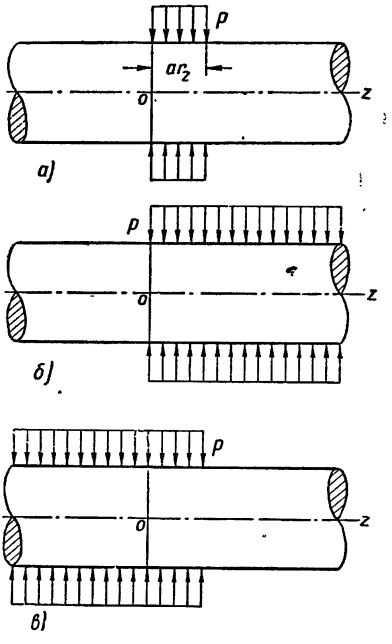
Для определения напряжений и перемещений в этом случае можно не производить дополнительных вычислений, а использовать в качестве линий влияния найденные выше графики изменения напряжений и перемещений при загрузке давлением половины длинного цилиндра (см., например, фиг. 259).

Действительно, нагрузка, равномерно распределенная на участке $0<\zeta<a$ боковой поверхности цилиндра (фиг. 261,*а*), может быть представлена как сумма трех нагрузок:

а) нагрузки p, равномерно распределенной по участку $\zeta>0$ (фиг. 261,*б*);



Фиг. 260.



Фиг. 261.

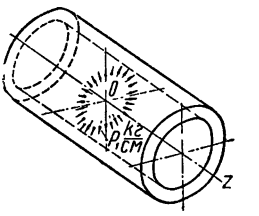
б) нагрузки p, равномерно распределенной по участку $\zeta < a$ (фиг. 261, *в*);

в) растягивающей нагрузки p, действующей по всей длине цилиндра (эта нагрузка на фиг. 261 не показана).

Напряжения и перемещения, вызванные первыми двумя нагрузками, определяются по формулам и графикам разд. Г, напряжения и перемещения от третьей нагрузки — по формулам Ляме.

Е. Сосредоточенное кольцевое давление, воздействующее на длинный полый цилиндр (фиг. 262)

Предположим, что в сечении $\zeta=0$ к цилиндру приложены сосредоточенные кольцевые давления интенсивностью P_1 *кг/см* внутри и P_2 *кг/см* снаружи (в частных случаях, если действует только наружное или только внутреннее давление, одну из этих величин следует полагать равной нулю). Эту задачу можно рассматривать как частный случай предыдущей, считая, что длина загруженного участка ar_2 стремится к нулю, тогда как произведения



Фиг. 262.

$$p_1 ar_2 = P_1 \text{ и } p_2 ar_2 = P_2$$

сохраняют постоянные значения.

Переходя в предыдущих формулах к пределу при $a \to 0$ и учитывая, что $S_2'(\zeta) = S_3(\zeta)$, получим:

при $\zeta < 0$

$$Z_1(\zeta) = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{n_1 P_1 - q_1 P_2}{4\alpha_1} S_3(-\zeta); \tag{89}$$

при $\zeta > 0$

$$Z_1(\zeta) = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{n_1 P_1 - q_1 P_2}{4\alpha_1} S_3(\zeta). \tag{89а}$$

Функция $Z_2(\zeta)$ определяется аналогичными формулами с заменой S_3 на T_3, α_1 и n_1 на α_2 и n_2, а q_1 на $(-q_2)$.

Полученные формулы пригодны для определения напряжений и радиальных смещений во всех точках, кроме точек, лежащих в непосредственной близости от мест приложения сосредоточенных нагрузок, где напряжения и перемещения теоретически бесконечны.

Ж. ЦИЛИНДР БОЛЬШОЙ ДЛИНЫ, НАГРУЖЕННЫЙ ПОВЕРХНОСТНЫМИ СДВИГАЮЩИМИ СИЛАМИ, ЛЕЖАЩИМИ В ПЛОСКОСТИ ОДНОГО ИЗ ТОРЦОВ (фиг. 263)

Рассмотрим нагрузку торца ($\zeta = 0$) цилиндра поверхностными силами, распределенными по закону

$$\tau_{\zeta=0} = Q_1 V_1'(\rho) + Q_2 V_2'(\rho), \tag{90}$$

где Q_1 и Q_2 — постоянные, изменяя которые, можно в широких пределах менять закон распределения нагрузки и ее интенсивность.

Сравнивая выражение (90) с формулой (43), можно установить, что Q_1 и Q_2 представляют собой значения производных Z_1' и Z_2' при $\zeta = 0$;

$$Z_1'(0) = Q_1;\ Z_2'(0) = Q_2. \tag{91}$$

С другой стороны, поскольку предполагается, что нормальная к поверхности торца нагрузка отсутствует,

$$\sigma_{z\,\zeta=0} = 0,$$

и, следовательно,

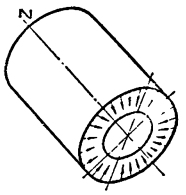
$$Z_1(0) = 0;\ Z_2(0) = 0. \tag{92}$$

Так как в общих выражениях для $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$

$$Z_1(\zeta) = e^{\alpha_1\zeta}(A_1\cos\beta_1\zeta + B_1\sin\beta_1\zeta) + e^{-\alpha_1\zeta}(C_1\cos\beta_1\zeta + D_1\sin\beta\zeta);$$

$$Z_2(\zeta) = e^{\alpha_2\zeta}(A_2\cos\beta_2\zeta + B_2\sin\beta_2\zeta) + e^{-\alpha_2\zeta}(C_2\cos\beta_2\zeta + D_2\sin\beta_2\zeta)$$

должны отсутствовать члены, неограниченно возрастающие с удалением от начала координат, постоянные A_1, B_1, A_2 и B_2 равны нулю. Условия (91) и (92) являются достаточными для определения остальных постоянных.



Фиг. 263.

Производя вычисления, находим

$$\left.\begin{aligned} Z_1(\zeta) &= Q_1 S_2(\zeta); \\ Z_2(\zeta) &= Q_2 T_2(\zeta). \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Эти выражения функций Z_1 и Z_2 будут использоваться в дальнейшем, чтобы при произвольной нагрузке на цилиндр достигнуть выполнения граничных условий на торцах.

3. Цилиндр большой длины, нагруженный поверхностными силами, нормальными к плоскости одного из торцов (фиг. 264)

Считаем, что силы, нагружающие торец цилиндра, распределены по закону

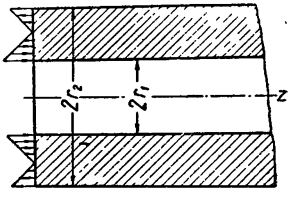
$$\sigma_{z\,\zeta=0} = M_1\frac{1}{\rho}(\rho V_1')' + M_2\frac{1}{\rho}(\rho V_2')',$$

где M_1 и M_2 — постоянные, характеризующие интенсивность нагрузки.

Для функций Z_1 и Z_2 имеют место следующие граничные условия:

$$Z_1(0) = M_1;\ Z_1'(0) = 0;$$

$$Z_2(0) = M_2;\ Z_2'(0) = (0).$$



Фиг. 264.

Удовлетворяющие этим условиям решения однородных уравнений (68) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} Z_1(\zeta) &= M_1 S_1(\zeta); \\ Z_2(\zeta) &= M_2 T_1(\zeta). \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

При выводе этих формул учтено также, что функции Z_1 и Z_2 должны затухать при неограниченном увеличении ζ.

И. Расчет цилиндра, нагруженного произвольной симметричной нагрузкой при произвольных граничных условиях

Рассмотренные выше основные случаи нагрузки позволяют решить задачу о расчете полого цилиндра большой длины, подвергнутого действию давления, распределенного по длине по произвольному закону.

Действительно, любая эпюра распределения давления по длине цилиндра может быть с достаточной точностью апроксимирована лома-

ной линией. Функции Z_1 и Z_2 можно в этом случае определить, суммируя эффекты, даваемые каждым изломом и каждым скачком эпюры давления.

Задача облегчается благодаря тому, что функции, соответствующие данному скачку или излому эпюры давления, очень быстро затухают по мере удаления от него. Поэтому практически функции Z_1 и Z_2 в каждом сечении будут включать в себя лишь несколько слагаемых, соответствующих ближайшим к этому сечению особенностям эпюры давления.

Если излом или скачок эпюры давления лежит близко — на расстоянии меньшем чем $2\sqrt{r_2(r_2-r_1)}$ — от свободного торца, то полученные выше формулы расчета цилиндра большой длины дадут определенные неравные нулю значения функций Z_1 и Z_2 на торце цилиндра. Вместе с тем, поскольку торец свободен от нагрузки, на нем должны отсутствовать нормальные и касательные напряжения.

Выполнения граничных условий можно достигнуть, если к значениям функций $Z_1^*(\ )$ и $Z_2^*(\ )$, полученным для неограниченного цилиндра, добавить функции $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$, соответствующие нагружению торца цилиндра системой поверхностных нормальных и касательных сил (см. разд. Ж и З).

Полные выражения для функций $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$ будут следующими:

$$\left.\begin{aligned} Z_1(\zeta) &= Z_1^*(\zeta) - Z_1^*(0)\,S_1(\zeta) - Z_1^{*\prime}(0)\,S_2(\zeta);\\ Z_2(\zeta) &= Z_2^*(\zeta) - Z_2^*(0)\,T_1(\zeta) - Z_2^{*\prime}(0)\,T_2(\zeta), \end{aligned}\right\} \qquad (95)$$

где Z_1^* и Z_2^* — функции, полученные для неограниченного цилиндра; $Z_1^*(0)$, $Z_2^*(0)$, $Z_1^{*\prime}(0)$ и $Z_1^{*\prime}(0)$ — значения этих функций и их производных на торце $\zeta = 0$.

Легко проверить, что функции (95) удовлетворяют условиям

$$Z_1(0) = 0;\ Z_1'(0) = 0;$$

$$Z_2(0) = 0;\ Z_2'(0) = 0$$

и, следовательно, соответствуют отсутствию напряжений на торце цилиндра.

Если торец цилиндра заделан, т. е. связан с весьма массивным днищем, обеспечивающим отсутствие смещений u и w, то расчет оказывается несколько более сложным. Благодаря тому, что решение является приближенным, точное выполнение условий $w_{\zeta=0} = 0$; $u_{\zeta=0} = 0$ невозможно.

Условие $w_{\zeta=0} = 0$ можно выполнить приближенно, если увеличить мысленно длину цилиндра за заделанное сечение и приложить дополнительные нагрузки так, чтобы это сечение стало плоскостью симметрии. Затем, чтобы приближенно выполнить условие $u_{\zeta=0} = 0$, надо в заделанном сечении $\zeta=0$ приложить сосредоточенные кольцевые нагрузки P_1 и P_2, интенсивность которых следует выбрать так, чтобы смещение u обращалось в ноль на внешнем и внутреннем радиусах цилиндра.

Подробности вычислений ясны из рассмотренных ниже примеров расчета.

К. Примеры расчета цилиндров, нагруженных переменным по длине давлением

Пример 1. Расчет полого цилиндра большой длины, нагруженного равномерным внутренним давлением на участке, прилежащем к одному из торцов (фиг. 265). Здесь имеется только скачок давления $\Delta p_1 = -p$ в сечении $\zeta = a$.

Сначала найдем выражения функций Z_1^* и Z_2^*, соответствующие скачкообразному изменению давления в цилиндре неограниченной длины.

По формулам (86) и (87) получим:

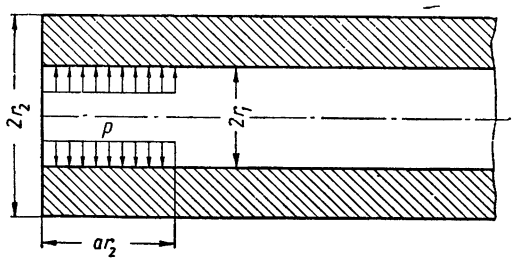
при $\zeta < a$

$$Z_1^*(\zeta) = p\frac{n_1}{4\alpha_1} S_2(a-\zeta); \qquad Z_2^*(\zeta) = p\frac{n_2}{4\alpha_2} T_2(a-\zeta);$$

при $\zeta > a$

$$Z_1^*(\zeta) = -p\frac{n_1}{4\alpha_1} S_2(\zeta-a); \qquad Z_2^*(\zeta) = -p\frac{n_2}{4\alpha_2} T_2(\zeta-a).$$

Значения этих функций и их производных при $\zeta = 0$ таковы:



Фиг. 265.

$$Z_1^*(0) = p\frac{n_1}{4\alpha_1} S_2(a);$$

$$Z_1^{*\prime}(0) = -p\frac{n_1}{4\alpha_1} S_3(a);$$

$$Z_2^*(0) = p\frac{n_2}{4\alpha_2} T_2(a);$$

$$Z_2^{*\prime}(0) = -p\frac{n_2}{4\alpha_2} T_3(a).$$

Полные выражения для функций $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$, удовлетворяющие условию отсутствия напряжений на торце $\zeta = 0$, найдем по формулам (95):

при $\zeta < a$

$$Z_1(\zeta) = p\frac{n_1}{4\alpha_1}[S_2(a-\zeta) + S_3(a)S_2(\zeta) - S_2(a)S_1(\zeta)];$$

$$Z_2(\zeta) = p\frac{n_2}{4\alpha_2}[T_2(a-\zeta) + T_3(a)T_2(\zeta) - T_2(a)T_1(\zeta)];$$

при $> a$

$$Z_1(\zeta) = p\frac{n_1}{4\alpha_1}[-S_2(\zeta-a) + S_3(a)S_2(\zeta) - S_2(a)S_1(\zeta)];$$

$$Z_2(\zeta) = p\frac{n_2}{4\alpha^2}[-T_2(\zeta-a) + T_3(a)T_2(\zeta) - T_2(a)T_1(\zeta)].$$

Имея значения функций Z_1 и Z_2, можно затем вычислить напряжения и смещения по формулам (84) и (85).

На фиг. 266 представлены полученные таким образом эпюры окружных напряжений σ_t у наружной и внутренней поверхностей для цилиндра с отношением радиусов $k = 0{,}5$, когда длина загруженного участка равна $0{,}8\,r_2$ ($a = 0{,}8$).

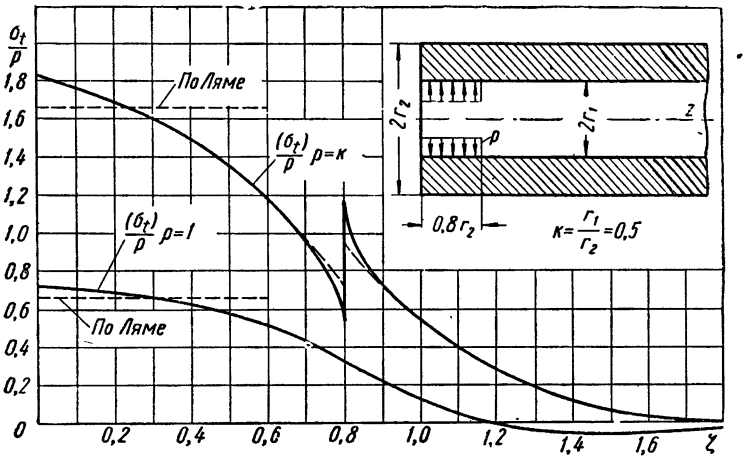
Как видно из эпюр, окружные нормальные напряжения у торца цилиндра в этом случае значительно больше, чем величины, определяемые формулами Ляме.

На фиг. 267 приведены графики зависимости отношения $\frac{\sigma_{t\,max}}{\sigma_{Ляме}}$ ($\sigma_{t\,max}$ — окружное напряжение при $\zeta = 0$, $\rho = k$) от отношения a длины загруженного участка к наружному радиусу цилиндра для $k = 0{,}5$ и $k = 0{,}7$

При малой длине загруженного участка ($a < 0{,}5$) это напряжение меньше, чем напряжение, определяемое формулами Ляме. При длине нагруженной части, равной $0{,}8r_2$, максимальное напряжение на 10% превышает напряжение, вычисленное по формуле Ляме, и приближается к нему при большей длине нагруженного участка.

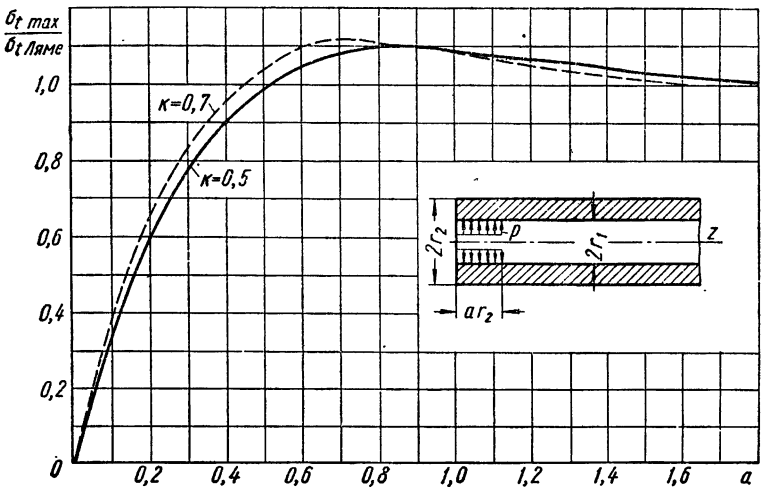
Пример 2. Расчет полого цилиндра с заделанным торцом, нагруженного постоянным внутренним давлением.

Рассматриваемая задача имеет большой практический интерес, так как представляет собой предельный случай расчета цилиндра с днищем при весьма большой жесткости днища. Как уже указывалось выше (см. разд. И), точное выполнение условий $w = 0$; $u = 0$ на заделанном торце невозможно.



Фиг. 266.

Продолжим цилиндр влево так, чтобы сечение $\zeta=0$, в котором фактически расположена заделка, стало плоскостью симметрии, тем самым будет выполнено условие $w = 0$. Для того чтобы устранить радиальные перемещения в сечении $\zeta = 0$, приложим в этом сечении сосредоточенные кольцевые нагрузки P_1 и P_2.



Фиг. 267.

Таким образом, мы приходим к расчету бесконечно длинного цилиндра, нагруженного равномерно распределенным внутренним давлением p и сосредоточенными кольцевыми нагрузками в сечении $\zeta = 0$.

Равномерное давление не вызовет напряжений σ_z и τ, и, следовательно, функции Z_1 и Z_2 будут обусловливаться только действием сосредоточенных кольцевых нагрузок.

На основании формулы (89а) функция $Z_1(\zeta)$ имеет вид

$$Z_1(\zeta) = A\zeta_3(\zeta)$$

и аналогично

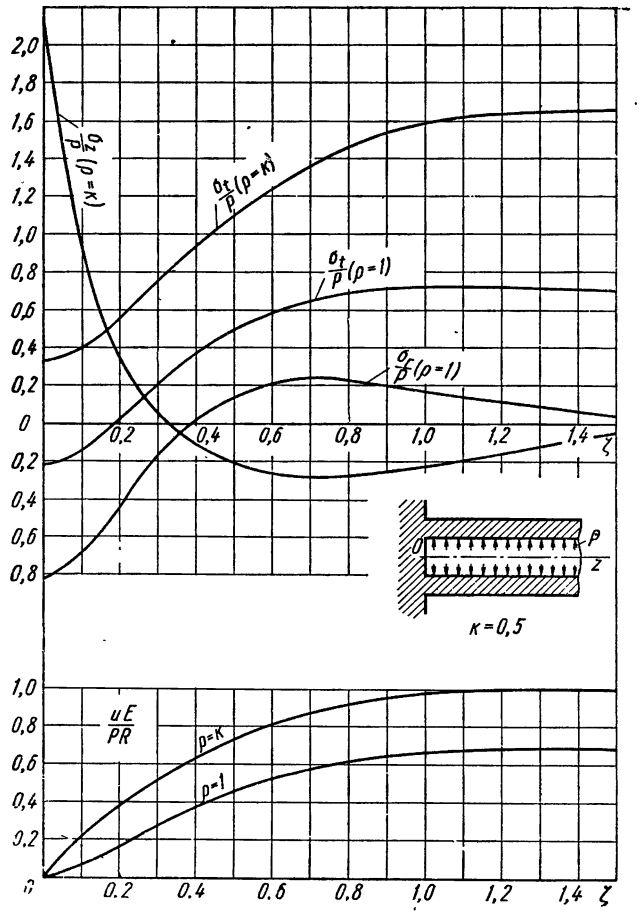
$$Z_2(\zeta) = BT_3(\zeta),$$

где A и B — постоянные, определяемые интенсивностью кольцевых нагрузок.

Радиальные смещения на наружном и внутреннем радиусах в сечении $\zeta=0$ определяются формулами (84) и (85)

$$u_{\rho=k} = \frac{r_1}{F}\left[p\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}+\mu\right)+Z_1''(0)\,2J_1+Z_2''\,2J_2\right];$$

$$u_{\rho=1} = \frac{r_2}{E}\left[p\,\frac{2k^2}{1-k^2}+Z_1''(0)K_1-Z_2''K_2\right].$$



Фиг. 268.

Подставляя в эти формулы значения вторых производных функций $Z_1(\zeta)$ и $Z_2\zeta$ при $\zeta = 0$

$$Z_1''(0) = AT_5(0);$$

$$Z_2''(0) = BT_5(0)$$

и приравнивая радиальные перемещения при $\rho = k$ и при $\rho = 1$ нулю, находим постоянные A и B:

$$A = -\frac{p}{2T_5(0)}\cdot\frac{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}+\mu\right)K_2+\frac{4k^2}{1-k^2}J_2}{J_1K_2+J_2K_1};$$

$$B = -\frac{P}{2T_5(0)} \cdot \frac{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}+\mu\right)K_1 - \frac{4\varepsilon^2}{1-k_2}J_1}{J_1K_2 + J_2K_1}.$$

Имея величины A и B, а следовательно, зная функции $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$, легко затем по формулам (84) и (85) найти величины напряжений и перемещений.

Результаты подсчета напряжений σ_r и σ_z и радиальных смещений u для цилиндра с соотношением радиусов $k = 0\,5$ приведены на фиг. 268.

Как видно из этой фигуры, у заделки возникают очень значительные напряжения σ_z на внутреннем радиусе (следует иметь в виду, что полученное решение не учитывает концентрации напряжений во входящих углах).

Влияние заделки распространяется примерно на длину $1{,}2r_2$, вне этой зоны напряжения и перемещения с достаточной точностью определяются формулами Ляме.

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИТЦА К РАСЧЕТУ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ, НАГРУЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫМ ПО ДЛИНЕ ДАВЛЕНИЕМ

Метод Ритца, примененный к расчету полых цилиндров С. В. Бояршиновым [2], позволяет получить нижнюю оценку для величины перемещений и поэтому существенно дополняет изложенный выше метод, основанный на вариационной формуле Кастилиано.

Согласно рассматриваемому методу для радиального смещения u принимается выражение, подобное выражению (6), полученному при давлении, постоянном по длине цилиндра:

$$u = C_1 r + C_2 \frac{1}{r},$$

где, однако, C_1 и C_2 считаются теперь не постоянными величинами, а функциями от z.

Переходя к безразмерным координатам ρ и ζ, можно записать:

$$u = A(\zeta)\rho + B(\zeta)\frac{1}{\rho}, \tag{96}$$

где A и B — подлежащие определению функции ζ.

Перемещение w определяется, исходя из гипотезы об отсутствии сдвигов γ_{rz}, аналогичной соответствующей гипотезе при расчете балок на поперечный изгиб [1].

Определяя перемещение w из условия

$$\gamma_{rz} = \frac{1}{r_2}\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \rho}\right) = 0,$$

найдем

$$w = -A'(\zeta)\frac{\rho^2}{2} - B'(\zeta)\ln\rho + C(\zeta),$$

где $C(\zeta)$ — новая нейзвестная функция от ζ.

Определяя по формулам (25) — (27) деформации, получаем

$$\varepsilon_z = \frac{1}{r_2}\cdot\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{1}{r_2}\left[-A''(\zeta)\frac{\rho^2}{2} - B''(\zeta)\ln\rho + C(\zeta)\right]; \tag{97}$$

[1] Из формулы (40) следует ,что величина касательных напряжений τ непосредственно зависит от скорости изменения нормального напряжения σ_z по длине цилиндра. Аналогичная зависимость имеет место и при поперечном изгибе балок. Поскольку при симметричной деформации цилиндра напряжения σ_z очень быстро затухают по длине, роль касательных напряжений и сдвигов в этом случае более существенна, чем при изгибе балок .Поэтому приближение получаемое при пренебрежении сдвигами, в расчете цилиндров, является более грубым, чем при расчете длинных балок.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{r_2}\left[A(\zeta) - B(\zeta)\frac{1}{\rho^2}\right]; \tag{98}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{u}{\rho} = \frac{1}{r_2}\left[A(\zeta) + B(\zeta)\frac{1}{\rho^2}\right]. \tag{99}$$

Функция $C'(\zeta)$, входящая в выражение ε_z, может быть определена из условия равенства нулю осевой силы.

Вычисляя напряжение

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_z + \mu(\varepsilon_r + \varepsilon_t)\right]$$

и приравнивая нулю осевую силу

$$N = 2\pi r_2^2 \int_k^1 \sigma_z \rho\, d\rho = 0,$$

найдем

$$C' = A''\frac{1+k^2}{4} - B''\left(\frac{k^2 \ln k}{1-k^2} + \frac{1}{2}\right) - A\frac{2\mu}{1-\mu}.$$

С этим значением C' деформация ε_z получает вид

$$\varepsilon_z = \frac{1}{r_2}\left[A''\left(\frac{1+k^2}{4} - \frac{\rho^2}{2}\right) - B''\left(\ln\rho + \frac{k^2 \ln k}{1-k^2} + \frac{1}{2}\right) - A\frac{2\mu}{1-\mu}\right]. \tag{97а}$$

Далее вычисляется полная энергия системы, равная сумме внутренней потенциальной энергии деформации и потенциала внешних сил:[1]

$$\Pi = U + \mathfrak{U}.$$

Потенциальная энергия деформации равна

$$U = 2\pi r_2^3 \int_0^{\frac{l}{r_2}} \int_k^1 W \rho\, d\rho\, d\zeta,$$

где удельная потенциальная энергия деформации W выражается через компоненты деформации по формуле

$$W = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{1-\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_z + \varepsilon_t + \varepsilon_r)^2 - 2(\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_r)\right].$$

Потенциал сил давления равен

$$\mathfrak{U} = 2\pi r_2^2 \int_0^{\frac{l}{r_2}} (-kp_1u_1 + p_2u_2)\, d\zeta,$$

где p_1 и p_2 — внутреннее и внешнее давления;

u_1 и u_2 — радиальные смещения внутренних и наружных точек цилиндра в текущем сечении.

---

[1] Отметим, что при использовании вариационной формулы Кастилиано (см. разд. А, § 6) потенциал внешних сил не вычислялся, так как для напряжения принимались выражения, удовлетворяющие условиям на поверхности.

В данном случае варьируются выражения для перемещений, причем работа внешних сил отлична от нуля и должна учитываться в расчете.

Подставляя полученные выше значения деформаций и перемещений в формулы для U и V и производя интегрирование по ρ, получим следующее выражение для полной энергии системы:

$$\Pi = \int_0^{\frac{l}{r_2}} F(A, A'', B, B'', \zeta)\, d\zeta,$$

где

$$F = \pi r_2 \left\{ \frac{E}{1+\mu} \left[A^2 \frac{1+\mu}{1-\mu}(1-k^2) + B^2 \frac{1-k^2}{k^2} + (A'')^2 \frac{1-\mu}{1-2\mu} \times \frac{(1-k^2)^3}{96} + \right.\right.$$

$$+ (B'')^2 \frac{1-\mu}{1-2\mu}\left(\frac{1-k^2}{8} - \frac{k^2 \ln^2 k}{2(1-k^2)}\right) + A''B'' \frac{1-\mu}{1-2\mu}\left(\frac{1-k^4}{16} + \frac{k^2 \ln k}{4}\right)\Big] +$$

$$\left. + 2r_2 \left[A(p_2 - k^2 p_1) + B(p_2 - p_1)\right]\right\}.$$

Условия минимума функционала П, которые в данном случае заменяют уравнения равновесия и условия на поверхности, имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial A} + \frac{d^2}{d\zeta^2}\left(\frac{\partial F}{\partial A''}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial B} + \frac{d^2}{d\zeta^2}\left(\frac{\partial F}{\partial B''}\right) = 0.$$

Производя вычисления в соответствии с этими формулами, придем к системе двух дифференциальных уравнений относительно функций $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$:

$$\left.\begin{aligned} A^{IV} a_{11} + B^{IV} a_{12} + A a_{13} + a_{10} = 0; \\ A^{IV} a_{12} + B^{IV} a_{22} + B a_{23} + a_{20} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (100)$$

где

$$a_{11} = \frac{(1-k^2)^3}{12}; \quad a_{22} = 1 - k^2 - \frac{4k^2 \ln^2 k}{1-k^2};$$

$$a_{12} = \frac{1-k^4}{4} + k^2 \ln k; \qquad a_{23} = \frac{8(1-2\mu)(1-k^2)}{(1-\mu)k^2};$$

$$a_{13} = \frac{8(1-2\mu)(1+\mu)}{(1-\mu)^2}(1-k^2); \qquad a_{20} = \frac{8(1-2\mu)(1+\mu)}{1-\mu}\frac{r_2}{E}(p_2 - p_1);$$

$$a_{10} = \frac{8(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \cdot \frac{r_2}{E}(p_2 - k^2 p_1).$$

Характеристическое уравнение однородной системы уравнений соответствующей системе (100), имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}x^4 + a_{13} & a_{12}x^4 \\ a_{12}x^4 & a_{22}x^4 + a_{23} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)x^8 + (a_{13}a_{22} + a_{11}a_{23})x^4 + a_{13}a_{23} = 0.$$

Из этого уравнения находим два значения x^4:

$$x^4_{1\div4} = -4\alpha^4;$$
$$x^4_{5\div8} = -4\beta^4,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{a_{13}a_{22} + a_{11}a_{23} + \sqrt{(a_{13}a_{22} + a_{11}a_{23})^2 - 4a_{13}a_{23}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)}}{2\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)}};$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{a_{13}a_{22} + a_{11}a_{23} - \sqrt{(a_{13}a_{22} + a_{11}a_{23})^2 - 4a_{13}a_{23}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)}}{2\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)}}.$$

Учитывая, что оба значения x^4 являются отрицательными, и извлекая корни четвертой степени, находим значения корней характеристического уравнения:

$$x_{1\div4} = (\pm 1 \pm i)\alpha;$$
$$x_{5\div8} = (\pm 1 \pm i)\beta.$$

В соответствии с этими значениями корней характеристического уравнения решение уравнений (100) может быть представлено в виде

$$A(\zeta) = e^{-\alpha\zeta}(C_1 \sin\alpha\zeta + C_2 \cos\alpha\zeta) + e^{\alpha\zeta}(C_3 \sin\alpha\zeta + C_4 \cos\alpha\zeta) + e^{-\beta\zeta}(C_5 \sin\beta\zeta + C_6 \cos\beta\zeta) + e^{\beta\zeta}(C_7 \sin\beta\zeta + C_8 \cos\beta\zeta) + A^*; \quad (101)$$

$$B(\zeta) = -m[e^{-\alpha\zeta}(C_1 \sin\alpha\zeta + C_2 \cos\alpha\zeta) + e^{\alpha\zeta}(C_3 \sin\alpha\zeta + C_4 \cos\alpha\zeta)] + n[e^{-\beta\zeta}(C_5 \sin\beta\zeta + C_6 \cos\beta\zeta) + e^{\beta\zeta}(C_7 \sin\beta\zeta + C_8 \cos\beta\zeta)] + B^*, \quad (102)$$

где

$$m = -\frac{a_{13}a_{22} - 4\alpha^4\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)}{a_{23}a_{12}};$$

$$n = \frac{a_{13}a_{22} - 4\beta^4\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)}{a_{23}a_{12}},$$

а A^* и B^* — частные решения уравнений (100).

Если внутреннее и внешнее давления p_1 и p_2 на данном участке цилиндра постоянны, частным решением уравнений (100) являются выражения.

$$A^* = \frac{a_{10}}{a_{13}} = \frac{(k^2p_1 - p_2)(1-\mu)r_2}{E(1-k^2)}; \quad (103)$$

$$B^* = \frac{a_{20}}{a_{23}} = \frac{(p_1 - p_2)(1+\mu)k^2r_2}{E(1-k^2)}. \quad (104)$$

При произвольном законе изменения внутреннего или внешнего давлений по длине цилиндра частные решения A^* и B^* могут быть найдены с помощью метода вариации постоянных.

Величины α, β, m и n, входящие в формулы (100) и (102), зависят только от отношения $k = \frac{r_1}{r_2}$ и от коэффициента Пуассона μ. Чис-

ловые значения этих величин при $\mu = 0{,}3$ даны на графиках фиг. 269 и 270.

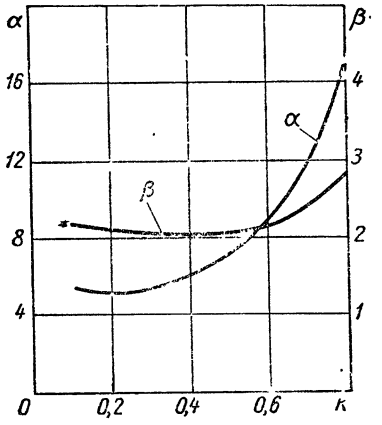
Постоянные $C_1 - C_8$, входящие в выражения функций $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$, определяются из граничных условий.

Нормальные напряжения σ_z, σ_r и σ_t связаны с деформациями формулами закона Гука:

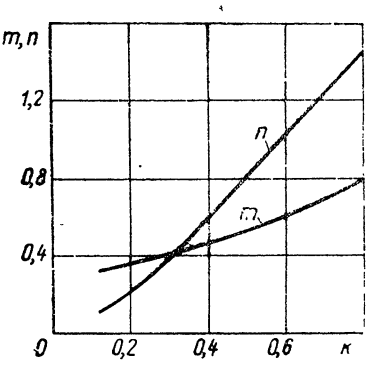
$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t\right];$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t + \mu\varepsilon_z\right];$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_t + \mu\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r\right].$$



Фиг. 269.



Фиг. 270.

Подставляя в эти выражения значения деформаций в соответствии с уравнениями (97) — (99), получим

$$\sigma_z = \frac{E(1-\mu)}{r_2(1+\mu)(1-2\mu)}\left[A''\left(\frac{1+k^2}{4} - \frac{\rho^2}{2}\right) - B''\left(\ln\rho + \frac{k^2 \ln k}{1-k^2} + \frac{1}{2}\right)\right]; \quad (105)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{r_2(1+\mu)(1-2\mu)}\left[A''\left(\frac{1+k^2}{4} - \frac{\rho^2}{2}\right) - B''\left(\ln\rho + \frac{k^2 \ln k}{1-k^2} + \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{E}{r_2}\left[\frac{A}{1-\mu} - \frac{B}{1+\mu}\cdot\frac{1}{\rho^2}\right]; \quad (106)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{r_2(1+\mu)(1-2\mu)}\left[A''\left(\frac{1+k^2}{4} - \frac{\rho^2}{2}\right) - B''\left(\ln\rho + \frac{k^2 \ln k}{1-k^2} + \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{E}{r_2}\left[\frac{A}{1-\mu} + \frac{B}{1+\mu}\cdot\frac{1}{\rho^2}\right]. \quad (107)$$

Поскольку в рассматриваемом методе расчета принято, что сдвиги γ_{rz} отсутствуют, касательные напряжения τ_{rz}, естественно, нельзя связать с деформациями.

Подобно тому как это делается в элементарной теории поперечного изгиба, касательные напряжения можно приближенно определить из условий равновесия.

Из уравнения (40) находим

$$\rho\tau = -\int_k^\rho \frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta}\rho\, d\rho. \tag{108}$$

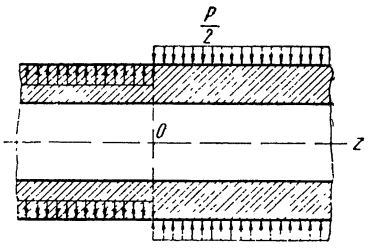
Выбор нижнего предела интеграла равным k обеспечивает выполнение граничного условия $\tau_{\rho=k}=0$, т. е. условия отсутствия касательных напряжений на внутренней поверхности цилиндра.

Подставив в подинтегральное выражение значение σ_z из формулы (105) и выполнив интегрирование по радиусу, имеем

$$\tau = \frac{E(1-\mu)}{r_2(1+\mu)(1-2\mu)}\left[-A'''\frac{(\rho^2-k^2)(1-\rho^2)}{8\rho} - B'''\frac{k^2(1-\rho^2)\ln k - \rho^2(1-k^2)\ln\rho}{2(1-k^2)\rho}\right]. \tag{109}$$

Определив функции A и B, можно затем вычислить напряжения в произвольной точке цилиндра.

Решим с помощью метода С. В. Бояршинова задачу о деформации длинного цилиндра наружным давлением, которое в некотором сечении изменяется скачком с положительного $\left(+\frac{p}{2}\right)$ на отрицательное $\left(-\frac{p}{2}\right)$ (фиг. 271). Таким образом, суммарная величина скачка давления составляет p.



Фиг. 271.

Совместим начало координат с сечением, соответствующим скачку давления и рассмотрим отдельно части цилиндра слева и справа от этого сечения. На каждом из участков цилиндра давление постоянно, и, следовательно, частные решения A^* и B^* определяются по простым формулам (103) и (104). Кроме того, вследствие большой длины цилиндра в выражениях функций A и B должны отсутствовать слагаемые, неограниченно возрастающие с удалением от начала координат, т. е. слагаемые, содержащие множители $e^{\alpha\zeta}$ и $e^{\beta\zeta}$ для правой и $e^{-\alpha\zeta}$ и $e^{-\beta\zeta}$ для левой части цилиндра.

Таким образом, для правой части цилиндра ($\zeta>0$) найдем

$$A = e^{-\alpha\zeta}(C_1\sin\alpha\zeta + C_2\cos\alpha\zeta) + e^{-\beta\zeta}(C_5\sin\beta\zeta + C_6\cos\beta\zeta) - \frac{p(1-\mu)r_2}{2E(1-k^2)}; \tag{110}$$

$$B = -me^{-\alpha\zeta}(C_1\sin\alpha\zeta + C_2\cos\alpha\zeta) + ne^{-\beta\zeta}(C_5\sin\beta\zeta + C_6\cos\beta\zeta) - \frac{p(1+\mu)k^2 r_2}{2E(1-k^2)}. \tag{111}$$

Для определения постоянных C_1, C_2, C_5 и C_6 используем условия симметрии. Поскольку нагрузка на цилиндр является обратно симметричной относительно сечения $\zeta=0$, в этом сечении при любом значении ρ должны отсутствовать радиальные перемещения u и напряжения σ_z.

Эти условия приводят к уравнениям [см. формулы (96) и (105)]

$$A(0)=0;\ B(0)=0;\ A''(0)=0;\ B''(0)=0.$$

Внося в эти уравнения значения функций A и B по формулам (110) и (111) и решая полученную таким образом систему уравнений относительно постоянных C, находим

$$C_1 = 0;\ C_2 = \frac{pr_2}{2E} \cdot \frac{(1-\mu)n - (1+\mu)k^2}{(1-k^2)(m+n)};$$

$$C_5 = 0;\ C_6 = \frac{pr_2}{2E} \cdot \frac{(1-\mu)m + (1+\mu)k^2}{(1-k^2)(m+n)}.$$

Подстановка этих значений постоянных в формулы (110) и (111) позволяет определить функции A и B, а затем по формуле (96) — радиальные перемещения, а по формулам (105), (106), (107) и (109)—напряжения в цилиндре.

Рассмотрим частный случай, когда k=0,5. Для этого значения k по кривым фиг. 269 и 270 находим α=7,11; β=2,08; m=0,565; n=0,821.

Постоянные C_2 и C_6 равны в этом случае

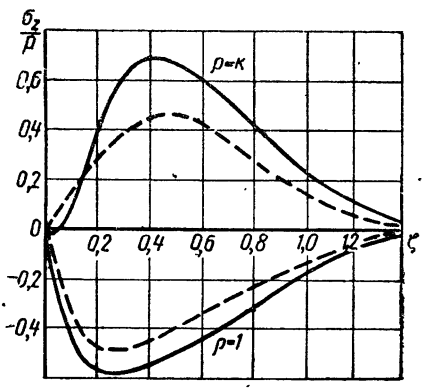
$$C_2 = 0{,}240\frac{pr_2}{E};\quad C_6 = 0{,}693\frac{pr_2}{E}.$$

Функции A и B определяются выражениями

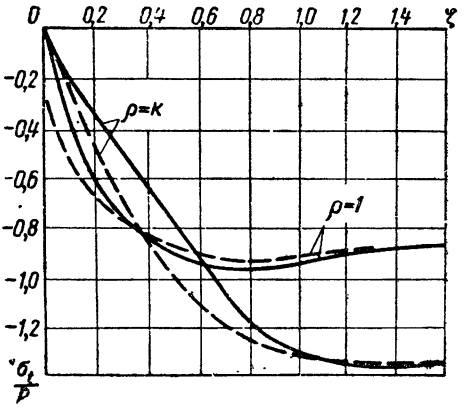
$$A = \frac{pr_2}{2E}[0{,}240\,e^{-\alpha\zeta}\cos\alpha\zeta + 0{,}693\,e^{-\beta\zeta}\cos\beta\zeta - 0{,}934];$$

$$B = \frac{pr_2}{2E}[-0{,}136\,e^{-\alpha\zeta}\cos\alpha\zeta + 0{,}569\,e^{-\beta\zeta}\cos 3\zeta - 0{,}433].$$

Подставляя значения функций $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ и их вторых производных в формулы (105), (107) и (96), можно найти напряжения σ_z, σ_t и радиальное смещение u. Результаты вычислений представлены графика-



Фиг. 272.



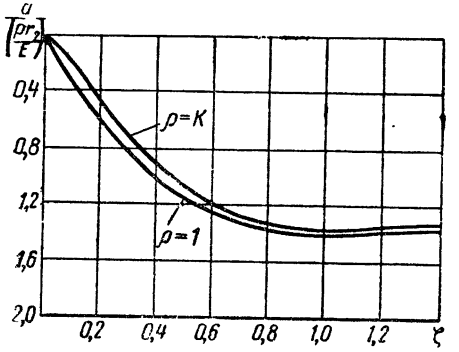
Фиг. 273.

ми на фиг. 272—274. Для сравнения на тех же фигурах пунктиром показаны значения напряжений, даваемых теорией, изложенной в предыдущем параграфе.

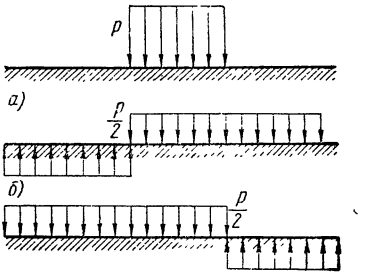
Полученное решение задачи для нагрузки распределенной в соответствии с фиг. 271 можно использовать в качестве линии влияния для определения напряжений и перемещений при произвольном законе изменения давления по длине цилиндра. Так, в частности, давление, рав-

номерно распределенное на участке боковой поверхности цилиндра (фиг. 275, *а*), может быть представлено, как сумма двух нагрузок рассмотренного типа (фиг. 275, *б*). Соответственно напряжения и перемещения в этом случае определятся как сумма величин, вызываемых каждой из нагрузок.

На фиг. 276 представлены полученные таким образом значения радиальных смещений и продольных напряжений в середине нагруженно-

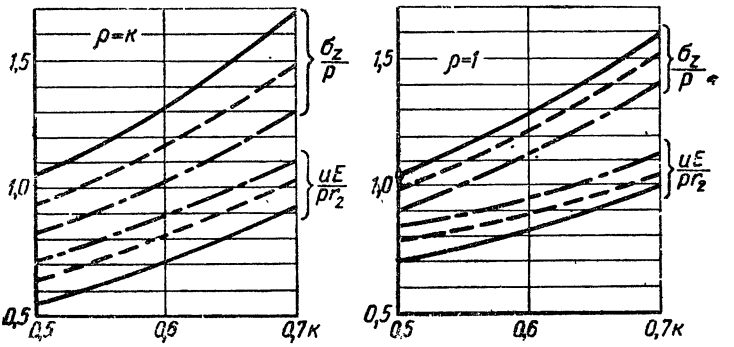


Фиг. 274.



Фиг. 275.

го участка для того случая, когда длина этого участка равна толщине стенки цилиндра. Вычисления проведены для цилиндров с различными отношениями радиусов k. Штрихпунктиром на той же фигуре показаны напряжения и перемещения, рассчитанные по приближенной теории,



Фиг. 276.

изложенной в предыдущем параграфе, а пунктиром — точные значения напряжений и перемещений по Г. С. Шапиро [13].

Сравнение кривых показывает, что в данном случае точность, даваемая обеими приближенными теориями, примерно одинакова.

При этом результаты приближенных расчетов образуют «вилку», внутри которой заключено точное решение.

§ 8. РАСЧЕТ СПЛОШНЫХ ЦИЛИНДРОВ (ВАЛОВ), НАГРУЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫМ ПО ДЛИНЕ ДАВЛЕНИЕМ

Для расчета сплошных цилиндров можно применить тот же метод, который использован выше для расчета полых цилиндров.

Однако если положить в формулах § 6 $k=0$, что соответствует сплошному цилиндру, то эпюра распределения напряжения σ_z по радиу-

су (см. фиг. 236) будет иметь излом в точке $\rho = 0$; поэтому лучшие результаты могут быть получены, если для сплошного цилиндра задаться другими выражениями функций V_1 и V_2, чем для полого.

Производными функций $V_1(\rho)$ и $V_2(\rho)$ для сплошного цилиндра можно задаться в виде [1]

$$V_1' = \rho - \rho^3;$$

$$V_2' = \rho - \rho^9 - \lambda(\rho - \rho^3).$$

Принятая форма зависимости для $V_1(\rho)$ соответствует распределению напряжений σ_z в сечении по параболическому закону.

Коэффициент λ в выражении для V_2 выбран так, чтобы коэффициент K_5 в уравнениях (59), определяющих функции Z_1 и Z_2, обращался в ноль. При $\mu = 0{,}3$, $\lambda = 1{,}880874$.

Уравнения (59) после деления на коэффициенты при Z_1^{IV} и Z_2^{IV} можно записать в виде

$$Z_1^{IV} - 10{,}263\, Z_1'' + 82{,}101\, Z_1 + 1{,}7097\, Z_2'' + 9{,}7809\, Z_2 = 7{,}8966 \frac{d^2p}{d\zeta^2};$$

$$Z_2^{IV} - 60{,}377\, Z_2'' + 2252{,}1\, Z_2 + 3{,}4806\, Z_1'' + 199{,}12\, Z_1 = 19{,}146 \frac{d^2p}{d\zeta^2}.$$

Путем решения этой системы дифференциальных уравнений в случае, если давление равномерно распределено по правой части длинного цилиндра, в то время как левая его часть свободна от нагрузки, получены графики распределения напряжений и перемещений, представленные на фиг. 277. Из графиков для напряжения σ_r видно, что это напряжение, которое на наружной поверхности цилиндра $\rho = 1$ меняется скачком от нуля до p, на оси цилиндра ($\rho = 0$) изменяется плавно на длине $2R$. Остальные графики также показывают, что вне зоны длиной R в каждую сторону от границы нагруженной и ненагруженной частей цилиндра напряжения и перемещения не отличаются от значений, даваемых формулами Ляме.

Используя графики фиг. 277 и применяя, как было указано (см. разд. Д § 6), метод наложения, можно без труда найти напряжения и смещения в том случае, когда сплошной цилиндр загружен давлением только на участке боковой поверхности. Графики напряжений и смещений при длине загруженного участка, равной $0{,}15R$, изображены на фиг. 278.

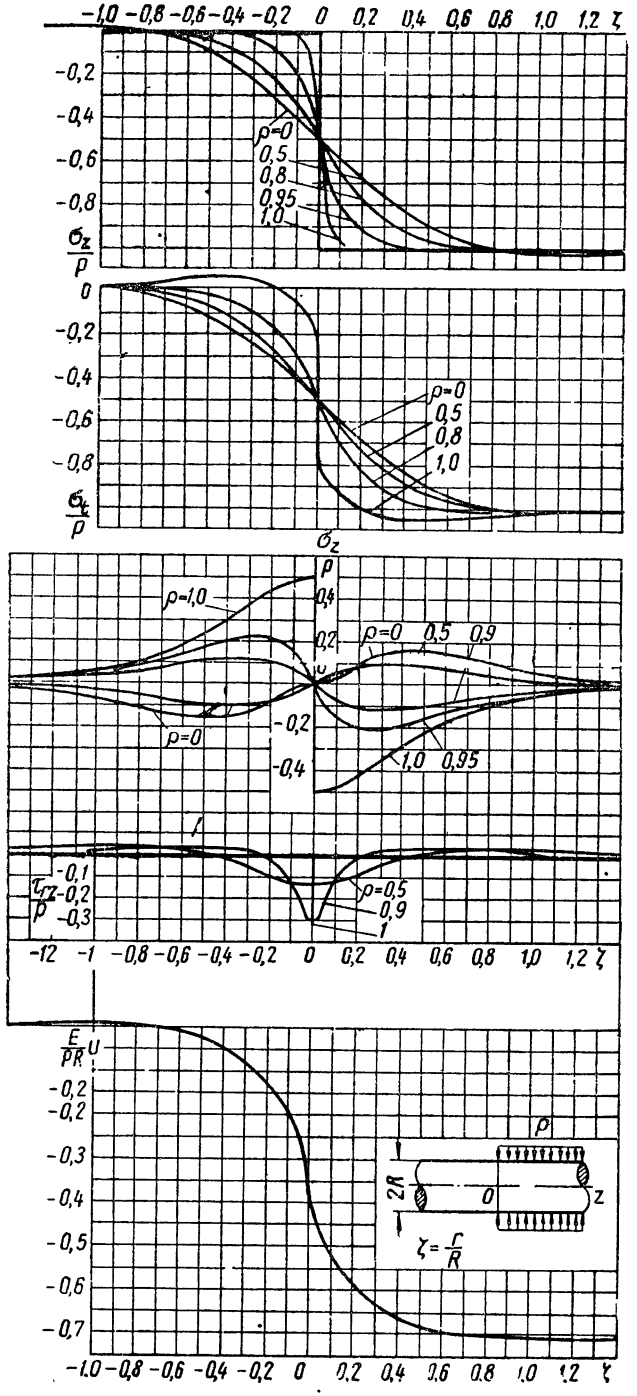
Анализ этих графиков позволяет установить, что при небольшой длине загруженной части напряжения носят резко выраженный местный характер, концентрируясь вблизи поверхности цилиндра. Радиальное напряжение σ_r на радиусе $0{,}8R$ равно 0,5, а на оси цилиндра только 0,15 внешнего давления p.

Кольцевое напряжение σ_t у поверхности цилиндра равно $0{,}83\,p$, а в центре его всего $0{,}15\,p$. Максимальное радиальное смещение в середине загруженного участка

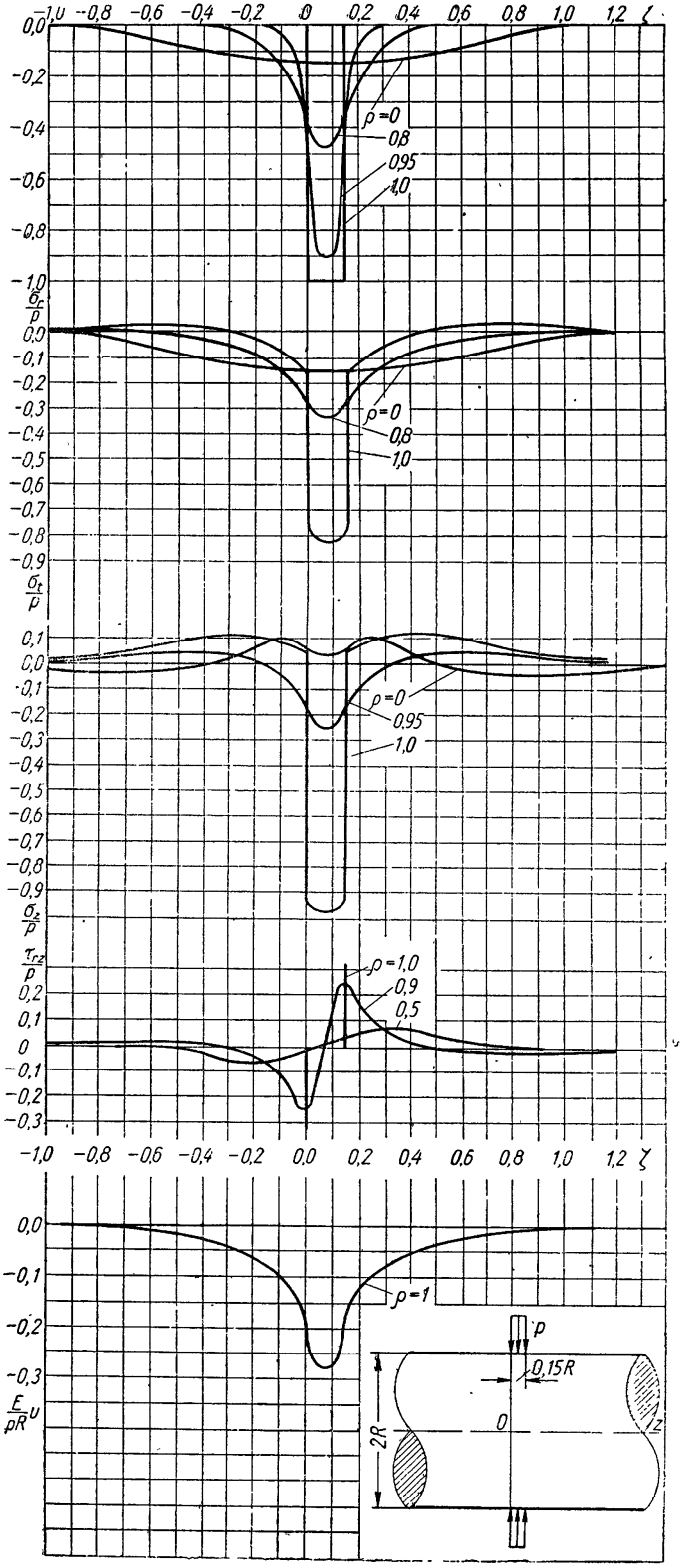
$$u_{max} = 0{,}28 \frac{pr}{E}.$$

Если в этой задаче не учитывать влияния ненагруженных частей цилиндра (т. е. воспользоваться формулами Ляме), то в пределах нагруженного участка

$$\sigma_r = \sigma_t = -p$$


-1,0 -0,8 -0,6 -0,4 -0,2 0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 1,2 ζ
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
σz/p
ρ=0
0,5
0,8
0,95
1,0
0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
σr/p
ρ=0
0,5
0,8
1,0
σz
ρ
0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
ρ=1,0
ρ=0
0,5
0,9
ρ=0
1,0
0,95
1
τrz/p
-0,1
-0,2
-0,3
ρ=0,5
0,9
1
-12 -1 -0,8 -0,6 -0,4 -0,2 0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 1,2 ζ
E/pR U
-0,2
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
-0,6
-0,7
-1,0 -0,8 -0,6 -0,4 -0,2 0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 1,2 ζ
ρ
2R
0
z
ζ = r/R

Фиг. 277.


ρ=0
0,8
0,95
1,0
σr/p
ρ=0
0,8
1,0
σt/p
ρ=0
0,95
1,0
σz/p
ρ=1,0
0,9
0,5
τrz/p
ρ=1
E/pRv
p
0,15R
2R
0
z
ζ

Фиг. 278.

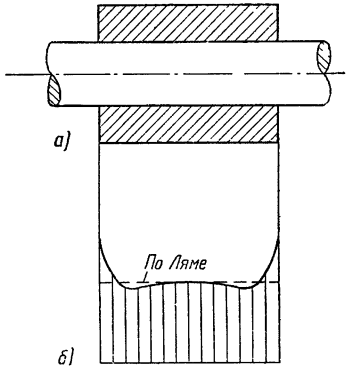
(на всех радиусах)

$$u_{max}=(1-\mu)\frac{pR}{E}=0{,}7\,\frac{pR}{E}.$$

Из сравнения этих цифр с полученными выше видно, что при небольшой длине загруженного участка пользоваться формулами Ляме нельзя.

§ 9. РАСЧЕТ ПРЕССОВЫХ ПОСАДОК ПРИ РАЗЛИЧНОЙ ДЛИНЕ СОПРЯГАЕМЫХ ДЕТАЛЕЙ

Если сопрягаемые путем прессовой посадки детали имеют различную длину, как это обычно имеет место при посадке втулки на длинный вал (фиг. 279, *а*), то контактное давление распределяется по посадочной поверхности неравномерно. Благодаря влиянию выступающих из-под втулки частей вала, затрудняющих его деформацию, давление вблизи конца втулки значительно возрастает. Полученные экспериментальным путем графики распределения давления по длине втулки имеют форму, представленную на фиг. 279,*б*. Теоретическое решение задачи о распределении давления по длине втулки является весьма сложным и до сих пор не получено [1].



Фиг. 279.

Если длина втулки мала, то благодаря влиянию выступающих концов вала средняя величина контактного давления, обусловливающего усилие запрессовки, может значительно увеличиться.

Для точного определения величины среднего давления посадки необходимо знать закон распределения давления по посадочной длине. Как уже указывалось, эта задача до сих пор не разрешена.

Для приближенного определения среднего контактного давления можно применить метод, предложенный Ренкиным [16].

Ренкин, считая давление равномерно распределенным по длине втулки, определяет среднее арифметическое радиальное смещение на поверхности вала и, приравнивая сумму этого перемещения и увеличения внутреннего диаметра втулки натягу, находит среднюю величину давления.

Конечно, метод Ренкина не является строгим, так как вычисление среднего давления заменяется вычислением среднего смещения.

Однако метод этот можно применить в качестве первого приближения. Применение его оправдывается тем, что при малой длине загруженной поверхности вала разница между максимальным и минимальным перемещениями в ее пределах невелика, и в этом случае использование средней величины перемещения допустимо. При большой длине втулки влияние выступающих частей вала невелико, и с некоторой ошибкой здесь можно примириться.

---

[1] Для втулки с незакругленным краем максимальное контактное давление теоретически бесконечно. В действительности величина давления ограничивается благодаря пластическим деформациям.

Теория, изложенная в § 6 и 8, позволяет решить задачу как для сплошного, так и для полого валов, причем для сплошного вала результаты совпадают с результатами, полученными Ренкиным.

Величину среднего перемещения на нагруженной поверхности вала можно записать в форме

$$u_{1cp} = \frac{\int_0^l |u dz|}{l} = \varkappa \frac{pd}{2E_1}\left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu\right), \qquad (112)$$

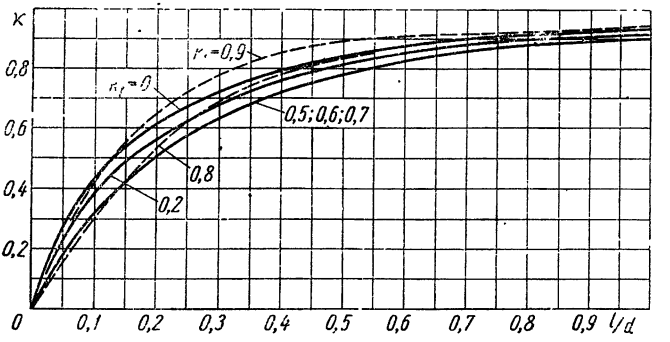
где $\varkappa$ — коэффициент, зависящий от отношения длины загруженного участка к диаметру вала и равный отношению действительного среднего перемещения к перемещению, определяемому по Ляме;

E_1 — модуль упругости материала вала;

d — диаметр вала;

k_1 — отношение внутреннего диаметра вала к наружному.

Величина коэффициента $\varkappa$ для полого вала может быть легко найдена методами, изложенными в § 6, а для сплошного — в § 8.



Фиг. 280.

На фиг. 280 представлены графики зависимости этого коэффициента от отношения длины посадочной поверхности l к диаметру вала d при различных относительных диаметрах k_1 сверления в валу.

Радиальное перемещение на внутренней поверхности втулки, посаженной на вал, определяется по формуле (11):

$$u_2 = \frac{pd}{2E_2}\left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu\right),$$

где E_2 — модуль упругости материала втулки;

k_2 — отношение внутреннего диаметра втулки к наружному.

Приравнивая сумму среднего радиального перемещения вала и перемещения втулки половине натяга $\frac{\delta}{2}$ получим уравнение

$$\frac{\delta}{d} = p\left[\frac{\varkappa}{E_1}\left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu\right) + \frac{1}{E_2}\left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu\right)\right],$$

откуда среднее посадочное давление

$$p = \frac{\frac{\delta}{d}}{\varkappa \frac{1}{E_1}\left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu\right) + \frac{1}{E_2}\left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu\right)}. \qquad (113)$$

Формула (113) отличается от обычно применяемых зависимостей для определения посадочного давления только наличием коэффициента $\varkappa$, меньшего единицы.

Как видно из графиков фиг. 280, коэффициент $\varkappa$ значительно отличается от единицы только для коротких втулок $\left(\frac{l}{d} < 0{,}5\right)$.

В этом случае выступающие за концы втулки части вала оказывают большое влияние на величину среднего давления посадки.

Формула (113) показывает, что влияние концов вала на величину среднего давления при посадке толстостенной втулки на полый вал больше, чем при посадке тонкостенной втулки на сплошной вал.

Рассмотрим для сравнения два случая посадки:

1) втулки с отношением внутреннего диаметра к наружному $k_2 = 0{,}4$ на сплошной вал;

2) той же втулки на полый вал с отношением диаметров $k_1 = 0{,}5$.

Примем, что в обоих случаях длина втулки равна четверти диаметра вала $\left(\frac{l}{d} = 0{,}25\right)$, материал втулки и вала одинаков.

Для сплошного вала ($k_1 = 0$) по графику находим, что при $\frac{l}{d} = 0{,}25$, $\varkappa = 0{,}67$, и по формуле (113) вычисляем среднее посадочное давление:

$$p = \frac{E\frac{\delta}{d}}{0{,}67(1-\mu) + \left(\frac{1+0{,}4^2}{1-0{,}4^2} + \mu\right)} = 0{,}465\,E\frac{\delta}{d}$$

(при $\mu = 0{,}3$).

Если не учитывать влияния выступающих концов вала, т. е. положить $\varkappa = 1$, то

$$p^* = \frac{E\frac{\delta}{d}}{(1-\mu) + \left(\frac{1+0{,}4^2}{1-0{,}4^2} + \mu\right)} = 0{,}420E\frac{\delta}{d}.$$

Таким образом, в этом случае за счет влияния выступающих концов вала давление увеличивается на

$$\frac{p - p^*}{p^*}\,100 = 10{,}7\ \%.$$

Для полого вала ($k_1 = 0{,}5$) при $\frac{l}{d} = 0{,}25$ $\varkappa = 0{,}58$, и по формуле (113) можно найти среднее давление посадки:

$$p = \frac{E\frac{\delta}{d}}{0{,}58\left(\frac{1+0{,}5^2}{1-0{,}5^2} - \mu\right) + \left(\frac{1+0{,}4^2}{1-0{,}4^2} + \mu\right)} = 0{,}405\ E\frac{\delta}{d}.$$

По обычной формуле мы получили бы

$$p^* = \frac{E\frac{\delta}{d}}{\left(\frac{1+0{,}5^2}{1-0{,}5^2} - \mu\right) + \left(\frac{1+0{,}4^2}{1-0{,}4^2} + \mu\right)} = 0{,}328\ E\frac{\delta}{d}.$$

В этом случае увеличение давления за счет влияния выступающих концов вала составляет

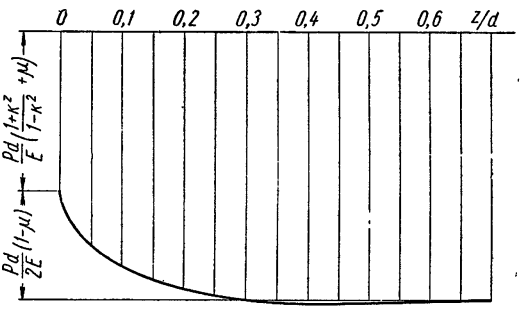
$$\frac{p-p^*}{p^*}\,100=\frac{0{,}405-0{,}328}{0{,}328}\,100=23{,}5\ \%.$$

С помощью изложенной в § 6 и 8 общей теории можно не только определить величину среднего контактного давления, но и найти форму, которую нужно придать сопрягаемым деталям, с тем чтобы получить равномерное распределение давления по длине втулки.

Задавшись равномерным распределением давления, можно найти соответствующие деформации вала, а затем по формуле

$$\frac{\delta}{2}=|u|_{вала}+u_{втулки}$$

определить натяг (в функции длины), который обеспечит получение равномерного распределения давления.



Фиг. 281.

На фиг. 281 приведено очертание натяга по длине втулки, необходимое для получения равномерного распределения давления для случая весьма длинной втулки. Необходимое очертание натяга может достигаться путем придания нецилиндрической формы внутренней поверхности втулки или наружной поверхности вала. В случае длинной втулки (фиг. 281) закругление должно занимать длину примерно $0{,}2\,d$ от каждого из ее концов.

§ 10. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТРУБАХ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУР

Рассмотрим длинную толстостенную трубу, температура в стенках которой t изменяется по толщине стенки, но постоянна по длине трубы, т. е. $t=t(r)$.

Если поток тепла является установившимся и если температура наружной поверхности трубы равна нулю, а внутренней поверхности T^*, то, как показывает теория теплопередачи, зависимость температуры t от радиуса r дается формулой

$$t=\frac{T}{\ln k}\ln\rho, \tag{114}$$

где опять используются безразмерные обозначения для радиусов

$$\frac{r}{r_2}=\rho \text{ и } \frac{r_1}{r_2}=k.$$

В силу постоянства температуры по длине трубы можно считать, что поперечные сечения, лежащие на достаточном расстоянии от концов

* Любые другие граничные условия можно получить, накладывая равномерное нагревание или охлаждение, которое не вызывает никаких напряжений. Таким образом, величина T представляет собой, в сущности разность температур внутренней и внешней поверхностей трубы.

трубы [1], остаются плоскими, и деформация ε_z является постоянной величиной:

$$\varepsilon_z = \text{const}.$$

Влияние температуры можно учесть, если к деформациям, обусловленным напряжениями, добавить равномерное температурное расширение

$$\Delta\varepsilon = \alpha t,$$

где ε — коэффициент линейного расширения материала. Тогда для деформаций ε_r, ε_t и ε_z вместо формул (35) — (37) получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_t - \mu\sigma_z) + \alpha t;\\
\varepsilon_t &= \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r - \mu\sigma_z) + \alpha t;\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_r - \mu\sigma_t) + \alpha t.
\end{aligned}\right\} \qquad (115)$$

Разрешая эти уравнения относительно напряжений, найдем

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t + \mu\varepsilon_z - (1+\mu)\alpha t];$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_z - (1+\mu)\alpha t];$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t - (1+\mu)\alpha t];$$

Выразим в этих формулах деформации через перемещения

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr};$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}$$

и поставим значения σ_r и σ_t в уравнения равновесия (4). Тогда, учитывая, что $\varepsilon_z = \text{const}$, получим следующее дифференциальное уравнение, определяющее перемещения u:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\frac{dt}{dr}. \qquad (116)$$

Уравнение (116) можно представить также в виде

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(ru)\right] = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\frac{dt}{dr}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(ru) = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha t + 2C_1.$$

[1] Напряжения, возникающие вблизи концов трубы, будут рассмотрены далее.

Умножая на r и интегрируя еще раз, найдем

$$ru = \frac{1+\mu}{1-\mu}\int_{r_1}^{r} \alpha t r dr + C_1 r^2 + C_2,$$

откуда

$$u = \frac{1}{r}\frac{1+\mu}{1-\mu}\int_{r_1}^{r} \alpha t r dr + C_1 r + C_2\frac{1}{r}.$$

Поставляя полученное выражение u в формулу для радиального напряжения σ_r и приравнивая это напряжение нулю на внутренней и внешней поверхностях трубы, найдем постоянные C_1 и C_2.

С подстановкой этих значений формулы для напряжений σ_r, σ_t и σ_z принимают вид

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu}\left[-\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r} \alpha t r dr + \frac{r^2 - r_1^2}{r^2\left(r_2^2 - r_1^2\right)}\int_{r_1}^{r_2} \alpha t r dr\right]; \qquad (117)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu}\left[\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r} \alpha t r dr + \frac{r^2 + r_1^2}{r^2\left(r_2^2 - r_1^2\right)}\int_{r_1}^{r_2} \alpha t r dr - \alpha t\right]; \qquad (118)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu}\left[\frac{2\mu}{r_2^2 - r_1^2}\int_{r_1}^{r_2} \alpha t r dr + (1-\mu)\varepsilon_z - \alpha t\right]. \qquad (119)$$

Величину ε_z можно найти, приравнивая нулю продольную силу, растягивающую трубу:

$$N = 2\pi\int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr = 0,$$

отсюда

$$\varepsilon_z = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2}\int_{r_1}^{r_2} \alpha t r dr,$$

и окончательное выражение для σ_z примет вид

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu}\left[\frac{2}{r_2^2 - r_1^2}\int_{r_1}^{r_2} \alpha t r dr - \alpha t\right]. \qquad (120)$$

Если температура распределена в соответствии с формулой (114), то, вычисляя интегралы, входящие в формулы (117)—(119), получим в безразмерных обозначениях

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)}\cdot\frac{1}{\ln k}\left[-\ln\rho - \frac{k^2}{1-k^2}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)\ln k\right]; \qquad (121)$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)}\cdot\frac{1}{\ln k}\left[-1 - \ln\rho - \frac{k^2}{1-k^2}\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right)\ln k\right]; \qquad (122)$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)}\cdot\frac{1}{\ln k}\left[-1 - 2\ln\rho - \frac{2k^2}{1-k^2}\ln k\right]. \qquad (123)$$

У внутренней поверхности трубы ($\rho = k$) эти напряжения равны

$$\sigma_r = 0;$$

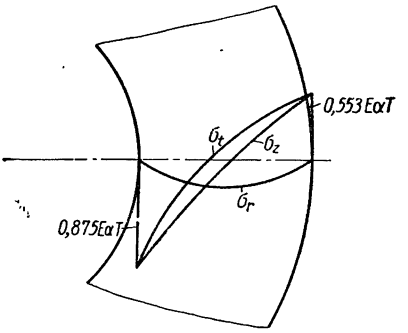
$$\sigma_t = \sigma_z = -\frac{E\alpha T}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{\ln k}\left[1 + \frac{2}{1-k^2}\ln k\right],$$

у наружной поверхности ($\rho = 1$)

$$\sigma_r = 0;$$

$$\sigma_t = \sigma_z = -\frac{E\alpha T}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{\ln k}\left[1 + \frac{2k^2}{1-k^2}\ln k\right].$$

Эпюры распределения напряжения в зависимости от радиуса для трубы с отношением внутреннего диаметра к наружному $k=0{,}5$ представлены на фиг. 282.



Фиг. 282.

Для трубы с тонкими ($k \to 1$) стенками полученные формулы являются неудобными. Переходя в этих формулах к пределу при $k \to 1$, получим

$$\sigma_t = \sigma_z = \frac{E\alpha T}{1-\mu}\,\frac{\rho - \frac{1+k}{2}}{1+k},$$

т. е. в этом случае эпюры напряжений по толщине стенки являются прямолинейными.

Напряжение во внутреннем слое

$$(\sigma_t)_{\rho=k} = (\sigma_z)_{\rho=k} = -\frac{E\alpha T}{2(1-\mu)}. \qquad (124)$$

Напряжения в наружном слое отличаются знаком:

$$(\sigma_t)_{\rho=1} = (\sigma_z)_{\rho=1} = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)}. \qquad (125)$$

Вблизи торцов трубы температурные напряжения, определяемые полученными выше формулами, могут иметь место только в том случае, если торцы нагружены нормальными поверхностными силами, распределенными так же, как и напряжения σ_z, в соответствии с формулой (123).

Исследуем распределение напряжений вблизи концов трубы, если торцы ее свободны. Для этого на напряженное состояние, определяемое формулами (121)—(123), наложим напряженное состояние, вызываемое действием на торце поверхностных сил, нормальных к плоскости торца, обратных по направлению напряжениям, определяемым формулой (123).

Напряжения и перемещения, вызванные этой нагрузкой, можно найти, пользуясь теорией, изложенной в § 6. Согласно формулам (94) при нагружении торца поверхностными силами, нормальными к его плоскости, функции Z_1 и Z_2 определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= M_1 S_1(\zeta); \\ Z_2 &= M_2 T_1(\zeta), \end{aligned}\right\} \qquad (126)$$

где M_1 и M_2 — постоянные, зависящие от нагрузки.

Нормальные напряжения на торце, соответствующие этим выражениям функций Z_1 и Z_2, равны

$$(\sigma_z)_{\zeta=0} = -M_1\frac{1}{\rho}(\rho V_1')' - M_2\frac{1}{\rho}(\rho V_2')', \qquad (127)$$

или, подставляя значения функций V_1 и V_2, имеем

$$(\sigma_z)_{\zeta=0} = -M_1\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1+k+k^2}{1+k}-\rho\right)-M_2\cdot\frac{1}{2}\left[8\rho^2-9(1+k)\rho+\right.$$
$$\left.+2(1+4k+k^2)-k(1+k)\frac{1}{\rho}\right]+\lambda\left[-3\rho+2(1+k)-\frac{k}{\rho}\right]\Bigg\}. \qquad (127\text{ а})$$

Для того чтобы суммарные напряжения на торце равнялись нулю, сумма выражений (123) и (127) должна тождественно равняться нулю. Из этого условия следует определять постоянные M_1 и M_2.

Ясно, однако, что ни при каком выборе постоянных M_1 и M_2 тождественность выражений (123) и (127) не может быть достигнута, поэтому приходится подобрать коэффициенты M_1 и M_2 лишь так, чтобы сумма выражений (123) и (127) возможно меньше отличалась от нуля, т. е. чтобы

$$F(\rho) = \mathring{A}\left[1+2\ln\rho+\frac{2k^2}{1-k^2}\ln k\right]+M_1\frac{1}{\rho}(\rho V_1')'+M_2\frac{1}{\rho}(\rho V_2')'\approx 0,$$

где обозначено

$$A = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln k}.$$

Для того чтобы приближенно выполнялось условие

$$F(\rho) = 0$$

потребуем согласно методу Галеркина, чтобы обращались в ноль интегралы

$$\int_k^1 F(\rho)(\rho V_1')'\,d\rho = 0; \qquad \int_k^1 F(\rho)(\rho V_2')'\,d\rho = 0. \qquad (128)$$

Величины M_1 и M_2, вычисленные с помощью уравнений (128), для цилиндров с различными соотношениями радиусов приведены на фиг. 283. При $k>0{,}7$ распределение напряжений, даваемое формулой (123), является практически линейным, и для того чтобы апроксимировать его, достаточно одной функции V_1 (т. е. при $k > 0{,}7$ можно положить $M_2 = 0$).

Для того чтобы установить, насколько точно с помощью выражения (127) апроксимируется функция по формуле (123), на фиг. 284 построены эпюры распределения напряжения по обеим формулам для случая $k=0{,}4$.

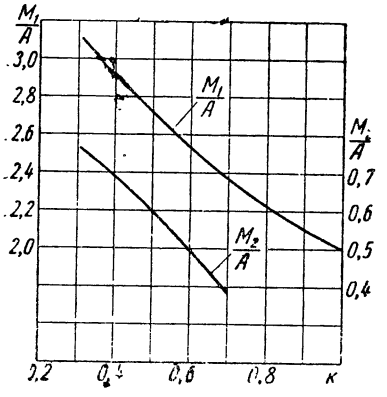
Как видно из сравнения кривых, накладывая на напряжения по формулам (120)—(123) напряжения, соответствующие функциям Z_1 и Z_2; можно почти полностью устранить нормальные напряжения на торце.

Для труб с более тонкими стенками ($k > 0{,}4$) совпадение кривых получается еще лучшее и, следовательно, условие отсутствия напряжения σ_z на торце выполняется точнее.

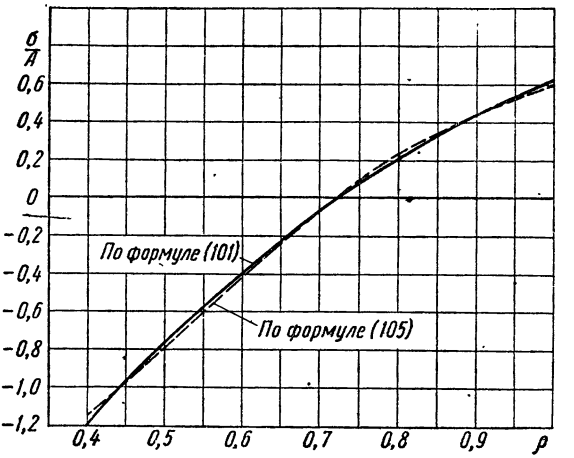
Исследуем распределение напряжений вблизи свободного торца трубы.

Полные напряжения складываются из напряжений, определяемых по формулам (120)—(123), и напряжений, соответствующих функциям Z_1 и Z_2.

Так как функции Z_1 и Z_2 уже найдены, определение этих последних напряжений по формулам § 6 не представляет трудностей.



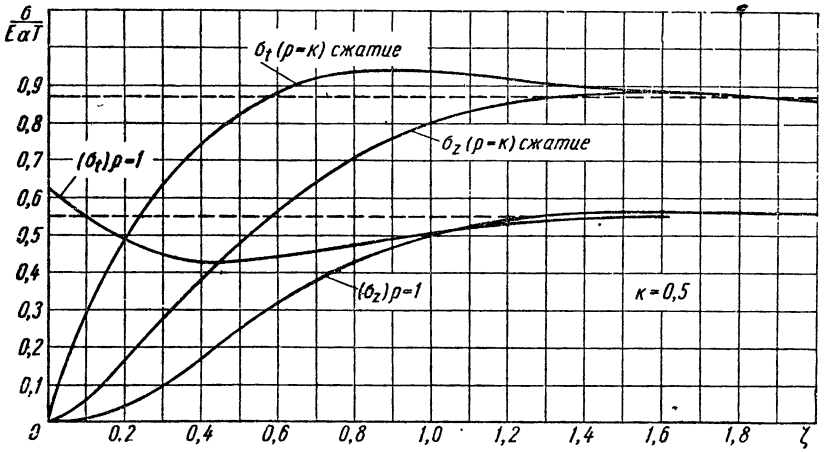
Фиг. 283.



Фиг. 284.

На фиг. 285 даны эпюры напряжений σ_z и σ_t в наружном ($\rho=1$) и внутреннем ($\rho=k$) слоях трубы с соотношением радиусов $k=0{,}5$.

Пунктиром показаны величины напряжений в бесконечной трубе.



Фиг. 285.

Как видно из графика, на расстоянии $1{,}6\,r_2$ от свободного торца влиянием его на распределение напряжений можно пренебречь и определять напряжения по формулам (120)—(123).

Около торца все напряжения, кроме кольцевого напряжения в наружном слое трубы, меньше соответствующих величин для бесконечной трубы. Небольшое возрастание напряжения $(\sigma_t)_{\rho=1}$ для трубы с соот-

ношением радиусов $k=0{,}5$ не играет существенной роли, так как это напряжение значительно меньше напряжений во внутреннем слое трубы.

Возрастание напряжения σ_t в наружном слое связано с тем, что при нагревании конец трубы деформируется, принимая форму раструба.

Влияние нарушения цилиндрической формы трубы при нагревании на величину напряжения σ_t оказывается особенно значительным для трубы с тонкими стенками. Это влияние имеет тем большее значение, что для трубы с тонкими стенками напряжения в наружном слое такие же, как и во внутреннем, и их увеличение может лимитировать прочность трубы.

Для трубы с тонкими стенками, производя во всех формулах предельный переход при $k\to 1$, найдем следующие значения температурных напряжений у свободного торца трубы:

$$(\sigma_t)_{\rho=k}=\frac{E\alpha T}{2(1-\mu)}\left[-1+\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}}+\mu\right];$$

$$(\sigma_t)_{\rho=1}=\frac{E\alpha T}{2(1-\mu)}\left[1+\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}}-\mu\right].$$

Сравнивая эти напряжения с напряжениями по формулам (124) и (125), имеющими место вдали от торцов трубы, можно установить, что максимальное напряжение возникает у наружной поверхности трубы, и при $\mu=0{,}3$ оно примерно на 25% больше, чем напряжение вдали от свободного торца.

Расчет составной неравномерно нагретой толстостенной трубы изложен в работе [4].

Расчет неравномерно нагретых труб с учетом зависимости от температуры модуля упругости и коэффициента Пуассона материала трубы приведен в работах [6] и [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В. Л., Расчет цилиндров средней толщины на симметричную относительно оси нагрузку, изменяющуюся по длине, Труды II научно-технической конференции МВТУ, изд. МВТУ, 1946.

2. Бояршинов С. В., Расчет толстостенных полых цилиндров, находящихся под действием произвольной осесимметричной нагрузки, сб. «Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций» («МВТУ», вып. 26), Машгиз, 1953.

3. Лейбензон Л. С., Вариационные методы решения задач теории упругости, ОГИЗ, 1943.

4. Лубенец В. Д., Расчет составной толстостенной трубы с учетом неравномерного осесимметричного нагрева, сб. «Расчеты на прочность элементов машиностроительных конструкций» («МВТУ», вып. 31), Машгиз, 1955.

5. Лурье А. И., Пространственные задачи теории упругости, ГТТИ, 1955.

6. Малинин Н. Н., Расчет неравномерно нагретых толстостенных труб, сб. «Расчеты на прочность элементов машиностроительных конструкций» («МВТУ», вып. 31), Машгиз, 1955.

7. Пономарев С. Д., Расчет толстостенных труб на прочность графическим способом, «Инженерный сборник», вып. IX, изд. АН СССР, 1951.

8. Пономарев С. Д., Графический расчет на прочность толстостенных труб с учетом их осесимметричного нагрева, «Вестник инженеров и техников» № 1, 1952.

9. Прокопов В. К., Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра, «Труды Ленинградского политехнического института» № 2, 1950.

10. Смирнов-Аляев Г. А., Теория автоскрепления цилиндров, Оборонгиз, 1940.

11. Тимошенко С. П., Теория упругости, § 110, ОНТИ, 1934.

12. Феппль А. и Феппль Л., Сила и деформация, т. II, ОНТИ, 1936.

13. Шапиро Г. С., О сжатии бесконечного полого круглого цилиндра давлением, приложенным на участке боковой поверхности, «Прикладная математика и механика», т. VII, № 5, 1943.

ГЛАВА VI

УПРУГИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В МЕСТАХ СИЛОВОГО КОНТАКТА ДЕТАЛЕЙ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Изучение контактных деформаций и напряжений необходимо для разрешения проблемы прочности деталей в местах их взаимодействия (контакта) при передаче усилий от одного элемента конструкции другому. Типовыми деталями, требующими для своего расчета знания деформаций и напряжений в местах контакта, являются шарико- и роликоподшипники качения, цилиндрические и конические зубчатые передачи, червячные передачи, детали кулачковых механизмов, фрикционные передачи, опорные шаровые и цилиндрические катки, колеса подвижного состава, рельсы и т. д.

Изучение деформаций в местах контакта деталей также необходимо для выполнения ряда технологических расчетов, например при определении усилий зажима. Теория контактных деформаций находит применение в разработке проблемы чистоты поверхности.

Исследование деформаций и напряжений в местах контакта деталей представляет собой один из наиболее сложных разделов современной теории упругости. По существу этот раздел является переходным от классических задач теории упругости, для которых характерна линейная зависимость напряжений и перемещений от нагрузок, к задачам, типичным для нелинейной теории упругости.

Начало теории деформаций упругих тел в местах контакта на основе использования общих уравнений теории упругости и методов теории потенциала дано в работе Г. Герца в 1881 г. [117]. Предложенная им теория контактных деформаций была разработана применительно к следующим двум основным случаям: во-первых, была рассмотрена задача, когда имело место первоначальное (до деформации) точечное касание деталей, например касание шарика и кольца в шарикоподшипнике, во-вторых, был исследован случай касания двух цилиндров по образующей (линейный контакт), например касание ролика и кольца в роликоподшипнике, касание зубьев цилиндрических шестерен и т. д.

Рассмотрим постановку первой контактной задачи (точечный контакт). Два тела из однородных и изотропных материалов, ограниченные некоторыми криволинейными поверхностями, соприкасаются до деформации в одной точке. Оба тела сдавливаются силами, направленными по прямой, соединяющей центры кривизны поверхностей тел в точке касания. При этом тела деформируются, и первоначальное точечное касание тел переходит в соприкасание по некоторой поверхности (поверхность контакта деформированных тел). Величины сжимающих сил, приложенных к телам, предполагаются такими, чтобы в зоне контакта тел имели место только упругие деформации.

Будем считать, что поверхность контакта весьма мала по сравнению с общей поверхностью каждого из соприкасающихся тел, тогда в общем случае соприкасающихся тел контур поверхности контакта представляет собой эллипс В предельных случаях эллиптическая площадка контакта переходит или в круговую площадку, или в полоску, ограниченную двумя параллельными прямыми. Первый предельный случай, т. е. площадка контакта с круговым контуром, имеет место при соприкасании тел, ограниченных сферическими поверхностями, или двух одинаковых цилиндров, расположенных так, что их оси взаимно перпендикулярны. Второй предельный случай, т. е. площадка контакта в виде полосы, имеет место при соприкасании двух цилиндров с параллельными осями. Таким образом, случай линейного контакта можно рассматривать как частный случай точечного контакта.

Полагая поверхности соприкасающихся тел совершенно гладкими, заключаем, что силы давления, передаваемые от одного тела на другое и распределенные по поверхности контакта, нормальны к этой поверхности.

Г. Герц показал, что распределение давления по площадке контакта представляется ординатами половины эллипсоида, построенного на этой площадке. Путем применения общих методов теории упругости и использования эллипсоидального закона распределения давлений им были найдены выражения для полуосей контурного эллипса площадки контакта, сближения соприкасающихся тел и величины наибольшего давления в зависимости от величины сил сдавливающих тела, главных радиусов кривизны поверхностей тел в точке первоначального касания и упругих постоянных материалов тел. Полученные выражения для размеров площадки контакта, сближения и наибольшего давления, подтвержденные многочисленными экспериментальными исследованиями, широко используются в технических расчетах.

Для оценки прочностей деталей в местах контакта недостаточно знания величины наибольшего давления. Полная характеристика напряженного состояния детали дается величинами главных напряжений в каждой точке детали или по крайней мере в наиболее напряженных ее точках.

Детальное исследование напряженного состояния в зоне контакта, позволившее производить теоретически обоснованные расчеты на контактную прочность, выполнено главным образом в работах А. Н. Динника [24] и Н. М. Беляева [7], [8], [9]. В более ранних работах рассматривается напряженное состояние в частных случаях круговой площадки контакта и площадки контакта в виде полосы, ограниченной параллельными прямыми. Наиболее полное исследование этих случаев дано в капитальной работе А. Н. Динника [24]. Исходя из общих уравнений теории упругости, он получил выражения для компонентов напряженного состояния соприкасающихся сферических тел (круговая площадка контакта) и цилиндров с параллельными осями (площадка контакта в виде полосы). В ряде работ Н. М. Беляева аналогичными методами весьма детально и тщательно исследуется напряженное состояние в общем случае эллиптической площадки контакта.

Использование малознакомой широким инженерным кругам теории потенциала и общих уравнений теории упругости привело к тому, что, несмотря на весьма большой практический интерес к изучению контактных напряжений и широкое распространение формул для вычисления размеров площадки контакта и сближения соприкасающихся тел, их обоснование в технической литературе, как правило, отсутствует

и заменяется обычно ссылками на первоисточники. Учитывая это обстоятельство, в ряде работ была сделана попытка дать приемлемое для математического кругозора инженера изложение теории контактных деформаций и напряжений, главным образом для наиболее простого случая круговой площадки соприкасания тел.

Так, например, в курсе теории упругости С. П. Тимошенко [101] теория контактных деформаций для случая круговой площадки соприкасания изложена без применения теории потенциала. Это изложение основано на использовании результатов задачи Буссинеска о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство (деталь весьма больших размеров, ограниченную плоскостью, нормальной к направлению действующей силы). Здесь также намечен ход исследования и для эллиптической площадки контакта. Аналогичное изложение вопроса опять-таки для круговой площадки контакта дано в работе А. Феппля и Л. Феппля [102]. Обоснование теории контактных деформаций в случае эллиптической площадки соприкасания без применения теории потенциала дано в работах В. Л. Бидермана [10] и К. Вебера [122].

Применение результатов задачи Буссинеска к исследованию напряженного состояния соприкасающихся тел в зоне круговой площадки контакта изложено Л. Фепплем [103]. Исследование напряженного состояния в общем случае эллиптической площадки контакта проведено в работе В. М. Макушина [57].

Примененный в работах [10] и [57] метод исследования контактных напряжений и деформаций позволяет дать сравнительно доступное широким инженерно-техническим кругам изложение вопроса в общем случае эллиптической площадки соприкасания двух сжимаемых деталей.

Одно из основных положений классической теории деформаций тел в местах контакта состоит в том, что силы давления, передаваемые от одного тела на другое и распределенные по поверхности контакта, нормальны к этой поверхности. Вместе с тем в ряде случаев инженерной практики приходится сталкиваться с наличием помимо нормальной также и касательной нагрузки и с необходимостью учета ее влияния на напряженное состояние соприкасающихся тел. Так, в зубчатых передачах рабочая поверхность зуба помимо нормальной нагрузки воспринимает и касательную, связанную с относительным скольжением. Значительная сложность точного решения при наличии одновременного действия нормальных и касательных сил заставляет почти всех исследователей этой проблемы ограничиваться приближенным решением.

Основное допущение приближенного решения заключается в предположении, что для нормальных сил сохраняется эллипсоидальный закон их распределения по площадке контакта и что касательные силы пропорциональны силам нормальным. Исследование некоторых случаев напряженного состояния соприкасающихся тел при наличии касательных нагрузок дано в работах Б. С. Ковальского [43]—[46] и М. М. Саверина [86, 87].

За последние 10—15 лет появился ряд исследований, дающих дальнейшее развитие и углубление основных положений теории деформаций тел в местах контакта методами математической теории упругости. Это серия работ И. Я. Штаермана, работы А. М. Лурье, Н. И. Мусхелишвили, Н. А. Кильчевского, Л. А. Галина, М. З. Народецкого и др.

В статье И. Я. Штаермана [111] рассматривается в самом общем виде задача о первоначально точечном контакте двух упругих тел (однородных и изотропных), прижимаемых друг к другу заданными внеш-

ними усилиями. Автор отказывается от одного из основных допущений классической теории — от предположения о малости поверхности контакта по сравнению с общей поверхностью соприкасающихся тел. Вместе с тем принимается во внимание не только сближение соприкасающихся тел, обусловленное их деформацией, но и их относительное вращение в процессе деформаций тел.

Составленное И. Я. Штаерманом векторное интегральное уравнение вместе с условиями равновесия рассматриваемых тел принципиально позволяет определить все неизвестные величины задачи: распределение давления по поверхности контакта, форму и размеры поверхности контакта, сближение и взаимный поворот соприкасающихся тел при их деформации. Существенно, что заданные внешние усилия, приложенные к соприкасающимся телам, должны быть такими, чтобы угол между направлением давления в произвольной точке поверхности контакта и направлением нормали к этой поверхности в той же точке не превосходил угла трения для сжимаемых тел.

Из рассмотренной задачи после введения ряда упрощающих предположений могут быть получены основные уравнения теории Г. Герца. Эта работа И. Я. Штаермана имеет большое принципиальное значение, существенным образом расширяя наши знания в области теории деформаций упругих тел в местах контакта.

Применение изложенной в статье [111] теории к одному практически интересному частному случаю дано в работе [111а]. Здесь рассматривается задача о контакте кругового цилиндра и цилиндрической круговой полости в упругом теле. Длины цилиндра и полости предполагаются весьма большими. Существенно, что радиус цилиндра весьма близок к радиусу полости и, следовательно, введенное в теорию Герца предположение о малости площадки контакта здесь заведомо не оправдывается. Поверхность соприкасающихся тел предполагается гладкой, и давление по поверхности контакта направлено нормально к этой поверхности. Внешняя нагрузка осуществлена также в виде нормального давления, диаметрально противоположного давлению на поверхности контакта.

Заметим, что характер распределения внешней нагрузки весьма мало отражается на деформациях в местах контакта. В силу симметрии взаимный поворот соприкасающихся тел отсутствует и имеет место только сближение этих тел. Приближенное решение основного интегрального уравнения задачи проведено по методу конечных разностей. Весьма существенно, что зависимость между нагрузкой и углом, под которым видна поверхность контакта с оси цилиндра, полученная И. Я. Штаерманом, и зависимость между теми же величинами по теории Г. Герца при достаточно больших значениях этого угла резко отличаются друг от друга.

В ряде других работ И. Я. Штаермана рассматривается обширный круг задач, связанных с вопросом о влиянии характера поверхности соприкасающихся тел в месте контакта на распределение давления по площадке контакта. В теории Г. Герца первоначальное расстояние $f(x, y)$ между соответствующими точками поверхности сжимаемых тел, соприкасающихся (до деформации) в начале координат, апроксимируется суммой членов второй степени разложения $f(x, y)$ в степенной ряд, т. е. предполагается, что поверхности сжимаемых тел имеют так называемое прикосновение первого порядка. И. Я. Штаерман снимает это ограничение, предполагая между сжимаемыми телами касание любого порядка.

Оригинальные исследования И. Я. Штаермана составили содержание его фундаментальной монографии [115] о контактных задачах теории упругости.

Обобщение задачи о первоначально линейном контакте двух цилиндрических тел с параллельными осями в связи с применением сингулярных интегральных уравнений к плоской задаче теории упругости дано в монографии Н. И. Мусхелишвили [63]. По сравнению с обычной постановкой задачи обобщения заключается в том, что ширина полоски контакта не считается малой.

Необходимо также отметить работу М. З. Народецкого [64], в которой рассматривается несколько иное обобщение той же задачи. В обычном решении напряжения и деформации вблизи поверхности контакта исследуются независимо от общего напряженного состояния соприкасающихся тел. Это допущение оправдывается только в том случае, когда размеры соприкасающихся тел достаточно велики по сравнению с размерами площадки контакта и когда нагрузки на соприкасающиеся тела приложены достаточно далеко от этой площадки. М. З. Народецкий дает общее решение плоской задачи о внутреннем соприкасании двух цилиндров, т. е. о контакте цилиндра и цилиндрической полости. Это решение используется для установления влияния места приложения нагрузки на напряжения и деформации соприкасающихся тел.

Достаточно близко к рассматриваемой проблеме деформаций тел в местах контакта примыкает родственная ей проблема о деформациях упругого тела вдавливанием абсолютно жесткого штампа той или иной формы. Ряд задач о круглом и эллиптическом, плоском и неплоском штампах рассмотрен в интересной работе А. И. Лурье [54]. Существенно отметить, что, рассматривая задачу о неплоском эллиптическом штампе, математически эквивалентную задаче о первоначально точечном контакте двух упругих тел, А. И. Лурье устраняет один из недостатков решения Герца — именно «отгадывание» закона распределения давления по площадке контакта. В своей монографии [55] А. И. Лурье продолжает исследование пространственных контактных задач, связанных с проблемой штампов, а также рассматривает и проблему сжатия упругих тел.

Систематическая разработка проблемы штампов дана в ряде работ Л. А. Галина. Эти исследования составили содержание его монографии [16] о плоских и пространственных контактных задачах теории упругости. Во введении к монографии дан детальный обзор работ по соответствующим разделам теории упругости. Полученные Л. А. Галиным результаты представляют интерес для машиностроения, например при расчете давления, возникающего между пятой и подпятником.

Значительно меньше разработана теория контактных деформаций и напряжений при переходе материала из упругого состояния в пластическое. Задача о круговой площадке контакта при первоначально точечном соприкасании тел в области пластических деформаций рассмотрена в работах А. Ю. Ишлинского [34] и Г. П. Зайцева [27]. Рассмотрение ряда задач о давлении штампа на пластическое тело дано в монографиях В. В. Соколовского [94] и А. А. Ильюшина [35].

Систематизированный справочный материал по теории контактных деформаций и напряжений дан в работах С. В. Серенсена [90], [91]) и Н. И. Пригоровского [77], [78].

Хорошим учебным пособием для первоначального ознакомления

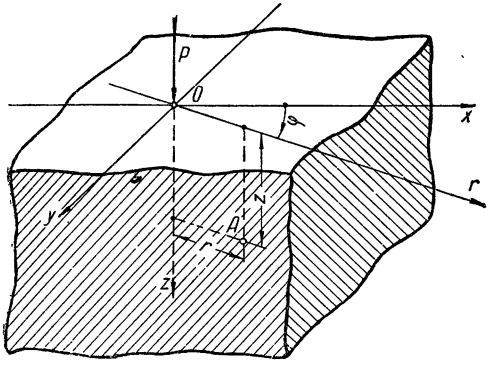
с основами теории контактных деформаций может служить работа Г. А. Бойченко [12].

Формулы и выводы теории контактных деформаций находят, особенно в последнее время, самое широкое применение в технической литературе (см. библиографию в конце главы).

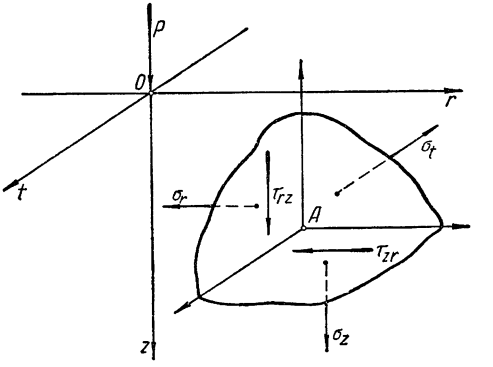
§ 2. НАГРУЖЕНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ, НОРМАЛЬНОЙ К ГРАНИЧНОЙ ПЛОСКОСТИ

Решение вопроса о деформированном состоянии полупространства, т. е. тела весьма больших размеров, ограниченного плоскостью, при действии сосредоточенной силы, нормальной к этой плоскости, методами математической теории упругости выполнено Буссинеском [53], [56].

Поставим перед собой задачу дать элементарное изложение вопроса. Полученные при этом выражения для компонентов напряженного состояния и составляющих упругих перемещений дадут возможность сравнительно просто исследовать напряженное состояние в зоне сило-



Фиг. 286



Фиг. 287

вого контакта тел, ограниченных криволинейными поверхностями (шары, цилиндры и т. д.), получить размеры площадок контакта этих тел и т. п.

Итак, представим себе упругое тело, простирающееся во всех направлениях так, что его можно считать бесконечно большим по сравнению с областью, испытывающей действие приложенной нагрузки. Это тело с одной стороны ограничено плоскостью. К граничной плоскости приложена нормальная нагрузка P. Площадь, по которой распределена эта нагрузка, столь мала, что ее можно рассматривать как точку. Совместим начало координат с точкой приложения сосредоточенной силы P, а координатную плоскость xOy — с плоскостью, ограничивающей рассматриваемое тело (фиг. 286). Ось z направим внутрь тела. В рассматриваемом случае напряженное состояние полупространства, ограниченного плоскостью xOy симметрично относительно оси z. Другими словами, напряженное состояние тела в некоторой точке A с цилиндрическими координатами z, r, φ (фиг. 286) не зависит от полярного угла φ.

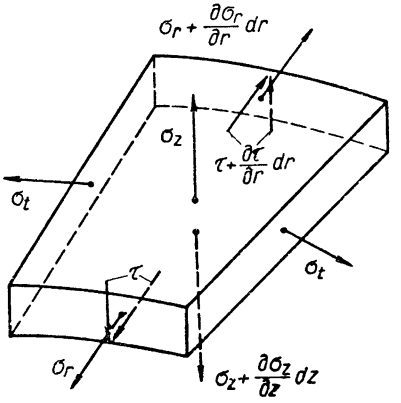
Проведем через начало координат плоскость tOz, перпендикулярную плоскости rOz (фиг. 287). В точке A плоскости rOz имеют место следующие компоненты напряжений: нормальное напряжение σ_t в плоскости rOz, нормальное напряжение σ_r в плоскости, параллельной tOz, нормальное напряжение σ_z в плоскости, параллельной rOt (т. е. поверхности тела), и касательные напряжения τ_{rz} и τ_{zr}

(равные между собой). Этим касательным напряжениям соответствует угловая деформация (сдвиг) в плоскости rOz, не нарушающая осевой симметрии деформированного состояния тела.

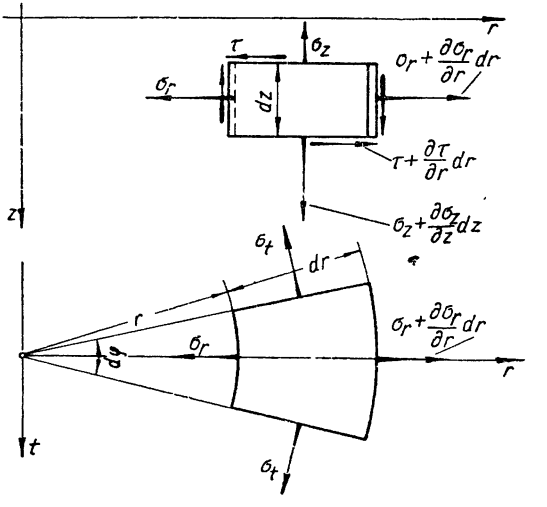
Касательные напряжения $\tau_{rt}=\tau_{tr}$ и $\tau_{tz}=\tau_{zt}$ отсутствуют, так как их наличие не согласуется с условиями симметрии деформированного состояния рассматриваемого тела относительно оси z. Следовательно, плоскость rOz как свободная от касательных напряжений является главной плоскостью. В дальнейшем будем обозначать касательные напряжения $\tau_{rz}=\tau_{zr}$ через τ. Условимся также пользоваться следующей терминологией: σ_r—радиальное напряжение, σ_t — окружное напряжение и σ_z — осевое напряжение. Основная задача— определить все эти напряжения для любой точки $A(r, z)$ тела, представив их в функции координат z и r этой точки. Помимо этого необходимо также установить величину упругого перемещения точки A.

А. Уравнения равновесия элемента объема

Выделим в окрестности точки A элемент объема, ограниченный двумя плоскостями, проходящими через ось z и образующими между собой угол $d\varphi$, двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами



Фиг. 283



Фиг. 289

r и $r+dr$ (оси поверхностей совпадают с осью z) и двумя плоскостями, параллельными поверхности тела и расположенными на расстоянии dz одна от другой (фиг. 288). При перемещении вдоль оси r от одной грани элемента к другой радиальное напряжение σ_r получает приращение $\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}dr$, а касательное напряжение τ — приращение $\frac{\partial\tau}{\partial r}dr$. Аналогично при перемещении вдоль оси z осевое напряжение σ_z получает приращение $\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz$.

Благодаря симметрии напряженного состояния тела относительно оси z окружное напряжение σ_t при переходе от одной грани элемента к другой не изменяется.

На фиг. 289 изображены проекции рассматриваемого элемента объема и действующих по граням нормальных и касательных напряжений.

Рассмотрим условия равновесия выделенного элемента.

а) Сумма проекций всех сил, приложенных к элементу, на вертикальную ось z

$$\Sigma_{пр} z = 0$$

или

$$-\sigma_z r d\varphi\, dr + \left[\sigma_z r d\varphi\, dr + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z r d\varphi\, dr)\, dz\right] - \tau r d\varphi\, dz + \left[\tau r d\varphi\, dz + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial r}(\tau r d\varphi\, dz)\, dr\right] = 0,$$

после элементарных преобразований

$$r\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}(\tau r) = 0. \qquad (1)$$

б) Сумма проекций всех сил, приложенных к элементу, на горизонтальную ось r

$$\Sigma_{пр} r = 0,$$

или

$$-\sigma_r r d\varphi\, dz + \left[\sigma_r r d\varphi\, dz + \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r r d\varphi\, dz)\, dr\right] -$$
$$-\tau r d\varphi\, dr + \left[\tau r d\varphi\, dr + \frac{\partial}{\partial z}(\tau r d\varphi\, dr)\, dz\right] -$$
$$-2\sigma_t dr dz \sin\frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Заменяя по малости угла $\sin\frac{d\varphi}{2}$ его аргументом $\frac{d\varphi}{2}$, имеем

$$r\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r r) - \sigma_t = 0. \qquad (2)$$

Остальные четыре уравнения равновесия рассматриваемого элемента объема удовлетворяются тождественно.

Итак, напряжения σ_r, σ_t, σ_z и τ, рассматриваемые как функции двух переменных r и z, должны удовлетворять полученным выше двум дифференциальным уравнениям (1) и (2) в частных производных. Кроме того, напряжения должны удовлетворять следующим граничным условиям или условиям на поверхности тела: касательные напряжения τ во всех точках плоскости $z=0$, ограничивающей рассматриваемое тело, обращаются в нуль; равным образом во всех точках этой плоскости за исключением точки приложения нагрузки (начало координат) обращается в нуль и осевое напряжение σ_z.

Составленных дифференциальных уравнений (1) и (2) вместе с перечисленными граничными условиями, конечно, недостаточно для выражения искомых напряжений в функции от r и z. Необходимо воспользоваться дополнительными условиями.

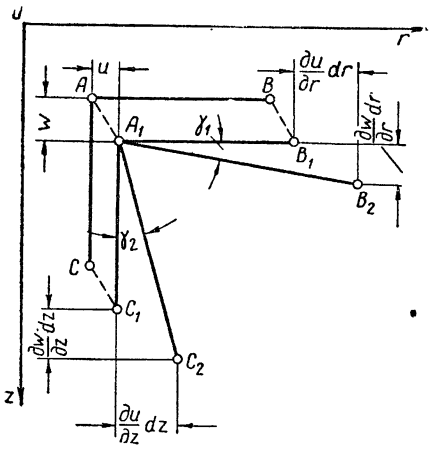
Б. Зависимости между перемещениями и деформациями

Обозначим упругие перемещения рассматриваемой точки A по направлениям осей r, t, z соответственно через u, v, w. Из условий осевой симметрии очевидно, что при деформации тела под действием сосредоточенной силы P, нормальной к его поверхности и приложенной в начале координат, перемещение $v=0$, т. е. точки, лежащие до деформации в некоторой плоскости, проходящей через ось z, остаются в этой же

плоскости и после деформации. Два других компонента смещения u и w являются функциями координат r, z точки A.

Рассмотрим два взаимно перпендикулярных линейных элемента $AB=dr$ и $AC=dz$, расположенных в плоскости rOz (фиг. 290). При деформации тела точка A перейдет в положение A_1, переместившись вдоль оси r на величину u и вдоль оси z на величину w. Линейные элементы AB и AC благодаря деформации тела изменят свою длину и повернутся на малые углы γ_1 и γ_2, т. е. займут положения A_1B_2 и A_1C_2.

Компоненты перемещений концов B и C отрезков AB и AC могут быть записаны для точки B как



Фиг. 290

$$u+\frac{\partial u}{\partial r}dr \text{ и } w+\frac{\partial w}{\partial r}dr,$$

для точки C как

$$u+\frac{\partial u}{\partial z}dz \text{ и } w+\frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

Линейные деформации вдоль осей координат r и z (см. гл. II, т. I)

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r} \text{ и } \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Линейная деформация в окружном направлении

$$\varepsilon_t=\frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r}=\frac{u}{r}.$$

Углы поворота отрезков AB и AC

$$\gamma_1=\frac{\partial w}{\partial r} \text{ и } \gamma_2=\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Угловая деформация в плоскости rOz, т. е. изменение величины прямого угла, образованного отрезками AB и AC при деформации тела (см. гл. II, т. I),

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2=\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Таким образом, величины линейных и угловых деформаций в точке $A(r, z)$ рассматриваемого тела соответственно равны

$$\left.\begin{gathered}\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r};\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z};\quad \varepsilon_t=\frac{u}{r};\\ \gamma=\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}.\end{gathered}\right\} \tag{3}$$

Формулы (3) выражают линейные и угловые деформации через перемещения u и w.

Теперь необходимо установить зависимость между этими деформациями и рассмотренными ранее напряжениями.

В. Зависимость между деформациями и напряжениями

Как известно, закон Гука для нормальных напряжений в общем случае имеет следующий вид:

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}[\sigma_r-\mu(\sigma_t+\sigma_z)];$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}[\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_t + \sigma_r)].$$

Решая эту систему трех уравнений относительно напряжений, имеем

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= 2G\left[\varepsilon_r + \frac{\mu}{1-2\mu}e\right];\\ \sigma_t &= 2G\left[\varepsilon_t + \frac{\mu}{1-2\mu}e\right];\\ \sigma_z &= 2G\left[\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu}e\right], \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ — модуль сдвига;

$e = \varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_z$ — относительное изменение объема.

Используя формулы (3), имеем

$$e = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}. \tag{5}$$

Согласно закону Гука для касательных напряжений

$$\tau = G\gamma. \tag{6}$$

Перейдем к составлению основных дифференциальных уравнений, разрешающих задачу о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство.

Используя формулы (3), (4) и (6), выразим нормальные и касательные напряжения через компоненты перемещений u и w:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= 2G\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mu}{1-2\mu}e\right];\\ \sigma_t &= 2G\left[\frac{u}{r} + \frac{\mu}{1-2\mu}e\right];\\ \sigma_z &= 2G\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu}e\right];\\ \tau &= G\left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right], \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где объемная деформация e выражается формулой (5).

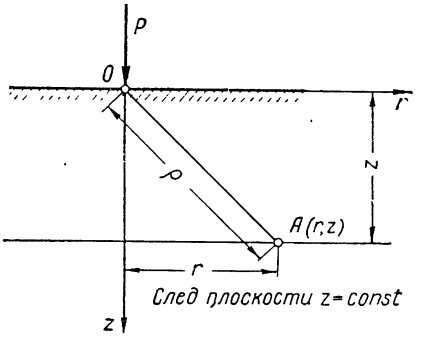
Подстановка значений σ_r, σ_t, σ_z и τ по формулам (7) в уравнения равновесия элемента объема (1) и (2) приводит к следующим выражениям:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}\right] +\\ &+ \frac{1}{2(1-\mu)}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right] = 0;\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right) + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} +\\ &+ \frac{1}{2(1-\mu)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Для определения компонентов перемещения u и w в функции координат r и z следует разрешить составленную систему двух диффе-

ренциальных уравнений в частных производных. Искомые функции u и w должны удовлетворять сформулированным выше условиям для напряжений на поверхности тела.

Буссинеску принадлежит указание двух частных решений системы уравнений (8), т. е. двух возможных выражений для перемещений u и w произвольной точки $A(r, z)$. Первое из них



Фиг. 291

$$\left.\begin{aligned} u &= A\frac{rz}{\rho^3};\\ w &= A\left[\frac{z^2}{\rho^3}+(3-4\mu)\frac{1}{\rho}\right], \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

второе

$$\left.\begin{aligned} u &= B\frac{r}{\rho(\rho+z)};\\ w &= B\frac{1}{\rho}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $\rho=\sqrt{r^2+z^2}$ — расстояние точки A (фиг. 291) до начала координат, т. е. до точки приложения сосредоточенной силы P;

A и B — произвольные постоянные.

Непосредственной подстановкой указанных решений в систему уравнений (8) легко убедиться, что выражения (9) и (10) действительно удовлетворяют уравнениям этой системы. Полное решение может быть представлено как сумма этих решений:

$$\left.\begin{aligned} u &= A\frac{rz}{\rho^3}+B\frac{r}{\rho(\rho+z)};\\ w &= A\left[\frac{z^2}{\rho^3}+(3-4\mu)\frac{1}{\rho}\right]+B\frac{1}{\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Внося значения u и w по формулам (11) в выражения для напряжений (8), после ряда элементарных преобразований получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= 2G\left\{A\left[(1-2\mu)\frac{z}{\rho^3}-\frac{3zr^2}{\rho^5}\right]+\frac{B}{\rho^2(\rho+z)^2}\left(z^2-r^2+\frac{z^3}{\rho}\right)\right\};\\ \sigma_t &= 2G\left[A(1-2\mu)\frac{z}{\rho^3}+\frac{B}{\rho(\rho+z)}\right];\\ \sigma_z &= -2G\left\{A\left[\frac{3z^3}{\rho^5}+(1-2\mu)\frac{z}{\rho^3}\right]+B\frac{z}{\rho^3}\right\};\\ \tau &= -2G\left\{A\left[\frac{3rz^2}{\rho^5}+(1-2\mu)\frac{r}{\rho^3}\right]+B\frac{r}{\rho^3}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Для определения постоянных A и B используем то обстоятельство, что внутренние силы (осевые напряжения σ_z), действующие по сечению рассматриваемого тела плоскостью $z=\text{const}$, статически эквивалентны внешней силе P.

Выберем элемент площади сечения dF в виде кольца с радиусами r и $r+dr$ и центром на оси z, тогда

$$P = -\int_0^\infty \sigma_z 2\pi r dr. \tag{13}$$

Подстановка значения σ_z по третьей из формул (12) дает

$$P = 4\pi GA\left[3z^3\int_0^\infty \frac{rdr}{\rho^5} + (1-2\mu)z\int_0^\infty \frac{rdr}{\rho^3}\right] + 4\pi GBz\int_0^\infty \frac{rdr}{\rho^3} \tag{14}$$

или после преобразований

$$P - 4\pi G[2(1-2\mu)A + B] = 0. \tag{15}$$

В качестве второго условия для определения A и B воспользуемся тем обстоятельством, что поверхность полупространства свободна от касательных сил, и, следовательно, при $z=0$ касательное напряжение $\tau=0$. Согласно четвертой из формул (12) это дает еще одну зависимость между A и B:

$$(1-2\mu)A + B = 0. \tag{16}$$

Решая совместно уравнения (15) и (16), имеем

$$A = \frac{P}{4\pi G} \text{ и } B = -(1-2\mu)\frac{P}{4\pi G}. \tag{17}$$

Внося найденные значения A и B по зависимости (17) в формулы (11), приходим к окончательным выражениям для упругих перемещений u и w произвольной точки $A(r, z)$ полупространства:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{P}{4\pi G}\left[\frac{rz}{\rho^3} - (1-2\mu)\frac{r}{\rho(\rho+z)}\right]; \\ w &= \frac{P}{4\pi G}\left[\frac{2(1-\mu)}{\rho} + \frac{z^2}{\rho^3}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Из рассмотрения выражений (18) следует, что по мере удаления от начала координат u и w уменьшаются и на бесконечности обращаются в нуль. В связи с этим можно себе представить, что система координат r, φ, z (или x, y, z) жестко связана с телом на бесконечности, т. е. что найденные перемещения u и w представляют собой перемещения точек тела относительно весьма удаленной от места приложения силы P и, следовательно, недеформированной части полупространства.

Из выражений (18) следует также, что по мере приближения к началу координат перемещения u и w возрастают и в начале координат обращаются в бесконечность. Заметим, что в действительности сосредоточенная сила конечной величины никогда не имеет места, так как благодаря деформации соприкасающихся тел первоначально точечное касание этих тел переходит в соприкасание по некоторой площадке малых, но все же конечных размеров (см. § 5).

Подставляя найденные значения A и B по зависимостям (17) в формулы (12), приходим к окончательным выражениям для напряжений в произвольной точке $A(r, z)$ полупространства:

радиальное напряжение

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi}\left[\frac{1-2\mu}{\rho(\rho+z)} - \frac{3zr^2}{\rho^5}\right]; \tag{19}$$

окружное напряжение

$$\sigma_t = \frac{P}{2\pi}(1-2\mu)\left[\frac{z}{\rho^3} - \frac{1}{\rho(\rho+z)}\right]; \tag{20}$$

осевое напряжение

$$\sigma_z = -\frac{P}{2\pi}\cdot\frac{3z^3}{\rho^5}; \tag{21}$$

касательное напряжение

$$\tau = -\frac{P}{2\pi}\cdot\frac{3rz^2}{\rho^5}. \tag{22}$$

Так как нормальные и касательные напряжения определены с помощью перемещений u и w, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (8) задачи, то полученные выражения для напряжений заведомо удовлетворяют условиям равновесия (1) и (2) элемента объема.

Остается рассмотреть, удовлетворяются ли приведенные выше граничные условия для напряжений. Для плоскости, ограничивающей рассматриваемое тело, выражения нормальных и касательных напряжений получаются из общих формул (19)—(22), полагая в них $z=0$ и $\rho=r$.

Осевое напряжение σ_z и касательное напряжение τ обращаются в нуль во всех точках этой плоскости за исключением начала координат.

Радиальное и окружное напряжения для точек этой плоскости

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi}\cdot\frac{1-2\mu}{r^2} \quad \text{и} \quad \sigma_t = -\frac{P}{2\pi}\frac{1-2\mu}{r^2}. \tag{23}$$

Таким образом, во всех точках у плоской поверхности рассматриваемого тела имеет место следующая система главных напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{P}{2\pi}\cdot\frac{1-2\mu}{r^2}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\frac{P}{2\pi}\cdot\frac{1-2\mu}{r^2},$$

т. е. двухосное напряженное состояние, получившие название чистого сдвига.

В начале координат, т. е. в точке приложения сосредоточенной силы, все напряжения σ_r, σ_t, σ_z и τ обращаются в бесконечность.

Из общих выражений (19)—(22) для нормальных и касательных напряжений легко получить, полагая $r=0$ и $\rho=z$, соответствующие формулы для напряжений в точках оси z, т. е. линии действия сосредоточенной силы, приложенной к телу:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2\pi}\cdot\frac{1-2\mu}{2z^2};\\ \sigma_t &= \frac{P}{2\pi}\cdot\frac{1-2\mu}{2z^2};\\ \sigma_z &= -\frac{P}{2\pi}\cdot\frac{3}{z^2};\\ \tau &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Отсюда следует, что для точек оси z напряжения σ_r, σ_t и σ_z становятся главными, а площадки их действия — главными площадками.

Величины главных напряжений

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P}{2\pi}\cdot\frac{1-2\mu}{2z^2} \quad \text{и} \quad \sigma_3 = -\frac{P}{2\pi}\cdot\frac{3}{z^2},$$

т. е. имеет место трехосное напряженное состояние.

Из формул (24) также следует, что осевые напряжения $\sigma_z = \sigma_3$ по абсолютной величине значительно больше радиальных и окружных.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ НАГРУЖЕНИЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИЛАМИ

Для исследования упругих перемещений и напряженного состояния в местах контакта деталей необходимо предварительно рассмотреть, как деформируется поверхность полупространства при воздействии нормального давления p, распределенного по некоторой части поверхности (граничной плоскости xOy). Полагая в формуле (18) $z=0$ и $\rho=r$, получаем выражение для перемещения w точек плоской поверхности полупространства от действия сосредоточенной силы:

$$w = k\frac{P}{r}, \tag{25}$$

где коэффициент

$$k = \frac{1-\mu}{2\pi G},$$

а r — расстояние от точки приложения сосредоточенной силы P до точки, в которой имеет место перемещение w.

Используя принцип независимости и сложения действия сил, можно представить перемещение w некоторой точки плоской поверхности полупространства от нормального давления p, распределенного по некоторой площади F этой поверхности, как сумму элементарных перемещений, возникающих в результате воздействия давления на элементы площади dF, т. е.

$$w = k\int_F \frac{p\,dF}{r}, \tag{25а}$$

где r — расстояние от точки, где ищется перемещение w, до точки приложения элементарной силы $p\,dF$.

В дальнейшем (см. § 5) будет показано, что при деформации соприкасающихся тел первоначально точечный контакт в общем случае переходит в контакт по достаточно малой эллиптической площадке. Силы давления между соприкасающимися телами распределены по площади контакта по эллипсоидальному закону. В частном случае, при наличии осевой симметрии, эллиптическая площадка переходит в круговую и эллипсоидальный закон распределения — в сферический.

А. Давление, распределенное по площади круга и пропорциональное ординатам сферической поверхности

Допустим, что распределение нагрузки P по площади круга радиуса a представлено ординатами полусферы, построенной на этой площадке, т. е. положим, что

$$p = p_0\frac{\xi}{a} = p_0\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{\nu}{a}\right)^2}, \tag{26}$$

где p_0 — давление в центре круговой площадки F (фиг. 292).

Величину наибольшего давления p_0 легко выразить через нагрузку P; действительно,

$$P = \int_F p\,dF = \frac{p_0}{a}\int_F \xi\,dF,$$

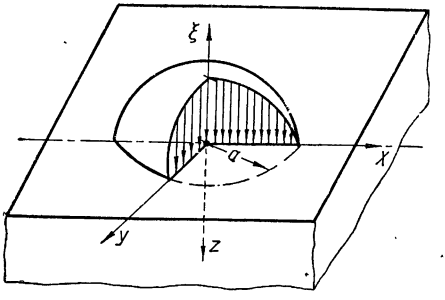
где $\int_F \xi\,dF = \frac{2}{3}\pi a^3$ — объем, ограниченный полусферой радиуса a.

Следовательно,

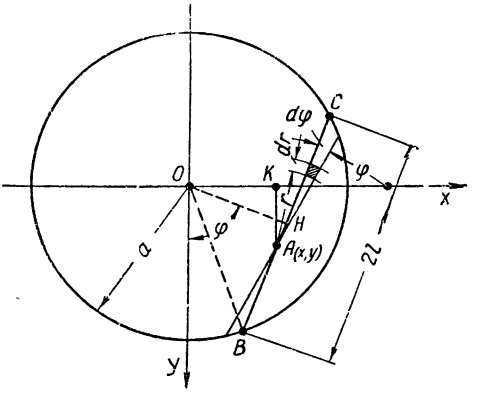
$$p_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{\pi a^2}. \tag{27}$$

Таким образом, при распределении нагрузки по сферическому закону наибольшее давление p_0 в 1,5 раза превышает среднее его значение.

Определим теперь перемещение w некоторой точки $A(x, y)$, расположенной внутри круга радиуса a, по которому распределена нагрузка P (фиг. 293). Воспользуемся полярной системой координат с полю-



Фиг. 292



Фиг. 293

сом в рассматриваемой точке A. Отсчет полярного угла φ ведется от оси x. Выразим элемент площади как $dF = rd\varphi dr$, тогда согласно формуле (25а) искомое перемещение

$$w = k \int_F p dr d\varphi. \tag{28}$$

Обозначим длину хорды BC через $2l$. Интеграл (28) по площади круга сведем к двойному интегралу по переменному r вдоль хорды BC и по переменному φ в пределах от 0 до π:

$$w = k \int_0^{\pi} d\varphi \int_{2l} p dr.$$

Внутренний интеграл по длине хорды BC представляет собой площадь эпюры давления, лежащей над этой хордой, т. е. он пропорционален площади полукруга радиуса l, поэтому

$$\int_{2l} p dr = \frac{p_0}{a} \int_{2l} \xi dr = \frac{p_0}{a} \cdot \frac{\pi l^2}{2}.$$

Теперь выражение для перемещения w принимает следующий вид:

$$w = k \frac{p_0}{a} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} l^2 d\varphi.$$

Из геометрических соображений следует, что

$$l^2 = a^2 - c^2,$$

где $c = x \sin\varphi + y \cos\varphi$ представляет собой расстояние OH от центра круга O до хорды BC (фиг. 293) (c вычислено как проекция ломаной

OKA на направление *OH*), тогда искомое перемещение

$$w = k\frac{p_0}{a}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}[a^2-(x\sin\varphi+y\cos\varphi)^2]\,d\varphi,$$

или, после элементарных преобразований, имеем

$$w=\frac{1-\mu}{2G}\cdot\frac{\pi p_0}{4a}(2a^2-x^2-y^2).$$

Заменяя модуль второго рода G его значением через модуль упругости первого рода E и коэффициент Пуассона μ, получаем окончательное выражение для аксиальных перемещений точек поверхности тела, лежащих внутри нагруженной области (круга радиуса a):

$$w=\frac{1-\mu^2}{E}\cdot\frac{\pi p_0}{4a}(2a^2-x^2-y^2). \tag{29}$$

Из выражения (29) следует, что поверхность полупространства внутри нагруженной области после деформации образует параболоид вращения (частный случай эллиптического параболоида).

Перемещение w_0 центра круга ($x=y=0$)

$$w_0=\frac{1-\mu^2}{E}\cdot\frac{\pi p_0 a}{2}. \tag{30}$$

Перемещение w_k любой точки контура круговой площадки

$$w_k=\frac{1-\mu^2}{E}\cdot\frac{\pi p_0 a}{4}. \tag{30а}$$

Таким образом, перемещение w_k в 2 раза меньше, чем w_0. Заметим, что величина перемещения w_k при сохранении постоянного давления p_0 в центре круга возрастает пропорционально радиусу круга a.

Б. Давление, распределенное по площади эллипса и пропорциональное ординатам поверхности эллипсоида

Допустим теперь, что нагрузка P распределена по площади эллипса $F=\pi ab$, где a и b — соответственно большая и малая его полуоси.

Примем, что давление p в произвольной точке (x_1, y_1) этого эллипса пропорционально ординате ξ эллипсоида:

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{\xi}{c}\right)^2=1, \tag{31}$$

т. е. может быть выражено следующим образом:

$$p=p_0\frac{\xi}{c}=p_0\sqrt{1-\left(\frac{x_1}{a}\right)^2-\left(\frac{y_1}{b}\right)^2}, \tag{31а}$$

где p_0 — давление в центре эллипса (фиг. 294);
a, b, c — полуоси эллипсоида.

Из выражения (31 а) следует, что рассматриваемое распределение давления p по площади эллипса $F=\pi ab$ вполне определяется заданием двух полуосей a и b и не зависит от третьей полуоси эллипсоида c. Выбор величины c определяет собой только форму эллипсоида давлений, но не влияет на величину отношения

$$\frac{\xi}{c}=\sqrt{1-\left(\frac{x_1}{a}\right)^2-\left(\frac{y_1}{b}\right)^2}.$$

Нагрузка P связана с величиной наибольшего давления p_0 соотношением

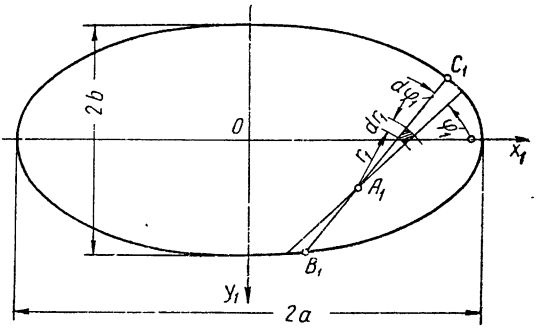
$$P = \int_F p dF = \frac{p_0}{c} \int_F \xi \, dF,$$

где $\int_F \xi \, dF = \frac{2}{3} \pi abc$ — объем рассматриваемого полуэллипсоида.

Следовательно,

$$p_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{\pi ab}, \tag{32}$$

т. е. при распределении давления по эллипсоидальному закону наибольшее давление в 1,5 раза превышает среднее.



Фиг. 294

Определим теперь перемещение w некоторой точки $A_1(x_1, y_1)$ поверхности полупространства, расположенной внутри эллипса с полуосями a и b, по которому распределена нагрузка P.

Выражая элемент площади dF как $r_1 d\varphi_1 dr_1$ и обозначая длину хорды B_1C_1 через $2l_1$, имеем

$$w = k \int_F \frac{p dF}{r_1} = k \int_0 d\varphi_1 \int_{2l_1} p dr_1. \tag{33}$$

Для более удобного вычисления интегралов, входящих в выражение (33), целесообразно ввести новые независимые переменные с помощью соотношений

$$x = x_1 \text{ и } y = \frac{a}{b} y_1, \tag{34}$$

т. е. преобразовать координатную плоскость x_1, y_1 в плоскость x, y.

При этом преобразовании эллипс

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1$$

на плоскости x_1, y_1 (фиг. 294) переходит в окружность

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

на плоскости x, y (фиг. 293).

Положим, что в эллипсоиде давлений, который задан выражением (31), полуось $c = a$, в этом случае он является эллипсоидом вращения. Это ограничение не отражается на законе распределения давлений по

площади эллипса $F=\pi ab$, т. е. не снижает общности рассуждений. При $c=a$ преобразование (34) переводит эллипсоид в сферу, а эпюра давлений над линией $B_1C_1=2l_1$, имеющая форму полуэллипса, переходит в эпюру давлений над линией $BC=2l$ в виде полукруга.

При рассмотренном преобразовании эллипса в окружность каждой точке плоскости x_1, y_1 (фиг. 294) соответствует некоторая вполне определенная точка плоскости x, y (фиг. 293). Естественно принять, что при этом величины давлений в соответствующих точках остаются без изменения.

Так как при рассмотренном преобразовании хорда эллипса B_1C_1 длиной $2l_1$ переходит в хорду окружности BC длиной $2l$, то элементы длин этих хорд связаны соотношением

$$dr_1 = \frac{l_1}{l}\,dr,$$

а следовательно, между площадями эпюр давления в виде полуэллипса и полукруга существует следующая зависимость:

$$\int_{2l_1} p\,dr_1 = \frac{l_1}{l}\int_{2l} p\,dr.$$

Заменяя $p = p_0\frac{\xi}{a}$, находим для площади полуэллипса следующее выражение:

$$\int_{2l_1} p\,dr_1 = \frac{l_1}{l}\cdot\frac{p_0}{a}\cdot\frac{\pi l^2}{2}, \tag{35}$$

тогда согласно зависимости (33)

$$w = k\frac{\pi p_0}{2a}\int_0^{\pi}\frac{l_1}{l}\,l^2 d\varphi_1. \tag{36}$$

Для вычисления интеграла, входящего в выражение (36), целесообразно выразить величины $\frac{l_1}{l}$, l^2 и φ_1 через координаты x_1, y_1 точки A_1 и угол φ, образованный хордой BC круга с осью x (фиг. 293).

Из геометрических соображений следует, что

$$l^2 = a^2 - (x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2,$$

или, используя соотношения (34), имеем

$$l^2 = a^2 - \left(x_1\sin\varphi + \frac{a}{b}\,y_1\cos\varphi\right)^2. \tag{37}$$

По условию преобразования координатной плоскости x_1y_1 в плоскость xy можно написать следующие соотношения для проекций хорды B_1C_1 эллипса и хорды BC круга на координатные оси:

$$l_1\cos\varphi_1 = l\cos\varphi \quad\text{и}\quad l_1\sin\varphi_1 = \frac{b}{a}\,l\sin\varphi, \tag{38}$$

откуда

$$\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 = \cos^2\varphi + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi. \tag{39}$$

Из тех же соотношений следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi,$$

или, дифференцируя последнее выражение почленно и используя первое из соотношений (38), имеем

$$d\varphi_1 = \frac{b}{a}\left(\frac{l}{l_1}\right)^2 d\varphi. \tag{40}$$

Внося соотношения (37), (39) и (40) в выражение (36) для перемещения w и замечая, что пределы интегрирования по φ те же, что и по φ_1, имеем

$$w = k\frac{\pi p_0}{2a}\int_0^{\pi} \frac{ab - \frac{b}{a}x_1^2\sin^2\varphi - \frac{a}{b}y_1^2\cos^2\varphi - x_1y_1\sin 2\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi, \tag{41}$$

где $e = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ — относительный эксцентриситет контурного эллипса области контакта.

Квадратура, входящая в выражение (41), для перемещения может быть сведена к полным эллиптическим интегралам первого рода

$$K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \tag{42}$$

и второго рода

$$L(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{42а}$$

и к сочетанию их в виде

$$D(e) = \frac{1}{e^2}[K(e) - L(e)]. \tag{42б}$$

Действительно, легко показать, что

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = 2K(e); \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = 2D(e);$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = 2[K(e) - D(e)]; \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin 2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = 0.$$

Окончательное выражение перемещения w при эллипсоидальном распределении давлений для точек поверхности полупространства, лежащих внутри нагруженной области,

$$w = \frac{1-\mu^2}{E}\cdot\frac{p_0}{a}\left[abK - \frac{b}{a}Dx_1^2 - \frac{a}{b}(K-D)y_1^2\right], \tag{43}$$

где a и b — соответственно большая и малая полуоси эллипса (фиг. 294).

Ось x_1 направлена по большой оси эллипса и ось y_1 — по малой.

Из выражения (43) следует, что поверхность полупространства внутри нагруженной области после деформации образует эллиптический параболоид.

В книге Ю. С. Сикорского [93] приведены значения полных эллиптических интегралов первого и второго рода в зависимости от вспомогательного угла $\vartheta = \arcsin e$.

В качестве примера применения формулы (43) вычислим перемещения w в центре и по концам осей эллипса давления для случая $a=2b$.

Относительный эксцентриситет эллипса

$$e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Вспомогательный угол $\vartheta=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

По таблице [93] полный эллиптический интеграл первого рода

$$K\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2{,}157,$$

полный эллиптический интеграл второго рода

$$L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1{,}211.$$

Комбинация этих интегралов

$$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{e^2}[K-L]=1{,}261.$$

Перемещение в центре эллипса ($x_1=y_1=0$)

$$w_0=K(1-\mu^2)\frac{p_0}{E}\,b=2{,}157\,(1-\mu^2)\,\frac{p_0}{E}\,b.$$

Перемещения по концам малой оси эллипса ($x_1=0$, $y_1=\pm b$)

$$w_b=D(1-\mu^2)\frac{p_0}{E}\,b=0{,}585\,w_0.$$

Перемещения по концам большой оси эллипса ($x_1=\pm a$, $y_1=0$)

$$w_a=(K-D)(1-\mu^2)\frac{p_0}{E}\,b=0{,}415\,w_0.$$

Обратимся к рассмотрению двух предельных случаев эллипсоидального распределения давлений $e=0$ и $e=1$.

Первый предельный случай $e=0$, т. е. $a=b$, и эллипс давлений переходит в круг. Полные эллиптические интегралы при $e=0$

$$L(0)=K(0)=\frac{1}{2}\pi,$$

и величина $D(0)$ обращается в неопределенность. Как известно, разложение эллиптических интегралов в ряд имеет следующий вид [93]:

$$K(e)=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 e^4+\ldots\right];$$

$$L(e)=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 e^4+\ldots\right];$$

поэтому

$$D(e)=\pi\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 e^2+\ldots\right].$$

Полагая в последней зависимости $e=0$, имеем $D(0)=\frac{1}{4}\pi$ и, следовательно, выражение для перемещения принимает вид

$$w=\frac{1-\mu^2}{E}\cdot\frac{\pi p_0}{4a}(2a^2-x_1^2-y_1^2),$$

что совпадает с выражением (29), полученным ранее непосредственно для давления, распределенного по круговой площадке.

Второй предельный случай $e=1$ соответствует обращению большой полуоси эллипса a в бесконечность при некоторой конечной величине малой полуоси b. Эллиптическая площадка давления переходит при этом в бесконечно длинную полосу шириной $2b$. При конечной величине давления общая нагрузка становится, очевидно, бесконечно большой. При $e=1$ вспомогательный параметр $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ и, следовательно,

$$K(1)=\infty;\ L(1)=1;\ D(1)=\infty,$$

тогда из общего выражения (43) для точек с конечной абсциссой x_1 перемещение

$$w=\frac{1-\mu^2}{E}p_0 b\left[K(1)-\left(\frac{y_1}{b}\right)^2 L(1)\right], \tag{44}$$

т. е. обращается в бесконечность.

Это обстоятельство объясняется тем, что при $e=1$ упругое полупространство нагружается не конечной нагрузкой, а нагрузкой бесконечно большой. Существенно отметить, что обращающийся в бесконечность первый член квадратных скобок выражения (44) не зависит от координат x_1, y_1, т. е. дает перемещения, общие для всех точек полоски контакта. Другими словами, все точки тела получают одинаковое бесконечно большое перемещение, в котором как бы тонут отдельные относительные перемещения этих точек, учитываемых вторым членом в квадратных скобках формулы (44). Рассмотрим относительные перемещения, т. е. условимся, например, вести отсчет перемещений w произвольной точки полоски контакта по отношению к краям этой полоски. Тогда интересующее нас относительное перемещение выразится как

$$w^*=\frac{1-\mu^2}{E}p_0 b\left[K(1)-\left(\frac{y_1}{b}\right)^2\right]-\frac{1-\mu^2}{E}p_0 b\,[K(1)-1];$$

$$w^*=\frac{1-\mu^2}{E}p_0 b\left[1-\left(\frac{y_1}{b}\right)^2\right]. \tag{45}$$

Выражение (45) показывает, что поверхность полупространства внутри полоски давления после деформации принимает форму параболического цилиндра.

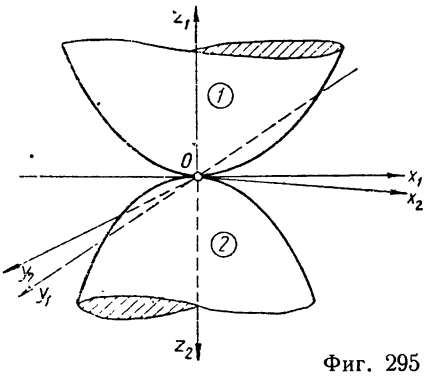
Итак, в общем случае ($0<e<1$) точки эллиптической площадки давления образуют после деформации эллиптический параболоид. В частном случае $e=0$ (площадка давления в виде круга) эллиптический параболоид переходит в параболоид вращения, а в случае $e=1$ (площадка давления в виде бесконечной полосы) — в параболический цилиндр.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ТЕЛ

Для изучения области контакта двух соприкасающихся упругих гладких тел необходимо предварительное рассмотрение некоторых геометрических соотношений для поверхностей этих тел.

Представим себе два тела, ограниченные некоторыми криволинейными поверхностями. Назовем одно из этих тел первым и все относящиеся к нему величины будем сопровождать индексом 1, другое тело назовем вторым и присвоим всем его величинам индекс 2. Если же индексы будут отсутствовать, то это значит, что соответствующая величина относится как к первому, так и ко второму телу.

Допустим, что эти тела касаются друг друга в некоторой точке, не являющейся особенной точкой поверхности (например, вершиной конуса). Примем эту точку касания O за начало координат (фиг. 295). Отнесем первое тело к некоторой прямоугольной (декартовой) системе координат $x_1y_1z_1$, а второе тело — к координатной системе $x_2y_2z_2$. Оси x_1, y_1 и x_2, y_2 расположим в общей касательной плоскости к рассматриваемым телам. Оси z_1 и z_2 направим по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел и примем за положительное направление оси z_1 направление внутрь первого тела и за положительное направление оси z_2 — направление внутрь второго тела.



Фиг. 295

Представим уравнения криволинейных поверхностей рассматриваемых тел вблизи точки касания в следующем виде:

$$z_1 = F_1(x_1,\ y_1) \text{ и } z_2 = F_2(x_2,\ y_2). \tag{46}$$

Разложим функции F_1 и F_2 в ряды по возрастающим степеням независимых переменных x_1, y_1 и x_2, y_2. Так как это разложение совершенно одинаково для F_1 и F_2, то целесообразно индексы 1 и 2 опустить. По формуле Маклорена для функции двух переменных

$$\left.\begin{aligned} F(x,\ y) &= F_0 + x\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0 + y\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[x^2\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_0 + xy\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right|_0 + y^2\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_0\right] + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Здесь индекс 0 обозначает значение функции F и ее частных производных в начале координат, т. е. при $x=y=0$. Благодаря тому, что поверхность проходит через начало координат, $F_0=0$, а поскольку плоскость xOy касательна к поверхности в начале координат, то и

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0 = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 = 0.$$

Следовательно, разложение (47) не будет содержать постоянного члена и членов с первыми степенями независимых переменных, т. е. первые члены ряда разложения будут второй степени относительно этих переменных. Вместе с тем члены с этими степенями заведомо отличны от нуля, так как по предположению точка касания (начало координат) не является особенной точкой рассматриваемых поверхностей.

Поскольку нас интересует не вся поверхность, а только весьма малая ее часть, ближайшая к началу координат и соответствующая малым значениям x и y, то членами третьей и высших степеней относительно x и y можно пренебречь (по сравнению с членами второго порядка), тогда уравнения рассматриваемых поверхностей соприкасающихся тел вблизи точки касания примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} 2z_1 &= x_1^2\left.\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}\right|_0 + x_1y_1\left.\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1\partial y_1}\right|_0 + y_1^2\left.\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2}\right|_0; \\ 2z_2 &= x_2^2\left.\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2}\right|_0 + x_2y_2\left.\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2\partial y_2}\right|_0 + y_2^2\left.\frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2}\right|_0. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Дальнейшее упрощение уравнений поверхностей может быть достигнуто надлежащим выбором положения осей x_1, y_1 и x_2, y_2 в общей касательной плоскости.

Совместим оси x_1, y_1 с линиями пересечения касательной плоскости плоскостями главных нормальных сечений первого тела, тогда

$$\left.\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}\right|_0 = k_{11}; \quad \left.\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial y_1}\right|_0 = 0; \quad \left.\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2}\right|_0 = k_{12}, \tag{48а}$$

где k_{11} и k_{12} — кривизны главных нормальных сечений первого тела в начале координат, так как первые производные здесь обращаются в нуль [81].

Аналогично для второго тела

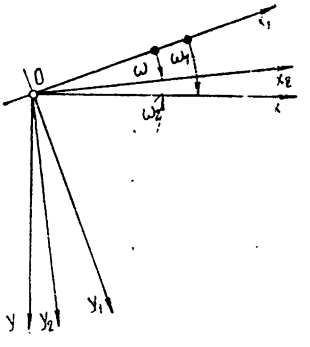
$$\left.\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2}\right|_0 = k_{21}; \quad \left.\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial y_2}\right|_0 = 0; \quad \left.\frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2}\right|_0 = k_{22}, \tag{48б}$$

где k_{21} и k_{22} — главные кривизны второго тела в начале координат.

Величину кривизны считаем положительной, если соответствующий центр кривизны лежит внутри тела.

Итак, уравнения рассматриваемых поверхностей в окрестности точки касания O могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} 2z_1 &= k_{11} x_1^2 + k_{12} y_1^2; \\ 2z_2 &= k_{21} x_2^2 + k_{22} y_2^2. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$



Фиг. 296

Очевидно, что в общем случае взаимного расположения первого и второго тел их главные нормальные сечения, а следовательно и оси x_1, y_1 и x_2, y_2, не совпадают друг с другом. Обозначим угол между осями x_1 и x_2, т. е. между плоскостями кривизн k_{11} (первое тело) и k_{21} (второе тело), через ω (фиг. 296).

Рассмотрим теперь преобразование уравнений поверхностей (49) путем их отнесения к некоторой общей системе координат x, y, расположенной так, что оси x_1 и x_2 образуют соответственно с осью x углы ω_1 и ω_2, так что $\omega_1 - \omega_2 = \omega$.

Используя известные формулы преобразования координат при вращении координатной системы, имеем

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\omega_1 - y\sin\omega_1; \\ y_1 &= x\sin\omega_1 + y\cos\omega_1; \\ x_2 &= x\cos\omega_2 - y\sin\omega_2; \\ y_2 &= x\sin\omega_2 + y\cos\omega_2, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

и, следовательно, уравнения поверхностей рассматриваемых тел в окрестности точки касания O принимают вид

$$\left.\begin{aligned} 2z_1 &= x^2(k_{11}\cos^2\omega_1 + k_{12}\sin^2\omega_1) + \\ &+ y^2(k_{11}\sin^2\omega_1 + k_{12}\cos^2\omega_1) - xy(k_{11} - k_{12})\sin 2\omega_1; \\ 2z_2 &= x^2(k_{21}\cos^2\omega_2 + k_{22}\sin^2\omega_2) + \\ &+ y^2(k_{21}\sin^2\omega_2 + k_{22}\cos^2\omega_2) - xy(k_{21} - k_{22})\sin 2\omega_2. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Расстояние между двумя точками M_1 и M_2 поверхностей, соответствующих одним и тем же значениям координат x, y, очевидно, равно $z_1 + z_2$ (фиг. 297). Согласно зависимости (51)

$$2(z_1 + z_2) = x^2 [k_{11} \cos^2 \omega_1 + k_{12} \sin^2 \omega_1 + k_{21} \cos^2 \omega_2 + k_{22} \sin^2 \omega_2] + \\ + y^2 [k_{11} \sin^2 \omega_1 + k_{12} \cos^2 \omega_1 + k_{21} \sin^2 \omega_2 + k_{22} \cos^2 \omega_2] - \\ - xy [(k_{11} - k_{12}) \sin 2\omega_1 + (k_{21} - k_{22}) \sin 2\omega_2]. \qquad (52)$$

Выберем положение общих осей x, y (углы ω_1 и $\omega_2 = \omega_1 - \omega$) таким образом, чтобы в выражении (52) член, содержащий произведение координат xy, отсутствовал, т. е. коэффициент при этом члене обращался в нуль, тогда

$$(k_{11} - k_{12}) \sin 2\omega_1 + (k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega_2 = 0. \qquad (53)$$

Внося в выражение (53) $\omega_2 = \omega_1 - \omega$ или $\omega_1 = \omega_2 + \omega$, после элементарных преобразований получим

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 2\omega_1 &= \frac{[(k_{11} - k_{12}) + (k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega]^2}{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega}; \\ \cos^2 2\omega_2 &= \frac{[(k_{21} - k_{22}) + (k_{11} - k_{12}) \cos 2\omega]^2}{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

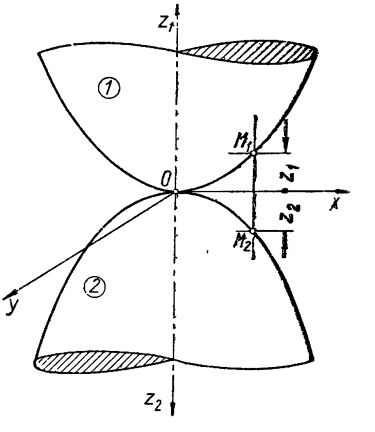
Обозначим коэффициенты оставшихся членов правой части уравнения (52) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} k_{11} \cos^2 \omega_1 + k_{12} \sin^2 \omega_1 + k_{21} \cos^2 \omega_2 + k_{22} \sin^2 \omega_2 &= 2A; \\ k_{11} \sin^2 \omega_1 + k_{12} \cos^2 \omega_1 + k_{21} \sin^2 \omega_2 + k_{22} \cos^2 \omega_2 &= 2B, \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

тогда уравнение (52) примет вид

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2. \qquad (56)$$

Левая часть равенства (56), выражающая расстояние между двумя соответствующими точками M_1 и M_2 рассматриваемых тел, — существенно положительная величина (фиг. 297), следовательно, и коэффициенты A и B тоже должны быть положительными. Если, например, предположить, что $A<0$, то при $y=0$ $(z_1+z_2)<0$, что противоречит сказанному выше.



Фиг. 297

Полагая в формуле (56) $z_1+z_2 = C = \text{const}$, получаем уравнение проекции на общую касательную плоскость геометрического места точек поверхностей соприкасающихся тел, находящихся на расстоянии C друг от друга.

Уравнение этого геометрического места

$$Ax^2 + By^2 = C. \qquad (57)$$

Так как величины A и B положительны, то уравнение (рассматривая $C>0$ как параметр) представляет собой систему подобных и подобно расположенных эллипсов, центры которых лежат в начале координат.

Складывая и вычитая почленно выражения (55), имеем

$$2(A+B)=(k_{11}+k_{12})+(k_{21}+k_{22});$$

$$2(A-B)=(k_{11}-k_{12})\cos 2\omega_1+(k_{12}-k_{22})\cos 2\omega_2.$$

В результате подстановки значения $\cos 2w_1$ и $\cos 2w_2$ по формуле (54) и ряда элементарных преобразований выражения для параметров A и B принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{1}{4}[(k_{11}+k_{12})+(k_{21}+k_{22})+\\ &+\sqrt{(k_{11}-k_{12})^2+(k_{21}-k_{22})^2+2(k_{11}-k_{12})(k_{21}-k_{22})\cos 2\omega};\\ B&=\frac{1}{4}[(k_{11}+k_{12})+(k_{21}+k_{22})-\\ &-\sqrt{(k_{11}-k_{12})^2+(k_{21}-k_{22})^2+2(k_{11}-k_{12})(k_{21}-k_{22})\cos 2\omega}, \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

где ω — угол между плоскостями кривизн k_{11} и k_{21}.

Рассмотрим некоторые частные случаи вычисления параметров A и B по формулам (58).

Представим уравнение семейства эллипсов (57) в виде

$$\frac{x^2}{\frac{C}{A}}+\frac{y^2}{\frac{C}{B}}=1$$

и условимся располагать ось x по большой полуоси семейства, тогда очевидно, что $A<B$. Таким образом, при вычислениях по формулам (58) параметром A следует называть меньшую из полученных двух величин.

1. Соприкасание шара радиуса R_1 с шаром радиуса R_2. В этом случае

$$k_{11}=k_{12}=\frac{1}{R_1};\quad k_{21}=k_{22}=\frac{1}{R_2};$$

ω — произвольная величина;

$$A=B=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right],$$

т. е. кривые равных расстояний представляют собой окружности.

При соприкасании шара радиуса R_1 с плоскостью величина R_2 обращается в бесконечность, и $k_{21}=k_{22}=0$.

Если шар радиуса R_1 соприкасается со сферической впадиной радиуса R_2, то величину R_2 надо рассматривать как отрицательную, и поэтому $k_{21}=k_{22}<0$.

2. Соприкасание цилиндров радиусов R_1 и R_2 ($R_1\geqslant R_2$) со взаимно перпендикулярными осями. В этом случае

$$k_{11}=\frac{1}{R_1};\ k_{12}=0;\ k_{21}=\frac{1}{R_2};\ k_{22}=0;$$

угол $\omega=\frac{\pi}{2}$; $\cos 2\omega=-1$, и, следовательно,

$$A=\frac{1}{2R_1}\ \text{и}\ B=\frac{1}{2R_2},$$

т. е. при $R_1\neq R_2$ кривые равных расстояний представляют собой эллипсы; при $R_1=R_2$ эллипсы переходят в окружности.

3. Соприкасание цилиндров радиусов R_1 и R_2 с параллельными осями. В этом случае

$$k_{11} = \frac{1}{R_1};\ k_{12} = 0;\ k_{21} = \frac{1}{R_2};\ k_{22} = 0;$$

угол $\omega = 0$, $\cos 2\omega = 1$, и, следовательно,

$$A = 0 \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right],$$

т. е. кривые равных расстояний представляют собой семейство прямых, параллельных оси x:

$$y = \pm\sqrt{\frac{C}{B}}.$$

Если цилиндр радиуса R_1 соприкасается с цилиндрической впадиной радиуса R_2, то величину R_2 надо рассматривать как отрицательную.

4. Соприкасание шара радиуса R_1 с цилиндром радиуса R_2. В этом случае

$$k_{11} = k_{12} = \frac{1}{R_1};\ k_{21} = \frac{1}{R_2};\ k_{22} = 0;$$

угол ω — произвольная величина и

$$A = \frac{1}{2R_1} \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right],$$

т. е. кривые равных расстояний представляют собой семейство эллипсов. При $R_2 = \infty$, т. е. при соприкасании шара с плоскостью эллипсы переходят в окружности, а при $R_1 = \infty$, т. е. при соприкасании цилиндра с плоскостью, — в прямые, параллельные оси x.

§ 5. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ РАЗМЕРОВ ПЛОЩАДКИ КОНТАКТА СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ТЕЛ, ИХ СБЛИЖЕНИЯ И ВЕЛИЧИНЫ НАИБОЛЬШЕГО ДАВЛЕНИЯ

Пусть два тела с криволинейными поверхностями до деформации касаются друг друга в одной точке. Рассмотрим нагружение этих тел силами, направленными по прямой, соединяющей центры кривизны поверхностей тел в точке касания и прижимающими тела друг к другу. Благодаря деформации тел первоначальное точечное касание их переходит в соприкасание по некоторой площадке (поверхность контакта тел). Теория упругих деформаций тел в местах контакта позволяет, зная главные радиусы кривизн поверхностей тел в точке касания, упругие постоянные материалов тел и величину приложенной нагрузки, установить:

1) форму и размеры площадки контакта тел после их деформации;

2) величину и распределение давления, сказываемого одним телом на другое и передаваемого через площадку контакта;

3) величину сближения тел, обусловленного их деформацией.

В основе всех выводов и заключений теории лежат следующие предположения:

1) материалы соприкасающихся тел однородны и изотропны;

2) нагрузки, приложенные к телам, создают в зоне контакта только упругие деформации, подчиненные закону Гука;

3) площадка контакта весьма мала по сравнению с общими поверхностями соприкасающихся тел;

4) силы давления нормальны к поверхности соприкасания (контакта) тел; силами трения по площадке контакта пренебрегают.

Представляет интерес рассмотреть, в какой степени соблюдаются эти предпосылки теории при ее использовании для расчета такой широко распространенной детали, как подшипники качения. В специальной литературе по подшипникам качения этот вопрос освещается следующим образом.

1. Ни один из реальных материалов машиностроения, строго говоря, не является абсолютно однородным и изотропным. Так, при закалке шарик благодаря быстрому охлаждению получает более твердую поверхность, но после отпуска разница в твердости поверхностного слоя и сердцевины шарика значительно уменьшается. В результате упругие постоянные материала практически почти одинаковы для всех слоев шариков и колец. Это позволяет считать первое допущение возможным.

2. Нагрузки на подшипники качения назначаются таким образом, чтобы остаточные деформации отсутствовали и в нормальных условиях эксплуатации подшипников имели бы место только упругие деформации. Это согласуется со вторым допущением.

3. В большинстве подшипников качения размеры площадки контакта между шариком и кольцом достаточно малы по сравнению с радиусом шарика, и, следовательно, третье допущение оправдывается. Вместе с тем в некоторых конструкциях (например, в подшипниках качения большой грузоподъемности) радиусы сечений беговых дорожек весьма мало превышают радиусы шариков, и благодаря этому величина площадки контакта не мала по сравнению с поверхностью шарика.

4. Тщательное шлифование и полирование как шариков, так и дорожек качения уменьшают, но не исключают сил трения. Существенно отметить, что для поверхностей с высокой степенью отделки экспериментально установлено даже повышение коэффициента трения с уменьшением шероховатости.

Итак, применительно к подшипникам качения в нормальных эксплуатационных условиях из четырех предпосылок теории первая и вторая оправдываются почти полностью, а третье и особенно четвертое условие нельзя считать полностью выдержанными. С этим, однако, приходиться мириться, допуская некоторую неточность в расчетах.

После этих предварительных замечаний перейдем непосредственно к получению выражений для размеров площадки контакта и величины давления, распределенного по этой площадке. Малость размеров площадки контакта по сравнению с общими размерами соприкасающихся тел позволяет использовать для нахождения их упругих перемещений в зоне контакта результаты задачи о полупространстве.

При рассмотрении этой задачи о действии сил, нормальных к поверхности полупространства (тело весьма больших размеров, ограниченное плоскостью), было показано, что перемещения на бесконечности обращаются в нуль. Это обстоятельство позволяет жестко связать выбранную систему координат с рассматриваемым телом на бесконечности, т. е. практически рассматривать упругие перемещения некоторой точки полупространства как перемещения относительно точек тела, весьма удаленных от места приложения нагрузки.

Итак, представим себе, что система координат xyz_1 жестко связана с первым телом на бесконечности (фиг. 297). В этой системе координат перемещение w_1, параллельное оси z_1, некоторой точки M_1 первого тела представляет собой перемещение относительно недеформированной части тела, расположенной достаточно далеко от области контакта. Аналогичное перемещение точки O первого тела, т. е. точки первоначального контакта рассматриваемых тел, обозначим через $w_1(0)$.

Взаимное перемещение этих точек, вызванное деформацией тела, будет равно разности перемещений $w_1(0)$ и w_1. Совершенно также взаимное перемещение точек M_2 и O второго тела представится как разность $w_2(0)$ и w_2. До деформации расстояние между точками M_1 и M_2, лежащими на одной вертикали, измеряется суммой их координат, т. е. z_1+z_2. При деформации тела имеет место изменение этого расстояния на величину

$$[w_1(0) - w_1] + [w_2(0) - w_2].$$

Очевидно, что при деформации тел в соприкосновение приходят те их точки, для которых

$$z_1 + z_2 = [w_1(0) - w_1] + [w_2(0) - w_1]. \tag{59}$$

Сумма перемещений $w_1(0)$ и $w_2(0)$ точек первоначального касания тел характеризует их взаимное перемещение в целом, или, как говорят, сближение тел. Обозначим сближение тел через δ, тогда по определению

$$\delta = w_1(0) + w_2(0) \tag{60}$$

и выражение (59) принимает вид

$$z_1 + z_2 = \delta - (w_1 + w_2). \tag{61}$$

Зависимость (61) между сближением тел, упругими перемещениями w_1 и w_2 точек M_1 и M_2 и расстоянием между этими точками до деформации представляет уравнение перемещений рассматриваемой контактной задачи. Если текущие точки M_1 и M_2 совпадают с точками первоначального касания тел (начало координат), то, очевидно, обе части уравнения обращаются в нуль. По мере удаления точек M_1 и M_2 от оси z левая часть зависимости (61), т. е. сумма z_1+z_2, возрастает и соответственно уменьшается в правой части член w_1+w_2. Среди всех точек, приходящих в соприкасание при деформации тел, величина z_1+z_2 имеет наибольшее значение для точек, образующих контур площадки контакта.

Для точек, еще более удаленных от осей z_1 и z_2, равенство (61) уже не имеет места, так здесь

$$z_1 + z_2 > \delta - (w_1 + w_2), \tag{62}$$

и эти точки не приходят в соприкосновение.

Основное уравнение перемещений (61) также можно получить путем следующих рассуждений. Контактные деформации практически ограничиваются весьма небольшой по сравнению с общими объемами соприкасающихся тел областью вблизи точки начального контакта. В результате деформации этого малого объема области контакта тела сближаются. Каждое тело перемещается по направлению к другому вдоль осей z_1 и z_2 как жесткое целое, так как в недеформирующейся части тела взаимное расположение точек не изменяется. Таким образом, можно считать, что точки каждого из рассматриваемых тел, лежащие вне области контакта, совершают только одинаковые перемещения сближения δ, а в области контакта все точки получают такие же перемещения сближения δ вместе со всем телом и, кроме того, упругие перемещения w_1 и w_2, различные в разных точках области контакта. Замечая, что при деформации рассматриваемых тел приходят в соприкасание те точки, для которых сумма первоначальных расстояний z_1+z_2 равна разности сближения δ и упругих перемещений w_1 и w_2, приходим к зависимости (61).

Выше, в § 4, было обнаружено, что семейство кривых равных расстояний

$$z_1 + z_2 = \text{const} \tag{63}$$

представляет собой семейство подобных и подобно расположенных эллипсов

$$Ax^2 + By^2 = \text{const}. \tag{64}$$

Это обстоятельство приводит к заключению, что контур площадки контакта также представляет собой эллипс, полуоси которого по направлению совпадают с полуосями эллипсов по выражению (64).

Если принимать в расчет действительную геометрическую форму соприкасающихся тел, то вычисление упругих перемещений в области контакта обоих тел является весьма затруднительным. Учитывая, что размеры площадки контакта весьма малы по сравнению с общими размерами соприкасающихся тел, Г. Герц [117] предложил заменять эти тела двумя упругими полупространствами, нагруженными давлением, распределенным по эллиптической площадке контакта. Тогда для вычисления упругих перемещений w_1 и w_2 можно использовать выражения (25), представив их в виде

$$w_1 = k_1 \int_F \frac{p\,dF}{r} \quad \text{и} \quad w_2 = k_2 \int_F \frac{p\,dF}{r}, \tag{65}$$

где

$$k_1 = \frac{1-\mu_1}{2\pi G_1} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{1-\mu_2}{2\pi G_2}$$

и F — площадь контакта, т. е. площадь, ограниченная контурным эллипсом.

Используя зависимости (56) и (65), представим уравнение перемещений в виде

$$\delta - (Ax^2 + By^2) = k_0 \int_F \frac{p\,dF}{r}, \tag{66}$$

где

$$k_0 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right].$$

Уравнение перемещений (66) представляет собой интегральное уравнение относительно неизвестного закона распределения давления p по эллиптической площадке контакта F. Кроме закона распределения давления, подлежат определению также размеры площадки контакта (большая a и малая b полуоси контурного эллипса) и величина сближения δ соприкасающихся тел.

Теперь необходимо так подобрать закон распределения давления p по площадке контакта, чтобы удовлетворить уравнению (66).

Так как для центра эллиптической площадки контакта перемещение w наибольшее, очевидно, этой точке соответствует и наибольшее давление. По направлению от центра к контуру площадки контакта перемещения w постепенно уменьшаются, а следовательно, соответственно убывает и давление. Таким образом, если в каждой точке эллиптической площадки контакта восстановить в ней перпендикуляр и на нем отложить величину давления p в данной точке, то концы этих отрезков расположатся на некоторой поверхности, причем наибольшая ордината этой поверхности p_0 будет соответствовать началу координат.

Естественно в качестве такой поверхности взять полуэллипсоид.

Это предположение позволяет выразить правую часть уравнения (66) на основании выражения (43) в виде квадратичной зависимости от координат x и y, т. е. в виде, аналогичном левой части того же уравнения. Другими словами, предположение об эллипсоидальном законе распределения давления по площадке контакта удовлетворяет интегральному уравнению (66) и позволяет определить как размеры площадки контакта, так и величину сближения. Действительно, используя выражение (43) для преобразования правой части уравнения (66), получим

$$\delta - (Ax^2 + By^2) = \eta \frac{p_0}{a}\left[abK - \frac{b}{a} Dx^2 - \frac{a}{b}(K - D)\, y^2\right], \qquad (67)$$

где

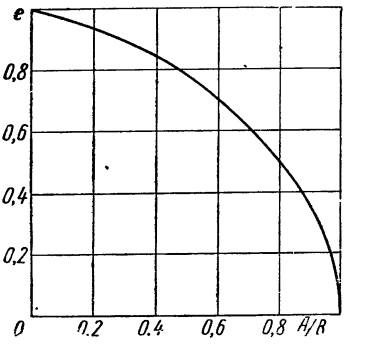
$$\eta = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}.$$

Приравнивая соответственно свободные члены и коэффициенты при x^2 и y^2 в левой и правой частях равенства (67), имеем

$$\delta = \eta p_0 bK; \qquad (68)$$

$$A = \eta p_0 \frac{b}{a^2} D; \qquad (69)$$

$$B = \eta p_0 \frac{1}{b}(K - D). \qquad (70)$$



Фиг. 298

Здесь величины K и D согласно формулам (42) и (42б) представляют собой функции эксцентриситета e контурного эллипса площадки контакта. Исключая ηp_0 из выражений (69) и (70) и замечая, что

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2},$$

приходим к следующему трансцендентному уравнению для определения эксцентриситета e:

$$\frac{A}{B} = (1 - e^2)\frac{D}{K - D}. \qquad (71)$$

Задаваясь различными значениями e и используя таблицы полных эллиптических интегралов [89], [93], легко определить по формуле (71) соответствующие значения отношения $\frac{A}{B}$.

На фиг. 298 изображена графическая зависимость

$$\frac{A}{B} = f(e),$$

т. е. уравнение (71).

Обратимся снова к рассмотрению общих соотношений (68)—(70).

При эллипсоидальном законе распределения давлений величина наибольшего давления p_0 согласно формуле (32) выражается через нагрузку P, сжимающую рассматриваемые тела следующим образом:

$$p_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{\pi ab}.$$

Введем обозначение Σk для суммы главных кривизн поверхностей соприкасающихся тел в месте их первоначального контакта, т. е.

$$\Sigma k = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}. \qquad (72)$$

Используя выражение (58), легко показать, что

$$\Sigma k = 2(A + B). \tag{72а}$$

Путем элементарных преобразований соотношений (32) и (68)—(70) представим выражения для полуосей эллипса a и b, давления p_0 и сближения δ в следующей форме:

большая полуось контурного эллипса

$$\left.\begin{aligned} a &= n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta P}{\Sigma k}}, \\ \text{где}\quad n_a &= \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{B}{A}\right)D}; \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

малая полуось контурного эллипса

$$\left.\begin{aligned} b &= n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta P}{\Sigma k}}, \\ \text{где}\quad n_b &= \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{A}{B}\right)(K-D)\sqrt{1-e^2}}; \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

наибольшая интенсивность давления p_0 между соприкасающимися телами

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{\Sigma k}{\eta}\right)^2 P}, \\ \text{где}\quad n_p &= \frac{1}{n_a n_b}; \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

сближение δ соприкасающихся тел

$$\left.\begin{aligned} \delta &= n_\delta \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4}\eta^2 \Sigma k P^2}, \\ \text{где}\quad n_\delta &= K \sqrt[3]{\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{B}{A}} \cdot \frac{1}{D}}. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Как предельные случаи общих выражений (73)—(76), имеющих место при эллиптической площадке контакта, легко получить соответствующие выражения как для круговой площадки контакта ($e=0$), так и для площадки контакта, ограниченной двумя параллельными прямыми ($e=1$). Исключение представляет только выражение для сближения δ соприкасающихся тел, обращающееся в бесконечность при $e=1$, что требует специального обсуждения.

Первый предельный случай — круговая площадка контакта ($e=0$).

Если в точке первоначального контакта соприкасающихся тел геометрические параметры A и B, определяемые формулами (58), равны между собой, то эксцентриситет контурного эллипса площадки контакта $e=0$, т. е. площадка контакта становится круговой.

Равенство геометрических параметров $A=B$ имеет место, например, в следующих случаях:

1) соприкасания двух тел ограниченных сферическими поверхностями произвольных радиусов;

2) соприкасания двух круговых цилиндров с перпендикулярными осями и равными радиусами.

Полные эллиптические интегралы $K(e)$ и $L(e)$, а также их сочетание

$$D(e)=\frac{1}{e^2}[K(e)-L(e)],$$

при эксцентриситете $e=0$ имеют следующие значения:

$$K(0)=L(0)=\frac{1}{2}\pi \text{ и } D(0)=\frac{1}{4}\pi.$$

Непосредственной подстановкой легко показать, что все коэффициенты n_a, n_b, n_p и n_δ в выражениях (73) — (76) обращаются в единицу. Таким образом, в случае круговой площадки контакта:

радиус контура площадки

$$a=b=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta P}{\Sigma k}}; \tag{77}$$

наибольшая интенсивность давления

$$p_0=\frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{\Sigma k}{\eta}\right)^2\cdot P}; \tag{78}$$

сближение соприкасающихся тел

$$\delta=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}\eta^2\Sigma k P^2}; \tag{79}$$

где величины η и Σk определяются формулами (67а) и (72).

При соприкасании сферических поверхностей радиусов R_1 и R_2 сумма кривизн

$$\Sigma k=2\left(\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_2}\right)=2\,\frac{R_2\pm R_1}{R_1R_2}. \tag{80}$$

В выражении $(R_2\pm R_1)$ знак минус берется в случае соприкасания сферического тела радиуса R_1 и сферической впадины радиуса R_2.

Используя формулу (80) для суммы кривизн, приходим к следующим выражениям радиуса a круговой площадки контакта, наибольшего давления p_0 и сближения δ:

$$\left.\begin{aligned} a&=0{,}9086\sqrt[3]{\eta P\frac{R_1R_2}{R_2\pm R_1}};\\ p_0&=0{,}5784\sqrt[3]{\frac{P}{\eta^2}\left(\frac{R_2\pm R_1}{R_1R_2}\right)^2};\\ \delta&=0{,}8255\sqrt[3]{(\eta P)^2\frac{R_2\pm R_1}{R_1R_2}}. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Формулы (81) справедливы и в случае соприкасания сферического тела радиуса R_1 и плоскости ($R_2 = \infty$); в этом случае

$$\frac{R_2 \pm R_1}{R_1 R_2} = \frac{1}{R_1} \quad \text{и} \quad \frac{R_1 R_2}{R_2 \pm R_1} = R_1. \tag{82}$$

Если имеет место касание сферических тел с одинаковыми модулями упругости ($E_1 = E_2 = E$) и коэффициентом Пуассона $\mu = 0{,}30$, то величина

$$\eta = 2\frac{1-\mu^2}{E} = \frac{1{,}82}{E}$$

и формулы (81) принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} a &= 1{,}109\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot\frac{R_1 R_2}{R_2 \pm R_1}};\\ p_0 &= 0{,}3880\sqrt[3]{PE^2\left(\frac{R_2 \pm R_1}{R_1 R_2}\right)^2};\\ \delta &= 1{,}231\sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2\frac{R_2 \pm R_1}{R_1 R_2}}. \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

При соприкасании двух цилиндров со взаимно перпендикулярными осями и равными радиусами ($R_1 = R_2 = R$) сумма кривизн $\Sigma k = 2 \cdot \frac{1}{R}$, и следовательно,

$$\left.\begin{aligned} a &= 0{,}9086\sqrt[3]{\eta P R};\\ p_0 &= 0{,}5784\sqrt[3]{\frac{P}{\eta^2 R^2}};\\ \delta &= 0{,}8255\sqrt[3]{\frac{(\eta P)^2}{R}}. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Если материалы соприкасающихся цилиндров одинаковы и коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}30$, то формулы (84) принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} a &= 1{,}109\sqrt[3]{\frac{PR}{E}};\\ p_0 &= 0{,}3880\sqrt[3]{P\left(\frac{E}{R}\right)^2};\\ \delta &= 1{,}231\sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2\frac{1}{R}}. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Согласно зависимостям (77) — (79) радиус круговой площадки контакта и величина наибольшего давления пропорциональны кубическому корню из нагрузки P, а сближение тел — кубическому корню из квадрата нагрузки.

Второй предельный случай — площадка контакта в виде полосы, ограниченной двумя параллельными прямыми ($e = 1$).

При соприкасании двух круговых цилиндров (радиусов R_1 и R_2) с параллельными осями геометрические параметры A и B, определяемые формулами (58), имеют следующие значения:

$$A=0 \text{ и } B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

В случае соприкасания цилиндра радиуса R_1 и цилиндрической впадины радиуса $R_2>R_1$

$$A=0 \text{ и } B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

При $A=0$ эксцентриситет контурного эллипса $e=1$, что соответствует переходу эллипса в бесконечную полоску ($a=\infty$) шириной $2b$. Таким образом, рассматриваемый предельный переход предполагает, что в соприкасании находятся цилиндры неограниченной длины.

Эллипсоид давлений

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{\xi}{c}\right)^2=1$$

при $a=\infty$ переходит в эллиптический цилиндр.

Распределение давления по ширине $2b$ полосы контакта

$$p=p_0\frac{\xi}{c}$$

изображается ординатами ξ эллипса

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{\xi}{c}\right)^2=1. \tag{86}$$

Введем понятие о линейной интенсивности q распределения нагрузки по длине цилиндра:

$$q=\int_{-b}^{+b}p\,dy=\frac{p_0}{c}\int_{-b}^{+b}\xi\,dy=\frac{p_0}{c}\cdot\frac{\pi bc}{2},$$

где

$$\int_{-b}^{+b}\xi\,dy=\frac{1}{2}\pi bc$$

площадь половины эллипса с полуосями b и c.

Таким образом, давление p_0 в точках средней линии полоски контакта связано с нагрузкой q на единицу длины цилиндра соотношением

$$p_0=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{q}{b}. \tag{87}$$

После этих предварительных замечаний обратимся к преобразованию выражений (73) и (74) для полуосей контурного эллипса площадки контакта.

При эллипсоидальном распределении давлений согласно формуле (32) нагрузка

$$P=\frac{2}{3}p_0\pi ab.$$

Используя это соотношение, выразим полуоси контурного эллипса через величину наибольшего давления p_0. При переходе к распределению давления по закону эллиптического цилиндра (площадка контакта в виде бесконечной полосы) наибольшее давление p_0 связано с нагруз-

кой на единицу длины цилиндра q соотношением (87). Используя это соотношение, имеем

$$a = \sqrt{\frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{B}{A}\right) D \frac{\eta q}{\Sigma k}};$$

$$b = \sqrt{\frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{A}{B}\right)(K - D)\frac{\eta q}{\Sigma k}}.$$

Замечая, что при эксцентриситете $e = 1$

$$D(1) = \infty \text{ и } K(1) - D(1) = L(1) = 1,$$

непосредственной подстановкой легко показать, что выражение для большой полуоси a контурного эллипса действительно обращается в бесконечность, а выражение для малой полуоси b, т. е. для полуширины полоски контакта, может быть представлено в виде

$$b = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\eta q}{\Sigma k}}. \tag{88}$$

Подстановка значения b по формуле (88) в зависимость (87) приводит к следующему выражению для величины наибольшего давления:

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\Sigma k}{\eta} q}. \tag{89}$$

Согласно зависимостям (88) и (89) при площадке контакта, ограниченной двумя параллельными прямыми, ширина контактной полоски и величина наибольшего давления пропорциональны квадратному корню из линейной интенсивности нагрузки (нагрузка на единицу длины цилиндров).

Для цилиндров радиусов R_1 и R_2 сумма главных кривизн

$$\Sigma k = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2},$$

а для цилиндра радиуса R_1 и цилиндрической впадины радиуса $R_2 > R_1$

$$\Sigma k = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2},$$

и формулы (88) и (89) принимают следующий вид:

полуширина полоски контакта

$$b = 1{,}128 \sqrt{\eta q \frac{R_1 R_2}{R_2 \pm R_1}}; \tag{90}$$

величина наибольшего давления

$$p_0 = 0{,}5642 \sqrt{\frac{q}{\eta} \cdot \frac{R_2 \pm R_1}{R_1 R_2}}, \tag{91}$$

где упругая постоянная материалов соприкасающихся тел

$$\eta = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}.$$

При соприкасании цилиндра радиуса R_1 и плоскости ($R_2 = \infty$) $\Sigma k = \frac{1}{R_1}$, и формулы (90) и (91) несколько упрощаются.

Для случая, когда материалы соприкасающихся цилиндров одинаковы и коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}30$, упругая постоянная

$$\eta = 2\frac{1-\mu^2}{E} = \frac{1{,}82}{E},$$

и, следовательно:

полуширина полоски контакта

$$b = 1{,}522\sqrt{\frac{q}{E}\cdot\frac{R_1 R_2}{R_2 \pm R_1}}; \tag{92}$$

величина наибольшего давления

$$p_0 = 0{,}4180\sqrt{qE\frac{R_2 \pm R_1}{R_1 R_2}}. \tag{93}$$

Приведенные выше формулы (88) и (89) и вытекающие из них получены для цилиндров неограниченной длины и в предположении, что сжимающая нагрузка равномерно распределена по этой длине, так что q — нагрузка на единицу длины цилиндров, постоянна. Практически указанные выражения широко применяются и в случае соприкасания цилиндрических тел конечной длины, например при расчете мостовых катков на контактную прочность.

Аналогично преобразованию формул (73) и (74) для полуосей контурного эллипса при переходе к площадке контакта в виде бесконечной полосы не представляет затруднений произвести преобразование выражения (76) для сближения δ соприкасающихся тел в случае $e=1$.

В результате преобразований приходим к следующему выражению для сближения цилиндров с параллельными осями:

$$\delta = \frac{2}{\pi} K \eta q. \tag{94}$$

При $e=1$ полный эллиптический интеграл первого рода $K(1) = \infty$ и, следовательно, формально сближение соприкасающихся цилиндров с параллельными осями обращается в бесконечность. Это обстоятельство связано с тем, что предельный переход по существу соответствует рассмотрению двух полупространств, т. е. тел неограниченных размеров, находящихся под действием бесконечно большой нагрузки. Здесь используются выражения для перемещений поверхности полупространства, находящегося под воздействием аналогичной нагрузки (см. § 3, второй предельный случай).

Вместе с тем физически очевидно, что для цилиндров сближение δ конечно и зависит не только от деформаций в месте контакта, но и в значительной мере обусловлено деформациями всего тела.

Рассматривая круговой цилиндр конечной длины, нагруженный с двух сторон давлением, распределенным по ширине площадки контакта по эллиптическому закону, и учитывая не только деформацию в непосредственной близости от площадки контакта, но и общую деформацию цилиндра, Б. С. Ковальский получил для изменения величины диаметра, параллельного направлению действующих сил, следующее выражение:

$$\delta^* = \frac{4(1-\mu^2)}{\pi E} q\left[\ln\frac{2R}{b} + 0{,}407\right], \tag{95}$$

где R — радиус цилиндра;

b — полуширина площадки контакта.

Применяя эту формулу к случаю сжатия двух цилиндров с радиусами R_1 и R_2 и параллельными осями, легко найти сближение этих осей:

$$\delta = \frac{2q}{\pi}\left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1}\left(\ln\frac{2R_1}{b} + 0{,}407\right) + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\left(\ln\frac{2R_2}{b} + 0{,}407\right)\right]. \quad (96)$$

Для цилиндров из одинаковых материалов с коэффициентом Пуассона $\mu = 0{,}30$ сближение будет

$$\delta = 0{,}579\frac{q}{E}\left[\ln\frac{4R_1R_2}{b^2} + 0{,}814\right]. \quad (97)$$

При использовании формулы (96) полуширина b полоски контакта определяется выражением (90), а в формуле (97) — выражением (92).

Значительно ранее Б. С. Ковальского А. Н. Динник [24], принимая параболический закон распределения давлений по ширине площадки контакта, получил следующее выражение для изменения диаметра цилиндра:

$$\delta^* = \frac{4(1-\mu^2)}{\pi E}\,q\left[\ln\frac{2R}{b} + \frac{1}{3}\right]. \quad (98)$$

Выражения (95) и (98) численно весьма мало отличаются друг от друга.

При применении всех приведенных выше формул необходимо иметь в виду, что они справедливы только в том случае, когда ширина $2b$ полоски контакта достаточно мала по сравнению с радиусами соприкасающихся цилиндров. Так, если радиусы цилиндра и цилиндрической впадины весьма мало отличаются один от другого, то даже при небольшой величине приложенных нагрузок контакт между их поверхностями может распространиться на достаточно значительную часть этих поверхностей, и приведенные выше формулы отпадают. Детальное исследование контактных деформаций цилиндра и цилиндрической полости при произвольном соотношении их радиусов выполнено И. Я. Штаерманом [111], [115]. М. З. Народецкому [64] принадлежит общее решение плоской задачи о внутреннем соприкасании двух цилиндрических тел.

Задача о деформации двух соприкасающихся деталей в форме цилиндра и упругой плиты, лежащей на жестком основании, рассмотрена в работе В. Л. Бидермана [11].

Сведем в табл. 13 основные результаты, полученные выше для размеров площадки контакта, величины наибольшего давления и сближения соприкасающихся тел. Для облегчения вычислений в общем случае эллиптической площадки контакта в табл. 14 даны значения коэффициентов n_a, n_b, n_p и n_δ, входящие в формулы (73) — (76). Они даны в зависимости от величины:

$$\Omega = \frac{\sqrt{(k_{11}-k_{12})^2 + (k_{21}-k_{22})^2 + 2(k_{11}-k_{12})(k_{21}-k_{22})\cos 2\omega}}{k_{11}+k_{12}+k_{21}+k_{22}}, \quad (99)$$

где k_{11} и k_{12}, k_{21} и k_{22} — соответственно главные кривизны соприкасающихся тел в месте контакта;

ω — угол между плоскостями кривизн k_{11} и k_{21}.

Табл. 14 составлена следующим образом: задаваясь некоторой величиной эксцентриситета e контурного эллипса площадки контакта и используя таблицы полных эллиптических интегралов [89], вычисляем правую часть выражения (71). Найденные значения отношения $\frac{A}{B}$ и величин K и D позволяют вычислять значения всех искомых коэффициентов (для заданной величины e). В ряде случаев в качестве аргу-

Таблица 13

Размеры площадки контакта, величины наибольшего давления и сближения соприкасающихся тел

Форма соприкасающихся тел и их взаимное расположение	Размеры площадки контакта	Величина наибольшего давления между соприкасающимися телами	Сближение соприкасающихся тел
Два тела, ограниченные криволинейными поверхностями и соприкасающиеся до деформации в одной точке	Большая полуось эллипса $a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta_1 P}{\sum k}}$. Малая полуось эллипса $b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta_1 P}{\sum k}}$	$p_o = n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{\sum k}{\eta}\right)^2 P}$; $n_p = \frac{1}{n_a n_b}$	$\delta = n_\delta \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \sum k\, P^2}$
Два сферических тела радиусов R_1 и R_2	Радиус круговой площадки контакта $a = b = 0{,}9086 \sqrt[3]{\eta P \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}}$	$p_o = 0{,}5784 \sqrt[3]{\frac{P}{\eta_1^2}\left(\frac{R_2 + R_1}{R_2 R_1}\right)^2}$	$\delta = 0{,}8255 \sqrt[3]{(\eta P)^2 \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}}$
Два сферических тела с одинаковыми модулями упругости и $\mu = 0{,}30$	$a = b = 1{,}109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}}$	$p_o = 0{,}3880 \sqrt[3]{PE^2\left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}\right)^2}$	$\delta = 1{,}231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}}$
Два цилиндра со взаимно перпендикулярными осями и равными радиусами	Радиус круговой площадки контакта $a = b = 0{,}9086 \sqrt[3]{\eta P R}$	$p_o = 0{,}5784 \sqrt[3]{\frac{P}{\eta^2 R_2}}$	$\delta = 0{,}8255 \sqrt[3]{\frac{(\eta P)^2}{R}}$

Продолжение

Форма соприкасающихся тел и их взаимное расположение	Размеры площадки контакта	Величина наибольшего давления между соприкасающимися телами	Сближение соприкасающихся тел
Аналогичные цилиндры с одинаковыми модулями упругости и $\mu = 0{,}30$	$a = b = 1{,}109 \sqrt[3]{\frac{PR}{E}}$	$p_o = 0{,}3880 \sqrt[3]{P\left(\frac{E}{R}\right)^2}$	$\delta = 1{,}231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{1}{R}}$
Два цилиндра радиусов R_1 и R_2 с параллельными осями; q — нагрузка на единицу длины цилиндра	Полуширина полоски контакта $b = 1{,}128 \sqrt{\eta\, q \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}}$	$p_o = 0{,}5642 \sqrt{\frac{q}{\eta} \cdot \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}}$	$\delta = \frac{2q}{\pi}\left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1}\left(\ln\frac{2R_1}{b} + 0{,}407\right) + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\left(\ln\frac{2R_2}{b} + 0{,}407\right)\right]$
Аналогичные цилиндры с одинаковыми модулями упругости и $\mu = 0{,}30$	$b = 1{,}522 \sqrt{\frac{q}{E} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}}$	$p_o = 0{,}4180 \sqrt{qE \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}}$	$\delta = 0{,}579 \frac{q}{E}\left[\ln\frac{4 R_1 R_2}{b^2} + 0{,}814\right]$

Примечания: 1. Нагрузка, сжимающая соприкасающиеся тела, обозначена через P.

2. Упругая постоянная соприкасающихся тел

$$\eta = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2},$$

где μ_1 и μ_2, E_1 и E_2 — соответственно коэффициенты Пуассона и модули упругости первого и второго тел.

3. Главные кривизны соприкасающихся тел в точке первоначального контакта: для первого тела k_{11} и k_{12}, для второго тела k_{21} и k_{22}; главные кривизны положительны, если соответствующий центр кривизны расположен внутри рассматриваемого тела; сумма главных кривизн соприкасающихся тел

$$\Sigma k = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}.$$

4. Значения коэффициентов n_a, n_b, n_p и n_δ в зависимости от аргумента

$$\Omega = \frac{1}{\Sigma k} \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega}$$

даны в табл. 14; здесь ω — угол между плоскостями кривизн k_{11} и k_{21}.

5. При соприкасании сферического тела радиуса R_1 и сферической впадины радиуса R_2 в соответствующих формулах сумма $(R_2 + R_1)$ заменяется разностью $(R_2 - R_1)$; аналогично поступают и при соприкасании цилиндра радиуса R_1 и цилиндрической впадины радиуса R_2 с параллельными осями.

Таблица 14

Численные значения коэффициентов n_a, n_b, n_p, n_δ, входящих в выражения для полуосей эллиптической площадки контакта, наибольшего давления и сближения соприкасающихся тел

e^2	$\frac{A}{B}$	φ	n_a	n_b	n_p	n_δ
0,050	0,9623	0,01923	1,013	0,9873	0,9999	0,9999
0,100	0,9240	0,03949	1,027	0,9742	0,9997	0,9997
0,150	0,8852	0,06087	1,042	0,9606	0,9992	0,9992
0,200	0,8459	0,08350	1,058	0,9465	0,9985	0,9985
0,250	0,8059	0,1075	1,076	0,9318	0,9974	0,9974
0,300	0,7652	0,1330	1,095	0,9165	0,9960	0,9960
0,350	0,7238	0,1602	1,117	0,9005	0,9942	0,9942
0,400	0,6816	0,1894	1,141	0,8837	0,9919	0,9919
0,450	0,6384	0,2207	1,168	0,8660	0,9890	0,9889
0,500	0,5942	0,2545	1,198	0,8472	0,9853	0,9852
0,550	0,5489	0,2913	1,233	0,8271	0,9805	0,9804
0,600	0,5022	0,3314	1,274	0,8056	0,9746	0,9744
0,650	0,4540	0,3755	1,322	0,7822	0,9669	0,9667
0,700	0,4040	0,4245	1,381	0,7565	0,9571	0,9566
0,750	0,3518	0,4795	1,456	0,7278	0,9440	0,9432
0,760	0,3410	0,4914	1,473	0,7216	0,9409	0,9400
0,770	0,3301	0,5036	1,491	0,7152	0,9376	0,9366
0,780	0,3191	0,5161	1,511	0,7086	0,9340	0,9329
0,790	0,3080	0,5291	1,532	0,7019	0,9302	0,9290
0,800	0,2967	0,5423	1,554	0,6949	0,9262	0,9248
0,810	0,2853	0,5560	1,578	0,6876	0,9219	0,9203
0,820	0,2738	0,5702	1,603	0,6801	0,9172	0,9155
0,830	0,2620	0,5848	1,631	0,6723	0,9121	0,9102
0,840	0,2501	0,5999	1,660	0,6642	0,9067	0,9045
0,850	0,2380	0,6155	1,693	0,6557	0,9008	0,8983
0,860	0,2257	0,6317	1,729	0,6468	0,8944	0,8916
0,870	0,2132	0,6486	1,768	0,6374	0,8873	0,8841
0,880	0,2004	0,6662	1,812	0,6276	0,8766	0,8759
0,890	0,1873	0,6845	1,861	0,6171	0,8710	0,8668
0,900	0,1739	0,7037	1,916	0,6059	0,8614	0,8566
0,910	0,1603	0,7238	1,979	0,5938	0,8507	0,8451
0,920	0,1462	0,7449	2,053	0,5808	0,8386	0,8320
0,930	0,1317	0,7673	2,141	0,5665	0,8246	0,8168
0,940	0,1166	0,7911	2,248	0,5505	0,8082	0,7990
0,950	0,1010	0,8166	2,381	0,5325	0,7887	0,7775
0,955	0,09287	0,8300	2,463	0,5224	0,7774	0,7650
0,960	0,08456	0,8441	2,557	0,5114	0,7647	0,7509
0,965	0,07600	0,8587	2,669	0,4993	0,7504	0,7349
0,970	0,06715	0,8741	2,805	0,4858	0,7338	0,7163
0,975	0,05797	0,8904	2,975	0,4704	0,7144	0,6943
0,980	0,04838	0,9077	3,199	0,4524	0,6909	0,6675
0,981	0,04639	0,9113	3,253	0,4484	0,6856	0,6613
0,982	0,04439	0,9150	3,311	0,4442	0,6799	0,6549
0,983	0,04237	0,9187	3,373	0,4398	0,6740	0,6481
0,984	0,04032	0,9225	3,441	0,4352	0,6678	0,6409
0,985	0,03823	0,9264	3,514	0,4304	0,6612	0,6333
0,986	0,03613	0,9303	3,594	0,4253	0,6542	0,6251
0,987	0,03400	0,9342	3,683	0,4199	0,6467	0,6164
0,988	0,03183	0,9383	3,781	0,4142	0,6387	0,6071
0,989	0,02962	0,9425	3,890	0,4080	0,6300	0,5970
0,990	0,02737	0,9467	4,014	0,4014	0,6206	0,5860
0,991	0,02508	0,9511	4,156	0,3942	0,6104	0,5741
0,992	0,02273	0,9556	4,320	0,3864	0,5990	0,5608
0,993	0,02033	0,9601	4,515	0,3777	0,5864	0,5460
0,994	0,01787	0,9649	4,750	0,3680	0,5721	0,5292

Продолжение

e^2	$\frac{A}{B}$	Ω	n_a	n_b	n_p	n_δ
0,995	0,01533	0,9698	5,046	0,3568	0,5555	0,5096
0,996	0,01269	0,9749	5,432	0,3436	0,5358	0,4864
0,997	0,009934	0,9803	5,976	0,3273	0,5112	0,4574
0,998	0,007018	0,9861	6,837	0,3058	0,4783	0,4186
0,999	0,003850	0,9923	8,609	0,2722	0,4267	0,3579

мента табл. 14 несколько удобнее использовать не отношение $\frac{A}{B}$, а величину

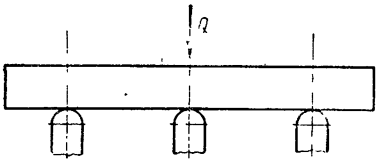
$$\Omega = \frac{1-\frac{A}{B}}{1+\frac{A}{B}} = \frac{B-A}{B+A}, \qquad (100)$$

связанную с главными кривизнами соотношением (99).

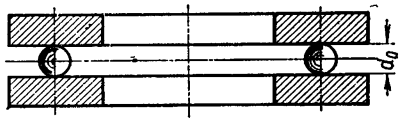
Рассмотрим ряд примеров применения общих зависимостей (73) — (93) к техническим расчетам.

Пример 1. Заготовка для круглой плиты прижата усилием $Q=750$ *кг* к трем установочным элементам со сферическими поверхностями радиуса $R=15$ *мм* (фиг. 299). Все три опоры расположены на окружности некоторого радиуса под углом 120° друг к другу. Усилие зажима Q распределяется равномерно между опорами.

Вычислить размеры площадки контакта и величину наибольшего давления между плитой и сферическими опорами. Определить, на какую величину сместится заготовка за счет контактных деформаций плиты и опор под действием усилий зажима. Материал заготовки и установочных элементов — сталь.



Фиг. 299



Фиг. 300

Как изменятся искомые величины, если материал плиты чугун?

Решение. Для вычисления искомых величин используем формулы (81). Нагрузка на каждую опору

$$P = \frac{1}{3} Q = 250 \text{ кг}.$$

Модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ для стали примем следующие: $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2} и $\mu = 0{,}28$. Тогда упругая постоянная материалов соприкасающихся тел будет

$$\eta = 2\frac{1-\mu^2}{E} = 0{,}878 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{кг}.$$

Для случая контакта сферы с плоскостью

$$R_1 = R;\ R_2 = \infty,$$

и по первой формуле (81) для радиуса кругового контура площадки контакта получим

$$a = 0{,}9086 \sqrt[3]{\eta P R} = 6{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ см} = 0{,}063 \text{ мм}.$$

Вторая формула (81) выражает величину наибольшего давления:

$$p_0 = 0{,}5784 \sqrt[3]{\frac{P}{\eta^2} \cdot \frac{1}{R^2}} \approx 30\,000 \text{ кг/см}^2.$$

Сближение соприкасающихся тел, т. е. смещение заготовки, определится по третьей формуле (81):

$$\delta = 0{,}8255 \sqrt[3]{(\eta P)^2 \frac{1}{R}} = 2{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ см} = 0{,}026 \text{ мм}.$$

Допустимость полученной величины наибольшего давления по соображениям прочности в местах контакта плиты и установочных элементов определяется механическими характеристиками материала и устанавливается данными практики. Так, например, для хромистых сталей в шарикоподшипниках при статическом действии нагрузок полученная величина p_0 считается допустимой.

Для чугуна можно принять $E = 1{,}2 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2} и $\mu = 0{,}25$. Тогда упругая постоянная материалов соприкасающихся тел будет

$$\eta = \frac{1 - 0{,}28^2}{2{,}1 \cdot 10^6} + \frac{1 - 0{,}25^2}{1{,}2 \cdot 10^6} = 1{,}22 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{кг}.$$

Используя формулы (81), находим

$$a = 7 \cdot 10^{-3} \text{ см} = 0{,}07 \text{ мм};$$

$$p_0 \approx 23\,000 \text{ кг/см}^2;$$

$$\delta = 3{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ см} = 0{,}033 \text{ мм}.$$

Ряд примеров на определение деформаций под влиянием усилий зажима приведен в работе [42].

Пример 2. Для упорного подшипника с плоскими кольцами без желобов (фиг. 300) определить:

1) допускаемое значение статической осевой нагрузки Q;
2) размеры площадки контакта между шариком и кольцом;
3) величину упругого сближения колец подшипника друг с другом.

Число шариков $i = 20$; диаметр шарика $d_0 = 1$ *см*; материал шариков и колец — хромистая сталь; допускаемая величина наибольшего давления на площадке контакта $[p_0] = 35\,000$ *кг/см*^{2}.

Решение. По формуле (84) величина наибольшего давления p_0 между двумя сферическими телами радиусов R_1 и R_2 с одинаковыми модулями упругости и коэффициентом Пуассона $\mu = 0{,}30$ определяется следующим выражением:

$$p_0 = 0{,}3880 \sqrt[3]{PE^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2}.$$

В рассматриваемом случае соприкасания шарика с плоскостью

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{d_0} \text{ и } \frac{1}{R_2} = 0.$$

Примем, что нагрузка на один шарик

$$P = \frac{Q}{0{,}8i},$$

где величина 0,8 представляет собой коэффициент неравномерности распределения нагрузки на подшипник между отдельными шариками.

Представим приведенную выше формулу (84) для наибольшего давления в виде

$$Q = 3{,}42 \frac{p_0^3 i d_0^2}{E^2},$$

тогда допускаемое значение статической осевой нагрузки на рассматриваемый упорный подшипник (статическая грузоподъемность)

$$Q = 3{,}42 \frac{35\,000^3 \cdot 20 \cdot 1}{(2{,}12 \cdot 10^6)^2} = 653 \text{ кг}.$$

Соответствующая нагрузка на один шарик

$$P = \frac{Q}{0{,}8i} = \frac{653}{0{,}8 \cdot 20} = 40{,}8 \text{ кг}.$$

Радиус круговой площадки контакта определяется формулой (83):

$$a = b = 1{,}109\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot\frac{d_0}{2}} =$$

$$= 1{,}109\sqrt[3]{\frac{40{,}8}{2{,}12\cdot 10^6}\cdot\frac{1}{2}} = 0{,}024\ см.$$

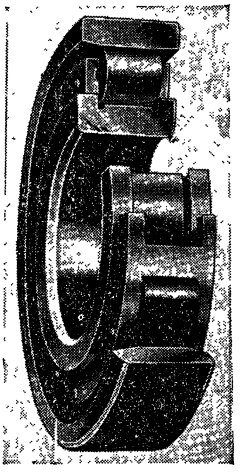
Упругое сближение шарика с кольцом вычисляется по выражению

$$\delta = 1{,}231\sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2\frac{2}{d_0}} = 1{,}231\sqrt[3]{\left(\frac{40{,}8}{2{,}12\cdot 10^6}\right)^2 2} = 0{,}0011\ см.$$

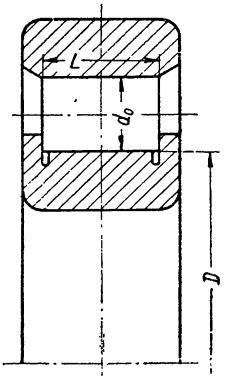
Сближение колец друг с другом

$$2\delta = 0{,}0022\ см.$$

Пример 3. В предположении статического действия нагрузки вычислить ширину площадки контакта и величину наибольшего давления на внутреннем кольце роликоподшипника средней широкой серии с габаритными размерами 120×260×86 *мм*, применяемого в буксах электровагонов пригородных железных дорог (фиг. 301 и 302).



Фиг. 301



Фиг. 302

Диаметр ролика d_0=36 *мм*; длина ролика L=58 *мм*; количество роликов i=13; диаметр дорожки качения на внутреннем кольце подшипника D_0=154 *мм*; нагрузка на подшипник Q=4500 *кг*.

Решение. Рассматривая распределение общей нагрузки на роликоподшипник между отдельными роликами, можно получить следующее выражение для усилия на наиболее нагруженный ролик:

$$P = 4{,}6\frac{Q}{i} = 4{,}6\frac{4500}{13} = 1590\ кг.$$

Рабочая длина ролика, т. е. длина без фасок, l=58—8=50 *мм*. Нагрузка на единицу длины ролика

$$q = \frac{P}{l} = \frac{1590}{5} = 318\ кг/см.$$

По формуле (92) полуширина полоски контакта для двух цилиндров радиусов R_1 и R_2 с параллельными осями

$$b = 1{,}522\sqrt{\frac{q}{E}\cdot\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} = 1{,}522\sqrt{\frac{318}{2{,}12\cdot 10^6}\,\frac{1{,}8\cdot 7{,}7}{1{,}8+7{,}7}} = 0{,}0225\ см.$$

Полная ширина полоски контакта $2b=0{,}45$ *мм*, т. е. значительно меньше радиусов ролика и кольца ($R_1=18$ *мм*, $R_2=77$ *мм*).

По формуле (93) величина наибольшего давления по площадке контакта между роликом и кольцом будет

$$p_0 = 0{,}4180\sqrt{qE\,\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}} = 0{,}4180\sqrt{318\cdot 2{,}12\cdot 10^6\,\frac{1{,}8+7{,}7}{1{,}8\cdot 7{,}7}} = 8990\ \text{кг/см}^2.$$

В специальной литературе в качестве допускаемого значения наибольшего давления p_0 для роликоподшипников указывается величина порядка 25 000 *кг/см*^{2}. Так, в справочнике [5] для рассматриваемого подшипника указана допускаемая статическая нагрузка $Q=40\,000$ *кг*, что соответствует величине наибольшего давления

$$p_0 = 8990\sqrt{\frac{40\,000}{4500}} = 26\,800\ \text{кг/см}^2.$$

Некоторое снижение допускаемого значения p_0 в роликоподшипнике по сравнению с рекомендуемым для шарикоподшипников можно объяснить возможным возрастанием давления по краям ролика при перекосах вала.

Пример 4. Определить величину наибольшего давления, возникающего между находящимися в зацеплении зубьями прямозубых цилиндрических колес при контакте в полюсе зацепления.

Рассмотреть следующие случаи:

1) ведомое и ведущее колеса выполнены из одинакового материала,

2) ведущее колесо выполнено из стали, а ведомое колесо — из чугуна.

Решение. При работе зубчатых передач нагрузка на их зубьях меняется во времени по величине, оставаясь постоянной по знаку (при отсутствии реверсирования). Это многократное периодическое изменение во времени напряженного состояния рабочей поверхности зубьев вызывает образование и дальнейшее развитие микротрещин усталости (см. т. III). В случае наличия обильной смазки микротрещины проявляют себя путем прогрессивного выкрашивания рабочих поверхностей, что служит наиболее частой причиной выхода тяжело нагруженных зубчатых передач из строя [69], [107].

Необходимой составной частью расчета на выносливость (усталость) рабочей поверхности зуба является определение величины наибольшего давления по площадке контакта. До деформации находящиеся в зацеплении зубья соприкасаются по линии, а после деформации — по узкой полоске, ограниченной параллельными прямыми (площадка контакта).

Опыт показывает, что выкрашивание рабочих поверхностей зубьев начинается и протекает наиболее интенсивно поблизости от полюса зацепления. Поэтому и расчет рабочих поверхностей на выносливость принято относить к моменту контакта соприкасающихся зубьев именно в полюсе зацепления.

При определении наибольшего давления по площадке контакта находящихся в зацеплении зубьев используются найденные выше результаты для случая статического контакта цилиндрических тел неограниченной длины с параллельными осями. Эти результаты получены в предположении, что цилиндры не перемещаются друг относительно друга и нагрузки прикладываются к цилиндрам статически, т. е. возрастают постепенно и медленно от нуля до своего конечного значения. Материал цилиндров предполагается изотропным, т. е. с одинаковыми упругими свойствами по всем направлениям.

В действительности в зубчатой передаче эти предпосылки нарушаются — происходит перемещение (качение со скольжением) рабочих поверхностей соприкасающихся зубьев друг относительно друга, нагрузка на зуб быстро возрастает от нуля до своего наибольшего значения и затем также быстро спадает до нуля; в ряде случаев нагрузка носит ударный характер. Механическая и термическая обработка рабочей поверхности зуба нарушает изотропность материала. Слой смазки (масляная пленка), находящийся между соприкасающимися поверхностями зубьев, также несколько изменяет распределение давления по площадке контакта.

Таким образом, имеет место довольно значительное отличие условий работы находящихся в зацеплении зубьев от предпосылок, использованных при получении выражения (89) для величины наибольшего давления между соприкасающимися цилиндрами с параллельными осями. Несмотря на это, указанное выражение можно положить в основу расчета рабочей поверхности зуба на контактную прочность (выносливость). Соответствующий выбор допускаемых значений давлений, проверенных практикой применения зубчатых передач, позволяет получать достаточно хорошие результаты.

Итак, принимая, что наибольшее давление имеет место по средней линии полоски контакта, для определения его величины воспользуемся формулой (89). Пола-

гая, что коэффициент Пуассона для стали и чугуна примерно одинаков ($\mu=0{,}28$), представим выражение для комбинированной упругой постоянной η материалов соприкасающихся зубьев в следующем виде:

$$\eta = 2(1-\mu^2)\frac{E_1+E_2}{2E_1E_2} = 1{,}84\,\frac{1}{E_0},$$

где так называемый приведенный модуль упругости

$$E_0 = \frac{2E_1E_2}{E_1+E_2}.$$

Полагая, например, для стали $E_1=2\cdot10^6$ *кг/см*^{2} и для чугуна $E_2=1{,}5\cdot10^6$ *кг/см*^{2}, находим, что приведенный модуль $E_0=1{,}71\cdot10^6$ *кг/см*^{2}.

При одинаковых материалах ведущего и ведомого колес $E_0=E$, т. е. приведенный модуль упругости совпадает с фактическим.

Обозначим соответственно через ρ_1 и ρ_2 радиусы кривизны профилей зуба ведомого и зуба ведущего колес в полюс зацепления, тогда сумма главных кривизн будет

$$\Sigma k = \frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_0},$$

где ρ_0 — так называемый приведенный радиус кривизны.

Используя введенные обозначения, представим выражение (89) для наибольшего давления в следующем виде:

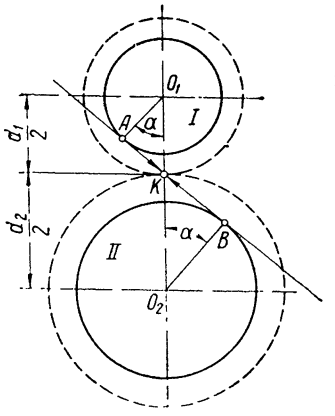
$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{1{,}84\,\pi}\cdot\frac{qE_0}{\rho_0}} = 0{,}416\sqrt{\frac{qE_0}{\rho_0}}.$$

Радиусы кривизны ρ_1 и ρ_2 эвольвентных профилей соприкасающихся зубьев в полюсе зацепления K (фиг. 303) изображаются отрезками AK и BK общей касательной к основным окружностям *I* и *II*. Из геометрических соображений

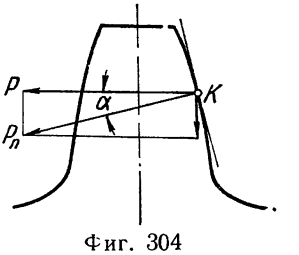
$$\rho_1 = \frac{d_1}{2}\sin\alpha \quad\text{и}\quad \rho_2 = \frac{d_2}{2}\sin\alpha,$$

где d_1 и d_2 — диаметры полоидных окружностей ведущего и ведомого колес;

α — угол зацепления.



Фиг. 303



Фиг. 304

Нагрузка на единицу длины зуба будет

$$q = \frac{P_n}{l} = \frac{P}{l\cos\alpha},$$

где l — длина зуба или ширина зубчатого колеса;

P_n — сила нормального давления между находящимися в зацеплении зубьями;

P — окружное усилие (фиг. 304).

Тогда искомая величина наибольшего давления будет

$$p_0 = 0{,}832\sqrt{\frac{E_0}{\sin 2\alpha}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)\frac{P}{l}}.$$

Критическое рассмотрение и дальнейшее преобразование полученного выражения с целью его использования при расчете зубчатых передач на контактную прочность произведено, например, в работе [107]. Там же приводится и анализ расчетных зависимостей, используемых при оценке контактной прочности (выносливости) рабочих поверхностей зубьев.

Пример 5. Вычислить величину наибольшего давления и размеры площадки контакта между рельсом и колесом товарного четырехосного вагона (фиг. 305). Вес груженого вагона Q=60 *т*; радиус головки рельса r=300 *мм*; диаметр колеса вагона D=900 *мм*.

Решение. Средняя часть бандажа, которой колесо преимущественно соприкасается с рельсом, делается слегка конической. Под диаметром колеса принято понимать диаметр круга, расположенного на определенном расстоянии (для данного типа колеса) от внутренней (гребневой) грани бандажа.

При исследовании контактных деформаций вполне возможно этой малой конической колеса пренебречь и рассматривать касание колеса и рельса как контакт двух цилиндров со взаимно перпендикулярными осями. До деформации эти цилиндры соприкасаются в точке. После деформации колеса и рельса точечный контакт переходит в касание по эллиптической площадке. Очевидно, что большая ось $2a$ контурного эллипса площадки контакта направлена по образующей малого цилиндра и малая ось $2b$ — по образующей большого цилиндра (колеса).

Нагрузка, передаваемая от колеса на рельс,

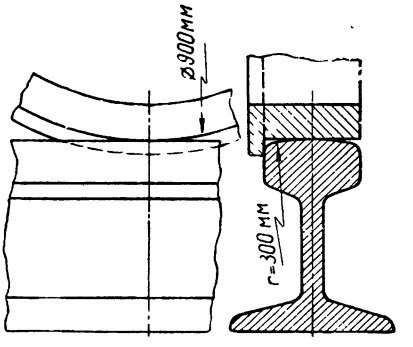
$$P = \frac{Q}{4 \cdot 2} = 7500 \text{ кг}.$$

Главные кривизны колеса

$$k_{11} = \frac{2}{D} = 0{,}0222 \text{ 1/см}; \quad k_{12} = 0.$$

Главные кривизны головки рельса

$$k_{21} = \frac{1}{r} = \frac{1}{30} = 0{,}0333 \text{ 1/см}; \quad k_{22} = 0.$$



Фиг. 305

Геометрический параметр Ω, зависящий от взаимного расположения плоскостей главных кривизн соприкасающихся тел и величин их главных кривизн в точке первоначального контакта, определяется формулой (99). В рассматриваемом случае плоскости главных кривизн k_{11} и k_{21} взаимно перпендикулярны, тогда $\cos 2\omega = -1$, и, следовательно,

$$\Omega = \frac{k_{21} - k_{11}}{k_{21} + k_{11}} = \frac{D - 2r}{D + 2r} = \frac{1}{5}.$$

В табл. 14 даны значения коэффициентов n_a, n_b и n_p в зависимости от величины указанного геометрического параметра.

Интерполируя по данным таблицы, находим значения этих коэффициентов при Ω=0,2:

$$n_a = 1{,}141 + \frac{0{,}2000 - 0{,}1894}{0{,}2207 - 0{,}1894}(1{,}168 - 1{,}141) =$$

$$= 1{,}141 + 0{,}3387 \cdot 0{,}0270 = 1{,}150;$$

$$n_b = 0{,}8837 - 0{,}3387 \cdot (0{,}8837 - 0{,}8660) = 0{,}8777;$$

$$n_p = 0{,}9919 - 0{,}3387 \cdot (0{,}9919 - 0{,}9890) = 0{,}9909.$$

Сумма главных кривизн поверхностей соприкасающихся тел

$$\Sigma k = \frac{2}{D} + \frac{1}{r} = 0{,}0555 \text{ 1/см}.$$

Примем модуль упругости материала рельса и колеса одинаковым и равным $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}30$, тогда комбинированная упругая постоянная материалов соприкасающихся тел

$$\eta = 2\frac{1 - \mu^2}{E} = 0{,}91 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2\text{/кг}.$$

Искомые полуоси эллиптического контура площадки контакта по формулам (73) и (74):

$$a = 1{,}150 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{0{,}91 \cdot 10^{-6}}{0{,}0555}\, 7500} = 1{,}150 \cdot 0{,}569 = 0{,}65\ см;$$

$$b = 0{,}8777 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{0{,}91 \cdot 10^{-6}}{0{,}0555}\, 7500} = 0{,}8777 \cdot 0{,}569 = 0{,}50\ см.$$

Величина наибольшего давления между колесом и рельсом по формуле (75)

$$p_0 = 0{,}9909 \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{0{,}0555}{0{,}91 \cdot 10^{-6}}\right)^2 7500} =$$

$$= 0{,}9909 \cdot 1{,}108 \cdot 10^4 \approx 11\,000\ кг/см^2.$$

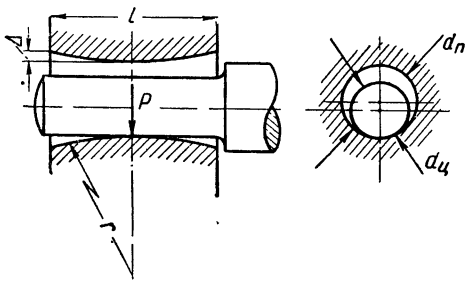
В качестве контроля величину наибольшего давления можно вычислить также по формуле (32):

$$p_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{7500}{\pi \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}50} \approx 11\,000\ кг/см^2.$$

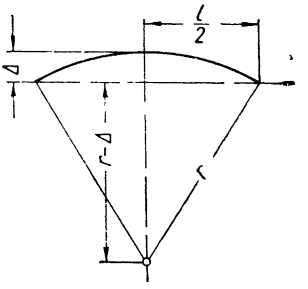
Это значение p_0 характерно для давлений, развивающихся между рельсом и колесами как вагонов, так и паровозов различных типов.

Пример 6. Выяснить величину наибольшего давления, возникающего в цилиндрических опорах подвижной системы измерительных приборов (фиг. 306). Материал подшипника — агат, материал цапфы — закаленная сталь 50. Динамическая нагрузка на опору $P=1$ *кг*; длина подшипника $l=2$ *мм*; диаметры цапфы и подшипника соответственно $d_ц=1{,}18$ *мм*, $d_п=1{,}21$ *мм*.

Решение. Расчет цилиндрических опор в общем машиностроении, как правило, ведется в предположении, что цапфа опирается на вкладыш подшипника всей рабочей поверхностью полуцилиндра. Для опор сравнительно больших размеров и со вкладышами значительно меньшей твердости по сравнению с твердостью цапфы это предположение достаточно хорошо отражает действительные условия работы опоры.



Фиг. 306



Фиг. 307

В приборостроении прилегание цапфы к подшипнику, особенно в начале работы опоры, определяется совершенно другими условиями. Здесь подшипники в большинстве случев изготовляются из естественных или искусственных минералов высокой твердости (агат, корунд, сапфир), а цапфы — из закаленной стали. Это сочетание материалов затрудняет возможность приработки соприкасающихся поверхностей. Также весьма существенно, что при окончательной механической обработке подшипников малой длины некоторая несоосность оси инструмента с предварительно выполненным отверстием и несоосность самого инструмента с осью шпинделя станка вызывает увеличение диаметра как начала, так и конца отверстия, т. е. искажает цилиндрическую форму отверстия (фиг. 306). На необходимость учета этого обстоятельства при расчете опор в приборостроении обращено внимание в работе [92].

Примем, что осевое сечение отверстия подшипника ограничено дугами окружностей радиусов r, тогда общую несоосность Δ инструмента и отверстия можно рассматривать как высоту кругового сегмента с хордой l (длина подшипника) и радиусом r.

Из фиг. 307 следует, что

$$r^2 = (r - \Delta)^2 + \left(\frac{1}{2}\, l\right)^2,$$

и искомый радиус осевого сечения отверстия

$$r=\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2+\Delta^2}{2\Delta}\approx\frac{l^2}{8\Delta}.$$

Общая несоосность Δ зависит от точности станка при чистовой обработке отверстия и может колебаться в пределах от 0,01 до 0,04 *мм*. Примем величину несоосности $\Delta=0{,}02$ *мм*, тогда при длине подшипника $l=2$ *мм* радиус осевого сечения отверстия

$$r=\frac{1+0{,}02^2}{2\cdot 0{,}02}\approx 25\ мм.$$

Главные кривизны поверхности подшипника (отверстия) в месте соприкосновения с цапфой (фиг. 306)

$$k_{11}=\frac{1}{r}\quad\text{и}\quad k_{12}=-\frac{2}{d_n}.$$

Заметим, что $k_{11}>0$, так как соответствующий центр кривизны лежит внутри рассматриваемого тела (подшипника), а $k_{12}<0$, ибо соответствующий центр кривизны расположен вне тела (на оси отверстия под цапфу).

Главные кривизны поверхности цапфы, рассматриваемой как круговой цилиндр радиуса $d_ц$, следующие

$$k_{21}=0\ \text{и}\ k_{22}=\frac{2}{d_ц}.$$

Плоскостью главных кривизн k_{11} и k_{21} является осевое сечение подшипника и цапфы, а плоскостью главных кривизн k_{12} и k_{22} — поперечное сечение в месте первоначального контакта этих тел.

Так как плоскости главных кривизн k_{11} и k_{21} совпадают, то угол $\omega=0$, $\cos 2\omega=1$ и геометрические параметры A и B поверхностей соприкасающихся тел, определяемые формулами (58), выражаются следующим образом:

$$A=\frac{1}{2}(k_{11}+k_{21})=\frac{1}{2r}=0{,}020\ 1/мм;$$

$$B=\frac{1}{2}(k_{12}+k_{22})=\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{d_n}+\frac{2}{d_ц}\right]=0{,}021\ 1/мм.$$

Заметим, что условливаются обозначать через A меньшую, а через B — большую из двух величин, определяемых выражениями (58).

В рассматриваемом случае можно считать, что $A=B$, и, следовательно, эллиптический контур площадки контакта переходит в контур круговой.

Определим величину наибольшего давления, имеющего место в центре площадки контакта. Сумма главных кривизн соприкасающихся тел в точке первоначального контакта

$$\Sigma k=\frac{1}{r}-\frac{2}{d_n}+\frac{2}{d_ц}=$$
$$=0{,}040-1{,}653-1{,}695=0{,}082\ 1/мм.$$

Модули упругости материалов соприкасающихся тел: для агата (подшипник) $E_1=10^6$ *кг/см*$^2=10^7$ *г/мм*^{2}; для стали (цапфа) $E_2=2\cdot 10^6$ *кг/см*$^2=2\cdot 10^7$ *г/мм*^{2}.

Коэффициент Пуассона для агата примем таким же, как и для стекла, т. е. $\mu_1=0{,}32$, а для стали $\mu_2=0{,}28$, тогда комбинированная упругая постоянная материалов соприкасающихся тел

$$\eta=\frac{1-0{,}32^2}{10^7}+\frac{1-0{,}28^2}{2\cdot 10^7}=\frac{1{,}358}{10^7}\ мм^2/г.$$

Искомая величина наибольшего давления определяется выражением (75):

$$p_0=n_p\frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{\Sigma k}{\eta}\right)^2 P}.$$

Для эллиптической площадки контакта значение коэффициента n_p берется из табл. 14 в зависимости от величины отношения $\frac{A}{B}$. В случае круговой площадки контакта ($A=B$) коэффициент $n_p=1$.

Величина нагрузки P на подшипник, как правило, определяется специальным динамическим расчетом подвижной системы прибора [92]. Предположим, что указанный расчет привел к значению $P=1000$ *г*, тогда величина наибольшего давления, возникающего между подшипником и цапфой,

$$p_0 = 0{,}3183 \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{0{,}082}{1{,}358}\,10^7\right)^2 1000}\ ;$$

$$p_0 = 26\,000\ г/мм^2 = 2600\ кг/см^2.$$

Установление допустимой величины наибольшего давления требует специального обсуждения, в частности проведения поверочных расчетов опор подвижных систем ряда приборов, при различных режимах их работы.

§ 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ТЕОРИИ СИЛОВОГО КОНТАКТА УПРУГИХ ТЕЛ

Нелинейный характер зависимости от величины нагрузки как размеров площадки соприкасания, так и величины сближения соприкасающихся тел (за исключением сближения двух цилиндров с параллельными осями) существенно выделяет формулы теории деформаций упругих тел в местах контакта среди всех других линейных зависимостей классической теории упругости (в области малых перемещений). Действительно, например, в случае контакта двух сферических тел радиус круговой площадки контакта

$$a = \text{const} \cdot P^{\frac{1}{3}},$$

а сближение соприкасающихся тел

$$\delta = \text{const} \cdot P^{\frac{2}{3}}.$$

В случае контакта цилиндров с параллельными осями полуширина контактной полоски

$$b = \text{const} \cdot q^{\frac{1}{2}},$$

а сближение соприкасающихся тел

$$\delta = \text{const} \cdot q.$$

Нелинейный характер приведенных формул за исключением последней и ряд допущений, положенных в основу их вывода, вызвали появление большого количества экспериментальных исследований деформаций соприкасающихся тел в местах их силового контакта.

Систематическое изложение и обсуждение результатов экспериментальных исследований дано в работах [24], [116].

Первое сопоставление результатов теоретических и экспериментальных исследований было произведено Г. Герцем [117]. Для опытов была использована стеклянная сферическая линза, которая прижималась к плоской стеклянной пластине. Пластина предварительно покрывалась весьма тонким слоем копоти, последняя должна была сохранить форму площадки контакта.

При соприкасании линзы с пластиной копоть сплющивалась, и после разъединения тел площадка контакта обнаруживалась в отраженном свете в виде блестящего маленького круга, размеры которого с помощью микроскопа можно было довольно точно измерить.

При соприкасании сферической линзы радиуса R с пластиной из того же материала радиус кругового контура площадки контакта

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\frac{1-\mu^2}{E}RP},$$

В опытах Герца радиус линзы $R = 28\,мм$ и модуль упругости стекла $E = 0{,}62 \cdot 10^4\,кг/мм^2$.

Коэффициент Пуассона для стекла колеблется в довольно широких пределах: от 0,20 до 0,32. Этому соответствует изменение теоретического значения радиуса площадки контакта в миллиметрах от $a = 0{,}1825\sqrt[3]{P}$ до $a = 0{,}1868\sqrt[3]{P}$.

При изменении нагрузки P от 1,63 до 28,5 $кг$ в среднем из опытов следует, что

$$a = 0{,}1845\sqrt[3]{P}.$$

Итак, опытные результаты достаточно близко (с точностью до 1%) сходятся с теоретически полученными значениями.

Были поставлены также и опыты по определению размеров эллиптической площадки контакта. Для этой цели были использованы два одинаковых стеклянных круговых цилиндра, оси которых образовывали между собой некоторый угол φ. Из формул (73) и (74) следует, что отношение полуосей эллиптического контура площадки контакта к соответствующим коэффициентам n_a и n_b не зависит от величины угла φ между осями цилиндров:

$$\frac{a}{n_a} = \frac{b}{n_b} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta P}{\Sigma k}} = \text{const}.$$

Теоретически вычисленное значение этой постоянной для заданных цилиндров и заданной нагрузки сравнивалось с результатами экспериментов, которые заключались в следующем: опытным путем определялись величины полуосей a и b при различных значениях угла φ, далее для этих же значений φ вычислялись коэффициенты n_a и n_b по формулам (73) — (74) и непосредственно находились отношения $\frac{a}{n_a}$ и $\frac{b}{n_b}$. В среднем результаты теории и опыта здесь сходятся с точностью до 1,5%.

Обширные опыты были поставлены Штрибеком [24] с закаленными стальными шариками диаметрами $^1/_2$, $^3/_4$, 1 и $^9/_8$ дюйма под нагрузками от 100 до 800 $кг$. Это были первые опыты, непосредственно связанные с запросами шарикоподшипниковой техники. Целью опытов была проверка формулы для упругого сближения δ сферических тел, выполненных из одинакового материала с коэффициентом Пуассона $\mu = 0{,}30$.

В этом случае величина сближения определяется следующим выражением:

$$\delta = 1{,}231\sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}.$$

Для проверки формулы три шарика одинакового диаметра устанавливались один над другим и подвергались сжатию на прессе Амслера. Сближение шариков измерялось зеркальным прибором Мартенса, острия тензометра находились в горизонтальных диаметральных плоскостях крайних шариков, и, следовательно, показания прибора давали удвоенную величину сближения, определяемого приведенной формулой.

Каждый раз измерялось сближение шариков под нагрузкой, затем нагрузка снималась, и измерялась остаточная деформация. Измеренные значения сближения сравнивались с вычисленными значениями. При вычислениях бралось значение $E=2{,}12\cdot 10^6$ *кг/см*^{2}.

Полученные результаты показали, что при малых нагрузках остаточные деформации отсутствуют и измеренные значения полностью совпадают с вычисленными. При больших нагрузках и при наличии остаточных деформаций полное измеренное сближение больше, а упругое сближение (полное минус остаточное) меньше, чем вычисленное по приведенной формуле.

Была произведена также серия опытов по измерению сближения шарика и плиты из закаленной стали. Опыты подтвердили справедливость теоретических формул и в этом случае.

Недостаток описанных опытов Штрибека заключался в наличии остаточных деформаций в большинстве испытанных элементов.

Необходимо также отметить опыты А. Н. Динника [24] по проверке формулы для радиуса круговой площадки контакта сферических тел из одинакового материала

$$a=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta P}{\Sigma k}}=0{,}9086\sqrt[3]{\eta P\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}},$$

где упругая постоянная материала соприкасающихся тел

$$\eta=2\frac{1-\mu^2}{E}.$$

Благодаря использованию стальных шаров достаточно большого диаметра ($2R=7{,}62$ *см*) остаточные деформации не возникали.

Для вычисления радиуса a площадки контакта требуется знание упругой постоянной η. Так как опыты Штрибека достаточно хорошо подтвердили справедливость формулы

$$\delta=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}\eta^2\Sigma kP^2}=0{,}8255\sqrt[3]{(\eta P)^2\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}}$$

для сближения сферических тел, то постоянная η определялась из вспомогательных опытов с теми же шарами.

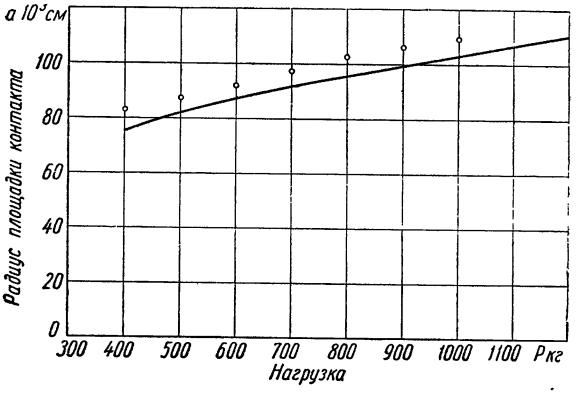
На фиг. 308 изображена зависимость измеренных (кружки) и вычисленных (сплошная кривая) значений радиуса a круговой площадки контакта от величины нагрузки P. Сравнение вычисленных и измеренных значений радиуса a показывает, что измеренные значения всегда несколько больше, чем вычисленные по теоретическим формулам. Средняя погрешность вычисленных значений достигает 5%. Аналогичные результаты дали и опыты А. Н. Динника над сжатием шара и плоскости.

Опыты по проверке теоретических формул в случае взаимного сжатия сферического и цилиндрического тел также дали хорошее совпадение теории и эксперимента. Так, при сжатии нагрузкой $P=500$ *кг* стального шара радиуса $R=3{,}81$ *см* и цилиндра радиуса $R=3$ *см* из опыта были получены следующие значения полуосей эллиптического контура площадки контакта: $a=0{,}126$ *см* и $b=0{,}074$ *см*, а при вычислении тех же осей по теоретическим формулам $a=0{,}126$ *см* и $b=0{,}073$ *см*.

В случае сжатия силой $P=318$ *кг* двух одинаковых круговых цилиндров радиуса $R=2{,}984$ *см* со взаимно-перпендикулярными осями

опыты дали для радиуса круговой площадки контакта значение $a=0{,}093$ *см* при теоретическом значении $a=0{,}089$ *см*. Здесь коэффициент Пуассона принимался равным $\mu=0{,}30$ и модуль упругости E определялся из опыта на продольное сжатие цилиндра.

Все рассмотренные опыты относились к сжатию тел с первоначальным точечным касанием.



Фиг. 308.

Ряд экспериментов был проведен и для проверки формул сжатия тел с первоначальным касанием по линии. В качестве примера приведем результаты опытов А. Н. Динника по измерению ширины контактной полоски соприкасающихся цилиндров с параллельными осями [24].

Для опыта были использованы стальные цилиндры радиуса $R=2{,}98$ *см* и длиной $l=1{,}94$ *см*. Нагрузка q изменялась от 52 до 515 *кг/см*.

Модуль упругости брался $E=2{,}1\cdot 10^6$ *кг/см*^{2} и коэффициент Пуассона $\mu=0{,}30$. Расхождение вычисленных и измеренных значений в среднем составляет 4,6%.

Интересные опыты по измерению упругого сжатия прокатного валка по образующей были произведены И. М. Павловым и Я. С. Галай [66].

Здесь рассмотрена только весьма небольшая часть обширного материала по экспериментальному изучению деформаций упругих тел в местах контакта. Изучение экспериментального материала приводит к выводу, что теоретические формулы как для размеров площадки контакта, так и для сближения соприкасающихся тел справедливы с совершенно достаточной степенью точности, пока нагрузки, приложенные к соприкасающимся телам, не приводят к возникновению в зоне контакта остаточных деформаций.

§ 7. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ТЕЛ В СЛУЧАЕ КРУГОВОЙ ПЛОЩАДКИ КОНТАКТА

Две детали, ограниченные сферическими поверхностями или выполненные в виде одинаковых цилиндров со взаимно-перпендикулярными осями, могут соприкасаться до деформации только в одной точке. После приложения к деталям сжимающих сил первоначально точечное касание переходит в соприкасание деталей по малой по сравнению с размерами тел круговой площадке.

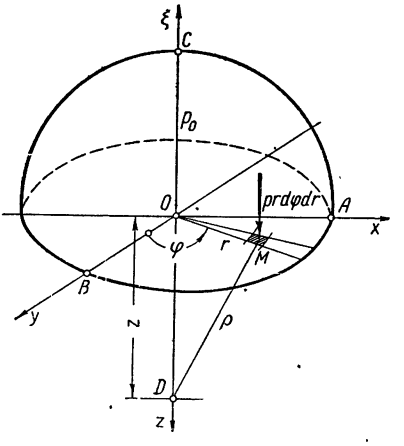
Выражения для размеров площадки контакта (радиус a) и величины сближения соприкасающихся тел даны в табл. 13.

Выше было показано, что распределение давления p по круговой площадке контакта представляется ординатами ξ полусферы радиуса $OA=OB=a$ (фиг. 309) построенной на этой площадке, т. е.

$$p=p_0\frac{\xi}{a},$$

где $p_0=\frac{3}{2}\frac{P}{\pi a^2}$ — величина давления в центре площадки контакта.

Малость размеров площадки контакта по сравнению с размерами соприкасающихся тел позволяет положить в основу анализа напряженного состояния формулы, выведенные для случая действия сосредоточенной силы на упругое полупространство (см. § 2 этой главы).



Фиг. 309

Совместим начало координат с центром площадки контакта и направим ось z по нормали к поверхности соприкасания внутрь рассматриваемого тела.

Поставим перед собой задачу исследовать напряженное состояние в следующих точках тела:

1) у кругового контура площадки контакта;

2) на центральной оси z.

Напряженное состояние в указанных точках является наиболее интересным с точки зрения оценки прочности детали в местах контакта.

Итак, рассмотрим напряженное состояние в произвольной точке оси z. По формуле (21) аксиальное напряжение, т. е. нормальное напряжение в площадках, перпендикулярных к оси z, от действия сосредоточенной силы P, приложенной к поверхности тела на расстоянии r от оси z,

$$\sigma_z=-\frac{P}{2\pi}\cdot\frac{3z^3}{\rho^5},$$

где

$$\rho=\sqrt{z^2+r^2}.$$

Согласно принципу независимости действия сил составляющая аксиального напряжения в рассматриваемой точке D оси z от элементарной силы $prd\varphi dr$ (фиг. 309)

$$d\sigma_z=-\frac{prd\varphi\,dr}{2\pi}\cdot\frac{3z^3}{\rho^5}.$$

Полная величина аксиального напряжения в рассматриваемой точке от действия всех элементарных сил, распределенных по площадке контакта по закону полусферы,

$$\sigma_z=-\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{prd\varphi\,dr}{2\pi}\cdot\frac{3z^3}{\rho^5}. \qquad (101)$$

Подставляя в формулу (101)

$$p = \frac{p_0}{a}\sqrt{a^2 - r^2} \quad \text{и} \quad \rho = \sqrt{z^2 + r^2},$$

имеем

$$\sigma_z = -\frac{3p_0}{a} z^3 \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{(z^2 + r^2)^5}} r dr =$$

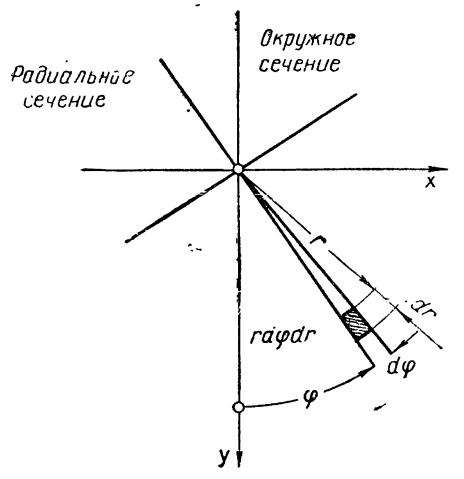
$$= -\frac{p_0}{a} \cdot \frac{z^3}{a^2 + z^2} \sqrt{\left(\frac{a^2 - r^2}{z^2 + r^2}\right)^3}\Bigg|_0^a.$$

После преобразований получаем окончательное выражение для напряжения по площадке, нормальной к оси z и проведенной через произвольную точку этой оси:

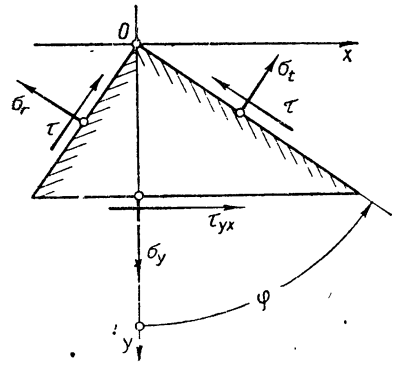
$$\sigma_z = -p_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}. \tag{102}$$

Знак минус показывает, что напряжение σ_z является напряжением сжатия. При $z = 0$, т. е. у центра площадки контакта, $\sigma_z = -p_0$, а при неограниченном возрастании z аксиальное напряжение σ_z стремится к нулю.

Несколько сложнее обстоит дело при использовании принципа сложения действия элементарных сил для отыскания напряжений в площадках, проходящих через ось z. Действительно, формулы § 2 дают величины напряжений в радиальном и окружном сечениях, соответствующих рассматриваемой элементарной силе (фиг. 310). Для какой-



Фиг. 310



Фиг. 311

либо другой элементарной силы, определяемой другим углом φ, применение указанных формул дает напряжения в радиальном и окружном сечениях, соответствующих уже этой силе и поэтому расположенных иначе, чем ранее рассмотренные. Очевидно, прежде чем суммировать напряжения, получаемые от элементарных сил, необходимо

ввести в рассмотрение некоторые постоянные площадки. Другими словами, суммированию подлежат напряжения, найденные от элементарных сил $prd\varphi dr$ в некоторых определенных площадках, а не в площадках, различно ориентированных для различных элементарных сил.

Из условий равновесия элементарной призмы, ограниченной радиальным и окружным сечениями (оштрихованы на фиг. 311) и сечением, параллельным плоскости xOz, выразим напряжения σ_y и τ_{yx} через напряжения σ_r, σ_t и τ:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_t)+\frac{1}{2}(\sigma_r-\sigma_t)\cos 2\varphi+\tau\sin 2\varphi;\\ \tau_{yx} &= \frac{1}{2}(\sigma_r-\sigma_t)\sin 2\varphi-\tau\cos 2\varphi.\end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

Теперь, используя формулы (19), (20) и (22), находим, что составляющая напряжения σ_y в рассматриваемой точке оси z от элементарной силы $p\,r\,d\varphi\,dr$ равна

$$d\sigma_y = \frac{1}{2}\cdot\frac{pr\,d\varphi\,dr}{2\pi}\left[\frac{(1-2\mu)z}{\rho^3}-\frac{3zr^2}{\rho^5}\right]+\frac{1}{2}\frac{pr\,d\varphi\,dr}{2\pi}\left[\frac{2(1-2\mu)}{\rho(\rho+z)}-\right.$$
$$\left.-\frac{(1-2\mu)z}{\rho^3}-\frac{3zr^2}{\rho^5}\right]\cos 2\varphi+\frac{pr\,d\varphi\,dr}{2\pi}\cdot\frac{3z^2r}{\rho^5}\sin 2\varphi.$$

Замечая, что

$$\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\,d\varphi=0 \text{ и } \int_0^{2\pi}\sin 2\varphi\,d\varphi=0,$$

находим полную величину напряжения σ_y в рассматриваемой точке от действия всех элементарных сил, распределенных по площадке контакта деталей:

$$\sigma_y=\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{p_0}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{2\pi}\left[\frac{(1-2\mu)z}{\rho^3}-\frac{3zr^2}{\rho^5}\right]r\,dr\,d\varphi,$$

или после элементарных преобразований

$$\sigma_y=\frac{3p_0z^3}{2a}\int_0^a\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{(z^2+r^2)^5}}r\,dr-(1+\mu)\frac{p_0z}{a}\int_0^a\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{(z^2+r^2)^3}}r\,dr.$$

Для осуществления требуемых квадратур целесообразно применить три последовательные подстановки.

Первая подстановка $z^2+r^2=v^2$, тогда первый интеграл принимает вид

$$\int\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{(z^2+r^2)^5}}r\,dr=\int\frac{\sqrt{a^2+z^2-v^2}}{v^4}dv,$$

а второй интеграл

$$\int\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{(z^2+r^2)^3}}r\,dr=\int\frac{\sqrt{a^2+z^2-v^2}}{v^2}dv.$$

Вторая подстановка $\frac{1}{v^2}=w$.

Используя обозначение $a^2+z^2=k^2$, устанавливаем, что первый интеграл

$$\int \frac{\sqrt{a^2+z^2-v^2}}{v^4}\,dv=-\frac{1}{2}\int \sqrt{k^2w-1}\,dw,$$

а второй интеграл

$$\int \frac{\sqrt{a^2+z^2-v^2}}{v^2}\,dv=-\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{k^2w-1}}{w}\,dw.$$

Третья подстановка $k^2w-1=m^2$.

В этом случае первый интеграл принимает вид

$$-\frac{1}{2}\int \sqrt{k^2w-1}\,dw=-\frac{1}{k^2}\int m^2\,dm=-\frac{1}{k^2}\cdot\frac{m^3}{3},$$

второй интеграл

$$-\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{k^2w-1}}{w}\,dw=-\int dm+\int \frac{dm}{m^2+1}=-m+\operatorname{arc\,tg} m.$$

Возвращаясь к исходному переменному r, получаем для искомого напряжения σ_y выражение

$$\sigma_y=-\frac{3p_0z^3}{2a}\cdot\frac{1}{3(a^2+z^2)}\sqrt{\left(\frac{a^2-r^2}{z^2+r^2}\right)^3}\Bigg|_0^a+$$

$$+(1+\mu)\frac{p_0z}{a}\left[\sqrt{\frac{a^2-r^2}{z^2+r^2}}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a^2-r^2}{z^2+r^2}}\right]_0^a,$$

или после элементарных преобразований имеем

$$\sigma_y=-p_0\left[(1+\mu)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2}-(1+\mu)\frac{z}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{z}\right]. \qquad (104)$$

Напряжение σ_y в отличие от напряжения σ_z зависит от упругих свойств материала (коэффициент Пуассона μ).

Для точки $z=0$, т. е. у центра поверхности контакта,

$$\sigma_y=-p_0\frac{1+2\mu}{2}. \qquad (104\,а)$$

Знак минус показывает, что напряжение σ_y является напряжением сжатия.

При $0\leqslant\mu\leqslant 0{,}5$ величина σ_y у центра поверхности контакта изменяется в пределах от $-\frac{1}{2}p_0$ до $-p_0$.

При $z\to\infty$ предел выражения $\frac{z}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{z}$ равен 1, и, следовательно, $\sigma_y=0$, т. е. на бесконечности напряжения σ_y исчезают.

Благодаря осевой симметрии напряженного состояния в случае круговой площадки контакта выражение (104) дает величину нормального напряжения в любой площадке, проходящей через ось z, в частности напряжение σ_x. Аналогично вычислению напряжения σ_y легко показать, что касательное напряжение для всех точек оси z по площад-

кам, параллельным этой оси, обращается в нуль. Заметим, что это обстоятельство следует также и из соображений симметрии напряженного состояния относительно оси z.

Итак, для произвольной точки оси z все площадки, параллельные этой оси, и площадка, перпендикулярная к ней, являются главными площадками. Непосредственным подсчетом по формулам (102) и (104) легко убедиться в том, что напряжения σ_z и $\sigma_y = \sigma_x$ отрицательны (сжатие) и по абсолютной величине $|\sigma_y| < |\sigma_z|$.

Следовательно, величины главных напряжений для произвольной точки оси z $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y$ определяются выражением (104) и $\sigma_3 = \sigma_z$ определяется выражением (102).

В табл. 15 приведены значения отношений $\frac{\sigma_y}{p_0}$ и $\frac{\sigma_z}{p_0}$ в зависимости от величины отношения $\frac{z}{a}$, где z — расстояние рассматриваемой точки от центра площадки соприкасания и a—радиус круговой площадки соприкасания. При составлении таблицы коэффициент Пуассона μ принят равным 0,30. Отрицательные знаки напряжений σ_y и σ_z в таблице опущены.

Таблица 15

Главные напряжения и максимальное касательное напряжение для точек центральной оси z в случае круговой площадки контакта (μ=0,30)

$\frac{z}{a}$	$\frac{\sigma_x}{p_0} = \frac{\sigma_y}{p_0}$	$\frac{\sigma_z}{p_0}$	$\frac{\tau_{max}}{p_0}$	$\frac{z}{a}$	$\frac{\sigma_x}{p_0} = \frac{\sigma_y}{p_0}$	$\frac{\sigma_z}{p_0}$	$\frac{\tau_{max}}{p_0}$
0	0,800	1,000	0,100	0,6	0,129	0,735	0,304
0,1	0,614	0,990	0,188	0,7	0,091	0,671	0,290
0,2	0,462	0,962	0,250	0,8	0,063	0,610	0,273
0,3	0,342	0,917	0,288	0,9	0,043	0,552	0,255
0,4	0,250	0,862	0,306	1,0	0,029	0,500	0,236
0,5	0,180	0,800	0,310				

Примечание. В таблице даны абсолютные значения отношений главных напряжений и максимального касательного напряжения к величине давления в центре круговой площадки контакта.

Круговая диаграмма напряженного состояния в какой-либо из точек оси z изображена на фиг. 312. Так как $\sigma_1 = \sigma_2$, то окружность *03* стягивается в точку, т. е., в любой площадке, параллельной оси z, нормальное напряжение $\sigma = \sigma_y$, а касательное напряжение $\tau = 0$. Окружности *01* и *02* сливаются в одну, т. е. напряжения в площадках, параллельных оси y, и в площадках, параллельных оси x, тождественны.

Нормальное напряжение σ в этих площадках изменяется от величины σ_y до величины σ_z, а касательное τ (по абсолютной величине) от нуля до значения

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}|(\sigma_z - \sigma_y)|.$$

Максимальные касательные напряжения имеют место в площадках, образующих угол 45° с осью z (следы двух пар подобных плоскостей отштрихованы на фиг. 313). Величина τ_{max} в функции расстояния z

рассматриваемой точки от центра площадки соприкасания выражается следующей формулой:

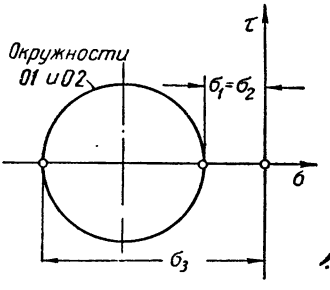
$$\tau_{max} = \frac{1}{2} p_0 \left[(1+\mu) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2} - (1+\mu) \frac{z}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{z} \right]. \quad (105)$$

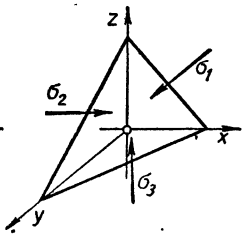
В табл. 15 приведены значения отношений $\frac{\tau_{max}}{p_0}$ в зависимости от величины отношения $\frac{z}{a}$. Наибольшее максимальное касательное напряжение имеет место при $z = 0{,}48\,a \approx 0{,}5\,a$, а его величина равна

$$\tau_{max}^{(наиб)} = 0{,}310\ p_0. \quad (106)$$

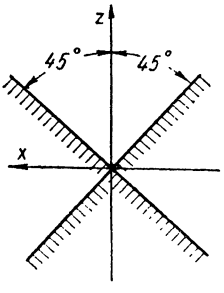
Перейдем теперь к рассмотрению напряженного состояния в точках контура круговой площадки контакта соприкасающихся тел, например в точках пересечения контура с осью x. По формулам (23) у поверхности полупространства радиальное и окружное напряжения

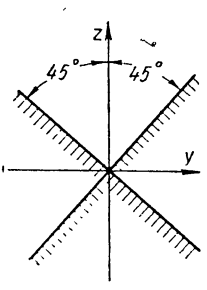
$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{1-2\mu}{r^2} \text{ и } \sigma_t = -\frac{P}{2\pi} \cdot \frac{1-2\mu}{r^2}.$$





Фиг. 312





Фиг. 313

Касательные напряжения в радиальном и окружном сечениях у поверхности ($z=0$) обращаются в нуль.

Из условий равновесия элементарной призмы (фиг. 314) нормальное и касательное напряжения в площадке, нормальной к оси x,

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_t) + \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_t)\cos 2\varphi;$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_t)\sin 2\varphi.$$

Составляющая напряжение σ_x от элементарной силы $prd\varphi\,dr$

$$d\sigma_x = \frac{1-2\mu}{2\pi} \cdot \frac{p}{r} \cos 2\varphi\, d\varphi\, dr.$$

На фиг. 315 изображено сечение полусферы давлений плоскостью, нормальной к площадке соприкасания и проходящей через рассматриваемый элемент $rd\varphi dr$.

Величина давления

$$p = p_0 \frac{\xi}{a},$$

где

$$\xi = \sqrt{r(s-r)},$$

и, следовательно,

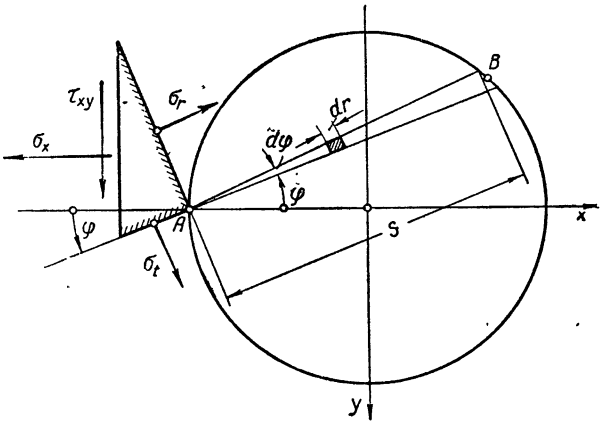
$$d\sigma_x = \frac{1-2\mu}{2\pi} \cdot \frac{p_0}{a} \sqrt{\frac{s-r}{r}} \cos 2\varphi \, d\varphi \, dr.$$

Напряжение σ_x от всех элементарных сил, распределенных по круговой площадке соприкасания

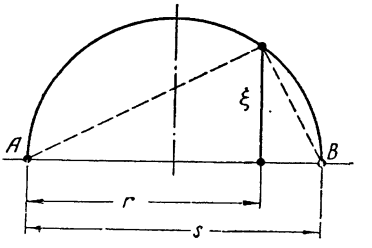
$$\sigma_x = \frac{1-2\mu}{2\pi} \frac{p_0}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^s \sqrt{\frac{s-r}{r}} \cos 2\varphi \, dr \, d\varphi.$$

Как известно,

$$\int_0^s \sqrt{\frac{s-r}{r}} \, dr = \sqrt{r(s-r)} + s \cdot \arcsin \sqrt{\frac{r}{s}} \Bigg|_0^s = s \frac{\pi}{2} = \pi a \cos\varphi,$$



Фиг. 314



Фиг. 315

следовательно,

$$\sigma_x = \frac{1-2\mu}{2} p_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi \cos\varphi \, d\varphi$$

и окончательно

$$\sigma_x = \frac{1-2\mu}{3} p_0. \qquad (107)$$

При изменении коэффициента Пуассона от 0 до 0,50 величина σ_x изменяется от $\frac{1}{3} p_0$ до нуля; при $\mu = 0{,}30$ $\sigma_x = 0{,}133 p_0$.

Таким же образом можно установить, что величина касательного напряжения

$$\tau_{xy} = \frac{1-2\mu}{2\pi} \cdot \frac{p_0}{a} \pi a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 0.$$

Итак, напряжение σ_x является одним из главных напряжений для точек пересечения контура площадки соприкасания с осью x (см. фиг. 309).

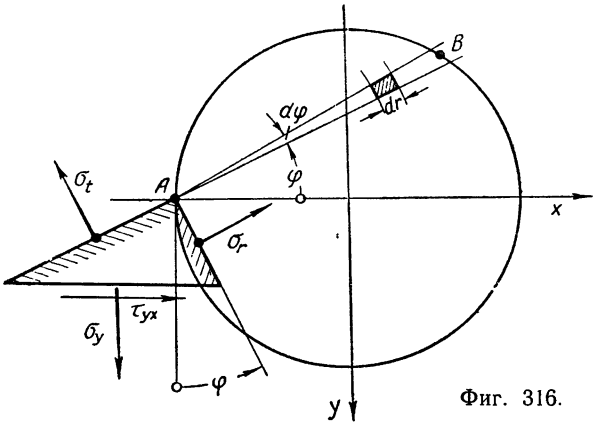
Перейдем теперь к нахождению другого главного напряжения σ_y, учитывая, что $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$.

Из условий равновесия элементарной призмы (фиг. 316)

$$\sigma_y = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_t) - \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_t)\cos 2\varphi.$$

Составляющая напряжения σ_y от элементарной силы $prd\varphi\, dr$

$$d\sigma_y = -\frac{prd\varphi\, dr}{2\pi} \cdot \frac{1-2\mu}{r^2}\cos 2\varphi.$$



Фиг. 316.

Напряжение σ_y от всех элементарных сил, распределенных по площадке соприкасания,

$$\sigma_y = \frac{-(1-2\mu)}{3} p_0. \tag{108}$$

Поскольку рассматриваемая точка лежит на контуре площадки соприкасания, то очевидно, что третье главное напряжение $\sigma_z = 0$.

Итак, для точек, лежащих на пересечении контура круговой площадки соприкасания с осью x, имеет место следующая система главных напряжений:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x = \frac{1-2\mu}{3} p_0; \\ \sigma_2 &= \sigma_z = 0; \\ \sigma_3 &= \sigma_y = -\frac{1-2\mu}{3} p_0, \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

т. е. имеет место двухосное напряженное состояние, известное под названием чистого сдвига.

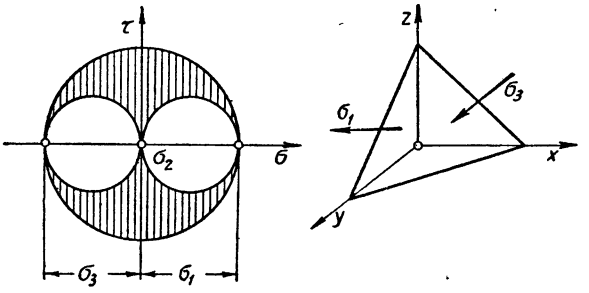
Круговая диаграмма для рассматриваемого напряженного состояния изображена на фиг. 317.

Для площадок, параллельных оси x, нормальное напряжение σ изменяется от величины $\sigma_3 < 0$ (плоскость xz) до нуля (плоскость xy). Для площадок, параллельных оси y, нормальное напряжение изменяется от $\sigma_1 > 0$ (плоскость yz) до нуля (плоскость xy). Касательное напряжение τ в этих площадках изменяется по абсолютной величине от $\frac{1}{2}\sigma_1$ до нуля. Для площадок, параллельных оси z, нормальные напряжения изменяются от $\sigma_1 > 0$ до $\sigma_3 < 0$, а касательные напряжения (по абсолютной величине) — от нуля до σ_1.

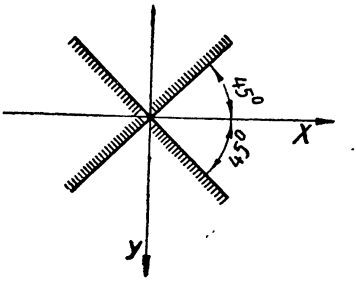
Следы плоскостей, в которых возникают максимальные касательные напряжения

$$\tau_{max} = \frac{1-2\mu}{3} p_0, \qquad (110)$$

отштрихованы на фиг. 318. При $\mu = 0{,}30$ $\tau_{max} = 0{,}133\, p_0$, т. е. оно значительно меньше наибольшего касательного напряжения $\tau_{max}^{(наиб)} = 0{,}310\, p_0$ в точке $z \approx 0{,}5\, a$ центральной оси z.



Фиг. 317

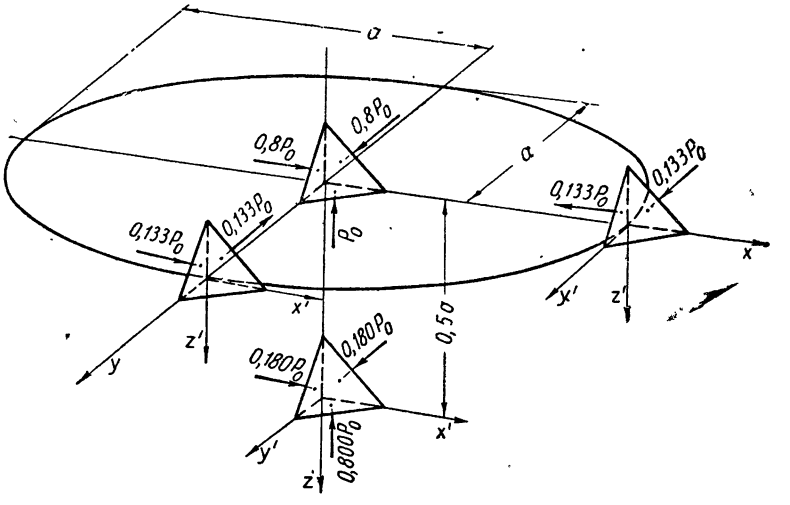


Фиг. 318

Сформулируем результаты исследования напряженного состояния в характерных точках для случая круговой площадки контакта (фиг. 319):

а) Наибольшее сжимающее напряжение возникает в центре площадки соприкасания

$$\sigma_3 = \sigma_z = -p_0.$$



Фиг. 319.

Два других главных напряжения в той же точке равны между собой:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{1+2\mu}{2} p_0.$$

При $\mu = 0{,}30$ (сталь) главные напряжения для центра поверхности контакта

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0{,}8\, p_0 \text{ и } \sigma_3 = -p_0,$$

т. е. имеет место напряженное состояние, близкое к всестороннему равномерному сжатию.

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{max} = 0{,}1\, p_0.$$

Для материала с коэффициентом Пуассона $\mu = 0{,}5$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p_0,$$

т. е. возникает всестороннее равномерное сжатие, и касательное напряжение в любой из площадок, проходящих через рассматриваемую точку, обращается в нуль.

б) Наибольшее растягивающее напряжение имеет место в любой из точек контура площадки соприкасания. Оно направлено вдоль радиуса и равно

$$\sigma_1 = \frac{1-2\mu}{3} p_0 = 0{,}133\, p_0$$

(при $\mu = 0{,}30$).

Промежуточное главное напряжение $\sigma_2 = \sigma_z = 0$.

Третье главное напряжение

$$\sigma_3 = -\frac{1-2\mu}{3} p_0 = -0{,}133\, p_0$$

(при $\mu = 0{,}30$).

Следовательно, во всех точках контура площадки соприкасания возникает двухосное напряженное состояние, называемое чистым сдвигом.

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{max} = \frac{1-2\mu}{3} p_0 = 0{,}133\, p_0$$

(при $\mu = 0{,}30$).

Для материала с $\mu = 0{,}5$ все точки контура площадки контакта свободны от напряжений:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

в) Максимальное касательное напряжение достигает своего наибольшего значения в точке, лежащей на центральной оси z (ось, проходящая через центр площадки контакта и нормальная к ней) на расстоянии $z \approx 0{,}5\, a$, где a — радиус площадки контакта.

Величины главных напряжений для указанной точки (при $\mu = 0{,}30$)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0{,}180\, p_0 \text{ и } \sigma_3 = -0{,}800\, p_0$$

и величина максимального касательного напряжения в этой точке

$$\tau_{max}^{(наиб)} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = 0{,}310\, p_0.$$

Приведем без вывода выражения для компонентов напряженного состояния в произвольной точке окрестности контакта соприкасающихся тел [24]. Благодаря симметрии напряженного состояния при круговой площадке контакта достаточно ограничиться рассмотрением компонентов напряжений в одной из координатных плоскостей, параллель-

ных оси z, например, в плоскости yz (см. фиг. 309):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -p_0\left\{\frac{1-2\mu}{3}\cdot\frac{a^2}{y^2}\left[1-\frac{z^3}{\sqrt{\lambda^3}}\right]+\right.\\
&\left.+\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\left[2\mu+\frac{1+\mu}{a^2+\lambda}\lambda+\frac{1+\mu}{a}\sqrt{\lambda}\ \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\sqrt{\lambda}}\right]\right\};\\
\sigma_y &= p_0\left\{\frac{1-2\mu}{3}\cdot\frac{a^2}{y^2}\left[1-\frac{z^3}{\sqrt{\lambda^3}}\right]+\frac{a^2z^3}{(\lambda^2+a^2z^2)\sqrt{\lambda}}+\right.\\
&\left.+\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\left[(1-\mu)\frac{\lambda}{a^2+\lambda}+(1+\mu)\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\sqrt{\lambda}}-2\right]\right\};\\
\sigma_z &= -p_0\frac{a^2z^3}{(\lambda^2+a^2z^2)\sqrt{\lambda}};\\
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = -p_0\frac{a^2yz^2\sqrt{\lambda}}{(\lambda^2+a^2z^2)(a^2+\lambda)};\\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = 0;\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(111)$$

Во всех приведенных зависимостях λ — наибольший корень уравнения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda}+\frac{z^2}{\lambda}=1.\qquad(112)$$

Для перехода от приведенных общих выражений к формулам для компонентов напряженного состояния в точках оси симметрии (ось z) достаточно положить $y=0$. Тогда согласно уравнению (112) $\lambda=z^2$. Раскрывая теперь имеющие место неопределенности, приходим к выражениям, тождественно совпадающим с полученными выше формулами (102) и (104).

Возвращаемся к исследованию уравнения (112).

Решая его относительно λ, имеем

$$\lambda=\frac{1}{2}\left[-(a^2-z^2-y^2)\pm\sqrt{(a^2-z^2-y^2)^2+4z^2a^2}\right].\qquad(113)$$

Полагая $z=0$, т. е. рассматривая поверхность соприкасающихся тел, находим, что $\lambda=0$ или $\lambda=-(a^2-y^2)$.

В пределах площадки контакта ($y^2<a^2$) наибольшим из двух корней уравнения (112) является $\lambda=0$; тогда, внося $z=0$ и $\lambda=0$ в общие формулы, приходим к следующим выражениям для компонентов напряженного состояния в точках оси y, которая представляет собой один из радиусов площадки контакта:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -p_0\left\{\frac{1-2\mu}{3}\cdot\frac{a^2}{y^2}\left[1-\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^3}\right]+\right.\\
&\left.+2\mu\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}\right\};\\
\sigma_y &= p_0\left\{\frac{1-2\mu}{3}\cdot\frac{a^2}{y^2}\left[1-\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^3}\right]-\right.\\
&\left.-\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}\right\};\\
\sigma_z &= -p_0\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}};\\
\tau_{xy} &= \tau_{yz}=\tau_{zx}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(114)$$

Полагая в формулах (114) $y=a$, т. е. рассматривая точку пересечения оси y с круговым контуром площадки контакта, имеем

$$\sigma_x = -\frac{1-2\mu}{3}p_0;\ \sigma_y = \frac{1-2\mu}{3}p_0;\ \sigma_z = 0. \tag{115}$$

Расхождение в знаках σ_x и σ_y по сравнению с формулами (107) и (108) вполне закономерно и объясняется тем, что последние две формулы относятся к точке пересечения контура площадки контакта с осью x (см. фиг. 309).

Полагая в формулах (114) $y=0$, т. е. рассматривая центр площадки контакта, имеем полное совпадение с полученными выше выражениями для напряжений в этой точке.

§ 8. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛОЩАДКИ КОНТАКТА

Рассмотрим две детали, ограниченные некоторыми криволинейными поверхностями, первоначально касающиеся в одной точке. После приложения сжимающих сил детали деформируются, и первоначально точечное касание переходит в соприкасание деталей по некоторой малой площадке. В общем случае площадка контакта, как это было показано выше, имеет эллиптический контур. Выражения для большой a и малой b полуосей контурного эллипса даны в табл. 13.

Пространственная эпюра давлений, передаваемых от одного тела на другое и распределенных по площадке контакта, ограничена поверхностью эллипсоида (см. фиг. 309):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{\xi^2}{c^2}=1, \tag{116}$$

где $a=OA$, $b=OB$ и $c=OC$.

Величина давления p в произвольной точке $M(x,y)$ площадки контакта

$$p=p_0\frac{\xi}{c},$$

где

$$\frac{\xi}{c}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\ \text{ и }\ p_0=\frac{3}{2}\cdot\frac{P}{\pi ab}.$$

Переходя от декартовых координат к полярным и заменяя $x=r\sin\varphi$ и $y=r\cos\varphi$, имеем

$$p=p_0\sqrt{1-r^2A^2}, \tag{117}$$

где

$$A^2=\frac{\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\cos^2\varphi}{b^2}. \tag{117а}$$

Аналогично уравнение контурного эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в полярной системе координат имеет вид

$$r_0^2A^2=1, \tag{118}$$

где r_0 — значение полярного радиуса r на контуре площадки контакта.

Сила давления, действующая по элементарной площадке $rdrd\varphi$,

$$dP=p_0\sqrt{1-r^2A^2}\,rdrd\varphi. \tag{119}$$

Практически наиболее интересным является рассмотрение напряженного состояния в точках соприкасающихся тел, лежащих на продолжении оси ξ эллипсоида давлений.

Как и в случае круговой площадки, можно ожидать, что исследование напряженного состояния в этих точках даст возможность установить наибольшее значение максимального касательного напряжения.

По формулам (19)—(22) напряжения, возникающие в некоторой точке D, лежащей на центральной оси эллипсоида давлений, под действием силы $P=1$, приложенной в произвольной точке M площадки контакта, выражаются следующим образом:

аксиальное напряжение

$$\sigma'_z = -\frac{3}{2\pi}\cdot\frac{z^3}{\rho^5};$$

радиальное напряжение

$$\sigma'_r = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-2\mu}{\rho(\rho+z)} - \frac{3zr^2}{\rho^5}\right];$$

окружное напряжение

$$\sigma'_t = \frac{1-2\mu}{2\pi}\left[\frac{z}{\rho^3} - \frac{1}{\rho(\rho+z)}\right];$$

касательное напряжение

$$\tau'_{rz} = \tau'_{zr} = -\frac{3}{2\pi}\cdot\frac{rz^2}{\rho^5}.$$

(120)

В этих формулах через

$$\rho = \sqrt{r^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

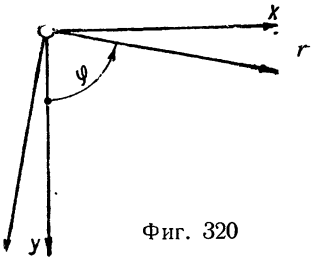
обозначена длина отрезка MD (см. фиг. 309).

Касательные напряжения

$$\tau'_{tr} = \tau'_{rt} = 0 \text{ и } \tau'_{zt} = \tau'_{tz} = 0.$$

Перейдем от напряжений в радиальном и окружном сечениях к напряжениям в площадках, параллельных координатным плоскостям. Для этого используем формулы (9) преобразования компонентов напряженного состояния при изменении положения координатных осей, изложенные в § 3 гл. I, т. I. Табличка косинусов углов, образованных осями старой и новой систем координат, в рассматриваемом случае (фиг. 320) принимает следующий вид:

	r	t	z
x	$\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	0
y	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
z	0	0	1



Фиг. 320

Используя указанные выше формулы, приходим к следующим выражениям для напряжений в плоскостях, параллельных координатным и проходящих через рассматриваемую точку D оси z:

нормальные напряжения

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^* &= \sigma_r' \sin^2\varphi + \sigma_t' \cos^2\varphi; \\ \sigma_y^* &= \sigma_r' \cos^2\varphi + \sigma_t' \sin^2\varphi; \\ \sigma_z^* &= \sigma_z'; \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

касательные напряжения

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy}^* = \tau_{yx}^* &= \frac{1}{2}(\sigma_r' - \sigma_t')\sin 2\varphi; \\ \tau_{yz}^* &= \tau_{zy}^* = \tau_{rz}' \cos\varphi; \\ \tau_{zx}^* &= \tau_{xz}^* = \tau_{rz}' \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

Обратимся к вычислению компонентов напряженного состояния в точке D, обусловленного не сосредоточенной силой $P=1$, а всей совокупностью элементарных сил, распределенных по площадке контакта по закону полуэллипсоида.

А. Нормальное напряжение σ_z

Согласно формулам (121) и (119) и принципу сложения действия сил

$$\sigma_z = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sigma_z' p_0 \sqrt{1 - r^2 A^2}\, r dr d\varphi. \tag{123}$$

Так как подынтегральное выражение представляет собой функцию от $\sin^2\varphi$ и $\cos^2\varphi$, то легко показать, что

$$\sigma_z = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_0} \sigma_z' p_0 \sqrt{1 - r^2 A^2}\, r dr d\varphi. \tag{124}$$

Внося в зависимость (124) значение σ_z' по формуле (120), приводим выражение (124) для искомого напряжения σ_z к следующему виду:

$$\sigma_z = -\frac{6}{\pi} p_0 z^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r_0} \frac{\sqrt{1 - r^2 A^2}}{\sqrt{(r^2 + z^2)^5}}\, r dr,$$

или после вычислений внутреннего интеграла

$$\sigma_z = -\frac{2}{\pi} p_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 + A^2 z^2}.$$

Окончательное выражение для σ_z после ряда преобразований имеет следующий вид:

$$\sigma_z = -p_0 \frac{ab}{\sqrt{a^2 + z^2}\,\sqrt{b^2 + z^2}}. \tag{125}$$

В частном случае круговой площадки контакта радиуса $a=b$ выражение (125) переходит в полученную выше формулу (102).

Б. Нормальное напряжение σ_x

Аналогично определению нормального напряжения σ_z искомое напряжение

$$\sigma_x = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} [\sigma_r' \sin^2\varphi + \sigma_t' \cos^2\varphi]\, p_0 \sqrt{1 - r^2A^2}\, r dr d\varphi \qquad (126)$$

или

$$\sigma_x = 4p_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi \int_0^{r_0} \sigma_r' \sqrt{1 - r^2A^2}\, r dr + \\ + 4p_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^{r_0} \sigma_t' \sqrt{1 - r^2A^2}\, r dr. \qquad (127)$$

Оба внутренних интеграла вычисляются в замкнутой форме.

Подстановка значений внутренних интегралов приводит к следующему выражению:

$$\sigma_x = -p_0(1+\mu) + \frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{1 + z^2A^2} + \\ + \frac{2p_0}{\pi}(1-2\mu) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi \sin^2\varphi) \ln \frac{Az}{\sqrt{1+z^2A^2}}\, d\varphi + \\ + \frac{4p_0}{\pi}(2-\mu) \int_0^{\frac{\pi}{2}} Az \operatorname{arc\,ctg} Az \cdot \sin^2\varphi\, d\varphi - \\ - \frac{4p_0}{\pi}(1-2\mu) \int_0^{\frac{\pi}{2}} Az \operatorname{arc\,ctg} Az \cdot \cos^2\varphi\, d\varphi. \qquad (128)$$

Первые два интеграла правой части формулы (128) также выражаются в замкнутой форме. Вторые два интеграла могут быть сведены к эллиптическим интегралам, а именно:

к эллиптическому интегралу первого рода

$$K(e, \psi) = \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}$$

и эллиптическому интегралу второго рода (129)

$$L(e, \psi) = \int_0^{\psi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

где параметр

$$\psi = \operatorname{arc\,ctg} \frac{z}{a}; \quad e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

квадрат эксцентриситета контурного эллипса площадки контакта.

Окончательное выражение для напряжений σ_x, т. е. для нормальных напряжений в площадке, перпендикулярной к большой оси эллипса (ось x), можно представить в следующей форме [57]:

$$\sigma_x = -p_0 \frac{ab}{a^2-b^2}\left\{1 - \sqrt{\frac{b^2+z^2}{a^2+z^2}} + 2\frac{z}{a}(L-K) - \right.$$

$$\left. -2\mu\left[1 - \frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{b^2+z^2}{a^2+z^2}} + \frac{z}{a}\left(\frac{a^2}{b^2}L - K\right)\right]\right\}, \qquad (130)$$

где эллиптические интегралы первого и второго родов $K(e, \psi)$ и $L(e, \psi)$ определяются формулами (129).

В частном случае круговой площадки контакта радиуса $a=b$ параметр $A=\frac{1}{a}$, в выражение (130) для напряжений σ_x совпадает с полученной ранее формулой (104).

В. Нормальное напряжение σ_y

Согласно формулам (121) и (119)

$$\sigma_y = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\left[\sigma_r' \cos^2\varphi + \sigma_t' \sin^2\varphi\right] p_0 \sqrt{1-r^2A^2}\, r dr d\varphi. \qquad (131)$$

После ряда преобразований, аналогичных преобразованиям при вычислении σ_x, окончательное выражение для напряжений σ_y, т. е. нормальных напряжений в площадке, перпендикулярной к малой оси эллипса (ось y), имеет следующий вид:

$$\sigma_y = -p_0 \frac{ab}{a^2-b^2}\left\{-1 + \frac{a^2b^2 + z^2(2a^2-b^2)}{b^2\sqrt{a^2+z^2}\sqrt{b^2+z^2}} - \right.$$

$$\left. -2\frac{z}{a}\left(\frac{a^2}{b^2}L - K\right) + 2\mu\left[1 - \sqrt{\frac{b^2+z^2}{a^2+z^2}} + \frac{z}{a}(L-K)\right]\right\}. \qquad (132)$$

В частном случае при $a=b$ (круговая площадка контакта) выражение (132) совпадает с формулой (104).

Г. Касательные напряжения $\tau_{xy}=\tau_{yx}$; $\tau_{yz}=\tau_{zy}$; $\tau_{zx}=\tau_{xz}$.

Согласно формулам (122) и (119) и принципу сложения действия сил

$$\tau_{xy} = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\frac{1}{2}(\sigma_r' - \sigma_t')\sin 2\varphi \cdot p_0\sqrt{1-r^2A^2}\, r dr d\varphi; \qquad (133)$$

$$\tau_{yz} = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\tau_{rz}'\cos\varphi \cdot p_0\sqrt{1-r^2A^2}\, r dr d\varphi; \qquad (134)$$

$$\tau_{zx} = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\tau_{rz}'\sin\varphi \cdot p_0\sqrt{1-r^2A^2}\, r dr d\varphi. \qquad (135)$$

Используя выражения (120), легко показать, что все рассматриваемые касательные напряжения обращаются в нуль, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = 0; \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = 0; \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

Итак, для любой точки D (см. фиг. 309), лежащей на продолжении центральной оси эллипсоида давлений на расстоянии z от площадки контакта, все касательные напряжения в площадках, параллельных координатным, обращаются в нуль, и, следовательно, нормальные напряжения σ_x, σ_y, σ_z в этих площадках являются главными напряжениями.

Из соображений удобства вычислений целесообразно представить полученные выше выражения для главных напряжений в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -p_0 \frac{\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}}{1+\frac{z^2}{a^2}}} + 2\frac{z}{a}(L-K) - \right. \\ &\left. - 2\mu \left[1 - \frac{a^2}{b^2} \sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}}{1+\frac{z^2}{a^2}}} + \frac{z}{a}\left(\frac{a^2}{b^2}L - K\right) \right] \right\}; \\ \sigma_y &= -p_0 \frac{\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}} \left\{ -1 + \frac{1+\frac{z^2}{a^2}\left(2\frac{a^2}{b^2}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}}} - \right. \\ &\left. - 2\frac{z}{a}\left(\frac{a^2}{b^2}L - K\right) + 2\mu \left[1 - \sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}}{1+\frac{z^2}{a^2}}} + \frac{z}{a}(L-K) \right] \right\}; \\ \sigma_z &= -p_0 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}}\sqrt{1+\frac{z^2}{b^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

Все три главных напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ выражены здесь как функции следующих величин: отношения полуосей a и b эллиптического контура площадки контакта, отношения глубины залегания z рассматриваемой точки к большой a или малой b полуоси и давления p_0 в центре площадки контакта. Кроме того, в выражения для напряжений σ_x и σ_y входит одна из упругих постоянных материала — коэффициент Пуассона μ. В дальнейшем он принят равным $\mu = 0{,}30$. Задаваясь различными значениями отношения полуосей, именно $\frac{b}{a} = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, и используя формулы (137), рассмотрим изменение главных напряжений σ_x, σ_y и σ_z в зависимости от величины отношения $\frac{z}{a}$. Результаты вычислений представлены графиками на фиг. 321, *а* — *г*.

В расчетах на прочность большое значение играют величины наибольших касательных напряжений в семействах площадок, нормальных к главным площадкам (радиусы трех окружностей круговой диаграммы напряженного состояния). Задаваясь различными значениями отношения полуосей эллипса, рассмотрим изменение попарных разностей главных напряжений, т. е. удвоенных величин наибольших касательных напряжений в зависимости от величины отношения $\frac{z}{a}$. Результаты вычислений изображены графически на фиг. 322, *а* — *г*. Значения глубины залегания $\frac{z}{a}$ и величин наибольших значений попарных разностей главных напряжений σ_x, σ_y, σ_z при различных значениях отношения полуосей b и a эллиптической площадки контакта приведены в табл. 16. Из рассмотрения этой таблицы следует, что наибольшая величина разности главных напряжений (именно σ_z и σ_y) достигает $\sim 0{,}650\, p_0$ при $z=0{,}31\, a$. Это имеет место для эллиптического контура с отношением полуосей $\frac{b}{a}=0{,}5$. Следовательно наибольшее значение максимального касательного напряжения составляет $\sim 0{,}325\, p_0$. Эта величина остается почти без изменения и для других значений отношения полуосей контурного эллипса.

Таблица 16

Отношения величин наибольших значений попарных разностей главных напряжений σ_x, σ_y, σ_z к давлению p_0 и относительные ординаты $\frac{z}{a}$ соответствующих точек оси z при различных значениях отношения полуосей b и a эллиптической площадки контакта

$\frac{b}{a}$	$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{p_0}$	$\frac{z}{a}$	$\frac{\sigma_z-\sigma_x}{p_0}$	$\frac{z}{a}$	$\frac{\sigma_z-\sigma_y}{p_0}$	$\frac{z}{a}$
0,25	0,136	0,22	0,518	0,15	0,646	0,18
0,50	0,086	0,34	0,565	0,30	0,649	0,31
0,75	0,037	0,43	0,598	0,41	0,635	0,41
1,00	0	Везде	0,620	0,48	0,620	0,48

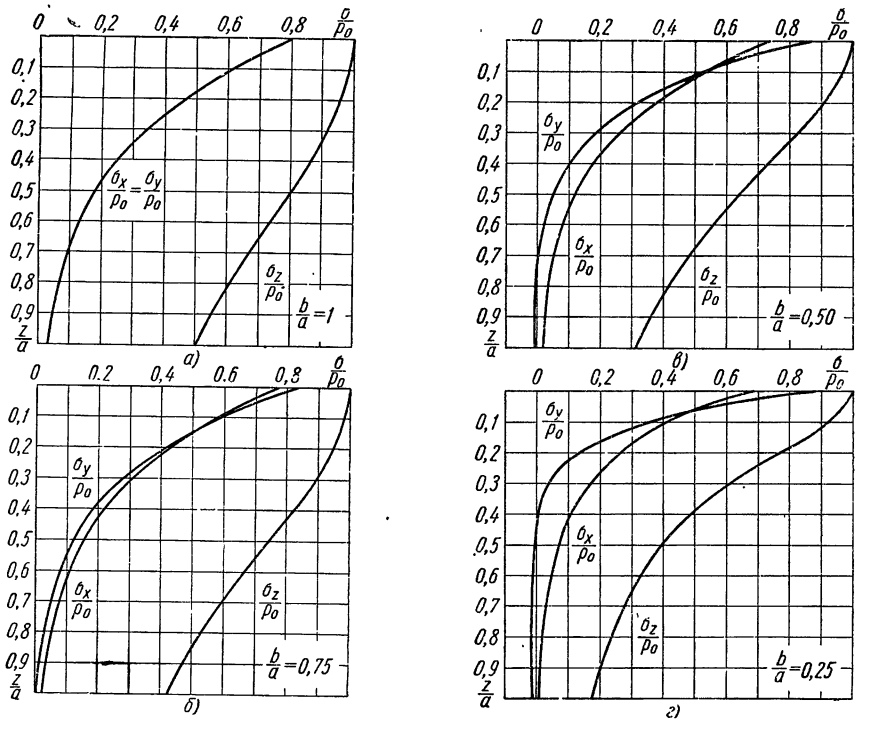
Так, при $b=a$, т. е. для случая круговой площадки контакта, она уменьшается только до значения $0{,}310\, p_0$.

Обратимся теперь к рассмотрению напряженного состояния в точках, лежащих непосредственно у поверхности площадки контакта соприкасающихся тел.

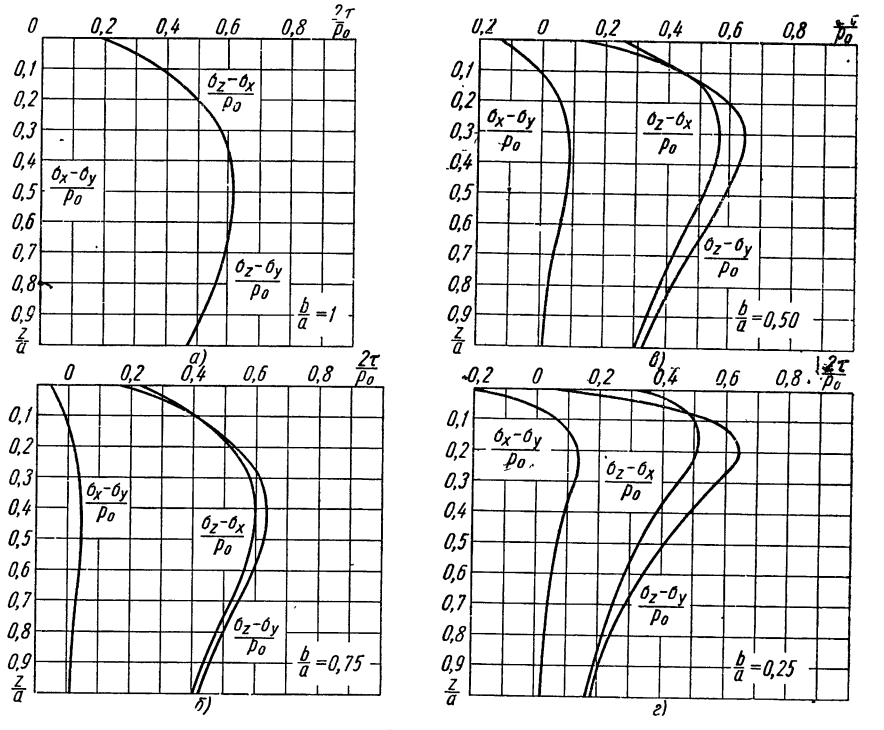
Полагая $z=0$ в формулах (137), получим выражения для напряжений в центре эллиптической площадки контакта:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -p_0\,\frac{2\mu+\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}};\\ \sigma_y &= -p_0\,\frac{1+2\mu\cdot\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}};\\ \sigma_z &= -p_0. \end{aligned}\right\} \qquad (138)$$

Здесь оси x и y направлены соответственно по большой и малой осям контурного эллипса площадки контакта.

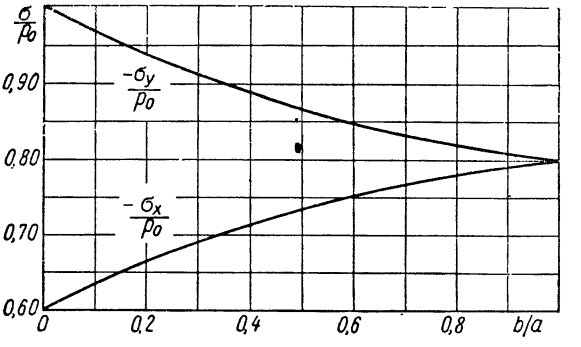


Фиг. 321



Фиг. 322

Касательные напряжения в координатных плоскостях, проходящих через центр площадки контакта, обращаются в нуль. Зависимость главных напряжений σ_x и σ_y от величины отношения полуосей эллипса (при $\mu = 0.30$) изображена на фиг. 323. Главное напряжение σ_z независимо от величины отношения $\frac{b}{a}$ равно наибольшему давлению p_0 в центре площадки контакта. Все три главных напряжения в рассматриваемой точке (центр площади контакта) отрицательны, т. е. являются напряжениями сжатия.



Фиг. 323.

Для точек контура эллиптической площадки контакта нормальные напряжения σ_z и касательные напряжения $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ и $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ отсутствуют. Аналогично тому, как это было сделано выше для круговой площадки контакта, можно получить следующие выражения для нормальных напряжений σ_x, σ_y и касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ в точках контура эллиптической площадки контакта:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -p_0(1-2\mu)\frac{\beta}{e^2}\left[1 - \frac{x}{ae}\operatorname{arcth}\frac{ex}{a} - \frac{\beta y}{be}\operatorname{arctg}\frac{ey}{b\beta}\right];\\
\sigma_y &= p_0(1-2\mu)\frac{\beta}{e^2}\left[1 - \frac{x}{ae}\operatorname{arcth}\frac{ex}{a} - \frac{\beta y}{be}\operatorname{arctg}\frac{ey}{b\beta}\right];\\
\tau_{xy} &= -p_0(1-2\mu)\frac{\beta^2}{e^2}\cdot\frac{xy}{ab}\left[\frac{x}{ae}\operatorname{arcth}\frac{ex}{a} - \frac{\beta y}{be}\operatorname{arctg}\frac{ey}{b\beta}\right],
\end{aligned}\right\} \quad (139)$$

где введены обозначения $\beta = \frac{b}{a}$ и $e^2 = 1 - \beta^2$.

В общем случае $\tau_{xy} \neq 0$, и нормальные напряжения σ_x и σ_y в отличие от центра площадки контакта не являются главными напряжениями. Одним из трех главных напряжений является напряжение $\sigma_z = \sigma_2 = 0$. Два других главных напряжения определяются следующими выражениями:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Таким образом, во всех точках контурного эллипса площадки контакта имеет место плоское напряженное состояние, известное под названием чистого сдвига ($\sigma_1 = -\sigma_3$, $\sigma_2 = 0$). Плоскость чистого сдвига совпадает с координатной плоскостью xy.

Если принять в общих формулах (139) $x=a$ и $y=0$, то на конце большой полуоси контурного эллипса касательное напряжение τ_{xy} будет отсутствовать и нормальные напряжения в координатных плоскостях определятся следующим выражением:

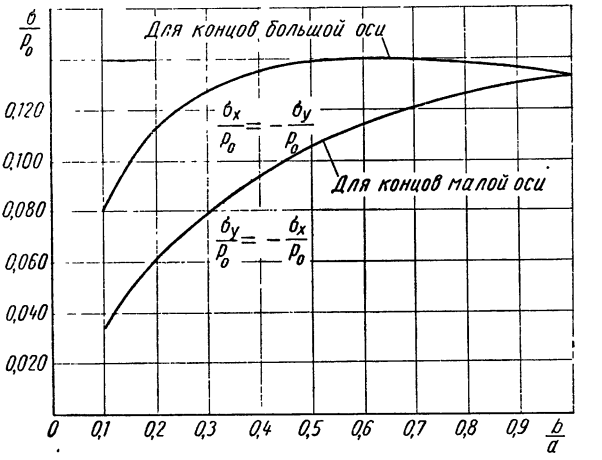
$$\sigma_x = -\sigma_y = -p_0(1-2\mu)\frac{\beta}{e^2}\left[1-\frac{1}{e}\operatorname{arcth} e\right]. \qquad (140)$$

Эти напряжения и напряжение $\sigma_z = 0$ являются главными.

Пусть, например, отношения полуосей контурного эллипса $\beta = \frac{b}{a} = 0{,}5$; тогда эксцентриситет эллипса

$$e = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} = 0{,}8660;$$

по таблицам обратный гиперболический тангенс $\operatorname{arcth} e = 1{,}317$ и искомые величины напряжений (полагая $\mu = 0{,}30$), $\sigma_x = 0{,}139\,p_0$ и $\sigma_y = -0{,}139\,p_0$.



Фиг. 324.

Таким образом, для конца большой полуоси эллипса напряжение σ_x, направленное вдоль большой оси, является напряжением растяжения, а напряжение σ_y, направленное параллельно малой оси, — напряжением сжатия.

Зависимость величин главных напряжений σ_x и σ_y от величины отношения $\beta = \frac{b}{a}$ при $\mu = 0{,}30$ изображена на фиг. 324.

На конце малой полуоси эллипса ($x=0$, $y=b$) касательное напряжение $\tau_{xy}=0$ и нормальные напряжения σ_x и σ_y определяются следующими выражениями:

$$\sigma_x = -\sigma_y = -p_0(1-2\mu)\frac{\beta}{e^2}\left[1-\frac{\beta}{e}\operatorname{arctg}\frac{e}{\beta}\right]. \qquad (141)$$

Так, например, при $\frac{b}{a} = 0{,}5$ величина $\frac{e}{\beta} = 1{,}732$, обратный круговой тангенс $\operatorname{arctg}\frac{e}{\beta} = 1{,}047$ и величины напряжений ($\mu = 0{,}30$) следующие: $\sigma_x = -0{,}105\,p_0$ и $\sigma_y = +0{,}105\,p_0$.

Для конца малой полуоси эллипса напряжение σ_y, направленное вдоль этой оси, является напряжением растяжения, а напряжение σ_x, направленное параллельно большой оси, — напряжением сжатия.

Зависимость величин главных напряжений σ_x и σ_y от величины отношения $\beta = \frac{b}{a}$ при $\mu = 0{,}30$ изображена на фиг. 324.

Наибольшей величины

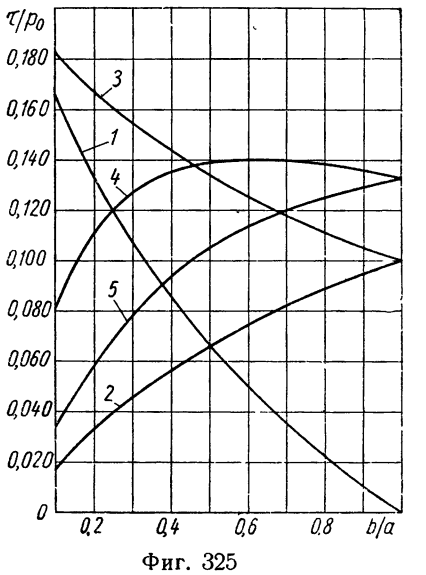
$$\sigma_x = -\sigma_y = 0{,}140\, p_0$$

главные напряжения по концам большой оси эллипса достигают при $b = 0{,}6\, a$, а по концам малой оси

$$\sigma_x = -\sigma_y = -0{,}133 p_0$$

при $b = a$, т. е. для круговой площадки контакта. Независимо от соотношения между полуосями контурного эллипса площадки контакта напряжения по концам большой оси всегда превышают напряжения по концам малой оси, и только для круговой площадки контакта совпадают по величине.

На фиг. 325 изображен ряд кривых зависимости экстремальных касательных напряжений в рассмотренных выше точках у поверхности эллиптической площадки контакта от величины отношения $\frac{b}{a}$. Первые три кривые изображают собой зависимости экстремальных касательных напряжений в центре эллиптической площадки контакта от отношения полуосей этой площадки:



Фиг. 325

кривая *1*

$$\tau_{экстр} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 p_0};$$

кривая *2*

$$\tau_{экстр} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2 p_0};$$

кривая *3*

$$\tau_{экстр} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2 p_0},$$

где величины главных напряжений σ_x, σ_y, σ_z определяются формулами (138).

Следующие две кривые представляют собой соответственно зависимости наибольших из экстремальных касательных напряжений для концов большой и малой осей контурного эллипса площадки контакта от отношения полуосей этого эллипса:

кривая *4*

$$\tau_{экстр} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 p_0},$$

где величины главных напряжений σ_x и σ_y определяются формулами (140),

кривая *5*

$$\tau_{экстр} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2p_0},$$

где величины главных напряжений σ_x и σ_y определяются формулами (141).

Из рассмотрения кривых фиг. 325 следует, что для точек у поверхности эллиптической площадки контакта величины наибольших касательных напряжений имеют место:

при $\frac{b}{a} < 0{,}47$ — в центре площадки контакта (кривая *3*);

при $\frac{b}{a} > 0{,}47$ — по концам большой оси площадки контакта (кривая *4*).

Величина наибольшего касательного напряжения в точках у поверхности площадки контакта не превышает $0{,}200\,p_0$, т. е. значительно меньше наибольшего касательного напряжения $0{,}325\,p_0$ для точек, лежащих на центральной оси z внутри тела.

§ 9. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В СЛУЧАЕ ПЕРВОНАЧАЛЬНОГО КОНТАКТА ПО ЛИНИИ

Два цилиндра неограниченной длины с параллельными осями соприкасаются до деформации по линии (общая образующая). После приложения сжимающих сил, равномерно распределенных по длине цилиндров, первоначально линейное касание переходит в соприкасание по узкой полосе, ограниченной двумя прямыми. Выражение для полуширины b площадки контакта дано в табл. 13.

Напряженное состояние соприкасающихся цилиндров в окрестности зоны контакта можно рассматривать как предельное значение напряженного состояния в окрестности эллиптической площадки контакта в том случае, когда эксцентриситет контурного эллипса $e=1$, т. е. когда большая ось эллипса $2a$ неограниченно возрастает.

Напомним, что при рассмотрении эллиптической площадки контакта координатные оси x и y совмещались соответственно с большой и малой осями эллипса.

Рассмотрим выражение (130) для одного из главных напряжений σ_x. При подстановке $a = \infty$ и $e = 1$ имеем

$$\psi = \operatorname{arc\,ctg}\frac{z}{a} = \frac{\pi}{2},$$

и, следовательно, эллиптические интегралы первого рода $K(e, \psi)$ и второго рода $L(e, \psi)$ принимают следующий вид:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \ln \left.\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln\infty;$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = 1.$$

Поскольку эллиптический интеграл первого рода K обращается в логарифмическую бесконечность, то слагаемые вида $\frac{K}{a^2 - b^2}$, входящие в выражение (130), при $a = \infty$ обращаются в нуль.

Оставим в выражении (130) для напряжения только те из слагаемых, которые не обращаются в нуль при $a = \infty$, тогда

$$\sigma_x = -p_0 \frac{2\mu}{b}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\sqrt{\frac{b^2+z^2}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2}} - \frac{z}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right].$$

Полагая теперь $a = \infty$, приходим к следующему выражению для напряжения σ_x в произвольной точке плоскости, проходящей перпендикулярно площадке контакта через ее среднюю линию, т. е. через большую ось контурного эллипса при $e = 1$:

$$\sigma_x = -p_0 \cdot 2\mu\left[\sqrt{1+\left(\frac{z}{b}\right)^2} - \frac{z}{b}\right]. \qquad (142)$$

Путем совершенно аналогичных преобразований выражения (132) для напряжений σ_y имеем

$$\sigma_y = -p_0\left[\frac{1+2\left(\frac{z}{b}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{b}\right)^2}} - 2\frac{z}{b}\right]. \qquad (143)$$

Из выражения (125) для напряжений σ_z непосредственно следует, что при $a = \infty$

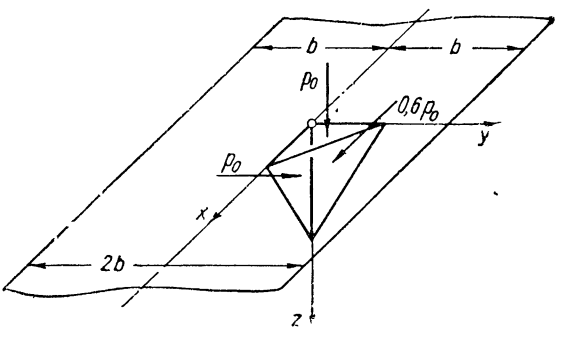
$$\sigma_z = -p_0 \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{b}\right)^2}}. \qquad (144)$$

При $z = 0$, т. е. для точек средней линии полосы контакта,

$$\sigma_x = -2\mu p_0;\ \sigma_y = -p_0;\ \sigma_z = -p_0. \qquad (145)$$

Для материала с $\mu = 0{,}5$ все три главных напряжения равны между собой, т. е. в рассматриваемых точках имеет место всестороннее равномерное сжатие.

Главные напряжения в точках средней линии полосы контакта при $\mu = 0{,}30$ изображены на фиг. 326.



Фиг. 326

Приведем без вывода выражения для компонентов напряженного состояния в произвольной точке окрестности зоны контакта соприкасающихся тел. Примем, что ось x направлена вдоль полосы контакта по ее средней линии, ось y лежит в плоскости полосы контакта перпендикулярно ее средней линии и ось z перпендикулярна плоскости полосы контакта и направлена внутрь тела. Так как длина соприкасающихся цилиндров предполагается неограниченно большой, то начало координат можно совместить с любой точкой средней линии полосы контакта. Другими словами, напряженное состояние соприкасающихся тел в рассматриваемом случае линейного контакта не зависит от координаты x, т. е. постоянно вдоль полосы контакта. Тогда выражения для компо-

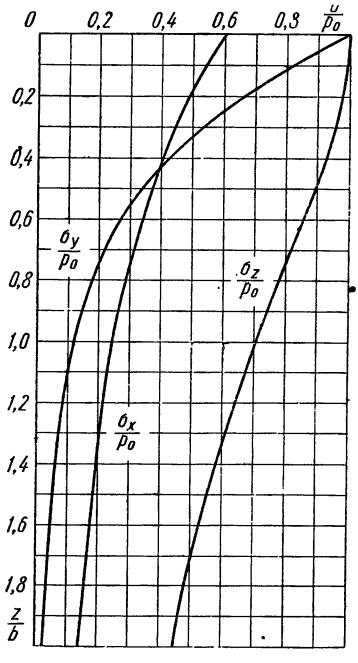
нентов напряженного состояния в произвольной точке с координатами (y, z) имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -p_0\,2\mu\frac{z}{b}\left[\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{\lambda}}-1\right];\\
\sigma_y &= -p_0\frac{z}{b}\left[\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{\lambda}}\left(2-\frac{b^2z^2}{\lambda^2+b^2z^2}\right)-2\right];\\
\sigma_z &= -p_0\frac{b\,z^3}{\lambda^2+b^2z^2}\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{\lambda}};\\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = -p_0\frac{b\,y\,z^2}{\lambda^2+b^2z^2}\sqrt{\frac{\lambda}{b^2+\lambda}};\\
\tau_{zx} &= \tau_{xz} = 0;\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (146)$$

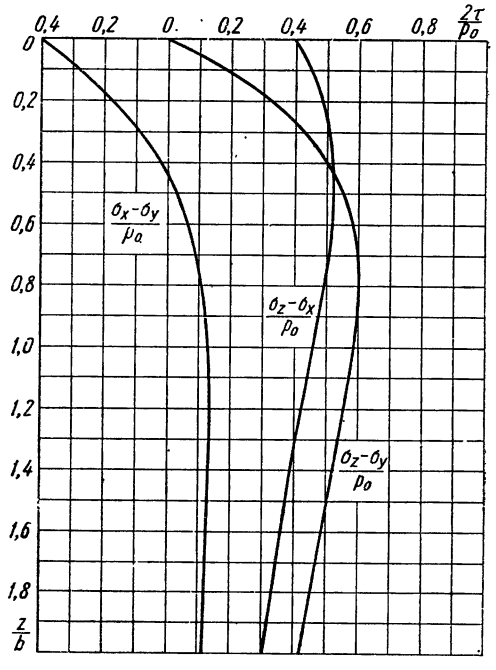
Во всех приведенных формулах λ — наибольший корень уравнения

$$\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{\lambda}=1. \qquad (147)$$

При $y=0$, т. е. для точек плоскости, перпендикулярной к плоскости полосы контакта и проходящей через среднюю линию этой полосы (плоскость xz), касательные напряжения $\tau_{yz}=\tau_{zy}$ обращаются в нуль,



Фиг. 327



Фиг. 328

и выражения (146) для нормальных напряжений σ_x, σ_y, σ_z переходят соответственно в формулы (142) — (144). В этих формулах все три главных напряжения σ_x, σ_y, σ_z выражены как функции следующих величин: отношения глубины залегания z рассматриваемой точки к полуширине b полосы контакта соприкасающихся цилиндров и дав-

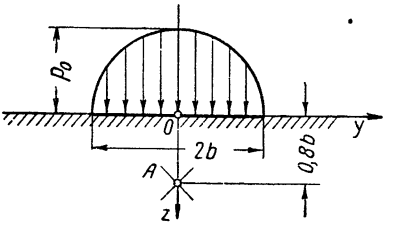
ления $p_0 = \frac{2}{\pi}\frac{q}{b}$ в точках средней линии полосы контакта (где q — сжимающая нагрузка на единицу длины цилиндров).

Кроме того, в выражение для напряжений σ_x входит коэффициент Пуассона μ, в дальнейшем он принят равным 0,30. Результаты вычислений, показывающих зависимость главных напряжений σ_x, σ_y, σ_z от величины отношения $\frac{z}{b}$, изображены графически на фиг. 327. Из рассмотрения графиков следует, что наименьшим (с учетом знака) из трех главных напряжений является σ_z, а наибольшим (с учетом знака) при $0 < \frac{z}{b} < 0{,}45$ напряжение σ_x и при $0{,}45 < \frac{z}{b} < 2$ напряжение σ_y. В рассматриваемом интервале изменения отношения $\frac{z}{b}$ все три главных напряжения отрицательны, т. е. представляют собой напряжения сжатия.

Так как в расчетах на прочность большое значение играют величины наибольших касательных напряжений в семействах площадок, нормальных к главным (радиусы трех окружностей круговой диаграммы напряженного состояния), то на фиг. 328 изображено изменение их удвоенных величин, т. е. попарных разностей главных напряжений в зависимости от отношения $\frac{z}{b}$. Максимальные значения попарных разностей главных напряжений следующие:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= 0{,}400\ p_0 \quad \text{при } \frac{z}{b} = 0; \\ \sigma_z - \sigma_x &= 0{,}524\ p_0 \quad \text{при } \frac{z}{b} = 0{,}5; \\ \sigma_z - \sigma_y &= 0{,}600\ p_0 \quad \text{при } \frac{z}{b} = 0{,}8. \end{aligned}\right\} \qquad (148)$$

Следовательно, наибольшего значения достигает касательное напряжение в точке A, лежащей на глубине $z = 0{,}8\,b$ от поверхности соприкасающихся цилиндров, по двум взаимно-перпендикулярным площадкам, нормальным к плоскости yz и образующим углы 45° с осью z (фиг. 329).



Фиг. 329

Для расчета деталей на прочность необходимо разрешение двух основных вопросов:

1) задачи о распределении напряжений в детали и о характере напряженного состояния в той или иной точке этой детали;

2) вопроса о допустимости того или иного напряженного состояния с точки зрения прочности конструкции.

В результате полного решения первой задачи определяются величины главных напряжений для произвольной точки детали в зависимости от приложенных к детали нагрузок.

Современное состояние физики твердого тела еще не позволяет дать теоретическое решение второй задачи, т. е. задачи о сравнении различных напряженных состояний с точки зрения прочности материала детали. Поэтому практическое решение этой задачи основано на введении так называемых гипотез пластичности и прочности. Для вязких (пластичных) материалов в настоящее время наиболее распространенными гипотезами являются следующие две:

1) гипотеза наибольших касательных напряжений;

2) гипотеза потенциальной энергии формоизменения или гипотеза средних касательных напряжений.

Подробное изложение и обоснование этих гипотез дано в гл. VI т. I.

Эквивалентное напряжение по гипотезе наибольших касательных напряжений равно

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3, \tag{149}$$

а по гипотезе средних касательных напряжений

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \tag{150}$$

где σ_1 — наибольшее;

σ_2 — промежуточное;

σ_3 — наименьшее из трех главных напряжений (с учетом знака).

Расчет на прочность производится по наибольшей величине эквивалентного напряжения, поэтому представляет существенный интерес рассмотреть изменение величины эквивалентного напряжения по выражениям (149) и (150) в зависимости от ординаты z (глубины залегания) рассматриваемой точки. Результаты вычислений сведены в табл. 17.

Таблица 17

Отношения величин эквивалентных напряжений $\sigma'_{экв}$ по гипотезе максимальных касательных напряжений и эквивалентных напряжений $\sigma''_{экв}$ по гипотезе средних касательных напряжений к давлению p_0 в зависимости от относительных ординат $\frac{z}{b}$ рассматриваемых точек оси z в случае площадки контакта в виде полосы

$\frac{z}{b}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{\sigma'_{экв}}{p_0}$	0,400	0,452	0,489	0,511	0,522	0,553	0,583	0,597	0,600	0,596	0,586
$\frac{\sigma''_{экв}}{p_0}$	0,400	0,394	0,431	0,475	0,503	0,539	0,553	0,557	0,554	0,546	0,534
$\frac{z}{b}$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	
$\frac{\sigma'_{экв}}{p_0}$	0,572	0,556	0,539	0,522	0,504	0,486	0,469	0,453	0,437	0,422	
$\frac{\sigma''_{экв}}{p_0}$	0,519	0,503	0,487	0,470	0,453	0,436	0,421	0,406	0,392	0,378	

Заметим, что по гипотезе наибольших касательных напряжений:

при $\frac{z}{b} < 0{,}45$

$$\sigma'_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_x - \sigma_z;$$

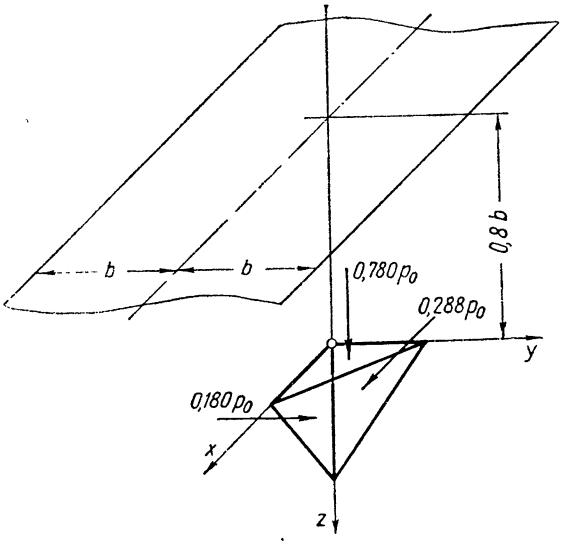
при $\frac{z}{b} > 0{,}45$

$$\sigma'_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y - \sigma_z.$$

Из рассмотрения таблицы следует, что максимальное значение эквивалентного напряжения по гипотезе наибольших касательных напряжений $\sigma'_{экв} = 0{,}600\ p_0$ имеет место при $z = 0{,}8\ b$, а по гипотезе средних касательных напряжений максимальное значение

$$\sigma''_{экв} = 0{,}557\ p_0 \text{ при } z = 0{,}7\ b.$$

Величины и направления главных напряжений для точки $z=0{,}8b$ изображены на фиг. 330, а для точки $z=0{,}7b$ на фиг. 331.



Фиг. 330

Используя рассмотрение напряженного состояния в общем случае эллиптической площадки контакта, изложенное в § 8, не представляет затруднений установить максимальные (расчетные) значения эквивалентных напряжений как по гипотезе наибольших касательных напряжений, так и по гипотезе средних касательных напряжений при различных соотношениях между полуосями a и b эллиптического контура площадки контакта.

Результаты вычислений сведены в табл. 18. При $\frac{b}{a} = 1$ эллиптическая площадка контакта переходит в круговую. В этом случае обе рассматриваемые гипотезы пластичности дают одинаковую величину эквивалентного напряжения. При $\frac{b}{a}$, отличном от 1, гипотеза наибольших касательных напряжений дает несколько большие значения эквивалентного напряжения, чем гипотеза, основанная на рассмотрении средних касательных напряжений.

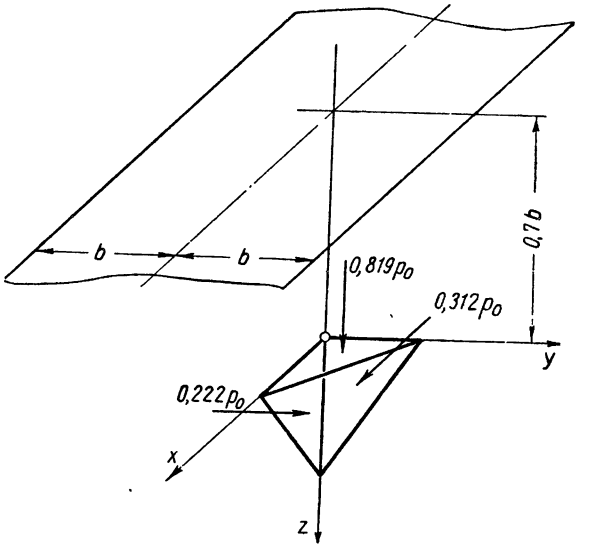
Таблица 18

Отношения величин наибольших эквивалентных напряжений $\sigma'_{экв}$ по гипотезе максимальных касательных напряжений и $\sigma''_{экв}$ по гипотезе средних касательных напряжений к давлению p_0 в зависимости от соотношений между полуосями b и a контурного эллипса площадки контакта

$\frac{b}{a}$		$\frac{\sigma'_{экв}}{p_0}$	$\frac{\sigma''_{экв}}{p_0}$
1 (круг)		0,620	0,620
0,75	Эллипс	0,625	0,617
0,50	Эллипс	0,649	0,611
0,25	Эллипс	0,646	0,587
0 (полоса)		0,600	0,557

Примечание. При $a = b$ эллиптическая площадка контакта переходит в круговую и при $a = \infty$ — в площадку контакта в виде полосы, ограниченной параллельными прямыми.

Итак, максимальные значения эквивалентных напряжений (см. табл. 18), определяющие прочность деталей в местах контакта, зависят главным образом от величины наибольшего давления p_0. Этим и объ-



Фиг. 331.

ясняется то обстоятельство, что расчет на прочность в местах контакта практически часто ведется по величине наибольшего давления. При этом величина фактического значения p_0 (см. § 5, табл. 13) сравнивается с соответственно установленной величиной допускаемого значения давления $[p_0]$. Допускаемые значения наибольшего давления для

сталей и чугунов некоторых марок, при статических нагрузках, приведены в «Справочнике машиностроителя» [90]. Эти значения $[p_0]$ следует рассматривать как ориентировочные величины.

§ 10. ВЛИЯНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ СИЛ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Одно из основных положений изложенной выше теории деформаций тел в местах контакта состоит в том, что силы давления, передаваемые от одного тела на другое и распределенные по поверхности контакта, нормальны к этой поверхности. Вместе с тем во многих случаях инженерной практики приходится сталкиваться с наличием помимо нормальной также и касательной нагрузки и с необходимостью учета ее влияния на напряженное состояние соприкасающихся тел.

Например, в зубчатых передачах рабочая поверхность зуба, как при наличии масляной пленки, так и без нее помимо нормальной нагрузки воспринимает и касательную, связанную с относительным скольжением и определяемую величиной коэффициента трения.

То же самое обстоятельство имеет место в сцепных колесах локомотивов, электровозов, моторных вагонов, кранов, в тормозных колесах подвижного железнодорожного состава и т. д. В подшипниках качения благодаря ряду обстоятельств (кривизна беговой дорожки, гироскопический эффект, взаимный контакт элементов качения друг с другом или с поверхностью сепараторов и т. д.) наличие касательных сил неизбежно.

Проволоки стальных канатов при перегибе последних на блоках и барабанах имеют относительное скольжение, а следовательно, также помимо взаимного надавливания, нагружаются касательными силами. В частности, разрушение витых многожильных пружин, используемых в современных автоматических устройствах, является главным образом следствием взаимного скольжения сильно надавливающих друг на друга жил пружины в процессе ее работы.

Аналогично общепризнанным фактом является более интенсивное разрушение поверхностей качения сцепных колес по сравнению с колесами холостыми. Итак, практическое значение проблемы влияния на износ касательной нагрузки очевидно.

В случаях, когда имеет место видимое относительное скольжение (работа зубчатых колес, буксование сцепных ходовых колес и т. п.), величина касательной нагрузки ограничивается силой сцепления:

$$Q = \nu_0 P,$$

где ν_0 — коэффициент сцепления (трения);

P — нормальная нагрузка.

Но и в тех случаях, когда видимое относительное скольжение не имеет места, касательная нагрузка $Q = \nu P$ (где $\nu < \nu_0$) может быть достаточно велика и в зависимости от условий работы в той или иной степени приближаться к своему предельному значению — силе сцепления.

В литературе имеются указания, что для кранов на подшипниках скольжения при числе сцепных колес, равном половине общего числа ходовых колес, $\nu = 0{,}05$. Это значение относится к случаю установившегося движения крана, в период же разгона величина ν резко возрастает и часто превышает указанное значение в 2—3 раза для кранов, находящихся в средних условиях эксплуатации, и в 4—5 раз для кранов с тяжелым режимом работы, например для некоторых металлургических кранов, в которых часто наблюдается явление буксования при трогании с места.

Сложность точного решения контактной задачи при наличии одновременного действия нормальных и касательных сил заставляет ограничиваться приближенным решением.

Основное допущение приближенного решения заключается в предположении, что для нормальных сил сохраняется эллипсоидальный закон их распределения по площадке контакта и что касательные силы пропорциональны силам нормальным, т. е.

$$\frac{q}{p} = \frac{q_0}{p_0} = \frac{Q}{P} = \nu = \text{const}, \tag{151}$$

где q — интенсивность касательных сил в произвольной точке площадки контакта;

q_0 — их наибольшая интенсивность.

Наиболее исследовано напряженное состояние от касательных сил в случае первоначального контакта по линии. При получении выражений для компонентов напряженного состояния здесь используется эллиптическая система координат. Так, в случае действия касательных сил, направленных перпендикулярно линии первоначального контакта и равномерно распределенных вдоль этой линии (последняя предполагается неограниченной длины), компоненты напряженного состояния могут быть выражены следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2\mu q_0 e^{-\alpha}\cos\beta\,.\\
\sigma_y &= q_0\left[2e^{-\alpha}\cos\beta - \operatorname{sh}\alpha\sin\beta\,\frac{\sin 2\beta}{\operatorname{ch}2\alpha - \cos 2\beta}\right];\\
\sigma_z &= q_0\operatorname{sh}\alpha\sin\beta\,\frac{\sin 2\beta}{\operatorname{ch}2\alpha - \cos 2\beta};\\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = q_0\left[e^{-\alpha}\sin\beta - \operatorname{sh}\alpha\sin\beta\left(1 - \frac{\operatorname{sh}2\alpha}{\operatorname{ch}2\alpha - \cos 2\beta}\right)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{152}$$

где α и β — эллиптические координаты, связанные с декартовыми координатами y и z через гиперболические и круговые функции

$$\left.\begin{aligned}
y &= b\operatorname{ch}\alpha\cdot\cos\beta;\\
z &= b\operatorname{sh}\alpha\cdot\sin\beta;
\end{aligned}\right\} \tag{153}$$

μ — коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) и b — полуширина полоски контакта.

Здесь ось z направлена по нормали к плоскости полосы контакта ось y лежит в плоскости полосы контакта и перпендикулярна ее средней линии.

Заметим, что линии $\alpha = \text{const}$ в эллиптической системе координат представляют собой семейство софокусных эллипсов. Для всех эллипсов этого семейства междуфокусное расстояние равно $2b$ (ширина полоски контакта) и большая ось совпадает с осью y. Линии $\beta = \text{const}$ представляют собой семейство гипербол, ортогональных эллипсам $\alpha = \text{const}$. Для всех этих гипербол вещественной осью служит ось y, а мнимой осью ось z.

Для точек, лежащих в плоскости, перпендикулярной к плоскости полосы контакта и проходящей через ее среднюю линию (плоскости xz), $y = 0$, и из первой формулы (153) следует, что $\cos\beta = 0$ и, следовательно, эллиптическая координата $\beta = \frac{\pi}{2}$. При подстановке $\beta = \frac{\pi}{2}$ в формулы (152) все нормальные напряжения σ_x, σ_y, σ_z обра

щаются в нуль, а выражение для касательного напряжения может быть преобразовано к следующему виду:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = q_0 \left[2 \frac{\sqrt{b^2 + z^2}}{b} - 2 \frac{z}{b} - \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right]. \tag{154}$$

Для всех точек, лежащих на линии первоначального контакта соприкасающихся тел, $z = 0$ и касательные напряжения

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = q_0. \tag{155}$$

Применяя общие выражения (152) для нахождения напряжений у поверхности соприкасающихся тел, необходимо положить $z = 0$, что отвечает или $\operatorname{sh}\alpha = 0$, или $\sin\beta = 0$.

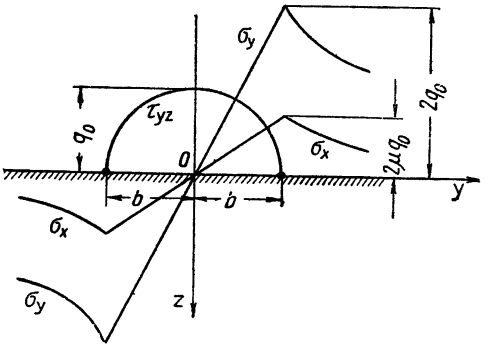
При $\operatorname{sh}\alpha = 0$, $\operatorname{ch}\alpha = 1$ согласно зависимости (153) $y < b$, т. е. рассматриваются точки, принадлежащие площадке контакта. В этом случае компоненты напряженного состояния могут быть выражены следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu q_0 \cos\beta = 2\mu q_0 \frac{y}{b}; \\ \sigma_y &= 2 q_0 \cos\beta = 2 q_0 \frac{y}{b}; \\ \sigma_z &= 0; \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = q_0 \sin\beta = q_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

При $\sin\beta = 0$, $\cos\beta = 1$ согласно зависимости (153) $y > b$, т. е. рассматриваются точки поверхности тела, лежащие вне площадки контакта. В этом случае

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu q_0 e^{-\alpha} = 2\mu q_0 \frac{1}{b}\left[y - \sqrt{y^2 - b^2}\right]; \\ \sigma_y &= 2 q_0 \frac{1}{b}\left[y - \sqrt{y^2 - b^2}\right]; \\ \sigma_z &= 0; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{157}$$

Эпюры напряжений вдоль оси y по формулам (156) и (157) изображены на фиг. 332. Интересно отметить, что нормальные напряжения σ_x и σ_y достигают наибольших значений у контура площадки контакта ($y = \pm b$). Имея выражения для компонентов напряженного состояния от нормальных сил (см. § 9) и от сил касательных, не представляет затруднений путем простого наложения исследовать эффект их совместного действия. Влияние касательных сил сказывается в постепенном приближении точки с наибольшим касательным напряжением из глубины к поверхности соприкасающихся тел и в росте величины этого напряжения параллельно с увеличением значения коэффициента трения.



Фиг. 332

Так, по Б. С. Ковальскому

ν	0	0,2	0,3
$\frac{\tau_{max}}{p_0}$	0,30	0,34	0,38

Случай действия касательных сил, параллельных линии первоначального контакта и распределенных равномерно вдоль этой линии, рассмотрен в работе [87].

В этой работе также рассматривается напряженное состояние, возникающее при одновременном действии нормальной и произвольно направленной касательных нагрузок.

§ 11. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ КОНТАКТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ К РАСЧЕТУ ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ НА СТАТИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ

По характеру воспринимаемых нагрузок подшипники качения разделяются на следующие три группы:

1) радиальные, приспособленные главным образом к восприятию нагрузок, направленных перпендикулярно оси вала;

2) упорные, применяемые при нагрузках, направленных вдоль оси вала;

3) радиально-упорные, предназначенные для комбинированных нагрузок.

По формуле тел качения подшипники делятся на две группы:

1) шарикоподшипники с телами качения сферической формы;

2) роликоподшипники с телами качения в виде цилиндров, конусов, эллипсоидов (ролики бочкообразной формы) и т. п.

Рассмотрим применение теории контактных деформаций главным образом к радиальным шарикоподшипникам.

Установим закон распределения нагрузки между отдельными шариками для радиального однорядного подшипника.

Этот подшипник (фиг. 333) состоит из наружного кольца, внутреннего кольца, шариков и сепаратора. На наружной поверхности внутреннего кольца и внутренней поверхности наружного кольца имеются дорожки качения для направления движения перекатывающихся шариков. Назначение сепараторов — удерживать шарики на определенном расстоянии друг от друга.

Излагаемое ниже исследование закона распределения нагрузки между шариками основано на двух допущениях:

1) предполагается, что в подшипнике, находящемся под нагрузкой, радиальный зазор (люфт) отсутствует;

2) учитываются только контактные деформации шарика и колец в местах соприкасания; изгиб колец подшипника во внимание не принимается.

Представим себе, что под действием нагрузки Q на подшипник (реакция со стороны вала) внутреннее кольцо переместилось как твердое тело в направлении силы Q на величину $\delta_0 = ab$ (фиг. 334).

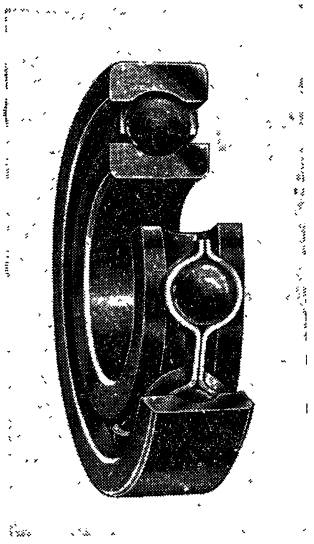
Так как изгибом кольца пренебрегают и рассматривают его как твердое тело, то отрезки

$$ab = a_1b_1 = a_2b_2 = \ldots = \delta_0.$$

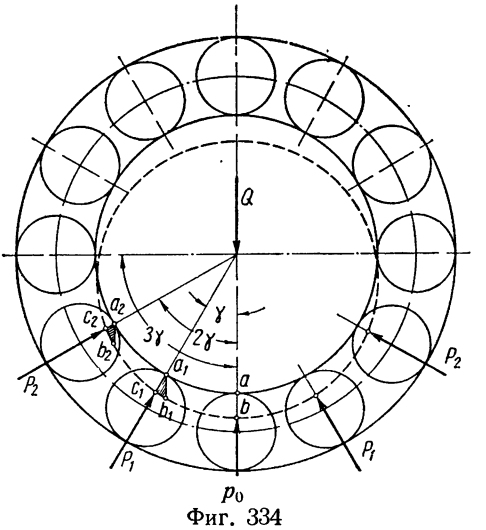
Из треугольников $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ и т. д. выражаем радиальные перемещения δ_1, δ_2, δ_3, ..., δ_n точек контакта шариков и кольца через величину δ_0:

$$\left.\begin{aligned} a_1c_1 &= \delta_1 = \delta_0 \cos\gamma; \\ a_2c_2 &= \delta_2 = \delta_0 \cos 2\gamma; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_nc_n &= \delta_n = \delta_0 \cos n\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (158)$$

Здесь γ, 2γ, ..., $n\gamma$ — углы между направлением действующей силы Q и осью соответствующего шарика, направленной к центру подшипника; наибольший из этих углов $n\gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$, так как шарики верхней половины подшипника не участвуют в передаче нагрузки Q от внутреннего кольца наружному.



Фиг. 333



Фиг. 334

Величины радиальных перемещений δ_0, δ_1, δ_2, ..., δ_n, обусловленные контактной деформацией, представляют собой сближения соприкасающихся тел, именно шариков и кольца подшипника.

Выше было получено выражение (76) для сближения двух соприкасающихся тел в случае точечного контакта:

$$\delta = n_\delta \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \Sigma k P^2}.$$

Применяя формулу (76), легко выразить величины δ_0, δ_1, δ_2, ..., δ_n через соответствующие силы P_0, P_1, P_2,..., P_n, представляющие взаимодействие между шариками и кольцами подшипника. На фиг. 334 показаны силы, действующие со стороны шариков на внутреннее кольцо.

Для данного подшипника с конкретными размерами искомые величины радиальных перемещений можно представить с учетом формулы (76) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \delta_0 &= \text{const}\, P_1^{\frac{2}{3}};\\ \delta_1 &= \text{const}\, P_2^{\frac{2}{3}};\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \delta_n &= \text{const}\, P_n^{\frac{2}{3}}; \end{aligned}\right\} \qquad (159)$$

Используя зависимости (158) и (159), выражаем силы P_1, P_2,..., P_n, через P_0:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= P_0 \cos^{\frac{3}{2}} \gamma;\\ P_2 &= P_0 \cos^{\frac{3}{2}} 2\gamma;\\ &\cdots\cdots\cdots\\ P_n &= P_0 \cos^{\frac{3}{2}} n\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (160)$$

Используя условие равновесия внутреннего кольца, находящегося под действием вертикальной силы Q и радиальных сил P_0, P_1, P_2,..., P_n, получаем

$$Q = P_0 + 2P_1 \cos\gamma + 2P_2 \cos 2\gamma + \ldots + 2P_n \cos n\gamma,$$

или, учитывая зависимости (160), имеем

$$Q = P_0\left[1 + 2\cos^{\frac{5}{2}}\gamma + 2\cos^{\frac{5}{2}} 2\gamma + \ldots + 2\cos^{\frac{5}{2}} n\gamma\right].$$

Введем обозначение

$$k = \frac{i}{1 + 2\cos^{\frac{5}{2}}\gamma + 2\cos^{\frac{5}{2}} 2\gamma + \ldots + 2\cos^{\frac{5}{2}} n\gamma}, \qquad (161)$$

где i — общее число шариков в подшипнике.

Тогда приходим к следующему выражению для усилия на наиболее нагруженный (нижний) шарик

$$P_0 = k\frac{Q}{i}, \qquad (162)$$

где коэффициент k определяется выражением (161).

Непосредственными вычислениями легко показать, что при изменении числа шариков от $i=10$ и до $i=20$ значение коэффициента k остается почти постоянным. Допустим, что общее число шариков в подшипнике $i=10$, тогда

$$k = \frac{10}{1 + 2\cos^{\frac{5}{2}} 36^\circ + 2\cos^{\frac{5}{2}} 60^\circ} = 4{,}38.$$

При числе шариков $i=20$ искомый коэффициент $k=4{,}37$.

Оба допущения, положенные в основу изложенного исследования распределения нагрузки между телами качения, оправдываются только частично. При наличии радиального зазора и учете деформации изгиба

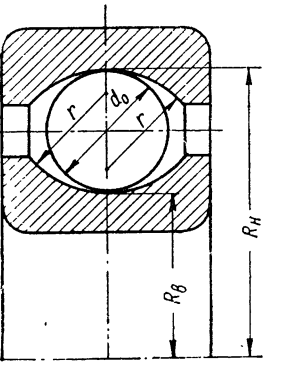
колец можно ожидать некоторого изменения усилия, приходящегося на нижний шарик. Благодаря этому принято увеличивать значение коэффициента k и брать его равным $k=5$, т. е. вычислять усилие на наиболее нагруженный шарик по формуле

$$P_0 = 5\frac{Q}{i}, \qquad (163)$$

где i — полное число шариков в радиальном однорядном подшипнике;

Q — радиальная (перпендикулярная к оси вала) нагрузка на подшипник.

Уточненное теоретическое исследование распределения нагрузки между шариками с учетом влияния радиального зазора, овальности и изгиба колец, а также отклонений в размере отдельных шариков выполнено Г. А. Игнатьевым [31]. Это исследование, как и следовало ожидать, приводит к значительно более сложным выражениям для усилия на наиболее нагруженный шарик.



Фиг. 335

Расчет невращающихся подшипников или вращающихся весьма медленно (делающих менее одного оборота в минуту) ведется на статическую, т. е. постоянную во времени, нагрузку. Допускаемую величину нагрузки здесь ограничивает только наступление предела текучести материала. Примерами конструкций, где необходимо определение статической грузоподъемности подшипников качения, могут служить крановые пяты, упорные подшипники крановых крюков, опоры различных поворотных устройств, подпятники прессов, опоры нажимных устройств и т. п.

До приложения нагрузки шарики соприкасаются с дорожками качения внутреннего и наружного колец в точках. После деформации тела качения и кольца соприкасаются по эллиптическим площадкам, размеры которых зависят от главных кривизн соприкасающихся тел в точке первоначального контакта.

Главные кривизны шарика диаметра d_0

$$k_{11} = k_{12} = \frac{2}{d_0}.$$

Обозначим радиус окружности качения (по дну желоба) для внутреннего кольца через $R_в$ и для наружного через $R_н$ (фиг. 335). Тогда одна из главных кривизн внутреннего кольца

$$k_{21} = \frac{1}{R_в}$$

и наружного кольца

$$k_{21} = -\frac{1}{R_н}.$$

Заметим, что при выпуклой кривизне тела берется положительный знак, а при вогнутой отрицательный. Обозначим радиус поперечного профиля дорожки качения, одинаковый для внутреннего и наружного колец, через r, тогда вторая главная кривизна колец $k_{22} = -\frac{1}{r}$. Здесь отрицательный знак относится как к внутреннему, так и к наружному кольцам.

Благодаря различным главным кривизнам дорожек качения колец ($k_{21} \neq k_{22}$) площадки контакта между шариками и кольцами имеют эллиптический контур. Большая a и малая b полуоси эллиптического контура площадки контакта определяются по формулам (73) и (74).

Входящие в эти формулы коэффициенты n_a и n_b берутся по табл. 14 в зависимости от геометрического параметра поверхностей соприкасающихся тел:

$$\Omega = \frac{\sqrt{(k_{11}-k_{12})^2+(k_{21}-k_{22})^2+2(k_{11}-k_{12})(k_{21}-k_{22})\cos 2\omega}}{k_{11}+k_{12}+k_{21}+k_{22}},$$

где ω — угол между плоскостями кривизн k_{11} и k_{21}.

Так как в рассматриваемом случае $k_{11}=k_{21}$, то выражение упрощается и принимает следующий вид:

$$\Omega = \frac{k_{21}-k_{22}}{\Sigma k}. \qquad (164)$$

Величина наибольшего давления p_0 между наиболее нагруженным шариком и кольцами, имеющая место в центре площадки контакта, определяется по формуле (75).

В качестве примера определим размеры полуосей a и b контурного эллипса площадки контакта наиболее нагруженного шарика с дорожками качения и величину наибольшего давления p_0 по площадке контакта для радиального однорядного шарикоподшипника 217 легкой серии, находящегося под воздействием допускаемой статической нагрузки Q=3400 *кг* [5].

Габаритные размеры подшипника: внутренний диаметр d=85 *мм*; наружный диаметр D=150 *мм*; ширина B=28 *мм*.

Внутренние размеры подшипника (фиг. 335):

1) диаметр шариков d_0=19,84 *мм*;

2) число шариков i=10;

3) радиус поперечного профиля дорожки качения у внутреннего и наружного колец

$$r = 0{,}515 d_0 = 0{,}515 \cdot 19{,}84 = 10{,}23 \text{ мм};$$

4) наименьшая толщина колец по желобу

$$h = \frac{1}{2}\left[\frac{D-d}{2} - d_0\right] = \frac{1}{2}(32{,}5 - 19{,}84) = 6{,}33 \text{ мм};$$

5) радиус наименьшей окружности дорожки качения внутреннего кольца

$$R_в = \frac{d}{2} + h = 42{,}5 + 6{,}33 = 48{,}83 \text{ мм};$$

6) радиус наибольшей окружности дорожки качения наружного кольца

$$R_н = \frac{D}{2} - h = 75 - 6{,}33 = 68{,}67 \text{ мм}.$$

Подшипник находится под воздействием радиальной надрузки Q=3400 *кг*. Следовательно, величина усилия, приходящегося на наиболее нагруженный шарик,

$$P_0 = 5\frac{Q}{i} = 5\frac{3400}{10} = 1700 \text{ кг}.$$

Материал шариков и колец — хромистая сталь, для которой модуль упругости первого рода $E = 2{,}12 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2} и коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}30$; тогда упругая постоянная соприкасающихся тел

$$\eta = 2\frac{1-\mu^2}{E} = 0{,}858 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{кг}.$$

Главные кривизны шарика

$$k_{11} = k_{12} = \frac{2}{d_0} = \frac{2}{1{,}984} = 1{,}008 \text{ 1/см}.$$

Главные кривизны наружной дорожки качения

$$k_{21} = -\frac{1}{R_н} = -\frac{1}{6{,}867} = -0{,}1456 \ 1/см;$$

$$k_{22} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{1{,}023} = -0{,}9775 \ 1/см.$$

Главные кривизны внутренней дорожки качения

$$k_{21} = \frac{1}{R_в} = \frac{1}{4{,}883} = 0{,}2048 \ 1/см;$$

$$k_{22} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{1{,}023} = -0{,}9775 \ 1/см.$$

При касании шарика с наружной дорожкой качения сумма главных кривизн соприкасающихся тел

$$\Sigma k = 2 \cdot 1{,}008 - 0{,}1456 - 0{,}9775 = 0{,}8929 \ 1/см$$

и геометрический параметр этих тел

$$\Omega = \frac{-0{,}1456 + 0{,}9775}{0{,}8929} = 0{,}9317.$$

Для соприкасания шарика с внутренней дорожкой качения

$$\Sigma k = 2 \cdot 1{,}008 + 0{,}2048 - 0{,}9775 = 1{,}243 \ 1/см;$$

$$\Omega = \frac{0{,}2048 + 0{,}9775}{1{,}243} = 0{,}9510.$$

Интерполируя по табл. 14, находим значения коэффициентов n_a, n_b и n_p в зависимости от величины параметра Ω. При касании шарика с наружной дорожкой качения имеем

$$n_a = 3{,}594 + \frac{0{,}9317 - 0{,}9303}{0{,}9342 - 0{,}9303}(3{,}683 - 3{,}594) = 3{,}594 + 0{,}3590 \cdot 0{,}089 = 3{,}626;$$

$$n_b = 0{,}4253 - 0{,}3590 \cdot 0{,}054 = 0{,}4234;$$

$$n_p = 0{,}6542 - 0{,}3590 \cdot 0{,}0075 = 0{,}6515.$$

При касании шарика с внутренней дорожкой качения $n_a = 4{,}156$; $n_b = 0{,}3942$; $n_p = 0{,}6104$.

Полуоси контурного эллипса для площадки контакта между наиболее нагруженным шариком и наружной дорожкой качения

$$a = 3{,}626 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{0{,}858 \cdot 10^{-6}}{0{,}8929} 1700} = 3{,}626 \cdot 0{,}1348 = 0{,}489 \ см;$$

$$b = 0{,}4234 \cdot 0{,}1348 = 0{,}0570 \ см.$$

Аналогично для площадки контакта между тем же шариком и внутренней дорожкой качения

$$a = 4{,}156 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{0{,}858 \cdot 10^{-6}}{1{,}243} 1700} = 4{,}156 \cdot 0{,}1207 = 0{,}502 \ см;$$

$$b = 0{,}3942 \cdot 0{,}1207 = 0{,}0476 \ см.$$

Величина наибольшего давления по площадке контакта шарика с наружным кольцом подшипника

$$p_0 = \frac{0{,}6515}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{0{,}8929}{0{,}858 \cdot 10^{-6}}\right)^2 1700} = 29\,100 \ кг/см^2,$$

а по площадке контакта между шариком и внутренним кольцом

$$p_0 = \frac{0{,}6104}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{1{,}243}{0{,}858 \cdot 10^{-6}}\right)^2 1700} = 34\,000 \ кг/см^2.$$

Итак, внутреннее кольцо испытывает несколько большее давление и, следовательно, оно менее прочно, чем наружное.

Расчет на прочность колец и шариков требует предварительного исследования напряженного состояния в окрестности зоны контакта этих деталей. Результаты исследования, проведенного выше, в § 7—9, дали следующие значения максимального касательного напряжения τ_{max} в зависимости от величины отношения $\frac{b}{a}$:

при $\frac{b}{a}=1$ (окружность) $\tau_{max}=0{,}310p_0$;

при $\frac{b}{a}=0$ (полоска) $\tau_{max}=0{,}300p_0$.

Наибольшее значение $\tau_{max}\approx 0{,}325p_0$ имеет место при $\frac{b}{a}\approx 0{,}5$ (см. табл. 18).

Существенно отметить, что величина отношения максимального касательного напряжения к наибольшему давлению p_0 при изменении отношения $\frac{b}{a}$ изменяется в весьма узких пределах, и мало зависит от формы площадки контакта. Аналогичное заключение можно сделать и для касательных напряжений в октаэдрических площадках, т. е. в площадках, равнонаклоненных к главным. Отмеченное обстоятельство и позволяет вести расчет на прочность непосредственно по величине наибольшего давления, конечно, с соответствующим изменением величины допускаемого напряжения (давления).

Материалом шариков и колец служит термически обработанная хромистая сталь. В литературе на основе поверочного расчета удовлетворительно работающих подшипников в качестве допускаемого значения $[p_0]$ приводятся значения порядка 35 000 *кг/см*². Это соответствует для максимального касательного напряжения величине порядка 11 000 *кг/см*².

Отмеченная выше возможность вести расчет на прочность по величине наибольшего давления p_0 позволяет получить весьма простое выражение для допускаемой величины радиальной нагрузки Q на серийные шарикоподшипники.

Действительно, у подшипников одной и той же серии существует пропорциональная зависимость между размерами всех основных деталей. Благодаря этому радиусы поверхностей качения можно выразить через диаметр шариков (фиг. 335), как $R_в=\alpha d_0$ и $R_н=\beta d_0$, где коэффициенты α и β одинаковы для всех подшипников одной и той же серии. Так как давление между шариком и внутренним кольцом больше, чем между шариком и наружным кольцом, то весь дальнейший расчет будет отнесен к внутреннему кольцу.

При вычислении наибольшего давления p_0 между шариком и внутренним кольцом по выражению (75):

$$\Sigma k=2\cdot\frac{2}{d_0}+\frac{1}{R_в}-\frac{1}{r}=\frac{1}{d_0}\left[4+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right];$$

$$\eta=2\,\frac{1-\mu^2}{E}=0{,}858\cdot 10^{-6}\ см^2/кг;\quad P=5\,\frac{Q}{i}.$$

Подстановка указанных значений дает возможность представить выражение для p_0 в следующем виде:

$$p_0=L\sqrt[3]{\frac{Q}{id_0^2}}, \tag{165}$$

где введенный коэффициент

$$L=n_p\frac{1}{\tau}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(4+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{10^6}{0{,}858}\right)^2 5}. \tag{166}$$

Вычислим значение коэффициента L для рассмотренного выше радиального однорядного шарикоподшипника 217 легкой серии, у которой

$$\alpha=\frac{R_в}{d_0}=2{,}46;\quad \beta=\frac{r}{d_0}=0{,}515$$

и, следовательно,

$$L=\frac{0{,}6104}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\left(4+\frac{1}{2{,}46}-\frac{1}{0{,}515}\right)^2\left(\frac{10^5}{0{,}858}\right)^2 5}\approx 7700.$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что коэффициент L для серийных радиальных шарикоподшипников представляет собой примерно постоянную величину. В связи с этим выражение (165) для p_0 принимает вид

$$p_0=7700\sqrt[3]{\frac{Q}{id_0^2}}. \tag{167}$$

Принимая в качестве допускаемого значения p_0 величину $[p_0]=33\,900$ *кг/см*^{2}, приходим к следующему известному выражению для допускаемого значения статической нагрузки на однорядный радиальный шарикоподшипник:

$$Q=\left(\frac{33\,900}{7700}\right)^3 id_0^2\approx 85\,id_0^2. \tag{168}$$

Заметим, что даже небольшое изменение допускаемого значения $[p_0]$ вызывает довольно значительное изменение величины коэффициента в правой части формулы (168). Так, принимая в качестве допускаемого значения $[p_0]=34\,700$ *кг/см*^{2}, находим, что

$$Q=\left(\frac{34\,700}{7700}\right)^3 id_0^2=92\,id_0^2. \tag{169}$$

Формула (168) приводится в Энциклопедическом справочнике «Машиностроение» (т. 2), а формула (169) — в каталоге «Шариковые и роликовые подшипники» (1946 г.). Аналогичные формулы допускаемых статических нагрузок для различных типов шарико- и роликоподшипников качения даны в справочнике [5].

Существенно, что для вращающихся подшипников нагружение колец становится циклическим, даже если внешняя нагрузка на подшипник (реакция вала) постоянна во времени по величине и направлению. Благодаря цикличности нагружения (периодическое изменение напряжения во времени) расчет колец вращающегося подшипника необходимо вести не на статическую прочность, а на выносливость материала (расчет на заданную долговечность) [61], [100].

§ 12. КРАТКИЙ ОБЗОР НЕКОТОРЫХ РАБОТ ПО РАСЧЕТАМ НА КОНТАКТНУЮ ПРОЧНОСТЬ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Систематическое исследование деформаций в местах контакта для зубчатых и червячных передач дано в ряде работ А. Н. Грубина [20], [21], [22], [23].

В одной из этих работ дано интересное сопоставление предпосылок классической теории контакта соприкасающихся тел и действительного выполнения этих предпосылок в реальных условиях зубчатых и червячных зацеплений. Как известно, в классической теории контактных деформаций двух совершенно упругих, изотропных и одородных круговых цилиндров принимается, что

1) цилиндры имеют бесконечную длину;
2) оси цилиндров строго параллельны;
3) поверхность цилиндров абсолютно гладкая;
4) цилиндры прижимаются друг к другу двумя равными по величине и противоположными по направлению силами, распределенными равномерно по длине цилиндров;
5) нагрузки, приложенные к цилиндрам, действуют статически;
6) возникающее между цилиндрами давление распределяется равномерно вдоль первоначальной контактной линии;
7) напряжения в месте соприкасания цилиндров не превосходят той величины, при которой материал цилиндров следует закону Гука;

8) радиусы цилиндров велики по сравнению с шириной площадки касания;

9) площадку контакта деформированных цилиндров можно рассматривать как часть плоскости, касательной к поверхностям недеформированных цилиндров в месте их первоначального контакта по линии;

10) трение между соприкасающимися поверхностями отсутствует, и силы давления нормальны к площадке контакта.

Используя результаты классической теории линейного контакта для расчета эвольвентных цилиндрических зубчатых колес, считают, что в любой фазе зацепления зубья этих колес могут быть заменены прямыми круговыми цилиндрами, кривизна которых равна кривизне эвольвент в соответствующей контактной точке. Базируясь на этом положении, сводят расчет эвольвентного зацепления на контактную прочность к классической контактной задаче о двух цилиндрах, используя при этом все перечисленные выше предпосылки. В действительности же ряд этих предпосылок здесь недостаточно обоснован:

1. Длина соприкасающихся зубьев конечна. Однако длина зубьев все же велика по сравнению с шириной площадки контакта, а влияние краевого эффекта, т. е. резкого возрастания величины давления по концам зубьев, будет распространяться лишь на небольшие участки контактной линии.

2. Параллельность осей цилиндров нарушается изгибом валов зубчатых передач.

3. Предпосылка об абсолютной гладкости поверхностей цилиндров в той или иной мере обоснована для достаточно чисто обработанных (шевингованных, шлифованных, притертых) и приработавшихся поверхностей зубьев.

4. Усилие, прижимающее зуб ведущего колеса к зубу ведомого, уравновешивается в данном случае не силой, равной по величине и противоположно направленной, а внутренними усилиями у основания зуба ведомого колеса. Это обстоятельство существенно изменяет общее напряженное состояние, но достаточно мало отражается на напряжениях в зоне контакта.

5. Напряженное состояние зубьев не является статическим, его интенсивность периодически изменяется во времени. Это обстоятельство в современных методиках расчета учитывается только при назначении допускаемых напряжений. Отражение особенностей динамического напряженного состояния зубьев в местах контакта в расчете отсутствует.

6. Вследствие деформаций деталей передач, главным образом валов, а также погрешностей изготовления и монтажа контактное давление распределяется неравномерно вдоль длины зубьев. Это обстоятельство в современных методиках расчета отчасти учитывается введением так называемых корректирующих коэффициентов нагрузки.

7. Наличие смазки приводит к тому, что при сохранении в целом эллиптического закона распределения давления по ширине полоски контакта имеет место образование местной пики давления и как следствие этого возникновение пластических деформаций. Однако последние носят локальный характер и мало отражаются на общей прочности зубьев.

8. Радиусы кривизны эвольвентного профиля действительно велики по сравнению с шириной площадки контакта.

9. Предпосылка о положении площадки контакта в касательной плоскости к поверхностям недеформированных цилиндров в месте их

первоначального контакта по линии, является вполне естественным допущением как в классической теории, так и в расчете зубчатой передачи.

10. При расчете зубчатого зацепления трение играет достаточно существенное значение, и его влияние на напряженное состояние в зоне контакта необходимо принять во внимание.

Так обстоит дело с расчетами на контактную прочность эвольвентных цилиндрических передач с прямыми зубьями.

При расчете других видов зубчатых зацеплений задачу в конечном счете также сводят к контакту двух цилиндрических поверхностей, вводя при этом в расчет некоторые условные радиусы кривизны и оставляя в силе все перечисленные выше допущения. К этому же методу прибегают и при расчете червячного зацепления, сводя задачу к контакту цилиндрической поверхности с плоскостью. В работах А. Н. Грубина [20], [21] специально рассмотрена контактная задача для зубчатых и червячных зацеплений при значительно более точном отражении действительной геометрии соприкасающихся тел.

Как известно, при рассмотрении контакта двух круговых цилиндров (радиусов R_1 и R_2) существенное значение имеет то обстоятельство, что при малых значениях зазора между соприкасающимися поверхностями величину зазора z можно представить в виде

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) y^2. \tag{170}$$

Это выражение справедливо и для эвольвентных цилиндрических колес с прямыми зубьями.

Для зубчатых зацеплений с прямолинейной контактной линией: цилиндрических эвольвентных косозубых колес и конических прямозубых колес, а также для архимедовых червячных пар зазор между контактирующими поверхностями зубьев выражается уравнением более общего характера

$$z = f(x)\, y^2. \tag{171}$$

Для зацеплений с прямолинейной контактной линией $f(x)$ представляет полусумму наибольших кривизн соприкасающихся поверхностей в точках контактной линии.

Заметим, что для рассматриваемых случаев характерным является сравнительно малое изменение $f(x)$ в пределах контактной линии.

Для решения соответствующей контактной задачи существенное значение имеет также предварительное установление характера выражения для сближения поверхностей зубьев под нагрузкой. С этой целью используют то обстоятельство, что в результате деформации контакт между соприкасающимися поверхностями зубьев не должен нарушиться. Это будет иметь место лишь в том случае, когда сумма фактических перемещений окажется пропорциональной возможным перемещениям точек соответствующих контактных линий.

Для прямозубых цилиндрических колес контактные линии параллельны осям колес, поэтому очевидно, что сближение поверхностей зубьев вдоль всей контактной линии постоянно, т. е.

$$w_0(x) = \text{const}. \tag{172}$$

Из теории зацепления известно, что в цилиндрических эвольвентных косозубых колесах окружные скорости по общей нормали к поверхностям зубьев (во всех точках контактной линии) равны между собой. Таким образом, возможные перемещения всех точек соприкосновения

поверхностей зубьев также равны. То же имеет место для всех червячных пар с цилиндрическим червяком.

Для конических колес с прямыми зубьями величина сближения изменяется вдоль контактной линии по линейному закону

$$w_0(x) = A_0(1 + A_1 x), \tag{173}$$

где A_0 и A_1 — некоторые постоянные.

Очевидно, что зависимость (172) является частным случаем зависимости (173).

В работе А. Н. Грубина [21] рассматривается решение задачи о статическом контакте двух совершенно упругих, изотропных и однородных тел, форма поверхностей которых такова, что они в ненапряженном состоянии соприкасаются вдоль прямой линии (ось x). В точках, близких к первоначальной контактной линии, зазоры между поверхностями тел, отсчитанные по нормали к общей касательной плоскости xy к этим поверхностям (в их ненагруженном состоянии), определяются выражением (171). Нагрузка сводится к двум действующим на данные тела силам, равным по величине, противоположным по направлению и лежащим в плоскости главного нормального сечения xz, проходящего через первоначальную контактную линию. Величина сближения поверхностей подчиняется уравнению (173).

При решении поставленной контактной задачи используются сингулярные интегральные уравнения [63].

В результате достаточно сложного решения поставленной задачи А. Н. Грубин [21] показал, что переменная в общем случае полуширина $b(x)$ площадки контакта выражается следующим образом:

$$b(x) = \sqrt{\eta \frac{P}{l} \cdot \frac{2(1 + A_1 x)}{f(x)}}, \tag{147}$$

где

$$\eta = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}.$$

В формуле (174) P — нагрузка, l — длина контактной линии, μ_1 и μ_2 — коэффициенты Пуассона материала соприкасающихся тел, E_1 и E_2 — модули упругости первого рода материала этих тел, A_1 — постоянный коэффициент, характеризующий линейный закон изменения величины сближения поверхностей зубьев вдоль контактной линии, $f(x)$ — закон изменения полусуммы наибольших кривизн соприкасающихся поверхностей по длине контактной линии.

Давление в точках первоначальной контактной линии также является переменной величиной и выражается следующим образом:

$$p_0(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{P}{l} \cdot \frac{1 + A_1 x}{b(x)}. \tag{175}$$

Приведенные выражения (174) и (175) получены без учета наличия смазки между соприкасающимися поверхностями зубьев.

Для случая движения в условиях смазки тяжело нагруженных зубчатых передач в работе [22] дано соответствующее обобщение указанных выражений. Таким образом, становится возможным оценить влияние смазки на общее распределение давлений между контактирующими телами. Возникающие при наличии смазки местные пики давления, влекущие за собой локальные пластические деформации, остаются без рассмотрения.

Работы А. Н. Грубина [21], [22], а также исследования А. И. Петрусевича [70], [71] сыграли существенную роль в развитии и уточнении контактно-гидродинамической теории смазки. Существовавшие до указанных работ попытки применить гидродинамическую теорию вязкой жидкости для выявления роли смазки в зонах контакта зубчатых и червячных передач производились на основе упрощенного предположения об абсолютной жесткости контактирующих тел. Предложенная названными выше авторами контактно-гидродинамическая теория смазки учитывает изменение конфигурации рабочих поверхностей под влиянием контактных деформаций. Новая теория существенно изменяет прежние представления об условиях работы контактирующих деталей машин при наличии смазки.

Использованный А. И. Петрусевичем приближенный метод нахождения контактных деформаций при любом характере распределения нагрузки по поверхности соприкасания позволил решить совместно контактную и гидродинамическую задачу для круглых цилиндров при их качении и скольжении. При этом было учтено изменение вязкости смазки в зависимости от давления и температуры и была принята во внимание сжимаемость смазки.

Проведенные исследования [22] показали, что упрощенной гидродинамической теорией смазки, в которой не учитываются контактные деформации, можно пользоваться только в тех случаях, когда наибольшее давление в зоне контакта не превышает 1500—3000 *кг/см*^{2}.

Для случая чистого качения цилиндров упрощенная теория дает в десятки и сотни раз меньшие значения толщин масляной пленки, чем это следует из уточненной теории. Точно так же и характер изменения давления в масляной пленке поперек полоски контакта существенно отличается от полуэллипса, т. е. от результатов, даваемых упрощенной теорией. Это различие возрастает с увеличением скорости качения рабочих поверхностей. Вместе с тем независимо от скорости качения на выходе смазки из зоны контакта всегда возникает пик давления, почти доходящий до уровня максимального давления.

Результаты, полученные для случая чистого качения цилиндров, применимы и при качении со скольжением, т. е. они могут быть использованы в расчете зубчатых передач на жидкостное трение в зацеплении. Уточненная теория позволяет объяснить явление натягивания металла на зубья тихоходных зубчатых колес к полюсной линии (с образованием хребта вдоль нее) на ведомых зубьях и к вершинам и основаниям зубьев на ведущих зубьях.

Применение уточненного метода дает также возможность подойти к исследованию величин контактных давлений, вызываемых неровностями (шероховатостями) контактирующих рабочих поверхностей. В результате проведенных исследований доказана неизбежность возникновения пластических деформаций в зоне контакта при любой практически достижимой гладкости несмазанных рабочих поверхностей. При наличии смазочной пленки влияние неровностей существенно снижается.

Подробно разработанная методика и конкретные рекомендации по расчету зубчатых и червячных передач на контактную прочность даны в работах В. Д. Андожского [1], А. И. Петрусевича [69], [72], Л. Д. Часовникова [107], [108] и др. Контактная прочность фрикционных передач рассмотрена в работах Д. Н. Решетова [83] и Б. А. Пронина [79].

Применение теории контактных деформаций и напряжений к расчету шарико- и роликоподшипников качения дано в работах В. Р. Ке-

лер [37], Б. В. Цыпкина [109], А. А. Португаловой [76], Н. А. Спицына [96], В. М. Макушина [58], Л. Г. Харитонова [105] и др.

В случае соприкасания цилиндрических тел с параллельными осями различной длины у концов более короткого цилиндра имеет место значительная концентрация контактных напряжений. Это обстоятельство часто является причиной разрушения поверхностей дорожек качения цилиндрических и конических роликоподшипников. С целью уничтожения концентрации напряжений возможно применение выпуклого криволинейного профиля для дорожек качения внутреннего и наружного колец подшипника. Исследование этого вопроса дано в работе Г. Т. Митерева [60].

Подробные расчеты типовых подшипников качения приведены в книгах Р. Д. Бейзельмана, Н. А. Спицына и Б. В. Цыпкина [4], [5]. Теоретическое рассмотрение расчета подшипников качения на заданную долговечность дано в работе В. Н. Трейера [100].

Вопросы расчета на контактную прочность опор подвижных систем приборов (цилиндрических опор, опор на центрах, опор на шпиле и др.) рассмотрены в книге И. М. Сивоконенко [92]. Применение теории контактных деформаций к исследованию работы отдельных конструкций можно найти в трудах ряда авторов: В. Н. Иванова [29], [30] — уточненный расчет штанг паровозных дышел, В. С. Полковникова [73] — многокатковые опорно-поворотные устройства стреловых кранов, Е. И. Ривина [85] — направляющие качения в станках, В. А. Хлунова [106] — рабочий профиль зуба цепной звездочки и др.

Приложение теории контактных напряжений к оценке качества обработки поверхности деталей и прочности материала в местах контакта дано в работе А. И. Петрусевича [68]. В книге В. М. Кована и В. С. Корсакова [42] намечено применение теории контактных деформаций к некоторым технологическим расчетам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андожский В. Д., Расчет зубчатых передач, гл. 5. Расчет зубьев на контактную прочность, Машгиз, 1955.

2. Ачеркан Н. С., Расчет металлорежущих станков, гл. 4, § 25. Расчет направляющих, Машгиз, 1952.

3. Безухов Н. И., Теория упругости и пластичности, гл. 5. Классические задачи теории упругости, Гостехиздат, 1953.

4. Бейзельман Р. Д., Спицын Н. А., Цыпкин Б. В., Подшипники качения, Машгиз, 1945.

5. Бейзельман Р. Д. и Цыпкин Б. В., Подшипники качения (справочник), Машгиз, 1954.

6. Беляев Н. М., Применение теории Герца к подсчету местных напряжений в точке соприкасания колеса и рельса, «Вестник инженеров» № 12, 1917.

7. Беляев Н. М., Местные напряжения при сжатии упругих тел, сб. «Инженерные сооружения и строительная механика», Л. 1924.

8. Беляев Н. М., К вопросу о местных напряжениях в связи с сопротивлением рельс смятию, «Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения», вып. 99, 1929.

9. Беляев Н. М., Вычисление наибольших расчетных напряжений при сжатии соприкасающихся тел, там же, вып. 102, 1929.

10. Бидерман В. Л., К выводу формул Герца. Труды кафедры «Сопротивление материалов» Московского высшего технического училища, сб. «Теоретические и экспериментальные исследования напряженного и деформированного состояния некоторых элементов конструкций», изд. МВТУ, 1947.

11. Бидерман В. Л., Об определении деформаций при сжатии цилиндрической и плоской детали, там же.

12. Бойченко Г. А., Контактные напряжения, Московский энергетический институт, 1953.

13. Бобрик П. И., Зависимость жесткости плоских стыков от качества обра-

ботки поверхностей, «Труды Московского авиационного технологического института», вып. 5, 1949.

14. Боуден Ф. и Тейбор Д., Площадь контакта между твердыми телами сборник «Прикладная механика и машиностроение» № 2, Издат. иностранной литературы, 1952.

15. Галин Л. А., О давлений твердого тела на пластинку, «Прикладная математика и механика», т. 12, вып. 3. 1948.

16. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости, Гостехиздат, 1953.

17. Геккелер И. В., Статика твердого тела, гл. 9. Задачи трех измерений, Гостехиздат, 1934.

18. Глаголев Н. И., Сопротивление перекатыванию твердых тел, «Прикладная математика и механика», т. 9, вып. 4, 1945.

19. Гогоберидзе Д. Б., Понятие твердости в современной физике и технике, «Вестник Ленинградского университета» № 7, 1949.

20. Грубин А. Н., Контактная задача для зубчатых и червячных зацеплений в простейших предположениях, Ленинградское отделение научного инженерно-технического общества машиностроителей, кн. 6. Теория и расчет зубчатых колес, Машгиз, 1948.

21. Грубин А. Н., Контактные напряжения в зубчатых и червячных зацеплениях, сб. «Исследование контакта деталей машин», Машгиз, 1949.

22. Грубин А. Н., Основы гидродинамической теории смазки тяжело нагруженных цилиндрических поверхностей, там же.

23. Грубин А. Н., Исследование контактного напряженного состояния для тел переменной кривизны с прямолинейной линией соприкосновения, «Сборник научных работ Куйбышевского индустриального института» № 4, 1953.

24. Динник А. Н., Удар и сжатие упругих тел (1909), Избр. труды, т. I, изд. АН УССР, 1952.

25. Добровольский В. А., Заблонский К. И., Мак С. Л., Радчик А. С., Эрлих Л. Б., Детали машин, Машгиз, 1956.

26. Дрозд М. С., Глубина наклепанного слоя при дробеструйной обработке деталей, «Вестник машиностроения» № 5, 1955.

27. Зайцев Г. П., Задача Герца и проба по Бринелю, «Журнал технической физики» № 3, 1949.

28. Ивашков И. И., Контактная прочность бегунков, Машгиз, 1953.

29. Иванов В. Н., Новая методика расчета штанг паровозных дышел, «Труды Московского электромеханического института», вып. 52, 1945.

30. Иванов В. Н., Прочность и динамика паровозного движущегося механизма, гл. 11. Методика расчета штанг паровозных дышел, Машгиз, 1954.

31. Игнатьев Г. А., Распределение нагрузки по элементам радиального подшипника, «Подшипник» № 4, 1938.

32. Ишлинский А. Ю., Теория сопротивления перекатыванию (трению качения) и смежные явления, сб. «Трение и износ в машинах», т. 2, изд. АН СССР, 1939.

33. Ишлинский А. Ю., Трение качения, «Прикладная математика и механика», т. 2, вып. 2, 1939.

34. Ишлинский А. Ю., Осесимметричная задача пластичности и проба Бринеля, там же, т. 8, вып. 3, 1944.

35. Ильюшин А. А., Пластичность, ч. I. Упруго-пластические деформации, гл. 6. Вдавливание штампов и несущая способность несжимаемого твердого тела, Гостехиздат, 1948.

36. Кац А. М., Теория упругости, гл. 11. Контактные задачи, Гостехиздат, 1956

37. Келер В. Р., Определение нормальных и касательных напряжений в подшипниках качения, «Вестник инженеров и техников» № 5, 1932.

38. Кильчевский Н. А., Теория соударений твердых тел, Гостехиздат, 1949.

39. Кильчевский Н. А., Общая система уравнений контактной проблемы теории упругости, «Научные записки Киевского государственного университета», т. 19, № 1, 1951.

40. Кильчевский Н. А. и Фрадлин Б. Н., Об ударе и сжатии двух цилиндров с параллельными осями, «Известия Киевского политехнического института», т. 9, 1950.

41. Кистьян Я. Г., Упругая деформация зубьев прямозубых цилиндрических колес, Центральный научно-исследовательский институт технологии и машиностроения, кн. 13. Теория и расчет зубчатых передач и подшипников скольжения, Машгиз, 1948.

42. Кован В. М. и Корсаков В. С., Сборник задач и упражнений по технологии машиностроения, Машгиз, 1947.

43. Ковальский Б. С., К вопросу о напряжениях при местном сжатии, «Научные записки Харьковского авиационного института», т. 2, вып. 2 (5), 1940.

44. Ковальский Б. С., Напряжения на поверхности колеса и рельса при торможении и буксовании, там же.

45. Ковальский Б. С., Напряженное состояние и критерии прочности при контактном сжатии, там же, т. 5, 1941.

46. Ковальский Б. С., Напряжения на площадке местного сжатия при учете силы трения, «Известия АН СССР, ОТН» № 9, 1942.

47. Контактное напряжение, Большая советская энциклопедия, изд. 2-е, т. 22, 1955 г. стр. 447.

48. Колчин А. И., Стальные канаты, Машгиз, 1950.

49. Крагельский И. В. и Шедров В. С., Развитие науки о трении. Сухое трение, изд. АН СССР, 1956.

50. Кривенко И. С., Геометрия и контактная прочность червячных зацеплений, «Труды Ленинградского кораблестроительного института» № 11, 1953.

51. Кульбуш Г. П., Вибрационная прочность приборов, «Точная индустрия» № 2—7, 1936.

52. Левин Б. М., Контактный метод измерения микрогеометрии поверхности, Машгиз, 1950.

53. Лейбензон Л. С., Курс теории упругости, гл. 7. Проблемы Буссинеска и Герца, Гостехиздат, 1947.

54. Лурье А. И., Некоторые контактные задачи теории упругости. «Прикладная математика и механика», т. 5, вып. 3, 1941.

55. Лурье А. И., Пространственные задачи теории упругости, гл. 2. Неограниченная упругая среда и упругое полупространство, гл. 5. Пространственные контактные задачи, Гостехиздат, 1955.

56. Ляв А., Математическая теория упругости, гл. 8. Передача силы, Гостехиздат, 1935.

57. Макушин В. М., Напряженное состояние и прочность деталей в местах контакта. Труды кафедры «Сопротивление материалов» Московского высшего технического училища, сб. «Некоторые вопросы теоретических и экспериментальных исследований в области прочности», 1947.

58. Макушин В. М., Теория контактных деформаций и ее применение к подшипникам качения, изд. Академии имени Ворошилова, 1949.

59. Макушин В. М., Деформация и напряженное состояние деталей в местах контакта, Машгиз, 1952; см. также [75].

60. Митерев Г. Т., Расчет и технология изготовления выпуклых дорожек качения колец роликовых подшипников, «Подшипник» № 3, 1951.

61. Миловидов С. С., Детали машин, Военная академия бронетанковых и механизированных войск, ч. 1 и 2, 1951; ч. 3, 1952.

62. Мундт Р., Статическая грузоподъемность подшипников качения, «Подшипник» № 5—6, 1937.

63. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения (граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике), Гостехиздат, 1946.

64. Народецкий М. З., К задаче о соприкасании двух цилиндров. «Доклады АН СССР», т. 56, № 5, 1947.

65. Народецкий М .З., Определение напряжений в круговом кольце под действием сосредоточенных сил, «Известия АН СССР, ОТН» № 1, 1948.

66. Павлов И. М. и Галай Я. С., Упругое сжатие прокатных валов. «Металлург» № 1, 1939.

67. Пальмгрен А., Шариковые и роликовые подшипники, Машгиз, 1949.

68. Петрусевич А. И., Качество поверхности и прочность материалов при контактных напряжениях, изд. АН СССР, 1946.

69. Петрусевич А. И., Зубчатые и червячные передачи, Энциклопедический справочник «Машиностроение», т. 2. Машгиз, 1948.

70. Петрусевич А. И., Контактные напряжения, деформации и контактно-гидродинамическая теория смазки (совместная контактная и гидродинамическая плоская задача механики), автореферат диссертации на степень д-ра техн. наук, изд. АН СССР, 1950.

71. Петрусевич А. И., Основные выводы из контактно-гидродинамической теории смазки, «Известия АН СССР, ОТН» № 2, 1951.

72. Петрусевич А. И., Зубчатые передачи. Червячные передачи, «Справочник машиностроителя», т. 4. Машгиз, 1955.

73. Полковников В. С., Исследования работы многокатковых опорноповоротных устройств стреловых кранов, сб. «Вопросы теории и расчета подъемно-транспортных устройств» Машгиз, 1955.

74. Поляков В. С., Кудрявцев В. Н., Зубанов М. П., Аносов А. С, Барбаш И. Д., Мягков В. Д., Детали машин, под ред. Н. И. Колчина, Машгиз, 1954.

75. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, гл. 16. Деформация и напряженное состояние деталей в местах контакта, Машгиз, 1950.

76. Португалова А. А., Расчетные формулы для упругих тел, «Подшипник» № 2, 1940.

77. Пригоровский Н. И., Контактные напряжения, Энциклопедический справочник «Машиностроение», т. 1, кн. 2, Машгиз, 1947.

78. Пригоровский Н. И., Местные напряжения, «Справочник машиностроителя», т. 3, Машгиз, 1955.

79. Пронин Б. А., Фрикционные передачи, Машгиз, 1952.

80. Радзимовский Е. И., О расчете прочности при повторных контактных напряжениях, сб. «Трение и износ в машинах», т. 2, изд. АН СССР, 1939.

81. Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, гл. 5. Первоначальные сведения по теории поверхностей, Гостехиздат, 1950.

82. Решетов Д. Н., Расчет деталей станков, гл. 2. Станины и направляющие, Машгиз, 1945.

83. Решетов Д. Н., Фрикционные передачи и вариаторы, Энциклопедический справочник «Машиностроение», т. 2, Машгиз, 1948; см. также «Справочник машиностроителя», т. 4, Машгиз, 1955.

84. Решетов Д. Н. и Левина З. М., Расчет станков на контактную жесткость, «Станки и инструмент» № 1, 1951.

85. Ривин Е. И., Некоторые вопросы расчета направляющих, сб. «Исследования в области металлорежущих станков», вып. 3, Машгиз, 1955.

86. Саверин М. М., О напряженном состоянии в зоне сжатия упругих тел в условиях действия касательной нагрузки, «Вестник машиностроения» № 8, 1945.

87. Саверин М. М., Контактная прочность материала в условиях одновременного действия нормальной и касательной нагрузки, Машгиз, 1946.

88. Саверин М. М., Дробеструйный наклеп (теоретические основы и практика применения), Машгиз, 1955.

89. Самойлова-Яхонтова Н. С., Таблицы эллиптических интегралов, Гостехиздат, 1935.

90. Серенсен С. В., Прочность при контактных напряжениях, «Справочник машиностроителя», т. 3, Машгиз, 1955.

91. Серенсен С. В., Тетельбаум И. М., Пригоровский Н. И., Динамическая прочность в машиностроении, гл. 6. Основные случаи расчета напряжений, Машгиз, 1945.

92. Сивоконенко И. М., Опоры подвижных систем приборов, Судпромгиз, 1952.

93. Сикорский Ю. С., Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, Гостехиздат, 1936.

94. Соколовский В. В., Теория пластичности, гл. 7. Давление штампа на пластичное тело, изд. АН СССР, 1946.

95. Сокович А. И., Расчет рабочих поверхностей зубьев колес по наибольшему удельному давлению, «Вестник машиностроения» № 6, 1947.

96. Спицын Н. А., Подшипники качения, Энциклопедический справочник «Машиностроение», т. 2, Машгиз, 1948; см. также «Справочник машиностроителя», т. 4, Машгиз, 1955.

97. Сулимцев И. И. и Гимельфарб С. Я., Проектирование паровоза (справочное пособие), гл. 8. Машина паровоза, Машгиз, 1954.

98. Тайнов А. И., Трение третьего рода, «Сборник научных трудов Белорусского политехнического института», вып. 49, 1955.

99. Тевс Н. Г., Ковердяев Н. С. и Рехтер С. Д., Редукторостроение на Ново-Краматорском машиностроительном заводе им. Сталина, гл. 2. Цилиндрические и конические редукторы, Машгиз, 1946.

100. Трейер В. Н., Расчет деталей машин на долговечность, Машгиз, 1956.

101. Тимошенко С. П., Теория упругости, гл. 11. Симметричное относительно оси распределение напряжений в телах вращения, Гостехиздат, 1934.

102. Феппль А. и Феппль Л., Сила и деформация (прикладная теория упругости), т. 2, гл. 8. Твердость, Гостехиздат, 1936.

103. Феппль Л., Напряженное состояние и прочность материала при соприкасании двух тел, «Подшипник» № 1, 1937.

104. Фризендорф Т., Теория сжатия соприкасающихся твердых тел и определение твердости тел, Петербург, 1905.

105. Харитонов Л. Г., Расчет контактных напряжений в подшипниках качения, «Вестник машиностроения» № 5, 1949.

106. Хлунов В. А., О рациональном рабочем профиле зуба цепной звездочки, сб. «Исследования в области металлорежущих станков», Машгиз, 1952.

107. Часовников Л. Д., Расчет зубчатых передач, Машгиз, 1951.
108. Часовников Л. Д., Червячные передачи и редукторы, винтовые зубчатые передачи, Машгиз, 1953.
109. Цыпкин Б. В., Основные принципы теоретического определения напряжений и деформаций в подшипниках качения, бюллетень-справочник «Технико-информационные материалы по подшипникам качения» № 1, 1937.
110. Штаерман И. Я., К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел, «Доклады АН СССР», т. 25, № 5, 1939.
111. Штаерман И. Я., Обобщение теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел, «Доклады АН СССР», т. 29, № 3, 1940.
111.а Штаерман И. Я., Местные деформации при сжатии упругих круговых цилиндров, радиусы которых почти равны, «Доклады АН СССР», т. 29, № 3, 1940.
112. Штаерман И. Я., Об одном обобщении задачи Герца, «Прикладная математика и механика», т. 5, вып. 3, 1941.
113. Штаерман И. Я., К вопросу о местных деформациях при сжатии упругих тел, «Доклады АН СССР», т. 31, № 8, 1941.
114. Штаерман И. Я., Некоторые особые случаи контактной задачи, там же, т. 38, № 7, 1943.
115. Штаерман И. Я., Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, 1949.
116. Berndt G., Ueber die Gültigkeit der Hertzschen Formeln zur Berechnung der Abplattung von Meszkörpern, «Zeitschrift fur technische Physik», Bd. 3, 1922.
117. Hertz H., Ueber die Berührung fester elastischer Körper, Gesamelte Werke, Bd. 1. Leipzig, 1895.
118. Huber M., Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper, Lipsk, 1905.
119. Huber M. und Fuchs S., Spannungsverteilung bei der Berührung zweier elastischer Zylinder, «Physikalische Zeitschrift», Bd. 15, № 3, 1914.
120. M'Ewen Ewen., Stresses in Elastic Cyliders in Contact along a Generatrix (including the effect of tangential friction),. «The Phylosophical Magazine», v. 40, № 303, 1949.
121. Poritsky H., Stresses and Deflections of Cylindrical Bodies in Contact With Application to Contact of Cears and of Locomotive Wheels, «Journal of Applied Mechanics», v. 17. № 2, 1950.
122. Weber C., Die Hertzsche Gleichung für elliptische Druckflächen, «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik», Bd. 28, № 3, 1948.

ГЛАВА VII

РАСЧЕТЫ РЕЗИНОВЫХ И РЕЗИНО-КОРДНЫХ ДЕТАЛЕЙ

Ценные технические свойства резины и прежде всего ее способность к большим, достигающим сотен процентов, обратимым деформациям приводят к все более широкому применению резиновых деталей в машиностроении.

Особенно большое применение резиновые детали получили в автомобилестроении и самолетостроении. Наряду с чисто резиновыми и резино-металлическими деталями в виде разного рода прокладок, амортизаторов, резино-металлических шарниров и т. д. часто используются и силовые резино-кордные изделия, среди которых следует указать плоские и клиновые ремни, рукава, баллоны пневматических амортизаторов, шины, шинно-пневматические муфты и др.

Особенности расчета резиновых деталей обусловлены как своеобразными механическими свойствами резины, так и тем, что в ряде деталей резина работает при больших деформациях, при которых линейные закономерности, используемые при расчете металлических деталей, перестают быть справедливыми.

Резино-кордные детали, в конструкции которых используются материалы (корд и резина) резко различной жесткости, обладают в связи с этим специфическими особенностями, и для их расчета должны быть также использованы специальные методы.

В настоящей главе будут рассмотрены специфические свойства резины, учитываемые при расчете резиновых и резино-кордных деталей, изложены методы расчета некоторых типов таких деталей (амортизаторов, шарниров, рукавов, резино-кордных пневматических амортизаторов и шинно-пневматических муфт).

§ 1. КОНСТРУКЦИОННЫЕ СВОЙСТВА РЕЗИНЫ

В состав резины входят каучук (натуральный или синтетический) и другие ингредиенты (наполнители, вулканизующие агенты, ускорители вулканизации и др.).

Сырая (невулканизованная) резина является пластичной, вследствие чего ей может быть придана необходимая форма. В результате вулканизации приданная детали форма фиксируется и резина приобретает значительную упругость.

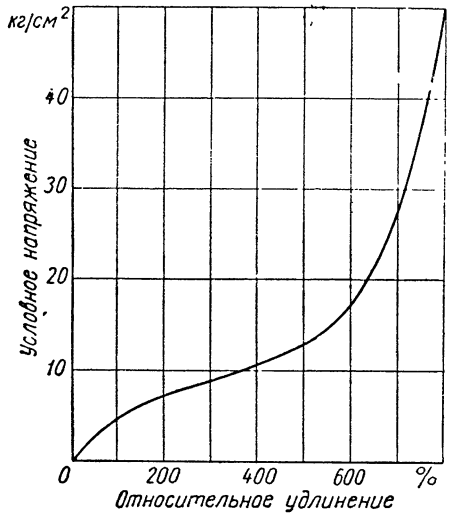
Основными свойствами, определяющими работоспособность резины в силовых резиновых деталях, являются ее упругость, усталостная прочность, гистерезисные потери при переменных нагрузках. В зависимости от условий работы часто большое значение имеют такие свойства резины, как термостойкость (в условиях низких или высоких температур), маслостойкость и др.

Все эти свойства могут изменяться в широких пределах путем выбора соответствующего типа каучука, типов и дозировок других ингредиентов, входящих в состав резины.

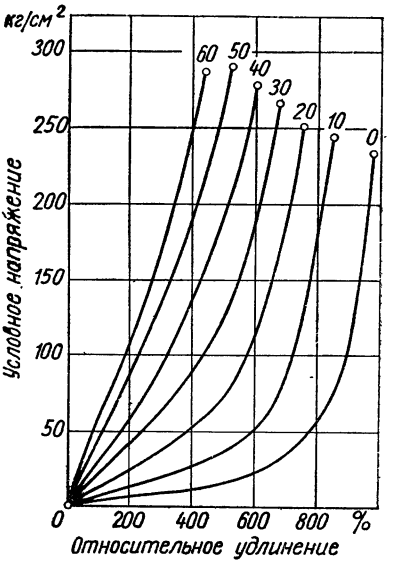
Свойства и области применения различных резин приводятся в работах [11], [21].

Ниже мы рассмотрим механические свойства, характерные для резин, применяющихся в силовых конструкциях.

Резина отличается от других конструкционных материалов способностью очень сильно растягиваться. Так, из изображенной на фиг. 336 типичной кривой растяжения образца ненаполненной[1] резины из натурального каучука видно, что образец может быть вытянут без разрушения почти до десятикратной начальной длины.



Фиг. 336. Характеристика растяжения ненаполненной резины



Фиг. 337. Изменение характеристики растяжения резины из натурального каучука в зависимости от содержания газовой канальной сажи. Цифры над кривыми означают число весовых частей сажи на 100 частей каучука

Наполненные резины в зависимости от типа примененной сажи и ее содержания имеют бо́льшую жесткость, чем ненаполненные, и меньшее разрывное удлинение.

В качестве примера на фиг. 337 приведены кривые растяжения резин из натурального каучука с различными дозировками газовой канальной сажи.

Резиновый образец может быть растянут почти до разрушения без значительных остаточных деформаций.

Кривые первого и повторных растяжений образца в значительной степени отличаются друг от друга, особенно для наполненных резин. Однако после некоторого числа циклов нагружения — разгрузки форма кривой стабилизируется[2].

[1] Ненаполненной называется резина, в составе которой отсутствует наполнитель (сажа или другие вещества)

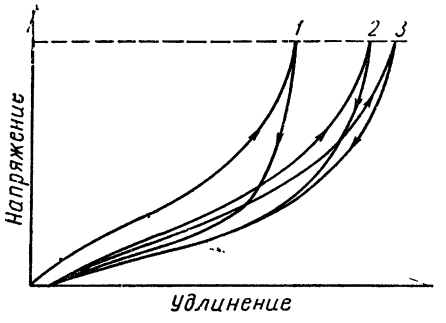
[2] Изменение формы кривой растяжения при первых циклах нагружения связано с необратимыми изменениями структуры резин, происходящими при этих циклах

Изменение кривых растяжения резины при последовательных циклах нагружения схематически показано на фиг. 338.

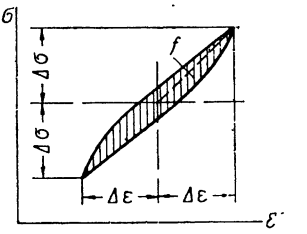
При первых нагружениях происходят также резкие изменения величины петли гистерезиса. При первичном нагружении наполненной резины эта петля очень значительна, и ее площадь достигает иногда 50% всей площади, лежащей под кривой нагружения. При последующих нагружениях площадь петли гистерезиса уменьшается и достигает минимальной величины после полной стабилизации упругих свойств.

При изучении работы резиновых деталей в эксплуатационных условиях представляют интерес только стабильные характеристики резины.

Свойства резины при динамической нагрузке отличаются от ее свойств при статической нагрузке.



Фиг. 338. Изменение кривой растяжения резины при последовательных циклах нагружения



Фиг. 339. Петля гистерезиса при циклической деформации резины

Рассмотрим, например, деформацию образца по гармоническому закону, причем деформация при каждом цикле изменяется от $\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon$ до $\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$, а амплитуда деформации $\Delta\varepsilon$ мала.

В координатах ε, σ (фиг. 339) цикл деформации при установившемся режиме изображается замкнутой кривой. Форму этой кривой можно охарактеризовать двумя показателями. Первый из этих показателей — отношение амплитуды напряжения к амплитуде деформации

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = E_д$$

характеризует жесткость резины при данном законе изменения деформации и называется обычно динамическим модулем упругости.

Величина гистерезисных потерь характеризуется отношением удвоенной площади петли гистерезиса f к квадрату амплитуды деформации:

$$K = \frac{2f}{(\Delta\varepsilon)^2}.$$

Величина K *кг/см*^{2} называется модулем внутреннего трения резины.

Часто в практике используется также так называемый коэффициент относительного внутреннего трения ψ, представляющий собой отношение работы рассеянной в течение цикла (т. е. площади петли гистерезиса) к упругой энергии $\frac{1}{2}\Delta\sigma\Delta\varepsilon$, соответствующей амплитудным деформациям:

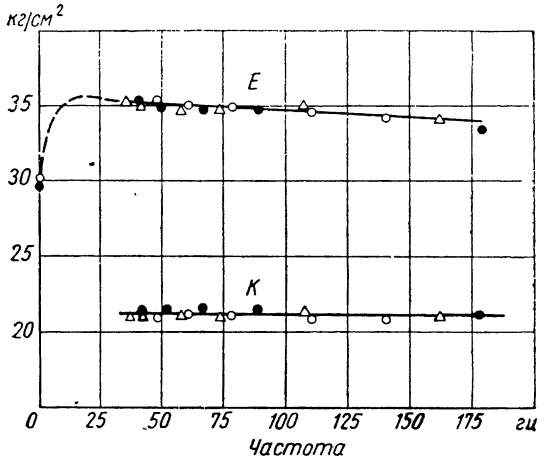
$$\psi = \frac{2f}{\Delta\sigma\Delta\varepsilon}.$$

Коэффициент относительного внутреннего трения связан с динамическим модулем и модулем внутреннего трения соотношением

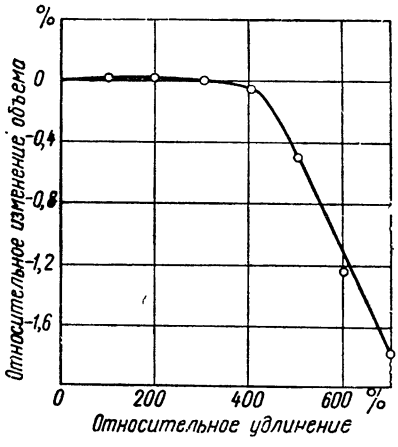
$$\psi = \frac{K}{E_д}.$$

Как динамический модуль, так и модуль внутреннего трения зависят, вообще говоря, от частоты деформации.

Динамический модуль заметно выше статического. Однако изменение частоты в пределах 10—200 *гц* мало влияет на значения $E_д$ и K. В качестве примера на фиг. 340 приводятся графики изменения динамического модуля и модуля внутреннего трения в зависимости от частоты деформации для резины из натурального каучука с 30% сажи [18].



Фиг. 340. Зависимость динамического модуля и модуля трения от частоты деформации для резины из натурального каучука с 30% сажи



Фиг. 341. Изменение объема при растяжении резины из натурального каучука по данным Холта и Макферсона

Практически при расчете деталей, воспринимающих динамическую нагрузку, можно считать динамический модуль и модуль трения не зависящими от частоты, необходимо только иметь в виду, что динамический модуль больше чем статический, определяемый при растяжении образцов. Отношение $\frac{E_д}{E_{ст}}$ зависит от состава и степени вулканизации резины; оно изменяется от 1,1—1,4 для малонаполненных и нормально свулканизованных резин из натурального каучука до 1,5—2 для сильнонаполненных резин из синтетического каучука. При увеличении температуры динамический модуль и модуль трения резины снижаются.

Опыты показывают, что при деформации резины объем ее практически не изменяется.

Постоянство объема резины при деформации подтверждается, например, представленным на фиг. 341 графиком изменения объема резины при одноосном растяжении по опытам Холта и Макферсона [18]. Из кривой видно, что до деформации $\varepsilon = 400\%$ изменение объема лежит в пределах точности измерения (0,1%); при бо́льших деформациях

объем образца уменьшается, причем при восьмикратном растяжении объем уменьшается на 1,6% первоначальной величины [1].

Сохранение объема резины должно учитываться при расчете резиновых деталей. Из него следует, в частности, что коэффициент Пуассона в области малых деформаций равен 0,5, а модули упругости первого и второго рода связаны зависимостью $E=3G$.

В этом случае жесткость резины характеризуется только одной упругой постоянной.

При малых деформациях условие постоянства объема записывается в форме

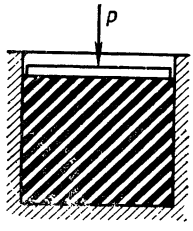
$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \tag{1}$$

где ε_x, ε_y и ε_z — относительные линейные деформации в трех взаимно-перпендикулярных направлениях.

В связи с равенством нулю объемной деформации формула (40) гл. III т. I для удельной энергии деформации принимает вид

$$W = G\left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)\right]. \tag{2}$$

Постоянство объема резины необходимо учитывать не только при расчете, но и при конструировании резиновых деталей. Так, например, изображенный на фиг. 342 амортизатор является неработоспособным. Резина, лишенная возможности раздаваться в стороны, является практически совершенно жесткой.



Фиг. 342. Пример неправильной конструкции амортизатора. Резина, лишенная возможности поперечно деформироваться, является жесткой

Механические характеристики резины как конструкционного материала изучаются с помощью физико-механических испытаний образцов из нее. К сожалению, распространенные методы физико-механических испытаний [10] в большей части являются технологическими пробами и не дают необходимых данных для расчета.

Как правило, расчетчику необходимо знать величины, характеризующие жесткость материала и его прочность.

При экспериментальном определении модуля упругости резины следует учитывать наличие большого упругого последействия, особенно для резины со значительным содержанием сажи и для резин из некоторых синтетических каучуков. Поэтому, как правило, должен определяться модуль упругости резины при статической нагрузке (равновесный) и, кроме того, динамический модуль ее при циклических деформациях в диапазоне частот, соответствующем работе резины в изделии.

Некоторыми преимуществами обладает метод определения модуля упругости резины при сдвиге посредством испытания на кручение цилиндрического образца. В этом случае и при значительных деформациях крутящий момент линейно зависит от угла закручивания (см. § 4), и модуль сдвига может определяться по формуле

$$G = \frac{Ml}{\varphi J_p}.$$

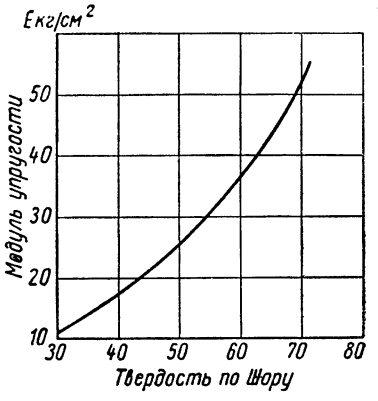
[1] Незначительное уменьшение объема при большом удлинении резины из натурального каучука связано с происходящим при этом изменением ее физического состояния — кристаллизацией. Для резин из некристаллизующихся каучуков уменьшение объема при растяжении не наблюдается [18].

где M — крутящий момент;
l — длина образца;
φ — угол закручивания;
$J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ — полярный момент инерции площади поперечного сечения образца.

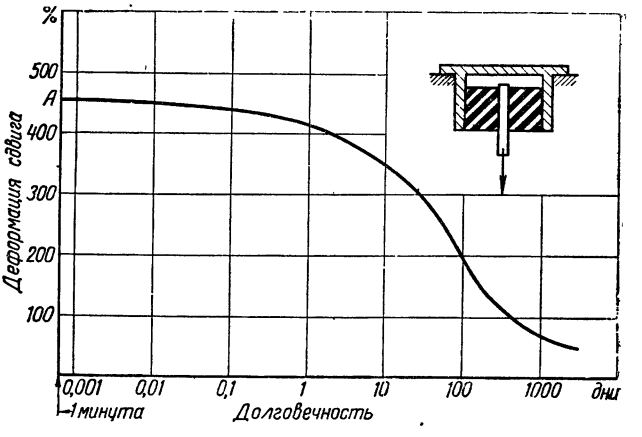
Торцы образца должны быть привулканизованы к металлическим захватам.

В практике жесткость резины часто определяется с помощью твердомера Шора по глубине внедрения в резину конического наконечника, подпертого пружиной.

Твердость по Шору, выраженная в условиях единицах, не связана однозначно с модулем упругости резины, так как при вдавливании конуса в резины различной жесткости изменяется как величина деформаций, так и величина нагрузки. При этом деформации резины вблизи вершины конуса не являются малыми.



Фиг. 343. Связь между твердостью по Шору и модулем упругости резины



Фиг. 344. Зависимость разрушающей деформации от времени действия нагрузки

Для грубо ориентировочного определения модуля упругости в зависимости от твердости по Шору можно использовать график, представленный на фиг. 343. Этот график построен на основе данных, приведенных в работе [22].

Для определения упругих свойств резины в области больших деформаций необходимым является проведение экспериментов при различных видах деформации. Методы, которые применяются в этом случае, подробно рассмотрены в § 4.

Данные о прочности резины при разрыве, получаемые при растяжении образцов, как правило, не могут быть использованы в расчете на прочность даже статически нагруженных резиновых деталей.

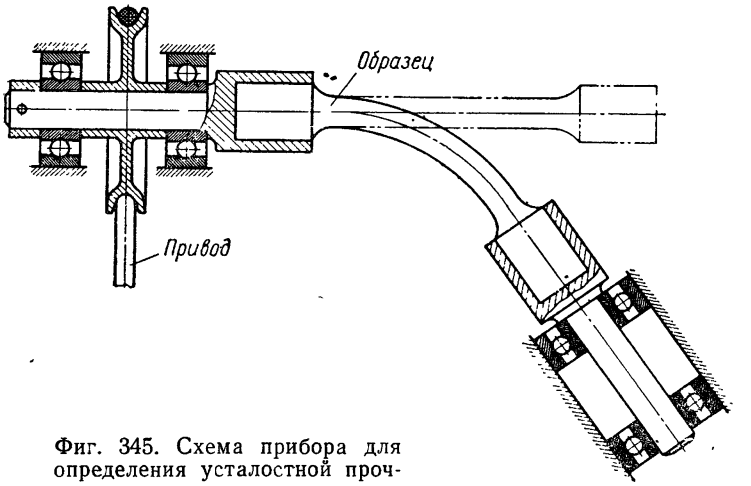
Опыты показывают, что прочность резины в значительной мере зависит от времени воздействия нагрузки.

На фиг. 344 приведена в качестве примера зависимость долговечности работающего на сдвиг амортизатора от величины деформации. Точка A кривой соответствует нагрузке, вызывающей мгновенное разрушение амортизатора.

Разрушение в зоне малых нагрузок связано со старением резины.

Долговечность детали в этой области нагрузок в большой мере зависит от характера немеханических воздействий на деталь при эксплуатации — в первую очередь от температуры, освещенности, среды, в которой деталь работает.

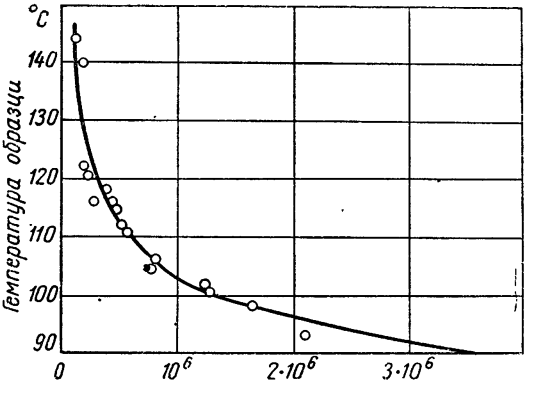
Для деталей, работающих при переменных нагрузках, решающей является динамическая усталостная прочность материала.



Фиг. 345. Схема прибора для определения усталостной прочности резины

Протекание усталостных кривых для резины, зависимость усталостной прочности от средней деформации, усталостная прочность при сложных напряженных состояниях исследованы недостаточно [9], [17].

Распространенные в лабораторной практике испытания резины на машинах типа МРС [1] проводятся при больших амплитудах деформации и односторонних циклах нагружения. Эти испытания носят сравнительный характер.



Фиг. 346. Зависимость долговечности образца при переменной нагрузке от температуры

Наиболее целесообразным методом испытания резины при симметричном цикле деформации для получения предела усталости является испытание вращающихся изогнутых образцов. Схема соответствующего прибора изображена на фиг. 345. Если при испытаниях на этом приборе производить замер изгибающего момента, необходимого для изгиба образца на заданный угол, а также измерять крутящий момент на валу мотора, то можно оценить динамический модуль резины и гистерезисные потери в ней [17].

Проведенные испытания показывают, что на усталостную прочность резины решающее влияние оказывает температура образца.

В качестве примера на фиг. 346 представлена зависимость долго-

[1] Машина растяжения — сжатия, изготовляемая заводом «Металлист» МХП.

вечности образца из резины на основе каучука СКС-30 с 40 весовыми частями канальной сажи при амплитуде деформации 26,5% и частоте 50 *гц* от его температуры, измеряемой с помощью термопары.

Температурная зависимость усталостной прочности должна учитываться при конструировании резиновых деталей, работающих при переменных нагрузках.

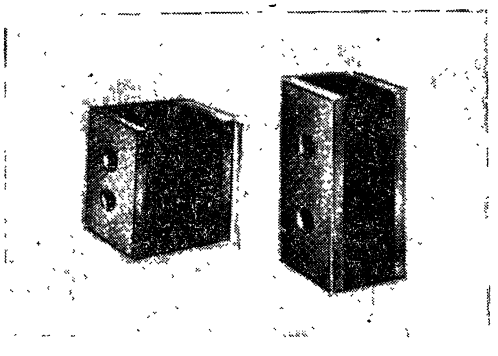
Нагрев этих деталей объясняется тем, что работа внутреннего трения материала переходит в тепло, что в связи с низкой теплопроводностью резины приводит к росту температуры.

При конструировании следует стремиться к сокращению тепловыделения за счет применения резин с низкими потерями, а также к улучшению условий охлаждения детали.

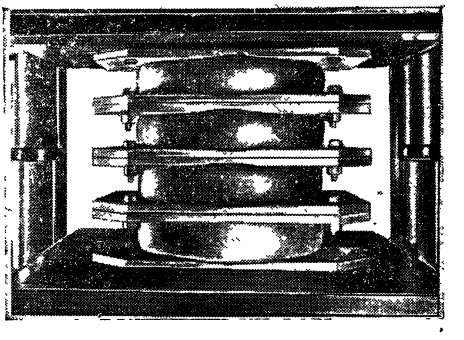
§ 2. РАСЧЕТ РЕЗИНОВЫХ АМОРТИЗАТОРОВ, РАБОТАЮЩИХ НА СЖАТИЕ

Резиновые элементы, работающие на сжатие, широко применяются в практике. Они выполняются обычно в виде цилиндров или параллелепипедов с привулканизованными к торцам металлическими пластинками, служащими для крепления амортизатора (фиг. 347).

Такие амортизаторы бывают самых различных размеров. В качестве примера на фиг. 348 представлен амортизатор, составленный из пяти элементов. Этот амортизатор, рассчитанный на нагрузку 50 *т*, использован в конструкции 10-тонного ковочного пресса.



Фиг. 347. Прямоугольные резино-металлические амортизаторы



Фиг. 348. Пятиэлементный амортизатор 10-тонного ковочного пресса. Рабочая нагрузка амортизатора 50 *т*

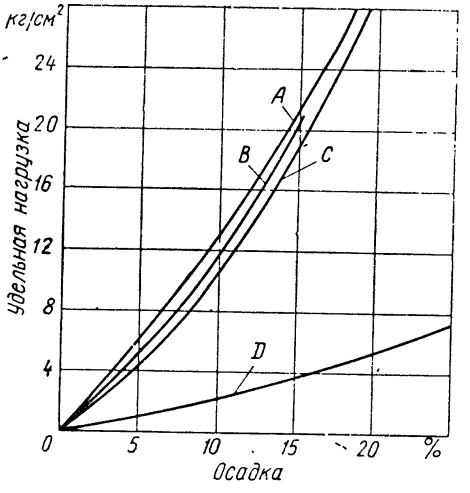
При расчете упругости амортизаторов, работающих на сжатие, необходимо учитывать ужесточающее влияние торцов. Это влияние приводит к тому, что фактическая осадка амортизатора значительно меньше, чем подсчитываемая по формуле одноосного сжатия.

Влияние условий на торцах можно проследить по фиг. 349, на которой представлены кривые обжатия резинового параллелепипеда высотой 27 *мм* и размерами основания 150×20 *мм* при различных условиях закрепления торцов.

Кривая *A* соответствует торцам, привулканизованным к металлу, кривая *B* получена при сжатии образца, на торцы которого была наложена наждачная шкурка, препятствующая поперечным деформациям. Кривая *C* получена при сухих торцах образца, а кривая *D* при смазке вазелином. Исследованная резина имела твердость по Шору 40 единиц. Как видно из графика, в данном случае привулканизация торцов приблизительно в 6 раз увеличивает жесткость амортизатора

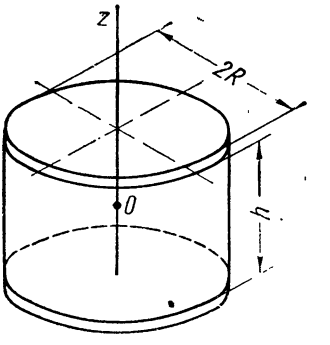
по сравнению с жесткостью резины при одноосном сжатии, которое приближенно имеет место при наличии смазки торцов. Нелинейность кривых свидетельствует о необходимости при осадках, превышающих 10% высоты образца, учитывать наличие больших деформаций.

Теоретическое исследование сжатия с учетом краевого эффекта при больших деформациях чрезвычайно затруднительно. Приближенно можно считать, что усилие при сжатии амортизатора с закрепленными торцами равно усилию при свободном сжатии резины до той же средней деформации, умноженному на некоторый коэффициент ужесточения β, зависящий от формы амортизатора. Этот коэффициент можно



Фиг. 349 Зависимость характеристики резинового параллелепипеда при сжатии от усилий на торцах:

А — торцы привулканизованы; *В* — на торцах проложена наждачная шкурка; *С* — сухие торцы; *Д* — смазанные торцы



Фиг. 350. Цилиндрический амортизатор

найти из рассмотрения работы амортизатора при малых деформациях. В § 4 показано, что при одноосном сжатии в случае больших деформаций нагрузка связана с деформацией приближенной формулой [1]

$$P = \frac{1}{3} EF\left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda\right), \tag{3}$$

где $\lambda = \frac{h_0 - \Delta}{h_0}$ — степень сжатия образца;

h_0 — начальная его высота;

Δ — осадка;

F — начальная площадь основания;

E — модуль упругости при малых деформациях.

В случае малых деформаций, когда величина относительной деформации $\varepsilon = 1 - \lambda = \frac{\Delta}{h_0}$ мала, формула (3) переходит в обычную:

$$P = EF\varepsilon.$$

С учетом краевого эффекта формула для нагрузки на амортизатор примет вид

$$P = \beta \frac{1}{3} EF\left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda\right), \tag{4}$$

[1] Эта формула оказывается справедливой вплоть до двух-трекратного сжатия образца.

где β — коэффициент ужесточения, зависящий от формы амортизатора, остальные обозначения такие же, как в формуле (3).

Для некоторых конфигураций амортизаторов приближенные значения коэффициента ужесточения β можно получить расчетным путем.

Рассмотрим цилиндрический амортизатор, имеющий диаметр $D=2R$ и высоту h (фиг. 350).

Простое, приближенное решение задачи можно получить с помощью метода Ритца, если предположить, что поперечные сечения амортизатора остаются при деформации плоскими. В этом случае осевые перемещения w не зависят от радиуса r и являются только функцией z:

$$w = f(z). \tag{5}$$

Компоненты малых деформаций выражаются через осевые перемещения w и радиальные перемещения ρ по формулам

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z};\\ \varepsilon_r &= \frac{\partial \rho}{\partial r};\\ \varepsilon_\psi &= \frac{\rho}{r};\\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где в рассматриваемом случае $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$.

Условие постоянства объема при малых деформациях имеет вид [см. формулу (1)]

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\psi + \varepsilon_z = 0$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Подставляя сюда принятое выражение $w = f(z)$, получим дифференциальное уравнение относительно ρ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r} = -f'(z).$$

Это уравнение может быть представлено в форме

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \rho) = -f'(z).$$

Интегрируя полученное выражение с учетом условия $\rho_{r=0} = 0$, находим

$$\rho = -\frac{1}{2} f'(z)\, r.$$

Компоненты деформации по зависимостям (6) принимают вид

$$\varepsilon_z = f'(z);$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\psi = -\frac{1}{2} f'(z);$$

$$\gamma_{rz} = -\frac{1}{2} f''(z)\, r.$$

Удельная потенциальная энергия при малых деформациях определяется формулой (2), которая после подстановки полученных значений компонентов деформации принимает вид

$$W = G\left[\frac{3}{2} f'^2(z) + \frac{1}{8} f'''^2(z) r^2\right].$$

Потенциальная энергия деформации всего амортизатора определяется интегрированием:

$$U = 2\pi \int_h \int_r W r dr dz.$$

Интегрирование по r можно выполнить. Тогда

$$U = \pi r^2 G \int_h \left[\frac{3}{2} f'^2(z) + \frac{1}{16} f'''^2(z) R^2\right] dz.$$

Потенциал внешней сжимающей силы равен

$$\mathcal{U} = -P\Delta,$$

где $\Delta = -\int_h f'(z)\, dz$ — уменьшение высоты амортизатора.

Полная энергия системы составляет

$$\Pi = U + \mathcal{U} = \int_h \Phi(f', f''', z)\, dz, \tag{7}$$

где

$$\Phi = \pi R^2 G\left[\frac{3}{2} f'(z) + \frac{1}{16} f'''^2(z) R^2\right] + P f'(z).$$

Из вариационного исчисления известно, что для того, чтобы полная энергия системы, определяемая интегралом (7), была минимальной, функция $f'(z)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f'} - \frac{d}{dz} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial f''} = 0.$$

Раскрывая это уравнение, находим

$$3 f'(z) - \frac{1}{8} f'''(z) R^2 = -\frac{P}{\pi R^2 G}.$$

Это дифференциальное уравнение можно написать в виде

$$f'''(z) - \frac{24}{R^2} f'(z) = \frac{24}{R^2} \cdot \frac{P}{3\pi R^2 G}. \tag{8}$$

Решением уравнения (8) является выражение

$$f'(z) = -\frac{P}{3\pi R^2 G} + A_1 \operatorname{ch} \frac{2\sqrt{6}\, z}{R} + A_2 \operatorname{sh} \frac{2\sqrt{6}\, z}{R},$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования.

Располагая начало координат в среднем сечении амортизатора, получим следующие граничные условия для радиального смещения ρ:

1) при $z = 0$ $\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$ (по симметрии);

2) при $z = \frac{h}{2}$ $\rho = 0$ (поскольку) смещения запрещены благодаря наличию привулканизованных металлических пластин).

Условия 1) и 2) приводят к граничным условиям для функции $f'(z)$:

при $z=0$

$$f''(z)=0;$$

при $z=\frac{h}{2}$

$$f'(z)=0,$$

откуда находим

$$A_2=0;\ A_1=\frac{P}{3\pi R^2G}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{h\sqrt{6}}{R}},$$

и окончательно

$$f'(z)=-\frac{P}{3\pi R^2G}\left[1-\frac{\operatorname{ch}\frac{2\sqrt{6}z}{R}}{\operatorname{ch}\frac{h\sqrt{6}}{R}}\right].$$

Осадка амортизатора Δ равна

$$\Delta=-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}f'(z)\,dz=\frac{Ph}{3\pi R^2G}\left[1-\frac{R}{h\sqrt{6}}\operatorname{th}\frac{h\sqrt{6}}{R}\right]. \tag{9}$$

Для того чтобы получить такую осадку цилиндра со свободными торцами, нужно приложить силу

$$P_0=E\pi R^2\frac{\Delta}{h}$$

или, так как $E=3G$, то

$$P_0=3G\pi R^2\frac{\Delta}{h}. \tag{10}$$

Сопоставляя формулы (9) и (10), находим, что

$$P=\beta P_0,$$

причем

$$\beta=\frac{\frac{h\sqrt{6}}{R}}{\frac{h\sqrt{6}}{R}-\operatorname{th}\frac{h\sqrt{6}}{R}}$$

— коэффициент ужесточения амортизатора за счет закрепления торцов. Зависимость этого коэффициента от отношения $\frac{D}{h}$ (диаметра цилиндра D к его высоте h) представлена на фиг. 351. На той же фигуре даны точки, полученные экспериментально Киммихом [22].

Эксперименты проводились путем сжатия цилиндрических образцов из резины твердостью 65 единиц по Шору до деформации 20%. Для устранения радиальных перемещений у торцов прокладывалась наждачная бумага. Жесткость тех же образцов определялась при торцах, смазанных вазелином. В этом случае образец оставался практически цилиндрическим, и влиянием торцов можно было пренебречь. Для показанных на фиг. 351 экспериментальных точек коэффициент β оп-

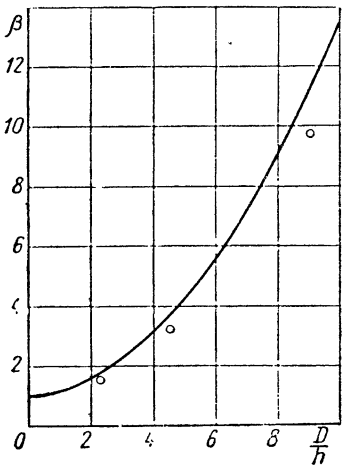
ределялся как отношение нагрузки на образец при наличии наждачной бумаги к нагрузке на образец при наличии смазки.

Как видно из фиг. 351, все экспериментальные точки лежат несколько ниже расчетной кривой. Причиной расхождения является как неточность эксперимента (наждачная бумага не обеспечивает полного закрепления торцов, а смазка — полной их подвижности), так и погрешность теории, связанная с применением метода Ритца.

При большом отношении диаметра амортизатора к его высоте $\left(\frac{D}{h} > 10\right)$ значение осадки амортизатора может быть получено, если в формуле (9) разложить $\text{th}\,\frac{h\sqrt{6}}{R}$ в ряд и пренебречь высшими степенями отношения $\frac{h}{R}$. Таким образом найдем, что при $\frac{D}{h} > 10$

$$\Delta = \frac{2Ph^3}{3\pi R^4 G}.$$

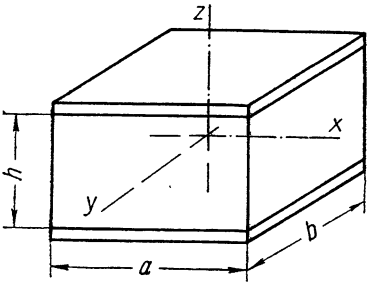
Полученная формула показывает, что для очень низких амортизаторов осадка пропорциональна кубу их высоты.



Фиг 351. Зависимость коэффициента ужесточения β цилиндрического амортизатора от отношения его диаметра D к высоте h (экспериментально полученные точки показаны кружками

Аналогичным способом можно рассмотреть и амортизатор прямоугольной формы со сторонами основания a и b $(a>b)$ и высотой h.

Проведем решение в декартовых координатах. Расположим начало координат в центре и направим оси x и y вдоль сторон оснований, а ось z — по оси амортизатора (фиг. 352).



Фиг. 352. Прямоугольный амортизатор

Принимая, что при деформации поперечные сечения остаются плоскими, зададим осевое смещение w в форме

$$w = f(z).$$

Перемещения в направлениях осей x и y (соответственно u и v) связаны со смещением w условием постоянства объема (1), которое может быть выражено через смещения следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Это условие будет выполнено, если положить, что в каждом поперечном сечении деформации ε_x и ε_y постоянны по величине и равны

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\eta f'(z);\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -(1-\eta) f'(z),\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где η — некоторый постоянный параметр.

Сделанные предположения совершенно аналогичны принятым выше для цилиндрического амортизатора.

Интегрируя выражения (11), найдем

$$u = -\eta f'(z)\, x;$$
$$v = -(1-\eta) f'(z)\, y.$$

Вычисляем компоненты деформации:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = f'(z);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -(1-\eta) f''(z)\, y;$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\eta f''(z) x.$$

Деформации ε_x и ε_y определяются равенствами (11).

Вычисляя энергию деформации

$$U = G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xz}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{yz}^2 \right) dx\,dy\,dz$$

и потенциал внешней сжимающей силы

$$\mathcal{U} = P \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f'(z)\, dz,$$

найдем полную энергию системы

$$\Pi = U + \mathcal{U} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi(f', f'', z)\, dz,$$

где

$$\Phi = \frac{Gab}{24} \left\{ [\eta^2 a^2 + (1-\eta)^2 b^2]\, f'^2(z) + (1 + \eta^2 - \eta)\, 48\, f'^2(z) \right\} + P f'(z)$$

Условие минимальности энергии Π приводит к уравнению Эйлера для функции $f'(z)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f'} - \frac{d}{dz} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial f''} = 0$$

или в развернутом виде

$$f'''(z)+\alpha^2 f'(z)=-\alpha^2\frac{P}{Gab}\cdot\frac{1}{4(1+\eta_1^2-\eta_1)}, \tag{12}$$

где

$$\alpha^2=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{48(1+\eta_1^2-\eta)}{\eta_1^2\left(\frac{a}{b}\right)^2+(1-\eta)^2}. \tag{13}$$

Уравнение (12) совершенно аналогично зависимости (8), полученной для цилиндрического амортизатора. Пользуясь этой аналогией, можно сразу написать решение:

$$f'(z)=-\frac{P}{Gab}\cdot\frac{1}{4(1+\eta_1^2-\eta_1)}\left(1-\frac{\operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{ch}\frac{\alpha h}{2}}\right).$$

Осадка амортизатора определяется интегрированием:

$$\Delta=-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}f'(z)\,dz=\frac{Ph}{Gab}\cdot\frac{1}{4(1+\eta_1^2-\eta_1)}\left(1-\frac{2\operatorname{th}\frac{\alpha h}{2}}{\alpha h}\right). \tag{14}$$

Величина Δ по формуле (14) зависит от выбора параметра η. Так как метод Ритца всегда дает заниженные значения перемещений, то оптимальной будет та величина η, которая соответствует максимуму Δ. Таким образом, для определения η служит уравнение

$$\frac{d\Delta}{d\eta}=0,$$

которое после преобразований приводится к виду

$$(1-2\eta_1)\left(1-\frac{2\operatorname{th}\frac{\alpha h}{2}}{\alpha h}\right)-\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{\alpha h}{2}}-\frac{2\operatorname{th}\frac{\alpha h}{2}}{\alpha h}\right)\left[\frac{1}{2}(2\eta-1)-\right.$$

$$\left.-(1+\eta^2-\eta_1)\frac{\eta\left(\frac{a}{b}\right)^2+\eta_1-1}{\eta^2\left(\frac{a}{b}\right)^2+(1-\eta_1)^2}\right]=0 \tag{15}$$

[при дифференцировании учтено, что α в соответствии с уравнением (13) является функцией η].

Для квадратного амортизатора ($a=b$) деформации в направлении осей x и y, очевидно, должны быть по симметрии одинаковыми и, следовательно [см. формулы (11)] η должно равняться 0,5. Легко видеть, что при $\frac{a}{b}=1$ и $\eta=0{,}5$ уравнение (15) действительно обращается в тождество.

Для того, чтобы определить величину параметра η при других значениях $\frac{a}{b}$ и при различных соотношениях $\frac{h}{b}$, представим уравнение (15) в виде

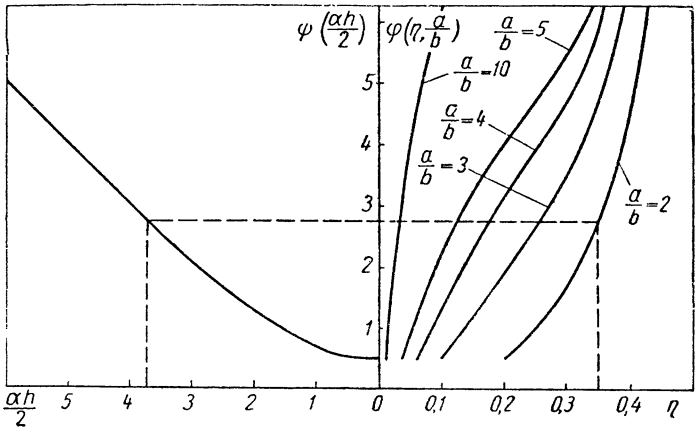
$$\psi\left(\frac{\alpha h}{2}\right)=\varphi\left(\eta,\frac{a}{b}\right),$$

где

$$\psi\left(\frac{\alpha h}{2}\right)=\frac{\alpha h-2\,\mathrm{th}\,\frac{\alpha h}{2}}{\alpha h\left(\mathrm{th}^2\,\frac{\alpha h}{2}-1\right)+2\,\mathrm{th}\,\frac{\alpha h}{2}};$$

$$\varphi\left(\eta,\ \frac{a}{b}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1+\eta^2-\eta}{1-2\eta}\cdot\frac{\eta\left(\frac{a}{b}\right)^2+\eta-1}{\eta^2\left(\frac{a}{b}\right)^2+(1-\eta)^2}.$$

Графическое решение уравнения (15) представлено на фиг. 353. В правой части фигуры построен график функции $\varphi(\eta)$ при различных отношениях $\frac{a}{b}$, а в левой — график зависимости $\psi\left(\frac{\alpha h}{2}\right)$.



Фиг. 353. Графическое решение уравнения (15)

Рассмотрим пример расчета для амортизатора с отношением сторон $\frac{a}{b}=2$

Зададимся каким-либо значением η, например примем $\eta=0{,}35$. По фиг. 353 находим соответствующее значение $\frac{\alpha h}{2}=3{,}75$. По формуле (13) находим произведение

$$\alpha b=\sqrt{\frac{48(1+\eta^2-\eta)}{\eta^2\left(\frac{a}{b}\right)^2+(1-\eta)^2}}=\sqrt{\frac{48(1+0{,}35^2-0{,}35)}{0{,}35^2 2^2+0{,}65^2}}=5{,}6.$$

Таким образом, принятое значение η соответствует амортизатору с отношением ширины к высоте

$$\frac{b}{h}=\frac{\alpha b}{2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)}=\frac{5{,}6}{2\cdot 3{,}75}=0{,}746.$$

Сравнивая осадку амортизатора, подсчитанную по формуле (14), с осадкой призматического резинового стержня со свободными торцами

$$\Delta_0=\frac{Ph}{3Gab},$$

находим коэффициент ужесточения амортизатора за счет влияния торцов

$$\beta=\frac{\Delta_0}{\Delta}=\frac{4(1+\eta^2-\eta)}{3\left(1-\frac{2}{\alpha h}\,\mathrm{th}\,\frac{\alpha h}{2}\right)}.$$

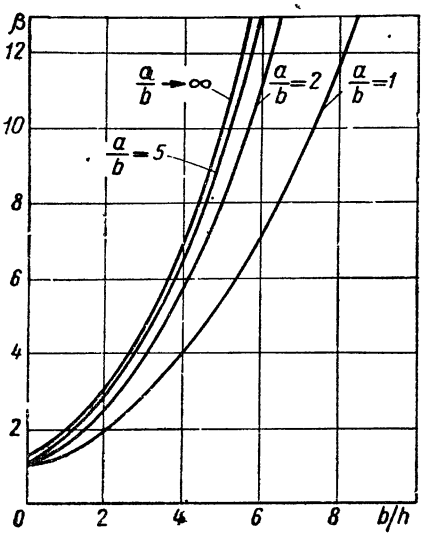
В данном случае

$$\beta = \frac{4(1+0{,}35^2-0{,}35)}{3\left(1-\dfrac{\text{th}\,3{,}75}{3{,}75}\right)} = 1{,}4.$$

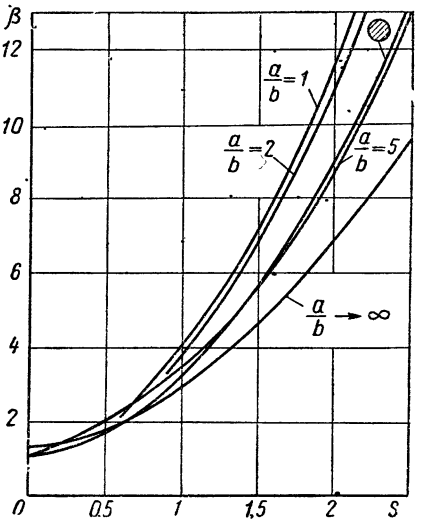
Аналогичный расчет может быть проведен при других значениях η.

Полученные таким образом зависимости коэффициента ужесточения β от отношения малой стороны основания b к высоте амортизатора h при различных соотношениях $\frac{a}{b}$ представлены на фиг. 354.

Из графиков видно, что амортизаторы с основанием в виде вытянутого прямоугольника являются относительно более жесткими, чем квадратные.



Фиг. 354. Коэффициент ужесточения β для прямоугольных амортизаторов



Фиг. 355. Коэффициент ужесточения β для прямоугольных и круглых амортизаторов в зависимости от коэффициента формы S

Для расчета на сжатие резиновых деталей различной формы в практике распространены различного рода эмпирические формулы. Чаще всего коэффициент ужесточения, обусловленный влиянием торцов связывается с так называемым коэффициентом формы S, представляющим собой отношение площади основания амортизатора к площади боковой его поверхности. При этом обычно предполагается, что данному значению S соответствует коэффициент β, одинаковый для амортизаторов различной конфигурации.

Для цилиндрического амортизатора

$$S = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\pi Dh} = \frac{D}{4h},$$

для прямоугольного

$$S = \frac{ab}{2(a+b)h} = \frac{\frac{a}{b}}{2\left(\frac{a}{b}+1\right)} \cdot \frac{b}{h}.$$

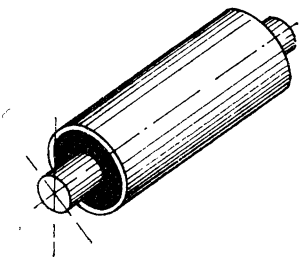
На фиг. 355, полученные расчетом значения коэффициента ужесточения для цилиндрического и прямоугольных амортизаторов представлены в зависимости от коэффициента формы S.

Как видно из фигуры, кривые для различных конфигураций амортизатора существенно расходятся, поэтому расчет по коэффициенту S можно рассматривать только как ориентировочный. Если кривую зависимости $\beta(S)$ для цилиндрического амортизатора принять в качестве расчетной, то ошибки при расчете прямоугольных амортизаторов различной конфигурации могут достигнуть $\pm 30\%$.

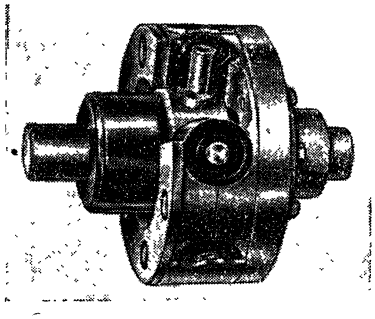
§ 3. РАСЧЕТ РЕЗИНО-МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ШАРНИРА

Резино-металлические шарниры (сайлент-блоки) очень широко используются в машиностроении.

Резино-металлический шарнир (фиг. 356) представляет собой полый резиновый цилиндр, скрепленный с внутренней и внешней металлическими обоймами.



Фиг. 356. Резино-металлический шарнир



Фиг. 357. Упругая муфта с резино-металлическими шарнирами

Скрепление достигается путем привулканизации резины к металлу или с помощью запрессовки. В основном резино-металлические шарниры используются как соединение, допускающее поворот одной детали относительно другой в известных пределах. Они применяются, например, в креплении листовых рессор, в соединениях траков гусеничных машин, в сочленениях различных рычагов.

В отличие от обычных шарниров сайлент-блоки не требуют смазки и бесшумны в работе.

Резино-металлические шарниры используются и как упругие элементы, работающие на коаксиальное кручение, а также на продольную и боковую нагрузку.

В качестве примера на фиг. 357 изображена конструкция муфты с упругими элементами в виде сайлент-блоков, работающих на боковую нагрузку. В таких же условиях находятся и упругие элементы амортизаторов, использованных в установке судового дизель-генератора, представленной на фиг. 358. Разрез амортизатора показан на фиг. 359.

Рассмотрим расчет резино-металлического шарнира на коаксиальное кручение.

Обозначим r_1 и r_2 наружный и внутренний радиусы резинового цилиндра, l — длину шарнира.

Рассечем шарнир цилиндрической поверхностью радиуса r

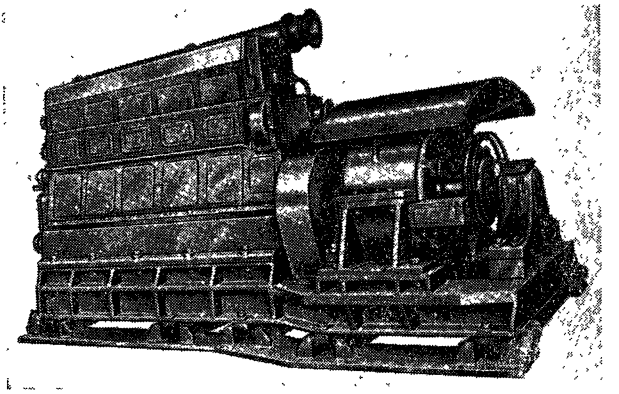
(фиг. 360). Приложенные на этой поверхности касательные напряжения $\tau_{r\varphi}$ уравновешивают приложенный к шарниру внешний момент M.

Умножая напряжение $\tau_{r\varphi}$ на величину боковой поверхности выделенного цилиндра и на его радиус r, найдем

$$\tau_{r\varphi} 2\pi r^2 l = M,$$

откуда

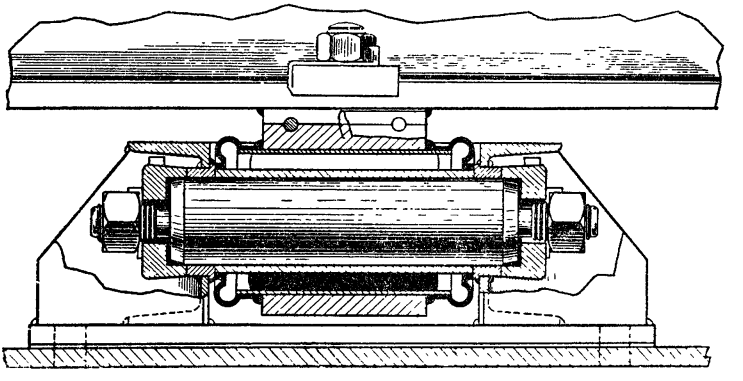
$$\tau_{r\varphi} = \frac{M}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r^2}. \tag{16}$$



Фиг. 358

Таким образом, напряжение обратно пропорционально квадрату радиуса и достигает максимума около внутренней обоймы:

$$\tau_{max} = \frac{M}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r_1^2}.$$



Фиг. 359. Разрез амортизатора. Резино-металлический шарнир защищен от попадания масла чехлами из маслостойкой резины

Связь между моментом M и углом закручивания шарнира φ найдем из рассмотрения энергии деформации и работы момента M:

$$\frac{1}{2} M\varphi = \int_v \frac{\tau^2}{2G} dv, \tag{17}$$

где интеграл берется по всему объему резины.

Заменим в уравнении (17) касательное напряжение его значением (16) и выберем в качестве элемента объема элементарный цилиндр:

$$dv = 2\pi r l dr.$$

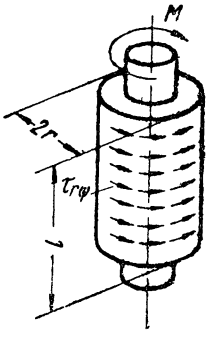
Вычисляя интеграл в уравнении (17), получим

$$\frac{1}{2} M\varphi = \frac{1}{2G} \cdot \frac{M^2}{4\pi^2 l^2} 2\pi l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^3} = \frac{M^2}{4\pi Gl} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 r_1^2 r_2^2},$$

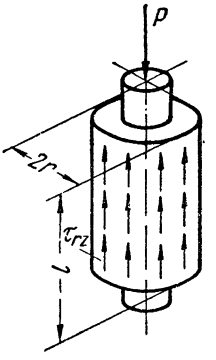
откуда

$$\varphi = \frac{M}{4\pi Gl} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2}. \qquad (18)$$

Интересно отметить, что, как это будет показано в § 4, полученная формула для угла закручивания справедлива не только при малых, но и при больших деформациях. Справедлива в этом случае и формула (16) для касательных напряжений, но при больших деформациях наряду с касательными напряжениями возникают и нормальные напряжения в цилиндрических, радиальных и поперечных сечениях шарнира.



Фиг. 360. К определению напряжений при скручивании резино-металлического шарнира



Фиг. 361. К определению напряжений при осевой нагрузке резино-металлического шарнира

Определение напряжений и перемещений при осевой нагрузке на резино-металлический шарнир также выполняется без затруднений.

Если вырезать снова цилиндр радиуса r (фиг. 361), то можно установить, что внешняя нагрузка P уравновешивается приложенными по поверхности цилиндра касательными напряжениями. Ввиду того что толщина резинового слоя обычно мала по сравнению с длиной цилиндра, касательные напряжения можно приближенно считать равномерно распределенными, тогда получим

$$\tau_{rz} 2\pi rl = P,$$

откуда

$$\tau_{rz} = \frac{P}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r}. \qquad (19)$$

Максимальное касательное напряжение у внутренней обоймы равно

$$\tau_{max} = \frac{P}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r_1}.$$

Осевое перемещение Δ обоймы под действием силы P определим, приравнивая работу этой силы потенциальной энергии деформации резины:

$$\frac{1}{2} P\Delta = \int_v \frac{\tau^2}{2G} dv = \frac{1}{2G} \cdot \frac{P^2}{2\pi l} \int_{r_0}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{P^2}{4\pi Gl} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

Откуда

$$\Delta = \frac{P}{2\pi Gl} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{20}$$

Формула (20) справедлива как при малых, так и при больших деформациях.

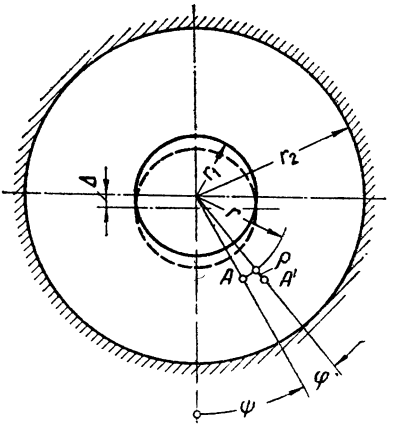
Расчет резино-металлического шарнира на боковую нагрузку связан с бо́льшими затруднениями.

Предположим вначале, что длина шарнира l велика по сравнению с его диаметром $2r_2$. В этом случае осевые перемещения w будут отсутствовать.

Угловое φ и радиальное ρ перемещения произвольной точки A, переходящей в точку A' (фиг. 362), можно представить в форме

$$\varphi = f_1(r) \sin \psi;$$
$$\rho = f_2(r) \cos \psi,$$

где ψ — угол, определяющий начальное положение точки.



Фиг. 362. Перемещения при боковой нагрузке на резино-металлический шарнир

Предположим, что внешняя обойма шарнира закреплена неподвижно, а внутренняя перемещается под действием силы P в вертикальном направлении.

В этом случае смещения ρ и φ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

а) на наружном радиусе $(r = r_2)$

$$\rho = 0; \quad \varphi = 0;$$

б) на внутреннем радиусе $(r = r_1)$

$$\rho = \Delta \cos \psi; \quad \varphi = -\frac{\Delta}{r_1} \sin \psi,$$

где Δ — смещение внутренней обоймы.

Из условий а) и б) следует, что при $r = r_2$

$$f_1(r_2) = 0; \quad f_2(r_2) = 0, \tag{21}$$

а при $r = r_1$

$$f_1(r_1) = -\frac{1}{r_1} f_2(r_1). \tag{22}$$

Компоненты деформации, считая их малыми, определяются по формулам

$$\varepsilon_r = \frac{\partial \rho}{\partial r} = f_2'(r) \cos \psi;$$

$$\varepsilon_\psi = \frac{\rho}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}\left[\frac{1}{r} f_2(r) + f_1(r)\right] \cos \psi;$$

$$\gamma_{r\psi} = \frac{\partial \rho}{r \partial \psi} + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left[-\frac{1}{r} f_2(r) + r f_1'(r)\right] \sin \psi.$$

Условие несжимаемости в случае плоской деформации приводит к уравнению

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\psi = 0$$

или

$$f_2'(r) + \frac{1}{r} f_2(r) + f_1(r) = 0. \qquad (23)$$

С учетом этого соотношения граничные условия (21) и (22) приводят к равенствам

$$f_2'(r_1) = 0;\ f_2'(r_2) = 0. \qquad (24)$$

Вычислим удельную потенциальную энергию деформации резины:

$$W = G\left(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\psi^2 + \frac{1}{2}\gamma_{r\psi}^2\right) =$$

$$= G\left\{\left[f_2'^2 + \left(\frac{1}{r} f_2 + f_1\right)^2\right]\cos^2\psi + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r} f_2 + r f_1'\right)^2 \sin^2\psi\right\},$$

где аргумент r функций f_1 и f_2 для краткости опущен.

Заменяя в этом выражении $f_1(r)$ через $f_2(r)$ в соответствии с равенством (23), получим

$$W = G\left[2f_2'^2\cos^2\psi + \frac{1}{2}(rf_2'' + f_2')^2\sin^2\psi\right]. \qquad (25)$$

Полная энергия деформации определяется интегрированием выражения (25) по всему объему резины:

$$U = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^l\int_0^{2\pi} W d\psi\, dz r dr.$$

Интегрирование по углу ψ и по длине l легко выполняется:

$$U = \pi Gl\int_{r_1}^{r_2}\left[\frac{5}{2} f_2'^2 r + r^2 f_2'' f_2' + \frac{1}{2} r^3 f_2''^2\right] dr.$$

Потенциал внешней силы P равен произведению этой силы на перемещение внутренней обоймы Δ со знаком минус:

$$\mathcal{U} = -P\Delta = -Pf_2(r_1) = P\int_{r_1}^{r_2} f_2'\, dr.$$

Полная энергия системы равна сумме потенциальной энергии деформации и потенциала внешних сил:

$$\Pi = U + \mathcal{U} = \int_{r_1}^{r_2}\left[\pi Gl\left(\frac{5}{2} f_2'^2 r + r^2 f_2'' + f_2' \frac{1}{2} r^3 f_2''^2\right) + Pf_2'\right] dr. \qquad (26)$$

Условие минимума полной энергии системы приводит к дифференциальному уравнению Эйлера для функции $f_2'(r)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f_2'} - \frac{d}{dr}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial f_2''} = 0, \qquad (27)$$

где Φ — подынтегральное выражение в формуле (26),

Вычисляя частные производные, получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f_2'} = \pi Gl(5rf_2' + r^2 f_2'') + P;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f_2''} = \pi Gl(r^2 f_2' + r^3 f_2'').$$

Тогда уравнение (27) примет вид

$$-f_2''' r^3 - 3f_2'' r^2 + 3f_2' r = -\frac{P}{\pi Gl}. \tag{28}$$

Решение дифференциального уравнения (28) состоит из частного его решения и общего решения однородного уравнения

$$-f_2''' r^3 - 3f_2'' r^2 + 3f_2' r = 0. \tag{28а}$$

Решение уравнения (28 а) ищем в форме

$$f_2' = r^\alpha.$$

Подставим это выражение в уравнение (28 а), тогда

$$[-\alpha(\alpha-1) - 3\alpha + 3] r^{\alpha+1} = 0$$

и, следовательно, α определяется квадратным уравнением

$$\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0,$$

корнями которого являются значения $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = -3$.

Итак, общее решение однородного уравнения (28 а) имеет вид

$$f_{2,0}' = C_1 r + \frac{C_2}{r^3}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (28) (это решение можно получить, например, методом вариации постоянных) имеет вид

$$f_{2,1}' = -\frac{P}{4\pi Gl} \cdot \frac{1}{r}.$$

Таким образом,

$$f_2'(r) = -\frac{P}{4\pi Gl} \cdot \frac{1}{r} + C_1 r + C_2 \frac{1}{r^3}.$$

Определяя постоянные интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий (24) и подставляя их в выражение f_2', получим

$$f_2'(r) = -\frac{P}{4\pi Gl}\left[\frac{1}{r} - \frac{r}{r_1^2 + r_2^2} - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \cdot \frac{1}{r^3}\right]. \tag{29}$$

Интегрируя это выражение и учитывая, что $f_2(r_2) = 0$, находим

$$f_2(r) = -\frac{P}{4\pi Gl}\left[\ln\frac{r}{r_2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2(r_1^2 + r_2^2)} - \frac{r^2}{2(r_1^2 + r_2^2)} + \frac{r_1^2 r_2^2}{2(r_1^2 + r_2^2)} \cdot \frac{1}{r^2}\right]. \tag{30}$$

По уравнению (23) определяем функцию $f_1(r)$:

$$f_1(r) = \frac{P}{4\pi Gl}\left[\frac{1}{r}\ln\frac{r}{r_2} + \frac{3r_2^2 + r_1^2}{2(r_1^2 + r_2^2)} \cdot \frac{1}{r} - \frac{3}{2(r_1^2 + r_2^2)} \cdot r - \frac{r_1^2 r_2^2}{2(r_1^2 + r_2^2)} \cdot \frac{1}{r^3}\right]. \tag{31}$$

Радиальное перемещение внутренней обоймы устанавливается по формуле

$$\Delta = f_2(r_1) = \frac{P}{4\pi Gl}\beta, \tag{32}$$

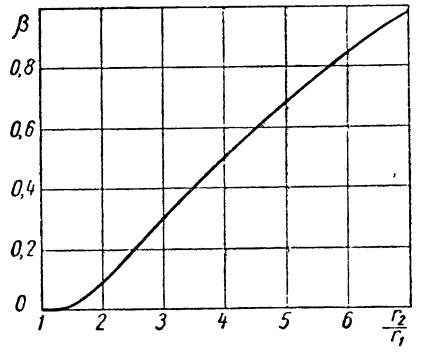
где β — коэффициент, зависящий от отношения $\frac{r_2}{r_1}$ и равный

$$\beta = \ln\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 + r_1^2}. \tag{33}$$

Зависимость коэффициента β от отношения $\frac{r_2}{r_1}$ представлена на фиг. 363. При отношениях $\frac{r_2}{r_1} \leqslant 2$ можно пользоваться формулой

$$\beta \approx \frac{8}{3}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}\right)^3, \tag{34}$$

которая получается из формулы (33) путем разложения в ряд. При выполняемых обычно соотношениях $\frac{r_2}{r_1}$ формула (34) дает совершенно достаточную точность, и в этом случае радиальное перемещение составляет



Фиг. 363. Изменение коэффициента β для бесконечно длинного шарнира

$$\Delta = P\frac{2}{3\pi Gl}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}\right)^3. \tag{32a}$$

Полученное решение для весьма длинного резино-металлического шарнира является точным, поскольку никаких ограничений на функции $f_1(r)$ и $f_2(r)$ наложено не было.

Теперь перейдем к рассмотрению шарнира, длину которого нельзя считать бесконечно большой в сравнении с его внешним радиусом. В этом случае, кроме смещений в окружном и радиальном направлениях, необходимо учесть и осевые перемещения.

Расположим начало координат в среднем сечении шарнира и зададим следующие выражения для перемещений:

$$\varphi = f_1^*(r)\sin\psi;$$
$$\rho = f_2^*(r)\cos\psi;$$
$$w = f_3(r)\,z\cos\psi.$$

Выражениями для функций $f_1^*(r)$ и $f_2^*(r)$ зададимся, используя полученное выше решение для длинного шарнира. В этом случае перемещения φ и ρ были пропорциональны соответственно функциям

$$\theta_1 = -\left[\frac{1}{r}\ln\frac{r}{r_2} + \frac{3r_2^2 + r_1^2}{2(r_1^2 + r_2^2)}\cdot\frac{1}{r} - \frac{3}{2(r_1^2 + r_2^2)}r + \right.$$
$$\left. + \frac{r_1^2 r_2^2}{2(r_1^2 + r_2^2)}\cdot\frac{1}{r^3}\right] \tag{35}$$

и

$$\theta_2 = \ln\frac{r}{r_2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2(r_1^2 + r_2^2)} - \frac{1}{2(r_1^2 + r_2^2)}r + \frac{r_1^2 r_2^2}{2(r_1^2 + r_2^2)}\frac{1}{r^2}. \tag{36}$$

Эти функции удовлетворяют граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} &\theta_1(r_2) = 0; \quad \theta_2(r_2) = 0; \\ &\theta_1(r_1) + \frac{1}{r}\,\theta_2(r_1) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

а также условию постоянства объема при плоской деформации

$$\theta_2' + \frac{1}{r}\theta_2 + \theta_1 = 0, \tag{38}$$

В случае наличия осевых деформаций функции $f_1^*(r)$ и $f_2^*(r)$ должны удовлетворять тем же граничным условиям (37), что θ_1 и θ_2, однако условие (38) уже не является обязательным.

Положим

$$\left.\begin{aligned} f_1^*(r) &= A\theta_1(r) - B\frac{1}{r}\theta_2(r); \\ f_2^*(r) &= (A+B)\theta_2(r), \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

где A и B — неопределенные коэффициенты.

Легко убедиться в том, что выражения (39) удовлетворяют граничным условиям (37).

Если положить $B=0$, то выражения (39) не будут отличаться от выражений (30) и (31) функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$ для бесконечно длинного шарнира.

Теперь установим функцию $f_3(r)$, исходя из условия постоянства объема.

Линейные деформации определяются формулами

$$\varepsilon_r = \frac{\partial \rho}{\partial r} = f_2'(r)\cos\psi = (A+B)\,\theta_2'\cos\psi;$$

$$\varepsilon_\psi = \frac{\rho}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = \left[\frac{1}{r}f_2(r) + f_1(r)\right]\cos\psi = A\left(\frac{1}{r}\,\theta_2 + \theta_1\right)\cos\psi;$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = f_3(r)\cos\psi.$$

Условие постоянства объема при малых деформациях имеет вид

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\psi + \varepsilon_z = 0$$

или

$$(A+B)\,\theta_2' + A\left(\frac{1}{r}\,\theta_2 + \theta_1\right) + f_3(r) = 0.$$

Учитывая, что функции θ_1 и θ_2 удовлетворяют уравнению (38) найдем

$$f_3(r) = -B\,\theta_2'.$$

Учитывая это значение $f_3(r)$, получим для линейных деформаций

$$\varepsilon_r = (A+B)\,\theta_2'\cos\psi;$$

$$\varepsilon_\psi = -A\,\theta_2'\cos\psi;$$

$$\varepsilon_z = -B\,\theta_2'\cos\psi,$$

Сдвиги определяются формулами

$$\gamma_{r\psi} = \frac{\partial \rho}{r\partial \psi} + r\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left[A\left(\theta_1' r - \frac{\theta_2}{r}\right) - B\,\theta_2'\right]\sin\psi;$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = -B\,\theta_2'' z\cos\psi;$$

$$\gamma_{\psi z} = r\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial \psi} = B\,\frac{1}{r}\,\theta_2' z\sin\psi.$$

Вычислим потенциальную энергию деформации резины во всем объеме шарнира

$$U = G\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\int_{r_1}^{r_2}\int_{0}^{2\pi}\left[\varepsilon_r^2+\varepsilon_\psi^2+\varepsilon_z^2+\frac{1}{2}\left(\gamma_{r\psi}^2+\gamma_{\psi z}^2+\gamma_{rz}^2\right)\right]r\,d\psi\,dr\,dz,$$

потенциал силы P

$$\mathcal{U} = -P\Delta = -Pf_2(r_1) = -P(A+B)\theta_2(r_1)$$

и полную энергию системы

$$\Pi = U + \mathcal{U},$$

Все интегралы, входящие в выражение полной энергии системы, можно вычислить. Таким образом, мы получим

$$\Pi = \pi lG\left\{A^2 2\left(\ln\frac{r_2}{r_1}-\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1^2+r_2^2}\right)+\left(\frac{5}{2}B^2+2AB\right)\left[\left(1+\right.\right.\right.$$
$$\left.+\frac{2r_1^2r_2^2}{(r_1^2+r_2^2)^2}\right)\ln\frac{r_2}{r_1}-$$
$$\left.-\frac{3}{2}\cdot\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1^2+r_2^2}\right]\Bigg\}+\frac{\pi Gl^3}{36}B^2\frac{(r_2^2-r_1^2)^3}{r_1^2r_2^2(r_1^2+r_2^2)^2}-$$
$$-P(A+B)\left(\ln\frac{r_2}{r_1}-\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1^2+r_2^2}\right).$$

Чтобы полная энергия деформации была минимальной, должны выполняться уравнения

$$\frac{\partial\Pi}{\partial A}=0;\qquad\frac{\partial\Pi}{\partial B}=0.$$

Раскрывая эти уравнения, получим

$$\left.\begin{aligned}
&A\left(\ln\frac{r_2}{r_1}-\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1^2+r_2^2}\right)+\frac{1}{2}B\left[\frac{r_1^4+r_2^4+4r_1^2r_2^2}{(r_1^2+r_2^2)^2}\ln\frac{r_2}{r_1}-\right.\\
&\left.-\frac{3}{2}\cdot\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1^2+r_2^2}\right]-\frac{P}{4\pi lG}\left(\ln\frac{r_2}{r_1}-\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1^2+r_2^2}\right)=0;\\
&\frac{1}{2}A\left[\frac{r_1^4+r_2^4+4r_1^2r_2^2}{(r_1^2+r_2^2)^2}\ln\frac{r_2}{r_1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1^2+r_2^2}\right]+\\
&+B\left\{\frac{5}{4}\left[\frac{r_1^4+r_2^4+4r_1^2r_2^2}{(r_1^2+r_2^2)^2}\ln\frac{r_2}{r_1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1^2+r_2^2}\right]+\right.\\
&\left.+\frac{l^2(r_2^2-r_1^2)^3}{72r_1^2r_2^2(r_1^2+r_2^2)^2}\right\}-\frac{P}{4\pi lG}\left(\ln\frac{r_2}{r_1}-\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1^2+r_2^2}\right)=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(40)$$

Из системы уравнений (40) можно найти A и B, и затем и перемещение

$$\Delta=(A+B)\left(\ln\frac{r_2}{r_1}-\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1^2+r_2^2}\right),\qquad(41)$$

Общее выражение для перемещения имеет довольно сложную форму. Однако, для того случая, когда отношение $\frac{r_2}{r_1} < 2$, можно воспользоваться разложением в ряды по степеням отношения $\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$.

Простые преобразования приводят в этом случае к формулам

$$A = \frac{P}{4\pi lG} \cdot \frac{l^2 + \frac{6}{5}(r_2 - r_1)^2}{l^2 + 6(r_2 - r_1)^2};$$

$$B = \frac{P}{4\pi lG} \cdot \frac{3(r_1 + r_2)^2}{l^2 + 6(r_2 - r_1)^2}.$$

Подставляя эти значения в зависимость (41) и учитывая, что

$$\ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \approx \frac{8}{3}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}\right)^3,$$

найдем радиальное перемещение

$$\Delta = \frac{2P}{3\pi lG} \cdot \frac{l^2 + 3(r_1 + r_2)^2}{l^2 + 6(r_2 - r_1)^2} \cdot \frac{(r_2 - r_1)^3}{(r_2 + r_1)^3} \qquad (42)$$

и радиальную жесткость шарнира

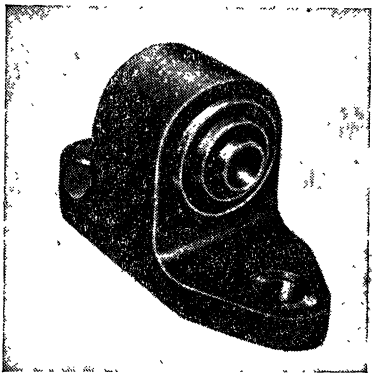
$$c = \frac{P}{\Delta} = \frac{3}{2}\pi lG \frac{l^2 + 6(r_2 - r_1)^2}{l^2 + 3(r_1 + r_2)^2} \cdot \frac{(r_2 + r_1)^3}{(r_2 - r_1)^3}. \qquad (43)$$

Из полученного выражения видно, что формула (32а), выведенная для бесконечно длинного шарнира, пригодна только когда отношение длины шарнира l к его среднему диаметру $(r_1 + r_2)$

$$\frac{l}{r_1 + r_2} > 6.$$

Для более коротких шарниров возможность продольных перемещений приводит к значительному увеличению податливости.

Из формулы (42) следует, что радиальная податливость резино-металлического шарнира пропорциональна кубу толщины резинового слоя. Поэтому двойной шарнир с разделенным слоем (фиг. 364) будет иметь боковую податливость приблизительно в 4 раза меньшую, чем одинарный шарнир со слоем двойной толщины. Вместе с тем крутильная податливость обоих шарниров примерно одинакова.



Фис. 364. Резино-металлический шарнир с разделенным слоем

Двойные шарниры применяются в практике, когда нужно свести боковую податливость к минимуму.

§ 4. МЕТОДЫ РАСЧЕТА РЕЗИНОВЫХ ДЕТАЛЕЙ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. Энергия деформации и закон упругости резины при больших деформациях

Величина деформаций, испытываемых резиной в силовых резиновых деталях, за редкими исключениями [1] во много раз меньше, чем деформации, соответствующие разрыву материала при статическом нагружении. Вместе с тем деформации часто не являются малыми в обычном смысле этого слова (т. е. относительные деформации не малы по сравнению с единицей).

В этих случаях для описания свойств и поведения резины в конструкции необходимо привлечь теорию конечных деформаций. Напряженное состояние резины в конструкции, как правило, не является одноосным, вследствие чего необходимо исследовать поведение резины в общем случае напряженного состояния.

Разумеется, экспериментальное определение характеристик резины при всевозможных типах напряженных состояний практически неосуществимо. Так же как и при исследовании свойств металлов, здесь необходима теория, позволяющая расчетным путем определять эти характеристики при любом типе напряженного состояния по характеристикам, полученным экспериментально при некоторых простейших видах нагружения.

Следует иметь в виду, что при расчете металлов в пределах упругости теория, позволяющая переходить от одного вида напряженного состояния к другому, необходима только для определения условий наступления текучести или разрушения материала (теория прочности). Закон упругости материала (закон Гука) при общем виде напряженного состояния для металлов устанавливается без каких-либо гипотез.

При этом используется принцип суперпозиции (наложения), поскольку произвольное напряженное состояние может быть представлено как сумма трех одноосных напряженных состояний.

Для резины закон Гука в обычной формулировке справедлив только при малых по сравнению с единицей деформациях (т. е. до удлинений порядка 10%).

Эти деформации значительно превосходят деформации, соответствующие пределу пропорциональности для металлов, и с этой точки зрения можно сказать, что пределы применимости закона Гука для резины шире, чем для металлов.

Однако во многих деталях резина работает при больших деформациях, при которых принцип суперпозиции неприложим и, следовательно, несправедлив и обобщенный закон Гука в обычной формулировке. Поэтому применительно к резине теория, позволяющая переходить от одного напряженного состояния к другому, необходима не только для определения предельных напряженных состояний, но и для исследования упругих свойств при больших деформациях.

Такая теория может быть построена на основании рассмотрения энергии деформации резины.

Работа, затрачиваемая на деформирование единицы объема резины, зависит от величины деформаций, а также, вообще говоря, и от закона их нарастания.

---

[1] Весьма большие деформации удлинения резины осуществляются, например, в амортизационных шнурах.

Так, опыты показывают, что для получения той же деформации при большой скорости нагружения требуется затратить бóльшую работу, чем при медленном нагружении. Однако для лучших конструкционных резин зависимость работы, затраченной на деформацию, от способа нагружения незначительна, особенно в случае относительно небольших деформаций.

Поэтому в первом приближении можно считать, что работа, затраченная на деформирование резины, определяется только величиной деформации и не зависит от того, каким путем и с какой скоростью осуществляется переход от начального состояния к деформированному.

Это предположение означает, в сущности, что потери, которые имеют место при деформации резины, не учитываются.

Опыт показывает, что принятие гипотезы об отсутствии потерь является вполне допустимым при изучении общей связи между деформациями и напряжениями.

Следует, однако, иметь в виду, что при исследовании таких вопросов, как колебания резиновых деталей, определение температурного режима их работы и др., гипотеза об отсутствии потерь должна быть отброшена. В этих случаях должны учитываться сопровождающие деформацию резины релаксационные явления.

Согласно принятой гипотезе работа, затраченная на деформацию элементарного объема резины, зависит только от его деформированного состояния. Деформированное состояние при произвольных по величине деформациях характеризуется шестью компонентами деформаций, которые связаны с частными производными от компонентов перемещения u, v и w формулами

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right];\\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right];\\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right];\\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y};\\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z};\\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

(см. формулы (8) гл. II т. I).

Очевидно, что энергия деформации полностью определяется значениями указанных компонентов деформации. Можно, однако, вместо компонентов деформации охарактеризовать деформированное состояние тремя значениями главных линейных деформаций ε_1, ε_2 и ε_3 и направлениями соответствующих главных осей деформации.

Для изотропного в недеформированном состоянии материала, каким в общем является резина [1], величина энергии деформации не зависит, естественно, от направления главных осей деформации и зависит только от значений ε_1, ε_2 и ε_3.

[1] Слабую анизотропию, возникающую при некоторых технолсгических операциях изготовления резиновых изделий (например, так называемый каландровый эффект), можно, как правило, не учитывать.

Главные линейные деформации связаны с относительными удлинениями ε_1^*, ε_2^* и ε_3^* в направлениях главных осей деформации формулами [см. формулы (22)—(24) гл. II т. I]

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1+2\varepsilon_1} &= 1+\varepsilon_1^* = \lambda_1;\\ \sqrt{1+2\varepsilon_2} &= 1+\varepsilon_2^* + \lambda_2;\\ \sqrt{1+2\varepsilon_3} &= 1+\varepsilon_3^* = \lambda_3,\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

где дополнительно введены обозначения

$$\lambda = 1+\varepsilon^* \tag{46}$$

для величины, выражающей отношение длины отрезка после деформации к его первоначальной длине. Величину λ можно назвать степенью удлинения [18].

Величины главных линейных деформаций являются корнями кубического уравнения (57) гл. II т. I:

$$\varepsilon^3 - J_1\varepsilon^2 - J_2\varepsilon - J_3 = 0, \tag{47}$$

где J_1, J_2 и J_3 — инварианты деформации, выражающиеся через компоненты деформации по формулам (58) гл. II т. I:

$$\left.\begin{aligned}J_1 &= \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-3);\\ J_2 &= -\varepsilon_x\varepsilon_y-\varepsilon_y\varepsilon_z-\varepsilon_z\varepsilon_x+\frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2) =\\ &= -(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1) = \frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-3) -\\ &-\frac{1}{4}(\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2-3);\\ J_3 &= \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z-\frac{1}{4}(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2+\varepsilon_y\gamma_{zx}^2+\varepsilon_z\gamma_{xy}^2-\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}) =\\ &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \frac{1}{8}(\lambda_1^2-1)(\lambda_2^2-1)(\lambda_3^2-1).\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

В соответствии со сказанным выше удельная энергия деформации является функцией трех главных деформаций или, что то же, трех инвариантов тензора деформации J_1, J_2 и J_3:

$$W = W(J_1, J_2, J_3). \tag{49}$$

Представление энергии как функции инвариантов удобнее, чем выражение ее через главные деформации, так как инварианты могут быть найдены через компоненты деформации в произвольной системе координат по формулам (48), тогда как для определения главных деформаций в этом случае необходимо решить кубическое уравнение (47).

Количество независимых переменных в выражении (49) для энергии деформации может быть сокращено, так как объем резины при реализуемых в ней напряженных состояниях практически не изменяется (см. выше § 1).

Условие сохранения объема накладывает дополнительное ограничение на деформации. При отсутствии относительного изменения объема инварианты деформации связаны соотношением [см. формулу (68) гл. II т. I]

$$J_1 - 2J_2 + 4J_3 = 0, \tag{50}$$

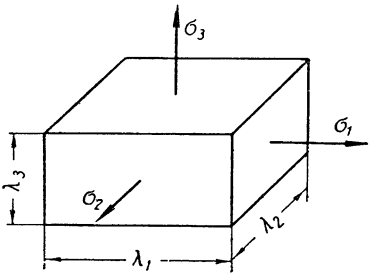
и, таким образом, только два из трех инвариантов являются независимыми.

Следовательно, с учетом условия постоянства объема выражение (49) для энергии деформации приобретает вид

$$W = W(J_1, J_2).$$

Если вид функции $W(J_1, J_2)$ известен, то при любом деформированном состоянии можно найти энергию деформации, а пользуясь законом сохранения энергии, и напряжения.

Рассмотрим выделенный из деформированного материала элементарный параллелепипед, ребра которого ориентированы по направлениям главных деформаций (фиг. 365).



Фиг. 365. Деформированный параллелепипед, ограниченный главными площадками. До деформации параллелепипед представлял собой куб с ребром единичной длины

Предположим, что до деформации этот параллелепипед являлся кубом с ребром, равным единице; тогда после деформации ребра параллелепипеда будут иметь длины λ_1, λ_2, λ_3. Напряжения, действующие на гранях параллелепипеда, назовем соответственно σ_1, σ_2, σ_3 *. Касательные напряжения в этих площадках отсутствуют, так как направления главных напряжений совпадают с направлениями главных деформаций. Дадим ребрам параллелепипеда виртуальные удлинения $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$ и $\delta\lambda_3$.

При этом приложенные к граням параллелепипеда силы совершат работу

$$\delta A = \sigma_1 \lambda_2 \lambda_3 \delta\lambda_1 + \sigma_2 \lambda_3 \lambda_1 \delta\lambda_2 + \sigma_3 \lambda_1 \lambda_2 \delta\lambda_3,$$

величина же энергии деформации получит приращение

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\delta\lambda_1 + \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\delta\lambda_2 + \frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\delta\lambda_3.$$

Приравнивая $\delta A = \delta W$, имеем

$$\left(\sigma_1 \lambda_2 \lambda_3 - \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)\delta\lambda_1 + \left(\sigma_2 \lambda_3 \lambda_1 - \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)\delta\lambda_2 + \left(\sigma_3 \lambda_1 \lambda_2 - \frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)\delta\lambda_3 = 0. \quad (51)$$

Приращения $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$ и $\delta\lambda_3$ не могут быть произвольными. Поскольку объем материала при деформации не меняется, объем параллелепипеда $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ равен начальному объему куба:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, = 1, \quad (52)$$

и, следовательно,

$$\lambda_2 \lambda_3 \delta\lambda_1 + \lambda_3 \lambda_1 \delta\lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \delta\lambda_3 = 0.$$

Отсюда

$$\delta\lambda_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\delta\lambda_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\delta\lambda_2.$$

Подставляя это значение $\delta\lambda_3$ в уравнение (51) и учитывая соотношение (52), найдем

$$\left(\sigma_1 - \sigma_3 - \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} + \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)\frac{\delta\lambda_1}{\lambda_1} + \left(\sigma_2 - \sigma_3 - \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} + \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)\frac{\delta\lambda_2}{\lambda_2} = 0.$$

* σ_1, σ_2 и σ_3 — истинные напряжения, отнесенные к деформированному состоянию. Соответствующие условные (т. е. отнесенные к начальным размерам площадок) напряжения равны

$$\sigma_1^* = \sigma_1 \lambda_2 \lambda_3; \quad \sigma_2^* = \sigma_2 \lambda_1 \lambda_3; \quad \sigma_3^* = \sigma_3 \lambda_1 \lambda_2.$$

Поскольку $\delta\lambda_1$ и $\delta\lambda_2$ являются произвольными, то из полученного уравнения следует

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1-\sigma_3&=\lambda_1\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}-\lambda_3\frac{\partial W}{\partial\lambda_3};\\ \sigma_2-\sigma_3&=\lambda_2\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}-\lambda_3\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}.\end{aligned}\right\}\qquad(53)$$

Таким образом, для трех напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 выведены только два уравнения, определяющие их разности. Это является следствием принятой гипотезы о несжимаемости материала, вследствие которой на напряженное состояние может быть наложено гидростатическое сжатие, не вызывающее изменения деформаций. Поэтому по величине деформаций можно определить напряжения только с точностью до гидростатического давления (т. е. до слагаемого, одинакового для всех трех главных напряжений).

Действительно, выражения (53) можно также записать в виде

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\lambda_1\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}+s;\\ \sigma_2&=\lambda_2\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}+s;\\ \sigma_3&=\lambda_3\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}+s,\end{aligned}\right\}\qquad(54)$$

где s — величина, не связанная непосредственно с деформациями и характеризующая интенсивность гидростатического давления.

В литературе [18] принято вместо инварианта J_2 вводить в расчет величину J_2', являющуюся линейной комбинацией инвариантов J_1 и J_2:

$$J_2'=2(J_1-J_2)=\frac{1}{2}(\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2-3),\qquad(55)$$

тогда

$$W=W(J_1,J_2')$$

и

$$\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}=\frac{\partial W}{\partial J_1}\cdot\frac{\partial J_1}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial W}{\partial J_2'}\cdot\frac{\partial J_2'}{\partial\lambda_1}=\frac{\partial W}{\partial J_1}\lambda_1+\frac{\partial W}{\partial J_2'}(\lambda_2^2+\lambda_3^2)\lambda_1.$$

Аналогично

$$\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}=\frac{\partial W}{\partial J_1}\lambda_2+\frac{\partial W}{\partial J_2'}(\lambda_3^2+\lambda_1^2)\lambda_2;$$

$$\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}=\frac{\partial W}{\partial J_1}\lambda_3+\frac{\partial W}{\partial J_2'}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\lambda_3.$$

Подставляя эти значения производных в формулы (54), получим

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\frac{\partial W}{\partial J_1}\lambda_1^2+\frac{\partial W}{\partial J_2'}\lambda_1^2(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+s;\\ \sigma_2&=\frac{\partial W}{\partial J_1}\lambda_2^2+\frac{\partial W}{\partial J_2'}\lambda_2^2(\lambda_3^2+\lambda_1^2)+s;\\ \sigma_3&=\frac{\partial W}{\partial J_1}\lambda_3^2+\frac{\partial W}{\partial J_2'}\lambda_3^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+s.\end{aligned}\right\}\qquad(56)$$

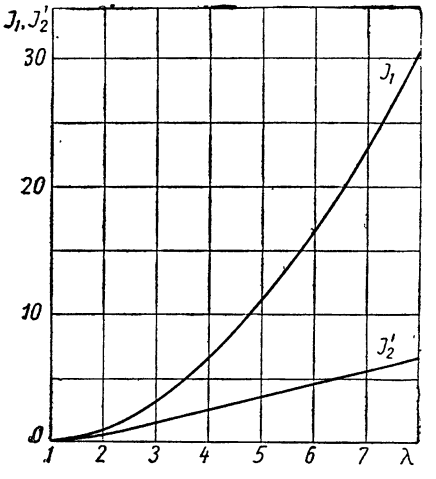
Формулы (56) позволяют по известным деформациям определить с точностью до гидростатического давления главные напряжения, если функция $W(J_1, J_2')$ известна. Эти формулы выражают наиболее общую возможную зависимость между напряжениями и деформациями для несжимаемого упругого материала. Задача состоит в том, чтобы уточнить функцию $W(J_1, J_2')$ для данного материала. Это можно сделать, изучая экспериментально зависимость энергии деформации от J_1 и J'_2 при различных видах деформированного состояния материала.

Рассмотрим в связи с этим зависимость J_1 и J_2' от величины деформации при основных видах деформации, используемых при экспериментальном исследовании упругих свойств материалов.

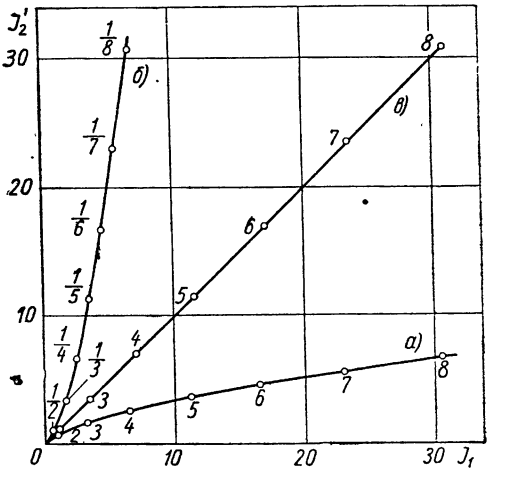
Одноосное растяжение

При этом виде деформации степени удлинения образца в продольном направлении $\lambda_1 = \lambda$ соответствуют степени удлинения $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ в поперечных направлениях (поскольку в связи с постоянством объема $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$). Инварианты деформации равны в этом случае

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-3\right) = \frac{1}{2}\left(\lambda^2+\frac{2}{\lambda}-3\right);\\ J_2' &= \frac{1}{2}\left(\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2-3\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2}+2\lambda-3\right). \end{aligned}\right\} \quad (57)$$



Фиг. 366. Зависимость инвариантов J_1 и J'_2 от степени удлинения при одноосном растяжении



Фиг. 367. Различные виды деформации в координатах J_1, J'_2:

а — растяжение; *б* — сжатие; *в* — плоская деформация; цифры на кривых означают степень удлинения

Графики зависимости J_1 и J_2' от λ представлены на фиг. 366.

При малых деформациях, когда относительное удлинение $\varepsilon^* = \lambda - 1$ мало,

$$J_1 \approx J_2' \approx \frac{3}{2}\varepsilon^{*2}.$$

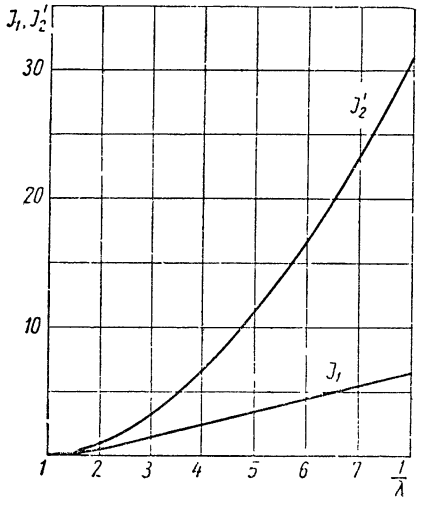
При больших удлинениях, как видно из фиг. 366, J_1 возрастает значительно быстрее, чем J_2'.

Выражения (57) можно рассматривать как записанные в параметрической форме уравнения некоторой кривой в координатах J_1, J_2'. Эта кривая *а* нанесена на фиг. 367, причем на ней помечены точки, соответствующие различным значениям степени удлинения λ.

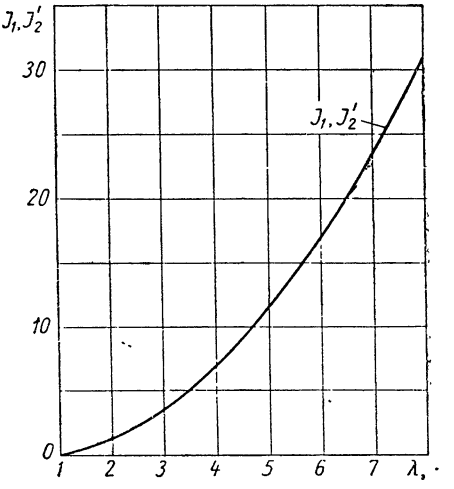
Одноосное сжатие

Для этого вида деформированного состояния сохраняют свою силу формулы (57), однако в таком случае $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Зависимость J_1 и J_2' от обратной величины $\frac{1}{\lambda}$ представлена на фиг. 368.

В координатах J_1, J_2' кривая одноосного сжатия (кривая *б* на фиг. 367) выходит из начала координат под таким же углом, как и кривая растяжения, но затем отклоняется к оси J_2'. Кривые для растяжения и сжатия симметричны относительно биссектрисы координатного угла.



Фиг. 368. Зависимость инвариантов J_1 и J'_2 от обратной величины степени удлинения при одноосном сжатии



Фиг. 369. Зависимость инвариантов J_1 и J'_2 от степени удлинения при плоской деформации

Двухосное равномерное растяжение

Двухосное деформированное состояние легко может быть осуществлено экспериментально при нагружении внутренним давлением сферической оболочки и поэтому заслуживает особого внимания. Степень удлинения элемента, параллельного поверхности оболочки, $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$; в поперечном направлении степень удлинения

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Воспользуемся формулами (48) и (55); тогда

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^4} + 2\alpha^2 - 3\right); \\ J_2' &= \frac{1}{2}\left(\alpha^4 + \frac{2}{\alpha^2} - 3\right). \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Легко видеть, что выражения для инвариантов в этом случае такие же, как и для одноосного сжатия при $\lambda = \frac{1}{\alpha^2}$. Это обстоятельство позволяет испытание при одноосном сжатии, которое трудно осуществить вследствие влияния трения на торцах образца, заменить значительно более легко выполняемым испытанием при двухосном равномерном растяжении.

Плоская деформация

При плоском деформированном состоянии одна из главных деформаций равна нулю и соответствующая степень удлинения $\lambda_3 = 1$. Степени удлинения в двух других направлениях связаны условием постоянства объема $\lambda_1\lambda_2 = 1$, и можно положить, что

$$\lambda_1 = \lambda;\ \lambda_2 = \frac{1}{\lambda},$$

тогда инварианты выражаются следующим образом:

$$J_1 = J_2' = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2\right).$$

Зависимость величины инвариантов от значения λ для плоской деформации представлена на фиг. 369. В координатах J_1, J_2' плоское деформированное состояние изображается биссектрисой координатного угла (линия *б* на фиг. 367).

Другие виды деформированного состояния

Можно показать, что любое деформированное состояние, удовлетворяющее условию постоянства объема (52) и характеризуемое произвольным соотношением между степенями удлинения λ_1, λ_2 и λ_3, изображается в координатах I_1, I_2' точкой, лежащей между кривыми *а* и *б* (фиг. 367), соответствующими одноосному растяжению и сжатию.

В силу постоянства объема инварианты J_1 и J_2' могут быть выражены только через две степени удлинения λ_1 и λ_2, так как $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}$:

$$J_1 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2} - 3\right);$$

$$J_2' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2\lambda_2^2 - 3\right).$$

При изменении λ_1 и λ_2 в процессе деформации будут меняться, вообще говоря, как J_1, так и J_2'. Рассмотрим, однако, такое изменение λ_1 и λ_2, при котором $J_1 = \text{const}$.

Условие постоянства J_1 при изменении λ_1 и λ_2 можно записать в виде

$$dJ_1 = \frac{1}{2}\left[d\left(\lambda_1^2\right) + d\left(\lambda_2^2\right) - \frac{d\left(\lambda_1^2\right)}{\lambda_1^4\lambda_2^2} - \frac{d\left(\lambda_2^2\right)}{\lambda_1^2\lambda_2^4}\right] = 0,$$

откуда

$$\lambda_2^2\left(\lambda_1^4\lambda_2^2 - 1\right) d\left(\lambda_1^2\right) + \lambda_1^2\left(\lambda_1^2\lambda_2^4 - 1\right) d\left(\lambda_2^2\right) = 0. \qquad \text{(а)}$$

Изменение инварианта J_2' равно при этом

$$dJ_2' = \frac{1}{2}\left[-\frac{d\left(\lambda_1^2\right)}{\lambda_1^4} - \frac{d\left(\lambda_2^2\right)}{\lambda_2^4} + \lambda_2^2\, d\left(\lambda_1^2\right) + \lambda_1^2\, d\left(\lambda_2^2\right)\right].$$

Положение точек в координатах J_1, J_2' на прямой $J_1 = \text{const}$, в которых инвариант J_2' достигает экстремальных значений, определяется равенством $dJ_2' = 0$, или

$$\lambda_2^4\left(\lambda_1^4\lambda_2^2 - 1\right) d\left(\lambda_1^2\right) + \lambda_1^4\left(\lambda_1^2\,\lambda_2^4 - 1\right) d\left(\lambda_2^2\right) = 0. \qquad (б)$$

Выражая $d\left(\lambda_2^2\right)$ через $d\left(\lambda_1^2\right)$ по уравнению (а) и подставляя результат в уравнение (б), найдем, что экстремальные значения J_2' имеют место в точках, для которых

$$\left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right)\left(\lambda_1^2\,\lambda_2^4 - 1\right)\left(\lambda_1^4\lambda_2^2 - 1\right) = 0. \qquad (в)$$

Уравнение (в) удовлетворяется в трех случаях:

1) $\lambda_1 = \lambda_2$;

2) $\lambda_1 = \dfrac{1}{\lambda_2^2}$;

3) $\lambda_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$.

Легко видеть, что все эти случаи соответствуют деформации при одноосном растяжении — сжатии в направлениях λ_3, λ_1 и λ_2 соответственно.

Таким образом, минимальное и максимальное возможные значения J_2' при данном J_1 действительно лежат на кривых а) и б) (фиг. 367), соответствующих одноосному растяжению и сжатию.

Определение энергии деформации $W(J_1, J_2')$ по данным эксперимента

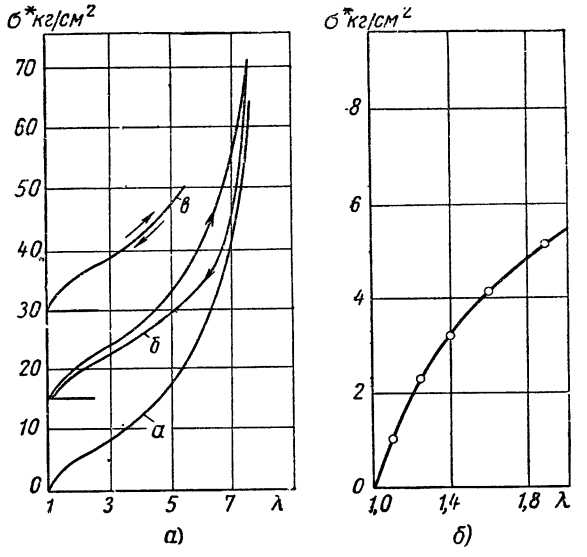
Функция $W(J_1, J_2')$ может быть представлена в виде поверхности в координатах J_1, J_2', W (см. ниже фиг. 373). Эта функция определена в области изменения J_1 и J_2' между кривыми *а* и *б* (фиг. 367). Каждому виду деформации соответствует некоторая линия на поверхности $W(J_1, J_2')$. Чтобы построить поверхность энергии, нужно построить ряд характерных линий на этой поверхности; для этого необходимо экспериментально исследовать изменение энергии деформации при нескольких типах деформированного состояния. Целесообразно в качестве таких деформированных состояний избрать простое растяжение, равномерное двухосное растяжение и плоскую деформацию, которые осуществляются без больших затруднений. Проделав эти эксперименты и определив энергию деформации, получим линии поверхности $W(J_1, J_2')$, расположенные соответственно над кривыми *а*, *б* и *в* плоскости J_1, J_2'.

Для построения поверхности энергии воспользуемся результатами экспериментов, тщательно проведенных Трелоаром [24] с резиной из натурального каучука с 8 весовыми частями серы на 100 частей каучука, вулканизованной в течение трех часов при температуре 147°.

Кривая простого растяжения этой резины представлена на фиг. 370, *а*. По горизонтали отложена степень удлинения образца λ, а по вертикали — условные (т. е. отнесенные к начальной площади сечения) напряжения σ *.

На фиг. 370, *б* в более крупном масштабе показан начальный участок кривой до $\lambda=2$.

Эксперименты показали, что до степени растяжения $\lambda=5{,}5$ испытанная резина не дает практически остаточных деформаций и петля гистерезиса для нее ничтожно мала (см. фиг. 370, *а*, кривая *в*). Только при деформациях, приближающихся к разрывным, появляется большая петля гистерезиса и остаточные деформации.



Фиг. 370. Кривые растяжения резины из натурального каучука с 8 весовыми частями серы

При простом растяжении работа, затраченная на деформацию 1 $см^3$ материала, определяется интегралом

$$W=\int_1^{\lambda}\sigma^*\,d\lambda.$$

Результаты такого интегрирования, выполненного с помощью правила трапеций по кривым фиг. 370, представлены в табл. 19.

Таблица 19

Энергия деформации резины с 8 весовыми частями серы при простом растяжении

λ	σ* в *кг/см²*	*W* в *кгсм/см³*	λ	σ* в *кг/см²*	*W* в *кгсм/см³*
1,0	0	0	3,0	8,7	10,37
1,2	2,1	0,21	4,0	12,2	20,74
1,4	3,3	0,75	5,0	17,5	35,41
1,6	4,2	1,50	6,0	26,3	56,75
1,8	5,0	2,42	7,0	41,3	89,40
2,0	5,5	3,47	7,5	58,0	114,2

Каждому значению λ соответствует определенная точка на плоскости J_1, J_2', определяемая формулами (57) (см. фиг. 367). Откладывая над этой точкой отрезок, равный энергии, получим линию *а* поверхности $W(J_1, J_2')$ на фиг. 373.

Равномерное двухосное растяжение резиновой пленки выполнялось Трелоаром следующим образом. Резиновая пластинка круглой формы зажималась по контуру и подвергалась давлению с одной стороны.

В окрестностях полюса образующейся оболочки растяжение α было равномерным. Оно измерялось по изменению диаметра маленькой окружности, нанесенной на пластинку до деформации. Одновременно измерялось давление воздуха p и радиус r кривизны оболочки в районе полюса.

По этим данным можно подсчитать натяжение пленки на единицу длины сечения

$$T = \frac{1}{2} pr$$

и истинные напряжения

$$\sigma = \frac{T}{t} = \frac{T}{t_0} \alpha^2,$$

где $t = \frac{t_0}{\alpha^2}$ — толщина деформированной пленки;

t_0 — начальная ее толщина.

Условное напряжение составляет

$$\sigma^* = \sigma \alpha \frac{1}{\alpha^2} = \frac{pr}{2t_0} \alpha.$$

Удельная энергия деформации для рассматриваемого равноосного плоского напряженного состояния определяется интегралом

$$W = 2 \int_1^{\alpha} \sigma^* \, d\alpha.$$

В табл. 20 приводятся результаты экспериментов [24], подсчитанные по правилу трапеций величины W, а также соответствующие данной величине α значения J_1 и J_2' по формулам (58).

Таблица 20

Двухосное равномерное растяжение резиновой пленки с начальной толщиной 0,82 *мм*

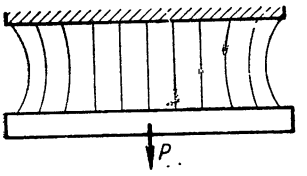
Давление в *мм* рт. ст.	Радиус кривизны r в *см*	Степень удлинения α	Условное напряжение σ^* в *кг/см²*	W в *кгсм/см³*	J_1	J_2'	Давление в *мм* рт. ст.	Радиус кривизны r в *см*	Степень удлинения α	Условное напряжение σ^* в *кг/см²*	W в *кгсм/см³*	J_1	J_2'
31	3,61	1,027	0,94	0,025	0,0039	0,0040	341	1,42	1,94	7,78	9,51	2,31	5,90
71	2,56	1,065	1,59	0,121	0,023	0,026	332	1,43	2,49	9,78	19,16	4,74	18,0
125	2,10	1,115	2,42	0,321	0,070	0,081	316	1,60	3,03	12,62	31,3	7,65	40,9
164	1,69	1,14	2,62	0,447	0,095	0,113	303	1,71	3,43	14,70	42,2	10,3	68
210	1,59	1,20	3,32	0,803	0,187	0,240	293	1,92	3,75	17,40	52,4	12,6	98
270	1,51	1,31	4,42	1,654	0,391	0,567	285	2,10	4,07	20,10	64,4	15,2	137
304	1,45	1,42	5,18	2,71	0,66	1,07	280	2,28	4,26	22,50	72,5	16,6	164
335	1,41	1,68	6,60	5,77	1,41	2,92	276	2,44	4,45	24,60	81,5	18,2	198

На основании таблицы на фиг. 373 построена линия *б* поверхности $W(J_1, J_2')$, соответствующая двухосному равномерному растяжению или одноосному сжатию.

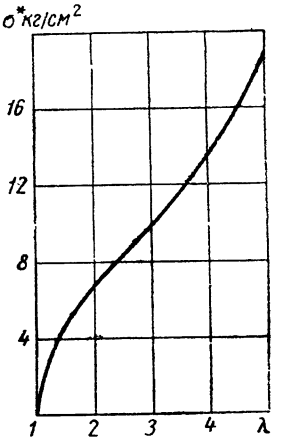
Экспериментальное осуществление плоской деформации связано со значительно бо́льшими трудностями, чем осуществление простого или

равномерного двухосного растяжения. Одним из путей решения этой задачи является растяжение тонкостенных трубок, внутри которых поддерживается такое давление, чтобы диаметр трубки не изменился.

Другой способ, использованный Трелоаром [24], состоял в растяжении широкой и короткой полосы. В этом случае, как видно из фиг. 371, на которой показана форма растянутой полосы, в средней части последней осуществляется плоская деформация. При достаточной ширине полосы влияние участков ее, прилежащих к свободным краям, мало и им можно пренебречь. На фиг. 372 представлена полученная таким образом диаграмма растяжения для резины из натурального каучука с 8-весовыми частями серы.



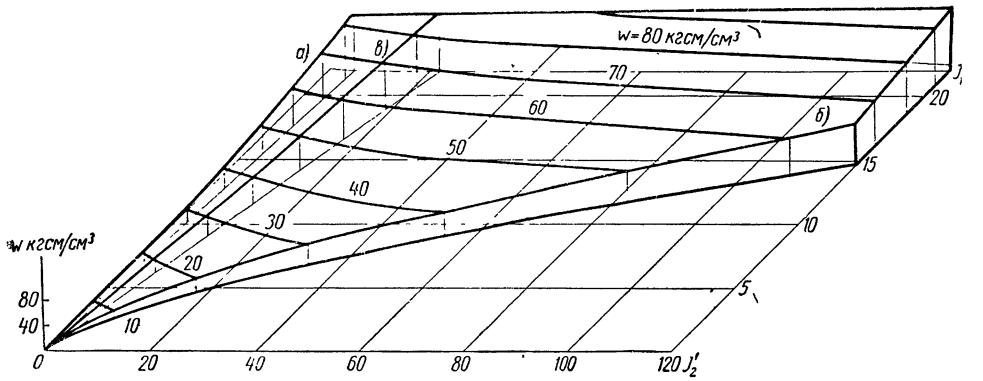
Фиг. 371. Осуществление плоской деформации путем растяжения широкой полосы



Фиг. 372. Кривая растяжения широкой полосы из резины с 8 весовыми частями серы

На основании этой диаграммы построена соответствующая плоской формации линия *в* на поверхности $W(J_1, J_2')$ [см. фиг. 373].

Линии *а*, *б* и *в* на фиг. 373 дают общее представление о форме поверхности $W(J_1, J_2')$. Для наглядности на чертеж нанесены также горизонтали поверхности, соответствующие значениям W через 10 *кгсм/см*³.



Фиг. 373. Поверхность энергии деформации для резины из натурального каучука с 8 весовыми частями серы

Из фигуры видно, что зависимость удельной энергии деформации от инвариантов J_1 и J_2' представляется слабо изогнутой поверхностью, которая в окрестностях начала координат мало отличается от плоскости. При этом величина энергии деформации в большей степени зависит от

инварианта J_1, чем от J_2'. Таким образом, при не слишком больших деформациях зависимость $W(J_1, J_2')$ можно апроксимировать линейной

$$W = C_1 J_1 + C_2 J_2', \tag{59}$$

где C_1 [кг/см²] и C_2 [кг/см²] — коэффициенты, характеризующие упругие свойства матириала.

Для рассмотренной резины коэффициенты C_1 и C_2 равны соответственно 3,8 и 0,2 кг/см². Часто оказывается достаточной и более простая зависимость

$$M = CJ_1, \tag{60}$$

которая получается из уравнения (59) при $\frac{C_2}{C_1} \to 0$. Формула (60) хорошо подтверждается экспериментами при одноосном сжатии и при плоской деформации, но менее точна для одноосного растяжения.

Интересно отметить, что формула (60) может быть выведена теоретическим путем из статистической теории упругости резины для случая не слишком больших деформаций [18].

Проверим, в каких пределах линейная зависимость (59) описывает упругие свойства резины. Сопоставим вытекающие из формулы (59) зависимости напряжений от деформаций при простом и двумерном растяжении, а также при плоской деформации с экспериментальными данными.

Подставляя зависимость (59) в формулы (56) для главных напряжений, получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_1^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + s;\\ \sigma_2 &= C_1\lambda_2^2 + C_2\lambda_2^2(\lambda_3^2 + \lambda_1^2) + s;\\ \sigma_3 &= C_1\lambda_3^2 + C_2\lambda_3^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + s. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Для простого растяжения

$$\lambda_1 = \lambda;\ \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}};\quad \sigma_1 = \sigma;\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Подставляя эти значения в уравнения (61), находим, что нормальное напряжение в поперечном сечении при растяжении равно

$$\sigma = C_1\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) + C_2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Соответственно условное напряжение, отнесенное к начальной площади поперечного сечения, составляет

$$\sigma^* = \sigma\lambda_2\lambda_3 = \sigma\frac{1}{\lambda} = C_1\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) + C_2\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right). \tag{62}$$

Заметим, что при малых деформациях, когда $\varepsilon^* = \lambda - 1$ мало, полученные формулы дают

$$\sigma \approx \sigma^* \approx 3(C_1 + C_2)\varepsilon^*.$$

Таким образом, постоянные C_1 и C_2 связаны с модулем упругости материала при малых деформациях E зависимостью

$$3(C_1 + C_2) = E,$$

или

$$C_1 + C_2 = G.$$

На фиг. 374 зависимость $\sigma^*(\lambda)$ по формуле (62) сопоставляется с экспериментальной. Из графика видно, что до $\lambda=1{,}5$ (т. е. до удлинения $\varepsilon^*=50\%$) экспериментальные точки практически совпадают с расчетной кривой.

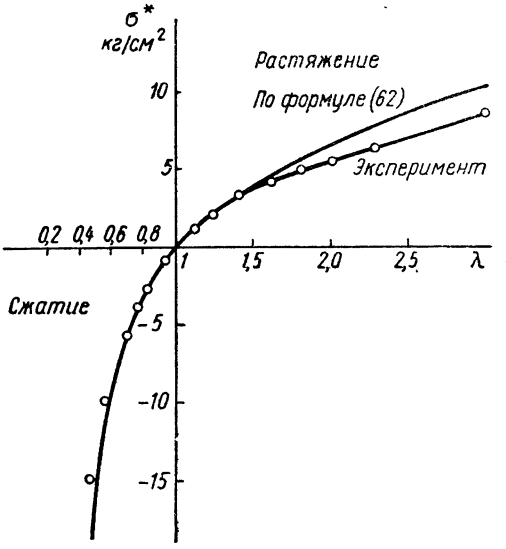
На том же графике нанесены расчетные значения σ^* и для сжатия ($\lambda<1$). Экспериментальные точки в этой области получены пересчетом экспериментов, проведенных при двухосном равномерном сжатии, по формулам

$$\lambda=\frac{1}{\alpha^2};\quad \sigma^*=\sigma_1^*\alpha^3,$$

где λ и σ^* — степень удлинения и условное напряжение при эквивалентном сжатии;

α и σ_1^* — степень удлинения и условное напряжение при двухосном растяжении (см. табл. 20).

Для сжатия расчетная и экспериментальная зависимости совпадают до $\lambda=0{,}5$, т. е. до двукратного сжатия образца.



Фиг. 374. Сопоставление расчетной и экспериментальной зависимости условного напряжения от степени удлинения при растяжении и сжатии

Для плоской деформации, полагая

$$\lambda_1=\lambda;\ \lambda_2=\frac{1}{\lambda};\quad \lambda_3=1;\ \sigma_1=\sigma;\ \sigma_2=0,$$

по формулам (61) получаем

$$\sigma=(C_1+C_2)\left(\lambda^2-\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Условное напряжение в направлении растяжения

$$\sigma^*=\sigma\lambda_2\lambda_3=\sigma\frac{1}{\lambda}=(C_1+C_2)\left(\lambda-\frac{1}{\lambda^3}\right). \qquad (63)$$

Сопоставление расчетных величин этого напряжения с экспериментальными показывает, что и в этом случае до $\lambda=1{,}5$ имеется полное совпадение теории и эксперимента (см. фиг. 376).

Таким образом, простая линейная формула [1] (59) с большой точностью описывает упругие свойства резины при деформациях до 50%. Для большинства практических расчетов эта формула вполне достаточна.

В случае необходимости проведения расчетов при весьма больших деформациях в выражении для $W(J_1, J'_2)$ должны быть учтены и нелинейные члены. Для большинства резин их упругие свойства вплоть до разрыва могут быть описаны формулой

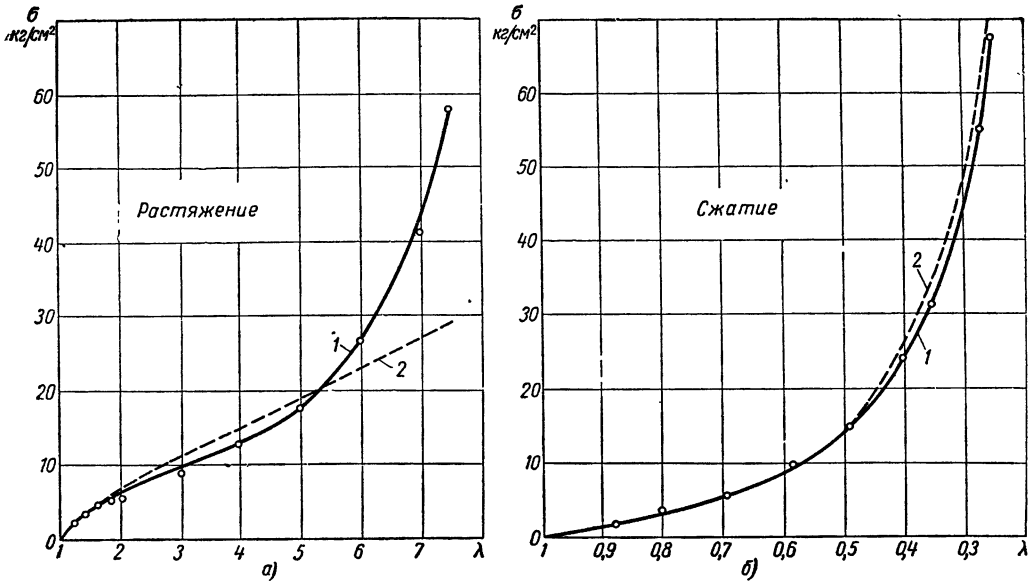
$$W=C_1J_1+C_2J'_2-C_3J_1^2+C_4J_1^3. \qquad (64)$$

[1] Эта формула впервые была предложена Муни [18].

Так, в частности, для рассмотренной резины с 8 весовыми частями серы хорошие результаты могут быть получены при $C_3=0{,}076$ *кг/см*^{2}, $C_4=3{,}68\cdot 10^{-3}$ *кг/см*^{2}.

Если справедлива зависимость (64), то формулы (56) для главных напряжений принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= (C_1 - 2C_3J_1 + 3C_4J_1^2)\lambda_1^2 + C_2\lambda_1^2(\lambda_2^2+\lambda_3^2) + s;\\ \sigma_2 &= (C_1 - 2C_3J_1 + 3C_4J_1^2)\lambda_2^2 + C_2\lambda_2^2(\lambda_3^2+\lambda_1^2) + s;\\ \sigma_3 &= (C_1 - 2C_3J_1 + 3C_4J_1^2)\lambda_3^2 + C_2\lambda_3^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2) + s.\end{aligned}\right\} \qquad (65)$$



Фиг. 375. Сопоставление расчетной и экспериментальной зависимостей условного напряжения от степени удлинения:

а — при растяжении; *б* — при сжатии; кривые *1* — по формуле (62а); кривые *2* — по формуле (62); точки получены экспериментально

В частном случае простого растяжения — сжатия для истинного и условного напряжений в поперечном сечении получим

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= (C_1 - 2C_3J_1 + 3C_4J_1^2)\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) + C_2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right);\\ \sigma^* &= (C_1 - 2C_3J_1 + 3C_4J_1^2)\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) + C_2\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right),\end{aligned}\right\} \qquad (62а)$$

где

$$J_1 = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3\right).$$

На фиг. 375, *а* и *б* соответствующие этим выражениям кривые растяжения и сжатия сопоставляются с экспериментом. До 7,5-кратного растяжения и более чем до 4-кратного сжатия имеет место почти точное совпадение экспериментальных точек с расчетной кривой.

Как видно из фиг. 376, столь же хорошее совпадение получается и для случая плоской деформации. Расчетная кривая построена по формуле

$$\sigma^* = (C_1 + C_2 - 2C_3 J_1 + 3C_4 J_1^2)\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right), \qquad (63а)$$

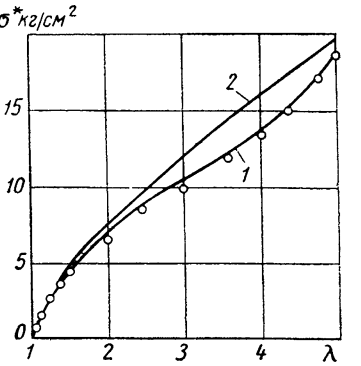
которая получается из формул (65) при

$$\lambda_1 = \lambda;\ \lambda_2 = \frac{1}{\lambda};\ \lambda_3 = 1;\ \sigma_1 = \sigma;\ \sigma_2 = 0.$$

Б. Применение метода Ритца для решения задач при больших деформациях

Как видно из приведенных выше формул, при малых деформациях (до 10—20%) резина подчиняется закону Гука, и поэтому для расчета резиновых деталей могут применяться обычные методы прикладной теории упругости. В этих пределах деформаций справедливы обычные формулы расчета на растяжение, сжатие, изгиб, кручение, формулы расчета толстостенных труб и т. д.

При бо́льших деформациях указанные формулы становятся уже непригодными. Обычные методы решения задач теории упругости, заключающиеся в отыскании системы напряжений или перемещений, удовлетворяющих условиям равновесия и граничным условиям, а в случае решения в напряжениях и условиям совместности деформаций, здесь мало пригодны. Основная трудность состоит в составлении уравнений равновесия. Эти уравнения, которые должны составляться для деформированного состояния, в общем случае очень сложны [14].



Фиг. 376. Сопоставление расчетных и экспериментальных зависимостей условного напряжения от степени удлинения при плоской деформации (растяжение широкой полосы):
1 — по формуле (63а); *2* — по формуле (63); точки получены экспериментально

Весьма большую пользу при исследовании больших деформаций приносит применение энергетических методов и в первую очередь метода Ритца. Рассмотрим ход решения задачи при использовании этого метода.

1. Задаются соответствующие условиям задачи выражения для перемещений. Эти выражения, которые должны удолветворять условию постоянства объема, содержат ряд неопределенных коэффициентов или функций.

2. По перемещениям вычисляются компоненты деформации и инварианты.

3. Подсчитывается энергия деформации посредством интегрирования выражения удельной энергии по всему объему.

4. Вычисляется потенциал внешних сил и составляется выражение полной энергии системы.

5. Коэффициенты или функции, включенные в выражения перемещений, определяются из условий минимума полной энергии системы.

Как правило, задачей расчета является нахождение перемещений. Если необходимо определить также и напряжения, то выполняются и следующие этапы расчета.

6. Определяются направления (до и после деформации) главных деформаций и их величины.

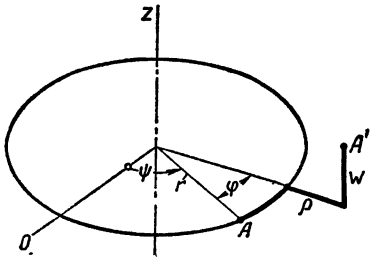
7. По формулам (61) вычисляются главные напряжения.

8. Определяются напряжения в других площадках, представляющих интерес.

В ряде случаев применение метода Ритца по изложенной схеме позволяет получить не только приближенное, но и точное решение задачи.

В. Растяжение, кручение и нагружение давлением полого цилиндра

Рассмотрим в качестве примера применения предлагаемого метода задачу об осесимметричной деформации толстостенного резинового цилиндра, вызываемой приложением продольных сил и скручивающих моментов к его торцам, а также внутреннего и внешнего давления по боковой поверхности.



Фиг. 377. Компоненты перемещения в цилиндрических координатах

В случае малых деформаций указанная задача разбивается на три независимых — растяжение, кручение и нагружение давлением (задача Ляме). При больших деформациях принцип суперпозиции неприменим и такое разделение невозможно; все указанные силовые факторы взаимодействуют друг с другом.

Задачу будем рассматривать в цилиндрических координатах. Положение точки A в этих координатах характеризуется радиусом r, полярным углом ψ и ординатой z (фиг. 377). Соответственно за компоненты перемещения можно принять радиальное смещение ρ угол поворота φ радиуса-вектора и осевое перемещение w. Таким образом, если точка A до деформации имела цилиндрические координаты r, ψ, z, то после деформации ее координаты будут $r+\rho$; $\psi+\varphi$; $z+w$.

Рассмотрим бесконечно малый отрезок ds, выходящий из точки с координатами r, ψ, z и составляющий с радиальным, окружным и осевым направлениями в этой точке углы, косинусы которых равны соответственно l, m и n. Длина этого отрезка после деформации ds_1 может быть найдена из геометрических соображений, подобно тому как это выполнялось в гл. II, т. I, в декартовой системе координат. Тогда можно получить следующую формулу, аналогичную формуле (7), гл. II, т. I:

$$ds_1^2 = ds^2 [1 + 2(\varepsilon_r l^2 + \varepsilon_\psi m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{r\psi} lm + \gamma_{\psi z} mn + \gamma_{zr} nl)],$$

где ε и γ — компоненты деформации в цилиндрических координатах, выражающиеся через смещения ρ, φ и w.

Ограничимся рассмотрением осесимметричных деформаций цилиндра, т. е. предположим, что ρ, φ и w не зависят от полярного угла ψ. В этом случае компоненты деформации в цилиндрических координатах будут

$$\varepsilon_r = \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)^2 + (r+\rho)^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right];$$

$$\varepsilon_\psi = \frac{\rho}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2;$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 + (r+\rho)^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right];\\
\gamma_{r\psi} &= \frac{(r+\rho)^2}{r}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial r};\\
\gamma_{\psi z} &= \frac{(r+\rho)^2}{r}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z};\\
\gamma_{zr} &= \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial r}\cdot\frac{\rho\rho}{\partial z} + (r+\rho)^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Инварианты деформации выражаются через компоненты по формулам, совершенно аналогичным формулам (48), с заменой ε_x и ε_y на ε_r и ε_ψ, а γ_{xy}, γ_{yz} и γ_{zx} на $\gamma_{r\psi}$, $\gamma_{\psi z}$ и γ_{zr} соответственно.

Условие несжимаемости (50)

$$J_1 - 2J_2 + 4J_3 = 0$$

записывается в виде

$$\begin{aligned}
&(1+2\varepsilon_r)(1+2\varepsilon_\psi)(1+2\varepsilon_z) - \gamma_{r\psi}^2(1+2\varepsilon_z) -\\
&-\gamma_{\psi z}^2(1+2\varepsilon_r) - \gamma_{zr}^2(1+2\varepsilon_\psi) + 2\,\gamma_{r\psi}\gamma_{\psi z}\gamma_{zr} = 1.
\end{aligned} \quad (67)$$

В рассматриваемом случае кручения, растяжения и нагружения давлением цилиндра справедлива гипотеза плоских сечений. Поэтому $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$.

Если цилиндр деформируется равномерно по длине, то величина $1 + \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda_0$, представляющая собой степень удлинения в осевом направлении, является постоянной.

Вследствие равномерности деформаций по длине равна нулю производная $\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$. Из того условия, что радиусы сечения остаются прямолинейными, находим также $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$.

Величина $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \theta$, представляющая собой угол закручивания на единицу длины (крутку), является постоянной.

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2;\\
\varepsilon_\psi &= \frac{\rho}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2;\\
\varepsilon_z &= \lambda_0 - 1 + \frac{1}{2}[(\lambda_0 - 1)^2 + (r+\rho)^2\theta^2];\\
\gamma_{r\psi} &= 0;\\
\gamma_{\psi z} &= \frac{1}{r}(r+\rho)^2\theta;\\
\gamma_{zr} &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad (68)$$

Подставляя эти величины в уравнение (67) постоянства объема, находим

$$\left(1+\frac{d\rho}{dr}\right)^2\left(1+\frac{\rho}{r}\right)^2[\lambda_0^2+(r+\rho)^2\theta^2]-\frac{(r+\rho)^4}{r^2}\theta^2\left(1+\frac{d\rho}{dr}\right)^2=1$$

или после упрощения

$$\left(1+\frac{d\rho}{dr}\right)^2\left(1+\frac{\rho}{r}\right)^2\lambda_0^2=1.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения, получим

$$\left(1+\frac{d\rho}{dr}\right)\left(1+\frac{\rho}{r}\right)\lambda_0=\pm 1,$$

или

$$(r+\rho)\,d(r+\rho)=\pm\frac{1}{\lambda_0}rdr;$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$(r+\rho)^2=D\pm\frac{r^2}{\lambda_0},$$

откуда[1]

$$r+\rho=\sqrt{D\pm\frac{r^2}{\lambda_0}}, \tag{69}$$

где D — постоянная интегрирования.

Рассмотрим две точки A и B, лежащие до деформации на расстояниях r_1 и r_2 от оси, причем $r_1>r_2$. После деформации расстояния этих точек от оси вращения будут равны соответственно

$$r_1^1=r_1+\rho(r_1)=\sqrt{D\pm\frac{r_1^2}{\lambda_0}};$$

$$r_2^1=r_2+\rho(r_2)=\sqrt{D\pm\frac{r_2^2}{\lambda_0}}.$$

Легко видеть, что если в подкоренном выражении взять знак плюс, то $r_1^1>r_2^1$. В этом случае после деформации точка A будет, так же как и до деформации, лежать на большем расстоянии от оси, чем точка B.

Если взять в подинтегральном выражении знак минус, то направление радиального отрезка AB после деформации изменится на обратное. Таким образом, знак минус в выражении (69) соответствует деформациям такого же рода, как при выворачивании трубки наизнанку.

Если исключить из рассмотрения такие деформации, не встречающиеся в реальных резиновых деталях, то надо принять следующее выражение для радиальных перемещений, найденное из условия постоянства объема:

$$\rho=\sqrt{D+\frac{r^2}{\lambda_0}}-r, \tag{70}$$

где D и λ_0 — постоянные.

[1] Здесь берется арифметическое значение корня, так как величина $r+\rho$, характеризующая расстояние точки от оси вращения, положительна.

С этим значением ρ формулы (68) для компонентов деформации принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_0} - 1 - \frac{D}{r^2 + D\lambda_0}\right);\\
\varepsilon_\psi &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_0} - 1 + \frac{D}{r^2}\right);\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{2}\left[\lambda_0^2 - 1 + \theta^2\left(D + \frac{r^2}{\lambda_0}\right)\right];\\
\gamma_{\psi z} &= \theta\left(\frac{D}{r} + \frac{r}{\lambda_0}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Вычисляем инварианты тензора деформаций:

$$J_1 = \varepsilon_r + \varepsilon_\psi + \varepsilon_z =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lambda_0^2 + \frac{2}{\lambda_0} - 3\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{D^2\lambda_0}{r^2 + D\lambda_0} + \frac{1}{2}\theta^2\frac{r^2 + D\lambda_0}{\lambda_0};$$

$$J_2 = -\varepsilon_r\varepsilon_\psi - \varepsilon_\psi\varepsilon_z - \varepsilon_z\varepsilon_r + \frac{1}{4}\gamma_{\psi z}^2 = \frac{1}{2}\left(\lambda_0^2 + \frac{2}{\lambda_0} - 3\right) -$$

$$- \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda_0^2} + 2\lambda_0 - 3\right) + \frac{(2 - \lambda_0^2)\lambda_0 D^2}{4r^2(r^2 + D\lambda_0)} - \frac{1}{4}\theta^2\left(\frac{r^2}{\lambda_0^2} - \frac{2r^2}{\lambda_0} - 2D\right).$$

Инвариант J_2' соответственно равен

$$J_2' = 2(J_1 - J_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_0^2} + 2\lambda_0 - 3\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{D^2\lambda_0^3}{r^2(r^2 + D\lambda_0)} + \frac{1}{2}\theta^2\frac{r^2}{\lambda_0^2}.$$

Вычислим энергию деформации цилиндра, считая, что удельная энергия деформации материала определяется формулой (59).

Энергия деформации всего цилиндра равна

$$U = (C_1A_1 + C_2A_2)\,2\pi l,$$

где l — длина цилиндра;

C_1 и C_2 — коэффициенты, входящие в формулу (59) удельной энергии деформации и зависящие от свойств материала;

$$A_1 = \int_{r_1}^{r_2} J_1 r\,dr; \quad A_2 = \int_{r_1}^{r_2} J_2' r\,dr.$$

Интегралы A_1 и A_2, которые берутся в пределах от внутреннего радиуса цилиндра r_1 до наружного r_2, легко подсчитать:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{4}\left(\lambda_0^2 + \frac{2}{\lambda_0} - 3\right)(r_2^2 - r_1^2) + \frac{1}{4}D\ln\frac{r_2^2(r_1^2 + D\lambda_0)}{r_1^2(r_2^2 + D\lambda_0)} +\\
&+ \frac{1}{4}\theta^2 D(r_2^2 - r_1^2) + \frac{1}{8}\theta^2\frac{1}{\lambda_0}(r_2^4 - r_1^4);\\
A_2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda_0^2} + 2\lambda_0 - 3\right)(r_2^2 - r_1^2) + \frac{1}{4}D\lambda_0^2\ln\frac{r_2^2(r_1^2 + D\lambda_0)}{r_1^2(r_2^2 + D\lambda_0)} +\\
&+ \frac{1}{8}\theta^2\frac{1}{\lambda_0^2}(r_2^4 - r_1^4).
\end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

Теперь составим выражение потенциала внешних сил. Потенциал сил давления равен

$$\mathcal{U}_p = -p_1 V_1 + p_2 V_2, \tag{73}$$

где p_1 — внутреннее давление;
p_2 — внешнее давление;
V_1 — объем внутренней полости цилиндра;
V_2 — объем, охватываемый наружной поверхностью цилиндра.

В формуле (73) предполагается, что цилиндр снабжен днищами, на которые также действует давление.

Так как

$$V_2 = V_1 + V_0,$$

где V_0 — объем материала цилиндра, и так как этот объем остается при деформации постоянным, то с точностью до постоянного слагаемого

$$\mathcal{U}_p = -pV_1,$$

где $p = p_1 - p_2$ — разность внутреннего и внешнего давлений.

Объем внутренней полости цилиндра равен

$$V_1 = \pi[r_1 + \rho(r_1)]^2 \lambda_0 l = \pi l (D\lambda_0 + r_1^2).$$

Опуская в выражении $\mathcal{U}_p$ постоянное слагаемое, найдем

$$\mathcal{U}_p = -p\pi l D \lambda_0.$$

Потенциал растягивающей цилиндр силы N равен произведению этой силы на длину цилиндра с обратным знаком:

$$\mathcal{U}_N = -Nl\lambda_0.$$

Потенциал крутящего момента M найдем, умножив этот момент на угол закручивания цилиндра θl и взять это произведение со знаком минус:

$$\mathcal{U}_M = -M\theta l.$$

Потенциал всех внешних нагрузок равен

$$\mathcal{U} + \mathcal{U}_p + \mathcal{U}_N + \mathcal{U}_M = -p\pi l D\lambda_0 - Nl\lambda_0 - M\theta l.$$

Полная энергия системы π равна сумме энергии деформации U и потенциала внешних нагрузок $\mathcal{U}$:

$$\Pi = U + \mathcal{U} = 2\pi l[C_1 A_1 + C_2 A_2] - p\pi l D\lambda_0 - Nl\lambda_0 - M\theta l,$$

где A_1 и A_2 определяются формулами (72).

В выражение полной энергии входят три неопределенных параметра (λ_0, θ, D), характеризующие деформации цилиндра. В случае равновесия полная энергия системы минимальна. Это условие приводит к трем уравнениям, служащим для определения λ_0, θ и D:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_0} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial D} = 0.$$

Раскрывая эти уравнения, находим

$$\pi(r_2^2-r_1^2)\left[C_1\left(\lambda_0-\frac{1}{\lambda_0^2}\right)+C_2\left(1-\frac{1}{\lambda_0^3}\right)\right]+\frac{\pi(r_2^2-r_1^2)D^2(C_1+C_2\lambda_0^2)}{2(r_2^2+D\lambda_0)(r_1^2+D\lambda_0)}+$$
$$+\pi C_2 D\lambda_0\ln\frac{r_2^2(r_1^2+D\lambda_0)}{r_1^2(r^2+D\lambda_0)}-\frac{\pi}{4}(r_2^4-r_1^4)\theta^2\left(\frac{C_1}{\lambda_0^2}+\frac{2C_2}{\lambda_0^3}\right)-$$
$$-p\pi D-N=0; \tag{74}$$

$$\pi(r-r_1^2)\theta D+\frac{\pi}{2}(r_2^4-r_1^4)\frac{\theta}{\lambda_0^2}(C_1\lambda_0+C_2)-M=0; \tag{75}$$

$$\frac{\pi}{2}(C_1+C_2\lambda\ \ln\frac{r_2^2(r_1^2+D\lambda_0)}{r_1^2(r_2^2+D\lambda_0)}+\frac{\pi}{2}\lambda_0 D\frac{(r_2^2-r_1^2)(C_1+C_2\lambda_0^2)}{(r_1^2+D\lambda_0)(r_2^2+D\lambda_0)}+$$
$$+\frac{\pi}{2}(r_2^2-r_1^2)C_1\theta^2-p\pi\lambda_0=0. \tag{76}$$

Решение уравнений (74)—(76) относительно λ_0, θ и D в общем случае представляет значительные трудности, однако в ряде частных случаев оно может быть получено легко.

Рассмотрим сплошной цилиндр ($r_1=0$; $r_2=R$). В этом случае при $r=0$ должно быть $\rho=0$; но тогда из формулы (70) следует, что и $D=0$. Поэтому уравнение (76) отпадает, а уравнения (74) и (75) принимают вид

$$\pi R^2\left[C_1\left(\lambda_0-\frac{1}{\lambda}\right)+C_2\left(1-\frac{1}{\lambda_0^3}\right)\right]-\frac{\pi R^4}{4}\cdot\frac{\theta^2}{\lambda_0^3}(C_1\lambda_0+C_2)-N=0; \tag{77}$$

$$\frac{\pi R^4}{2}\theta\frac{1}{\lambda_0^2}(C_1\lambda_0+C_2)-M=0. \tag{78}$$

Если цилиндр растягивается без кручения ($M=0$, $\theta=0$), то продольная сила N связана со степенью удлинения λ_0 зависимостью, которая следует из уравнения (77):

$$N=F\left[C_1\left(\lambda_0-\frac{1}{\lambda_0^2}\right)+C_2\left(1-\frac{1}{\lambda_0^3}\right)\right],$$

где $F=\pi R^2$ — начальная площадь пеперечного сечения цилиндра.

Как и следовало ожидать, эта зависимость совпадает с полученной ранее [см. формулу (62)] для простого растяжения.

Если цилиндр скручивается так, что расстояние между его торцами остается постоянным ($\lambda_0=1$), то крутящий момент будет определяться уравнением

$$M=(C_1+C_2)J_p\theta,$$

где $J_p=\frac{\pi R^4}{2}$ — полярный момент инерции площади сечения цилиндра.

В этом случае крутящий момент линейно зависит от крутки не только при малых, но и при больших деформациях, причем величина C_1+C_2 равна модулю сдвига материала при малых деформациях.

Из формулы (77) следует, что при скручивании цилиндра при неизменной длине в его сечениях возникает продольная сжимающая сила, пропорциональная квадрату крутки:

$$|N|=\theta^2 J_p(C_1+2C_2).$$

Рассмотрим теперь распределение напряжений в цилиндре, нагруженном продольной силой и крутящим моментом.

Формулы (61) связывают напряжения с главными степенями удлинений. Ввиду того что в рассматриваемом случае компоненты деформации γ_{zr} и $\gamma_{r\varphi}$ отсутствуют, радиальное направление является направлением главной деформации. Две другие главные деформации ε_1 и ε_2 определяются тогда квадратным уравнением, в которое вырождается кубическое уравнение (47) при $\gamma_{r\varphi}=\gamma_{zr}=0$:

$$\varepsilon^2-(\varepsilon_\varphi+\varepsilon_z)\varepsilon+\varepsilon_z\varepsilon_\varphi-\frac{1}{4}\gamma^2_{\varphi z}=0,$$

откуда

$$\varepsilon_{1,2}=\frac{1}{2}(\varepsilon_\varphi+\varepsilon_z)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_\varphi-\varepsilon_z)^2+\gamma^2_{\varphi z}}\,. \tag{79}$$

Угол α, который составляют направления главных деформаций с окружным направлением в недеформированном цилиндре, определяется выражением

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\gamma_{\varphi z}}{\varepsilon_\varphi-\varepsilon_z}\,. \tag{80}$$

Квадраты главных степеней удлинения связаны с главными значениями компонент деформации выражениями

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1^2&=1+2\varepsilon_1=1+\varepsilon_\varphi+\varepsilon_z+\sqrt{(\varepsilon_\varphi-\varepsilon_z)^2+\gamma^2_{\varphi z}}\,;\\ \lambda_2^2&=1+2\varepsilon_2=1+\varepsilon_\varphi+\varepsilon_z-\sqrt{(\varepsilon_\varphi-\varepsilon_z)^2+\gamma^2_{\varphi z}}\,;\\ \lambda_3^2&=1+2\varepsilon_3=1+2\varepsilon_r.\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Подставляя эти значения λ^2 в формулы (47), находим соответствующие главные напряжения с точностью до величины s, которая является неизвестной функцией радиуса r. Эта функция определяется затем из условий равновесия вырезанного из цилиндра элемента. Для того чтобы составить эти условия, а также перейти к напряжениям в поперечном сечении цилиндра, необходимо определить главные направления в деформированном цилиндре.

Возьмем два взаимно-перпендикулярных отрезка ds_1 и ds_2 (фиг. 378), составляющих углы α и $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ с окружным направлением в недеформированном цилиндре, причем угол α определяется формулой (80). Эти отрезки ориентированы по главным направлениям. После деформации длины этих отрезков станут равными соответственно $\lambda_1 ds_1$ и $\lambda_2 ds_2$, а углы их с окружным направлением будут α' и $\beta'=\frac{\pi}{2}-\alpha'$. (Эти отрезки останутся взаимно-перпендикулярными, так как они ориентированы по направлениям главных деформаций.)

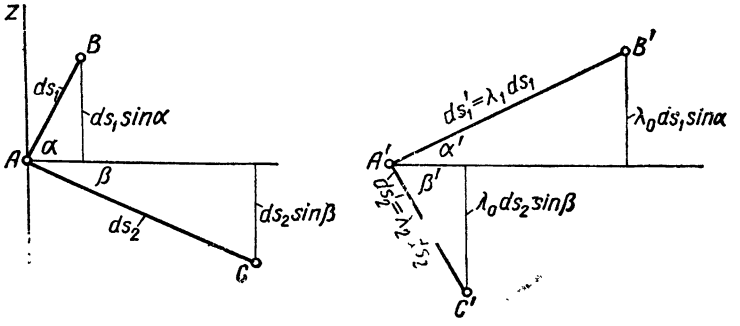
Так как цилиндр деформируется равномерно по длине, то осевые проекции отрезков ds_1 и ds_2 изменяются в отношении λ_0 и становятся равными $\lambda_0 ds_1\sin\alpha$ и $\lambda_0 ds_2\sin\beta$.

Из фиг. 378 определяем синусы углов, составляемых после деформации отрезками ds_1' и ds_2' о окружным направлением:

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha'=\cos\beta'&=\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\sin\alpha;\\ \sin\beta'=\cos\alpha'&=\frac{\lambda_0}{\lambda_2}\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Зная углы α' и β', можно найти теперь напряжения в поперечном и радиальных сечениях цилиндра:

$$\sigma_z = \sigma_1 \sin^2 \alpha' + \sigma_2 \cos^2 \alpha';$$
$$\sigma_\psi = \sigma_1 \cos^2 \alpha' + \sigma_2 \sin^2 \alpha';$$
$$\tau_{\psi z} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha' \cos \alpha'.$$



Фиг. 378. К определению главных направлений в деформированном цилиндре

Подставляя в эти формулы общие выражения (61) для главных напряжений, а также значения λ_1^2, λ_2^2 и λ_3^2 по формулам (81) и выражения деформаций по формулам (71), получим окончательно

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z &= C_1 \lambda_0^2 + C_2 \lambda_0 \left(1 + \frac{D\lambda_0}{r^2} + \frac{r^2}{r^2 + D\lambda_0}\right) + s;\\
\sigma_\psi &= C_1 \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{D}{r^2}\right)(1 + \theta^2 r^2) + C_2 \left(\lambda_0 + \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{\theta^2 r^2}{\lambda_0^2} + \frac{D\lambda_0^2}{r^2}\right) + s;\\
\tau_{\psi z} &= \left[C_1 + C_2 \frac{r^2}{\lambda_0 (r^2 + D\lambda_0)}\right] r\theta\lambda_0 \sqrt{\frac{1}{\lambda_0} + \frac{D}{r^2}}.
\end{aligned}\right\} \quad (83)$$

Напряжение σ_r устанавливается по третьему из уравнений (61):

$$\sigma_r = (C_1 + C_2 \lambda_0^2) \frac{r^2}{\lambda_0 (r^2 + D\lambda_0)} + C_2 \frac{1}{\lambda_0^2}(1 + \theta^2 r^2) + s. \quad (84)$$

Функция s определяется из условий равновесия элемента, вырезанного из деформированного цилиндра (фиг. 379). Проектируя силы на направление n, получим

$$d[(r + \rho)\sigma_r] - \sigma_\psi (dr + d\rho) = 0,$$

или

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1 + \frac{d\rho}{dr}}{r + \rho}(\sigma_r - \sigma_\psi) = 0. \quad (85)$$

Подставляя в это уравнение значения напряжений σ_r и σ_ψ по формулам (83) и (84), а также ρ по формуле (70), получим дифференциальное уравнение относительно функции s. Интегрирование этого уравнения с учетом граничных условий (значения σ_r, на внутреннем и

наружном радиусах) позволяет определить s, а следовательно, и все напряжения.

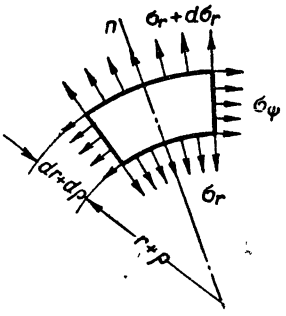
Рассмотрим снова сплошной цилиндр, полагая $D=0$.

В этом случае уравнения (83) и (84) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= C_1\frac{1}{\lambda_0} + C_2\left(\lambda_0 + \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{\theta^2 r^2}{\lambda_0^2}\right) + s;\\
\sigma_\psi &= C_1\frac{1}{\lambda_0}(1+\theta^2 r^2) + C_2\left(\lambda_0 + \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{\theta^2 r^2}{\lambda_0^2}\right) + s;\\
\sigma &= C_1\lambda_0^2 + C_2 2\lambda_0 + s;\\
\tau_{\psi z} &= \left(C_1 + C_2\frac{1}{\lambda_0}\right)\theta r\sqrt{\lambda_0}.
\end{aligned}\right\} \qquad (86)$$

Так как для сплошного цилиндра [см. формулу (70)]

$$r+\rho = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}r,$$



Фиг. 379. К выводу условий равновесия элемента деформированного цилиндра

то уравнение равновесия (85) принимает вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\psi) = 0$$

или

$$C_2 2\frac{\theta^2}{\lambda_0^2}r + \frac{ds}{dr} - C_1\frac{\theta^2 r}{\lambda_0} = 0,$$

откуда

$$\frac{ds}{dr} = \left(\frac{C_1}{\lambda_0} - \frac{2C_2}{\lambda_0^2}\right)\theta^2 r.$$

Интегрирование дает

$$s = \left(\frac{C_1}{\lambda_0} - \frac{2C_2}{\lambda_0^2}\right)\frac{\theta^2 r^2}{2} + s_0,$$

где s_0 — постоянная интегрирования.

Подставляя найденное выражение s в формулу для радиального напряжения σ_r и приравнивая $\sigma_r = 0$ на наружной ненагруженной поверхности цилиндра (при $r = R$), имеем

$$s_0 = -\frac{C_1}{\lambda_0}\left(1 + \frac{1}{2}\theta^2 R^2\right) - C_2\left(\lambda_0 + \frac{1}{\lambda_0^2}\right).$$

Окончательно получаем следующие формулы для напряжений:

$$\sigma_r = -C_1\frac{\theta^2}{2\lambda_0}(R^2 - r^2);$$

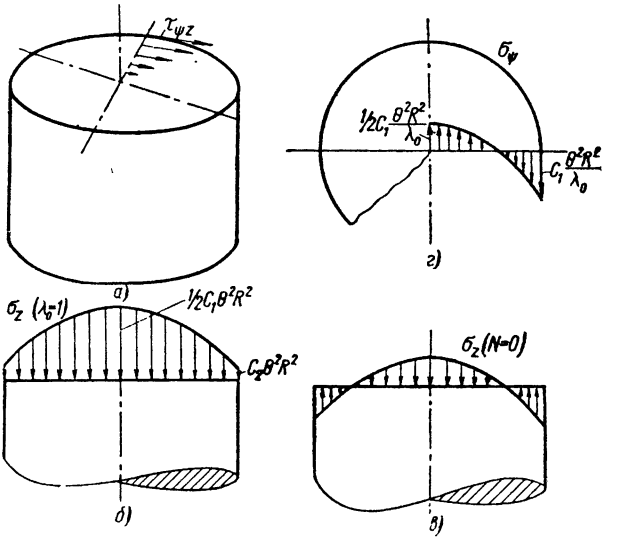
$$\sigma_\psi = C_1\frac{\theta^2}{2\lambda_0}(3r^2 - R^2);$$

$$\sigma_z = C_1\left(\lambda_0^2 - \frac{1}{\lambda_0}\right) + C_2\left(\lambda_0 - \frac{1}{\lambda_0^2}\right) - C_1\frac{\theta^2}{2\lambda_0}(R^2 - r^2) - C_2\theta^2 r^2;$$

$$\tau_{\psi z} = \left(C_1\sqrt{\lambda_0} + C_2\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right)\theta r.$$

Выведенные формулы показывают, что касательные напряжения в поперечном сечении цилиндра распределены по линейному закону (фиг. 380, *а*), так же как и при кручении в области малых деформаций. Нормальные напряжения σ_z в поперечном сечении распределены по параболическому закону. Если торцы цилиндра закреплены таким образом, что длина его при кручении не может изменяться ($\lambda_0=1$), то напряжения σ_z во всех точках сечения являются напряжениями сжатия. Эпюра распределения напряжений для этого случая представлена на фиг. 380, *б*.

Интересно отметить, что отношение напряжения на периферии сечения к напряжению в его центре равно отношению постоянных $\frac{2C_2}{C_1}$.



Фиг. 380. Распределение напряжений в закрученном резиновом цилиндре при больших деформациях:

а — касательные напряжения в поперечном сечении; *б* — нормальные напряжения в поперечном сечении при несмещающихся торцах; *в* — нормальные напряжения в поперечном сечении при отсутствии продольной силы, *г* — нормальные напряжения в радиальном сечении

Это обстоятельство было использовано Ривлиным [23] для экспериментального определения указанного отношения.

Если при кручении цилиндр может свободно удлиняться (т. е. продольная сила $N=0$), то в центре сечения остается напряжение сжатия, а на периферии возникает растяжение. Эпюра напряжения σ_z для этого случая представлена на фиг. 380, *в*.

Нормальное напряжение σ_ψ в радиальных сечениях цилиндра изменяется также по параболическому закону. Около внешней поверхности цилиндра это напряжение является растягивающим, в центре — сжимающим (см. фиг. 380, *г*).

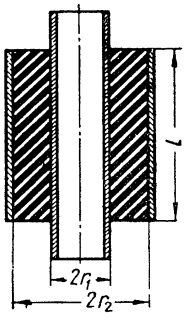
Г. Скручивание резино-металлического шарнира

В качестве второго примера исследования больших деформаций резинового упругого элемента рассмотрим коаксиальное кручение резино-металлического шарнира (фиг. 381).

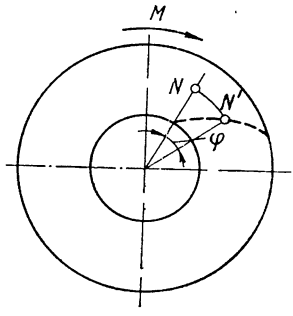
В малых перемещениях эта задача была рассмотрена выше (см. § 3).

Если длина шарнира l велика по сравнению с толщиной резинового слоя $(r_2 - r_1)$, то можно считать, что осевые перемещения w при скручивании блока отсутствуют. Из условия постоянства объема следует, что в этом случае отсутствуют также и радиальные перемещения ρ.

Единственное перемещение, которое получают точки при скручивании шарнира, это угол поворота φ (фиг. 382), причем последний зави-



Фиг. 381. Резино - металлический шарнир



Фиг. 382. Перемещения при кручении резино-металлического шарнира

сит только от радиуса r цилиндра, на котором расположена рассматриваемая точка:

$$\varphi = \varphi(r).$$

Из формул (66) следует, что только компоненты деформации ε_r и $\gamma_{r\varphi}$ отличны от нуля. Они равны

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2;$$

$$\gamma_{r\varphi} = r \frac{d\varphi}{dr}.$$

Вычислим инварианты деформации:

$$J_1 = \varepsilon_r = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)$$

$$J_2 = \frac{1}{4} \gamma_{r\varphi}^2 = \frac{1}{4} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2;$$

$$J_2' = 2(J_1 - J_2) = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = J_1.$$

(Равенство $J_2' = J_1$ имеет место, так как деформация является плоской.)

Удельная энергия деформации резины составляет

$$W = C_1 J_1 + C_2 J_2' = (C_1 + C_2) \frac{1}{2} r^2 \varphi'^2,$$

где

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dr}.$$

Энергия деформации всего объема резины в шарнире равна

$$U = 2\pi l \int_{r_1}^{r_2} W r dr = \pi l (C_1 + C_2) \int_{r_1}^{r_2} \varphi'^2 r^3 dr.$$

Потенциал внешнего момента M составляет

$$\mathcal{V} = -M \int_{r_1}^{r_2} \varphi' dr,$$

где $\int_{r_1}^{r_2} \varphi' dr = \varphi_ш$ — угол закручивания шарнира.

Полная энергия системы П равна

$$\Pi = U + \mathcal{V} = \int_{r_1}^{r_2} \Phi(\varphi', r) dr,$$

где

$$\Phi(\varphi', r) = \pi l (C_1 + C_2) \varphi'^2 r^3 - M\varphi'.$$

Для того чтобы полная энергия была минимальной, должно выполняться уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi'} = 0$$

или

$$2\pi l (C_1 + C_2) \varphi' r^3 - M = 0,$$

откуда

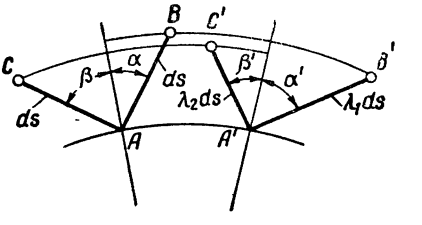
$$\varphi' = \frac{M}{2\pi (C_1 + C_2) l} \cdot \frac{1}{r^3}. \tag{87}$$

Уравнение (87) позволяет вычислить угол закручивания шарнира:

$$\varphi_ш = \int_{r_1}^{r_2} \varphi' dr = \frac{M}{4\pi (C_1 + C_2) l} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 \cdot r_2^2}.$$

Поскольку $C_1 + C_2 = G$, то полученная формула тождественна с формулой (18), выведенной в предположении малых деформаций Таким образом, угол закручивания линейно зависит от момента не только при малых, но и при больших деформациях.

Рассмотрим теперь напряжения, возникающие в резине. Одним из направлений главных деформаций является осевое направление, в котором $\varepsilon_z = 0$, $\lambda_z = 1$.



Фиг. 383. К определению главных направлений

Две другие главные деформации определяются уравнением

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}\varepsilon_r \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_r^2 + \gamma_{r\varphi}^2},$$

или

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{4} r^2 \varphi'^2 \pm \frac{1}{2} r \varphi' \sqrt{1 + \frac{1}{4} r^2 \varphi'^2}.$$

В недеформированном состоянии направление наибольшей главной деформации составляет с радиусом угол α, определяемый из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{r\psi}}{\varepsilon_r} = \frac{2}{r\varphi'}. \tag{88}$$

Главные степени удлинения равны

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^2 &= 1 + 2\varepsilon_1 = 1 + \frac{1}{2} r^2 \varphi'^2 + r\varphi' \sqrt{1 + \frac{1}{4} r^2 \varphi'^2}; \\ \lambda_2^2 &= 1 + 2\varepsilon_2 = 1 + \frac{1}{2} r^2 \varphi'^2 - r\varphi' \sqrt{1 + \frac{1}{4} r^2 \varphi'^2}; \\ \lambda_3 &= \lambda_z = 1. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Полученные значения λ позволяют определить главные напряжения с точностью до гидростатического давления по формулам (61).

Выделим в недеформированном материале два отрезка, ориентированные в направлениях главных деформаций, т. е. под углами α и $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ к радиусу (фиг. 383).

После деформации углы будут равны соответственно α' и $\beta' = \frac{\pi}{2} - \alpha'$. Эти углы легко найти из того условия, что радиальная проекция отрезков остается неизменной (так как $\rho = 0$).

Таким образом,

$$ds \cos\alpha = \lambda_1 ds \cos\alpha';$$
$$ds \cos\beta = \lambda_2 ds \cos\beta',$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha' &= \frac{1}{\lambda_1} \cos\alpha; \\ \sin\alpha' &= \cos\beta' = \frac{1}{\lambda_2} \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Теперь определим напряжения в радиальном и окружном сечениях деформированного цилиндра:

$$\sigma_r = \sigma_1 \cos^2\alpha' + \sigma_2 \sin^2\alpha';$$
$$\sigma_\psi = \sigma_1 \sin^2\alpha' + \sigma_2 \cos^2\alpha';$$
$$\tau_{r\psi} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin\alpha' \cos\alpha'.$$

Подставляя сюда значения напряжений из уравнений (61) и учитывая соотношения (90) и условие $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, получим

$$\sigma_r = C_1 + 2C_2 + s;$$

$$\sigma_\psi = (C_1 + C_2)\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \sin^2\alpha + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \cos^2\alpha\right) + C_2 + s;$$

$$\tau_{r\psi} = (C_1 + C_2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin\alpha \cos\alpha.$$

Если использовать теперь установленные выше значения λ по формулам (89) и угла α по зависимости (88), то для напряжений σ_ψ и $\tau_{r\psi}$ получим

$$\sigma_\psi = C_1 + 2C_2 + s + (C_1 + C_2) r^2 \varphi'^2;$$

$$\tau_{r\psi} = (C_1 + C_2) r \varphi',$$

после подстановки φ' из уравнения (87) имеем

$$\sigma_\psi = C_1 + 2C_2 + s + \frac{M^2}{4\pi^2 l^2 (C_1 + C_2)} \cdot \frac{1}{r^4};$$

$$\tau_{r\psi} = \frac{M}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Для напряжения σ_z получаем по третьей формуле (61):

$$\sigma_z = C_1 + 2C_2 + s + C_2 r^2 \varphi'^2 = C_1 + 2C_2 + s + C_2 \frac{M^2}{4\pi^2 l^2 (C_1 + C_2)^2} \cdot \frac{1}{r^4}.$$

Величину s найдем из рассмотрения равновесия элемента, вырезанного из деформированного цилиндра (см. фиг. 379).

Равенство нулю проекций сил на радиальное направление приводит к уравнению

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\psi) = 0.$$

Подставляя в это уравнение значения σ_r и σ_ψ, получим

$$\frac{ds}{dr} = \frac{M^2}{4\pi^2 (C_1 + C_2) l^2} \cdot \frac{1}{r^5},$$

откуда

$$s = -\frac{M^2}{16\pi^2 (C_1 + C_2) l^2} \cdot \frac{1}{r^4} + s_0,$$

где s_0 — постоянная.

Последнюю можно определить, если принять, что продольная сила в поперечном сечении цилиндра равна нулю.

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr = 0.$$

Выполняя интегрирование, имеем

$$s_0 = -C_1 - 2C_2 - \frac{M^2 (C_1 - 3C_2)}{16\pi^2 l^2 (C_1 + C_2)^2} \cdot \frac{1}{r_1^2 r_2^2}.$$

Окончательно получаем следующие значения напряжений:

$$\sigma_r = \frac{M^2}{16\pi^2 l^2 (C_1 + C_2)^2} \left[C_1 \left(\frac{1}{r_1^2 r_2^2} - \frac{1}{r^4} \right) - C_2 \left(\frac{3}{r_1^2 r_2^2} + \frac{1}{r^4} \right) \right];$$

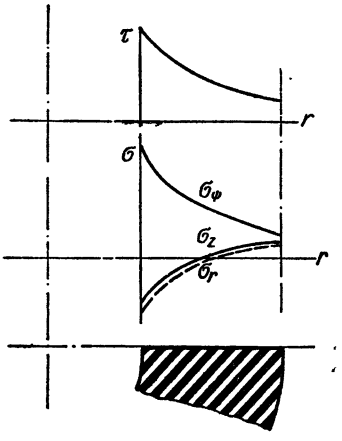
$$\sigma_\psi = \frac{M^2}{16\pi^2 l^2 (C_1 + C_2)^2} \left[C_1 \left(\frac{1}{r_1^2 r_2^2} + \frac{3}{r^4} \right) - C_2 3 \left(\frac{1}{r_1^2 r_2^2} - \frac{1}{r^4} \right) \right];$$

$$\sigma_z = \frac{M^2 (C_1 - 3C_2)}{16\pi^2 l^2 (C_1 + C_2)^2} \left(\frac{1}{r_1^2 r_2^2} - \frac{1}{r^4} \right);$$

$$\tau_{r\psi} = \frac{M}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Как и следовало ожидать, формула для касательного напряжения совпадает с полученной при решении задачи в малых деформациях из условий равновесия.

Распределение напряжений в шарнире показано на фиг. 384. Как видно из эпюры, осевые напряжения σ_z во внутренней части цилиндра являются сжимающими, в наружной — растягивающими.



Фиг. 384. Распределение напряжений при кручении резино-металлического шарнира

Очевидно, что для того, чтобы принятые гипотезы удовлетворялись, по торцам цилиндра должны действовать распределенные таким же образом статически уравновешенные поверхностные силы. Так как эти силы в действительности отсутствуют, напряженное состояние вблизи торцов будет искажено. Однако в соответствии с принципом Сен-Венана это искажение распространится лишь на небольшой участок около торцов.

Растягивающие радиальные напряжения σ_r, возникающие у наружной поверхности шарнира, могут существенно повлиять на его работоспособность, вызывая отслоение резины от наружной обоймы. Чтобы избежать этого, путем запрессовки создают в резине начальные напряжения сжатия.

§ 5. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ, ПРИНИМАЕМЫЕ ПРИ РАСЧЕТЕ РЕЗИНО-КОРДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В большинстве резино-кордных изделий (в напорных рукавах, шинах, шинно-пневматических муфтах) силовой основой является каркас, составленный из перекрещивающихся слоев обрезиненного корда.

Каждый слой представляет собой ряд параллельных нитей корда, покрытых сырой резиной. При сборке изделия такие слои обрезиненного корда накладываются друг на друга под определенным углом и после придания изделию необходимой конфигурации вулканизуются. В качестве примера, поясняющего расположение нитей корда в слоях, на фиг. 385 изображена конструкция двухслойного резино-кордного рукава.

Рассмотрим деформации стенки резино-кордной оболочки, составленной из скрещивающихся слоев обрезиненного корда.

Составляющие конструкцию материалы — резина и корд имеют резко различную жесткость. Так, модуль упругости резины лежит в пределах 10—50 *кг/см*^{2}, тогда как модуль продольной упругости текстильного корда — порядка 10 000—20 000 *кг/см*^{2}, а для металлического корда — порядка 10^6 *кг/см*^{2}. Поэтому деформации элемента стенки, связанные с удлинением нитей корда, чрезвычайно затруднены.

Вместе с тем имеется вид деформации элемента, которая происходит без изменения длины нитей корда, это — деформация, соответствующая изменению углов ромбиков, образованных нитями корда соседних слоев (фиг. 386).

Легко видеть, что при такой деформации диагонали ромба остаются взаимно-перпендикулярными и, следовательно, представляют собой направления главных деформаций. Обозначим относительные

деформации в направлениях диагоналей ромба через ε_x и ε_y; тогда, исходя из отсутствия удлинения нитей, получим

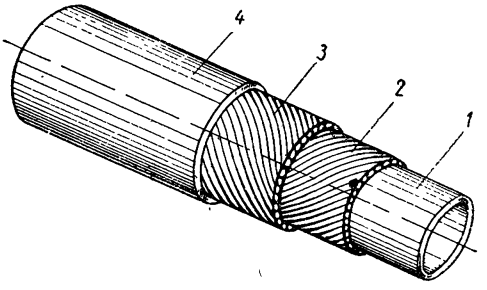
$$\varepsilon_l = \varepsilon_x \sin^2\beta + \varepsilon_y \cos^2\beta = 0,$$

откуда

$$\varepsilon_x = -\varepsilon_y \operatorname{ctg}^2\beta. \qquad (91)$$

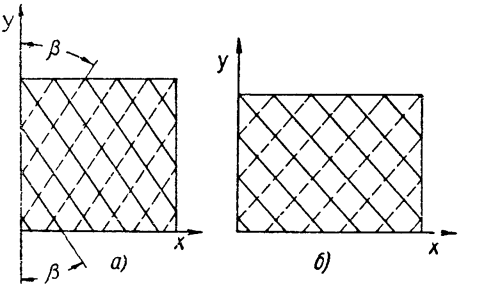
где β — угол, составляемый нитями с направлением y.

При расчете резино-кордных конструкций можно, как правило считать, что нити корда нерастяжимы и деформации описанного типа являются единственно возможными.



Фиг. 385. Конструкция резино-кордного рукава:

1 — внутренний резиновый слой; *2* и *3* — слои обрезиненного корда; *4* — наружный резиновый слой



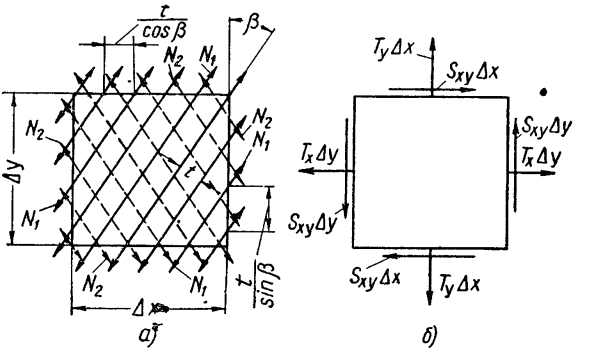
Фиг. 386 Деформации резино-кордной конструкции без изменения длины нитей:

а — элемент до деформации; *б* — элемент после деформации

В качестве второй основной гипотезы можно принять, что напряжения в резине весьма малы по сравнению с напряжениями в нитях корда и что, следовательно, деформации перекоса ромбов происходят без затраты энергии.

Таким образом, резино-кордные конструкции можно рассматривать как нерастяжимые сетки с ромбическими ячейками.

Из гипотезы малости напряжений в резине по сравнению с напряжениями в нитях корда следуют определенные соотношения между усилиями в нитях корда и интенсивностями сил, отнесенных к единице длины сечения оболочки.



Фиг. 387. К определению усилий в сечениях резино-кордной конструкции

Обозначим (фиг. 387, *а*) усилия в нитях, идущих слева вверх, через N_1, а усилия в нитях пересекающих их слоев — через N_2, тогда полное вертикальное усилие, приложенное к сечению Δx элемента, изображенного на фиг. 387, может быть вычислено как

$$(N_1 + N_2)\cos\beta \frac{\Delta x \cos\beta}{t} \cdot \frac{n}{2},$$

где $N_1 \cos\beta$ и $N_2 \cos\beta$ — проекции на вертикаль усилий N_1 и N_2;

$\frac{\Delta x \cos\beta}{t}$ — количество нитей каждого слоя, пересекающих сечение Δx;

t — расстояние между соседними нитями по нормали;

n — полное число слоев корда;

$\frac{n}{2}$ — число слоев данного направления.

С другой стороны, то же усилие может быть выражено через интенсивность T_y сил, отнесенных к единице длины сечения, как произведение $T_y \Delta x$ (фиг. 387, б).

Сопоставляя два выражения одной и той же силы, имеем

$$T_y = \frac{n}{2t}(N_1 + N_2)\cos^2\beta. \tag{92}$$

Аналогично устанавливается интенсивность усилия, приложенного к вертикальному срезу элемента и действующего по горизонтали:

$$T_x = \frac{n}{2t}(N_1 + N_2)\sin^2\beta \tag{93}$$

а также интенсивность сдвигающего усилия:

$$S_{xy} = \frac{n}{2t}(N_1 - N_2)\sin\beta\cos\beta. \tag{94}$$

В случае симметричной нагрузки на конструкцию сдвигающее усилие S_{xy} отсутствует и $N_1 = N_2 = N$; при этом интенсивности сил T_y и T_x определяются формулами

$$T_y = \frac{n}{t}N\cos^2\beta; \tag{92а}$$

$$T_x = \frac{n}{t}N\sin^2\beta. \tag{93а}$$

Из уравнений (92) и (93) следует важная зависимость, непосредственно связывающая между собой интенсивности усилий T_x и T_y:

$$T_x = T_y \operatorname{tg}^2\beta. \tag{95}$$

Полученные уравнения справедливы не только для резино-кордных, но и для резино-тканевых конструкций, в которых нити обоих направлений переплетаются. Так, в частности, для оплеточного рукава, элемент оплетки которого представлен на фиг. 388, каждый слой оплетки эквивалентен двум слоям корда.

Опыт показывает, что принятые гипотезы о нерастяжимости нитей корда и малости напряжений в резине обеспечивают достаточную для практических целей точность расчета резино-кордных конструкций.

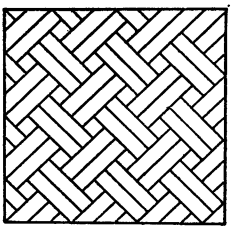
В отдельных случаях, когда это необходимо, можно учесть растяжимость нитей корда [1], а также энергию, затрачиваемую на деформацию резины.

Рассмотрим энергию деформации одиночного резино-кордного слоя, считая нити недеформируемыми.

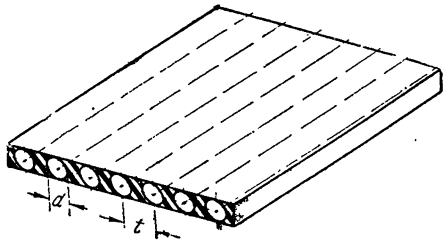
[1] См., например, § 9.

Резино-кордный слой схематически изображен на фиг. 389.

Возможны два различных типа плоской деформации такого слоя — сдвиг и растяжение в направлении, перпендикулярном к нитям.



Фиг. 388. Элемент оплетки рукава



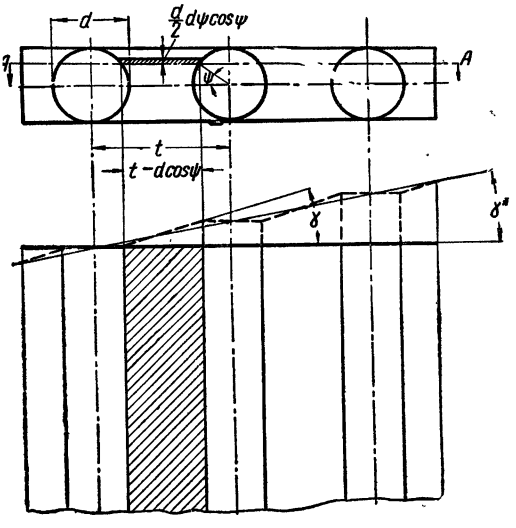
Фиг. 389. Резино-кордный слой

На фиг. 390 представлен характер деформации сечения AA слоя при сдвиге, причем предположено, что нити корда имеют поперечное сечение в виде круга диаметром d.

Фактическая сдвиговая деформация резины между нитями γ связана со средней сдвиговой деформацией слоя γ^* равенством

$$\gamma = \gamma^* \frac{t}{t - d\cos\psi},$$

которое следует из фиг. 390, причем ψ — угол, определяющий положение сечения AA.



Фиг. 390. Деформации резино-кордного слоя при сдвиге

Подсчитаем потенциальную энергию деформации слоя при сдвиге. Выделим элемент объема резины, соответствующий приращению угла $d\psi$. Этот элемент заштрихован на фиг. 390. Объем выделенного элемента равен

$$dV = l(t - d\cos\psi)\frac{d}{2}d\psi\cos\psi,$$

где l — длина элемента вдоль нити.

Энергия деформации выделенного элемента равна

$$dU = \frac{G}{2}\gamma^2 dV = \frac{G}{2}\gamma^{*2}\frac{lt^2 d}{2}\cdot\frac{\cos\psi\, d\psi}{t - d\cos\psi}.$$

Интегрируя полученное выражение по всей толщине слоя, что соответствует изменению угла ψ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, подсчитаем

энергию, накопленную слоем на длине l в пределах одного шага t

$$U = \frac{G}{2}\gamma^{*2}\,\frac{lt^2 d}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\, d\psi}{t - d\cos\psi} =$$

$$= \frac{G}{2}\gamma^{*2} lt^2\left[\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{d}{t}\right)^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{t+d}{t-d}} - \frac{\pi}{2}\right].$$

Энергию W_γ, приходящуюся на единицу поверхности слоя, найдем, разделив полученное выражение для энергии на произведение lt:

$$W = \frac{1}{lt}U = Kd\frac{G\gamma^{*2}}{2},$$

где коэффициент K, зависящий от отношения $\frac{d}{t}$, равен

$$K = \frac{t}{d}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{d}{t}\right)^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{t+d}{t-d}} - \frac{\pi}{2}\right]. \qquad (96)$$

Коэффициент K показывает, во сколько раз энергия деформации резино-кордного слоя больше, чем энергия чисто резинового слоя, испытывающего такую же среднюю деформацию сдвига.

Зависимость коэффициента K от отношения $\frac{d}{t}$ представлена на фиг. 391.

Теперь рассмотрим растяжение слоя в направлении, поперечном нитям. Рассуждая таким же образом, как и при изучении сдвига, и учитывая, что вследствие отсутствия деформации в направлении нитей резина находится в плоском деформированном состоянии, можно определить выражение энергии деформации, отнесенной к единице поверхности слоя:

$$W_\varepsilon = Kd\,2G\,\varepsilon^{*2} \qquad (97)$$

В формуле (97) ε^*—средняя деформация слоя в направлении перпендикулярном к нитям.

Коэффициент K определяется в зависимости от отношения $\frac{d}{t}$ по формуле (96) или по графику фиг. 391.

Если кордный слой испытывает одновременно деформации сдвига и растяжения в направлении, перпендикулярном к нитям, то энергия его деформации может быть найдена суммированием энергий W_γ и W_ε, т. е.

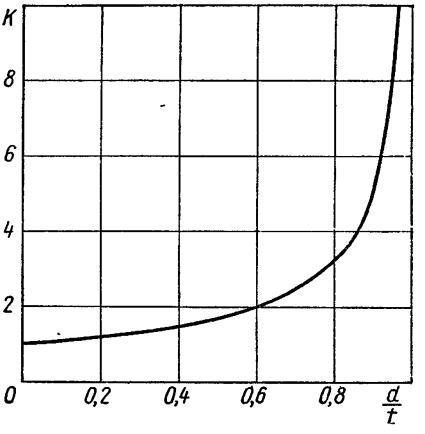
$$W = W_\gamma + W_\varepsilon = KdG\left(2\varepsilon^{*2} + \frac{1}{2}\gamma^{*2}\right). \qquad (98)$$

Перейдем теперь от одиночного слоя к резино-кордной конструкции (фиг. 392), составленной из четного числа n скрещивающихся кордных слоев с резиновыми прослойками и обкладками. Толщина стенки h.

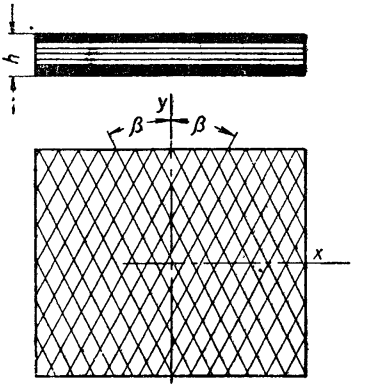
Предположим для простоты, что жесткость резины во всех элементах конструкции одинакова.

Деформациям конструкции в направлении осей x и y * будет соответствовать средняя деформация сдвига в направлениях нитей корда и перпендикуляра к ним

$$\gamma^* = (\varepsilon_y - \varepsilon_x)\, 2 \sin\beta \cos\beta$$



Фиг. 391. Зависимость коэффициента K от отношения диаметра нити к шагу



Фиг. 392. Четырехслойная резино-кордная конструкция

и деформация растяжения в направлении, перпендикулярном к нитям,

$$\varepsilon^* = \varepsilon_x \cos^2\beta + \varepsilon_y \sin^2\beta.$$

Подставляя полученные значения γ^* и ε^* в формулу (98), вычислим удельную энергию деформации каждого из кордных слоев:

$$W_к = 2KdG\,(\varepsilon_x^2 \cos^2\beta + \varepsilon_y^2 \sin^2\beta).$$

Чтобы подсчитать энергию деформации всей конструкции, состоящей из n резино-кордных слоев и резиновых прослоек, надо полученную величину умножить на число слоев n и добавить энергию деформации резиновых прослоек, которая равна

$$W_p = G\,(h - nd)\,(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2),$$

где $(h—nd)$ — суммарная толщина резиновых прослоек, и вследствие несжимаемости резины $\varepsilon_z = -(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$.

Таким образом, энергия деформации конструкции на единицу площади составляет

$$W = nW_к + W_p = 2G\,[Knd\,(\varepsilon_x^2 \cos^2\beta + \varepsilon_y^2 \sin^2\beta) + (h - nd)\,(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y).$$

В полученном выражении деформации ε_x и ε_y не являются независимыми и связаны условием нерастяжимости нитей корда (91). Поэто-

* Напомним, что эти направления являются главными.

му энергию W можно выразить только через одну какую-нибудь деформацию ε_x или ε_y, а именно

$$W = 2Gh_{пр}(1 + \operatorname{tg}^4\beta - \operatorname{tg}^2\beta)\varepsilon_x^2 \tag{99}$$

или

$$W = 2Gh(1 + \operatorname{ctg}^4\beta - \operatorname{ctg}^2\beta)\varepsilon_y^2, \tag{100}$$

где через

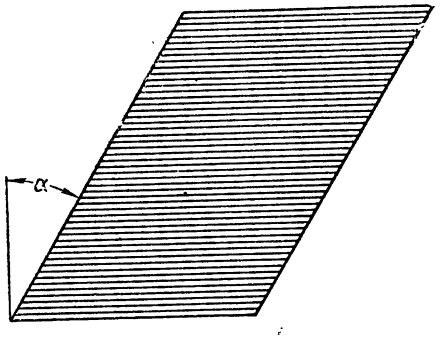
$$h_{пр} = h + nd(K - 1) \tag{101}$$

обозначена величина, которую можно рассматривать как приведенную толщину конструкции.

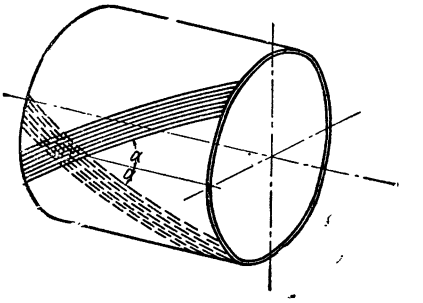
§ 6. РАВНОВЕСНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ В СИММЕТРИЧНЫХ РЕЗИНО-КОРДНЫХ ОБОЛОЧКАХ, НАГРУЖЕННЫХ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

В большинстве случаев резино-кордные конструкции (рукав, пневматический амортизатор, каркас шины или шинно-пневматической муфты) представляют собой оболочки вращения, достаточно тонкостенные для того, чтобы при их расчете можно было использовать безмоментную теорию.

При приложении этой теории к резино-кордным оболочкам необходимо учитывать, однако, что интенсивности усилий связаны уравне-



Фиг. 393. Закроенный косяк обрезиненного корда



Фиг. 394. Двуслойный браслет

ниями (92)—(95), в которые входит угол нитей корда. Изменение этого угла вдоль меридиана оболочки определяется технологией ее изготовления.

Рассмотрим кратко технологию изготовления резино-кордного каркаса пневматического амортизатора или пневматической шины.

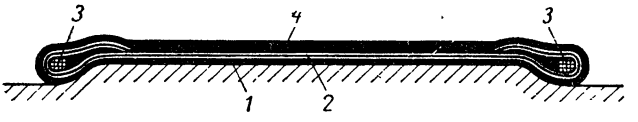
Из сырого обрезиненного корда под необходимым углом закроя α вырезаются косяки в виде параллелограммов (фиг. 393). Косяки дублируются (склеиваются) попарно крест-накрест в замкнутые кольца, образуя так называемые браслеты (фиг. 394). Такие браслеты в необходимом количестве в зависимости от числа слоев корда в конструкции надеваются на разъемный сборочный барабан [1] (фиг. 395), края их заворачиваются на проволочные бортовые кольца *3*, поверх собранных слоев корда накладывается резиновый протектор *4*. Затем сбороч-

[1] При так называемой плоской сборке на барабан накладываются не браслеты, а отдельные полосы обрезиненного корда.

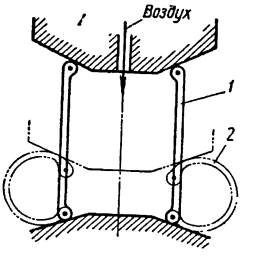
ный барабан складывается и сырое изделие снимается с него. Следующей операцией является формование.

Формование может проводиться различными методами. Один из методов — воздушное формование — показан схематически на фиг. 396. Изделие устанавливается между плитами специального пресса, и затем одновременно эти плиты сближаются и во внутреннюю полость изделия подается давление, причем изделие получает форму, близкую к окончательной.

Последней операцией является вулканизация. Внутрь изделия (при формовании или после него) закладывается резиновая так называемая варочная камера [1], и изделие помещается в вулканизационную форму.



Фиг. 395 Сборка баллона резино-кордного амортизатора на сборочном барабане:
1 — внутренний резиновый слой; *2* — слои корда; *3* — проволочные бортовые кольца; *4* — протектор



Фиг. 396. Воздушное формование резино-кордной оболочки:
1 — профиль оболочки до формования; *2* — то же после формования

Подведенным внутрь варочной камеры высоким давлением изделие прижимается к вулканизационной форме, форма нагревается, и осуществляется вулканизация. Для толстостенных изделий применяется двусторонний нагрев, для чего в варочную камеру подается перегретая вода.

Из сказанного видно, что кордные слои изделия образуются из цилиндрических браслетов (см. фиг. 394) с расположенными крест-накрест нитями.

Опыт показывает, что при последующих операциях (формование, вулканизация) взаимное проскальзывание слоев корда друг по другу не происходит. Кроме того, можно приближенно считать, что при вулканизации растянутые давлением нити удлиняются равномерно по длине.

Рассмотрим элементарный участок AB нити корда длиной dl (фиг. 397,*а*), который в браслете занимает центральный угол $d\varphi$ и, следовательно, имеет проекцию на окружное направление $r_б d\varphi$, где $r_б$ — радиус браслета.

В готовом изделии этот же участок нити будет иметь длину

$$dl_1 = (1 + \varepsilon_0)\, dl,$$

где ε_0 — удлинение нити в процессе вулканизации[2].

Поскольку концы участка AB в готовом изделии (фиг. 397, *б*) также лежат в радиальных плоскостях, составляющих угол $d\varphi$, то

[1] Иногда вулканизация осуществляется без варочных камер. В этом случае давление подается непосредственно в полость изделия.

[2] Для различных типов корда величина ε_0 принимается в пределах 4—10%.

проекция участка на окружное направление будет равна теперь $rd\varphi$, где r—расстояние участка AB от оси симметрии в готовом изделии.

Так как синус угла наклона нити к меридиану равен отношению проекции элементарного участка нити на окружное направление к длине самого участка, то можно написать:

для браслета

$$\sin\alpha = \frac{r_б d\varphi}{dl};$$

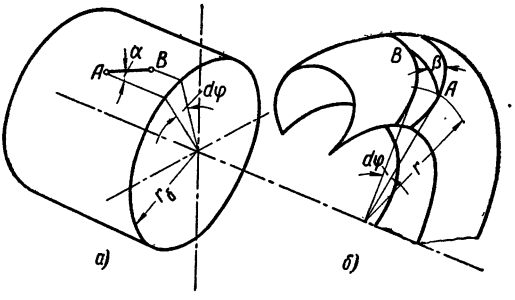
для готового изделия

$$\sin\beta = \frac{rd\varphi}{dl_1} = \frac{rd\varphi}{dl(1+\varepsilon_0)}.$$

Деля почленно полученные равенства одно на другое, имеем

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{r_б(1+\varepsilon_0)} r. \qquad (102)$$

Величины α, $r_б$, ε_0 являются для данного изделия постоянными, и из уравнения (102) следует, что синус угла наклона нити корда к меридиану в некоторой точке изделия пропорционален расстоянию r этой точки от оси симметрии.



Фиг. 397. Элементарный участок нити корда в браслете (*а*) и в готовом изделии (*б*)

Если обозначить радиус экватора оболочки через R, а угол, составляемый нитью корда с меридианом на экваторе, — через $\beta_к$, то по уравнению (102) получим

$$\sin\beta_к = \frac{\sin\alpha}{r_б(1+\varepsilon_0)} R.$$

Исключим из полученного уравнения и зависимости (102) параметры, характеризующие браслет, тогда

$$\sin\beta = \frac{r}{R}\sin\beta_к. \qquad (103)$$

Формула (103) дает возможность подсчитать угол нити корда в любой точке оболочки, если известен этот угол на экваторе.

Представляет также практический интерес определить шаг нитей корда, т. е. расстояние между двумя нитями корда в слое, измеренное по нормали к их направлению. При решении этой задачи будем исходить из того, что полное количество нитей в любом кольцевом сечении слоя постоянно и равно количеству нитей в браслете. Обозначая шаг нитей в исходном кордном полотне (браслете) через $t_б$, найдем что полное количество нитей в слое равно

$$\nu_1 = \frac{2\pi r_б \cos\alpha}{t_б},$$

где $\frac{t_б}{\cos\alpha}$ — расстояние между двумя нитями, измеренное по окружности.

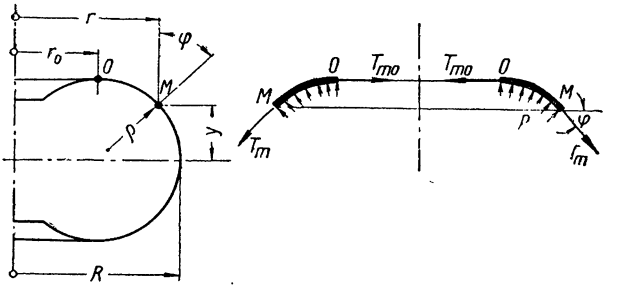
Вычисляя теперь количество нитей слоя готовой оболочки, пересекаемых кольцевым сечением радиуса r, получим

$$\nu_1 = \frac{2\pi r \cos\beta}{t},$$

где t и β — шаг нитей и угол их наклона к меридиану в рассматриваемом сечении слоя.

Приравнивая два значения ν_1, имеем

$$t = t_б \frac{r \cos\beta}{r_б \cos\alpha}, \qquad (104)$$



Фиг. 398. К выводу условий равновесия пояса, вырезанного из резино-кордной оболочки

Так как для данной оболочки параметры $t_б$, $r_б$ и α, определяемые условиями ее изготовления, постоянны, то шаги нитей корда в двух каких-либо точках оболочки связаны соотношением

$$\frac{t_1}{r_1 \cos\beta_1} = \frac{t_2}{r_2 \cos\beta_2},$$

или, поскольку

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2},$$

то

$$\frac{t_1}{\sin 2\beta_1} = \frac{t_2}{\sin 2\beta_2}. \qquad (105)$$

Таким образом, шаг нитей корда пропорционален синусу двойного угла их наклона к меридиану.

Перейдем к рассмотрению условий равновесия резино-кордной оболочки.

Вырежем из оболочки пояс (фиг. 398), ограниченный цилиндрическим сечением радиуса r_0, проходящим через точку O, в которой нормаль к поверхности параллельна оси ее симметрии, и коническим сечением, проходящим через произвольную точку M на меридиане оболочке. Проектируя на ось симметрии все силы, приложенные к выделенному поясу, найдем интенсивность меридионального усилия T_m в точке M:

$$T_m = p \frac{r^2 - r_0^2}{2r \sin\varphi}, \qquad (106)$$

где p—внутреннее давление;

r—расстояние точки M от оси симметрии;

φ—угол, составляемый нормалью к поверхности оболочки в точке M с осью симметрии.

С другой стороны, рассматривая равновесие бесконечно малого элемента оболочки, получим уравнение, связывающее интенсивности меридионального и окружного усилий (уравнение Лапласа):

$$\frac{T_m}{\rho} + \frac{T_t}{r}\sin\varphi = p, \tag{107}$$

где ρ — радиус кривизны меридиана в точке M;

$\frac{r}{\sin\varphi}$ — радиус кривизны нормального сечения в той же точке.

Два уравнения (106) и (107) с двумя неизвестными T_m и T_t позволяют определить эти усилия, если форма оболочки задана.

Однако, ввиду того что оболочка является резино-кордной, должна также выполняться зависимость (95), которая принимает вид

$$T_t = T_m \operatorname{tg}^2\beta. \tag{108}$$

Полученная система трех уравнений (106)—(108) с двумя неизвестными T_m и T_t является, вообще говоря, несовместной. Эти уравнения могут быть удовлетворены одновременно только в том случае, если между их коэффициентами имеется соотношение, которое можно получить, исключая из уравнений (106)—(108) интенсивности усилий T_m и T_t.

Это соотношение имеет вид

$$\frac{1}{\rho} + \frac{\operatorname{tg}^2\beta\sin\varphi}{r} = \frac{2r\sin\varphi}{r^2 - r_0^2}. \tag{109}$$

Уравнение (109), содержащее только геометрические параметры, определяет конфигурацию оболочки, при которой внутреннее давление воспринимается только натяжением нитей; такую конфигурацию можно назвать равновесной. Эту форму и принимает оболочка при нагружении ее внутренним давлением.

Преобразуем уравнение (109), учитывая, что кривизна определяется соотношением

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dr}\cos\varphi = \frac{d}{dr}(\sin\varphi), \tag{110}$$

а также что угол β изменяется в соответствии с уравнением (103) и, следовательно,

$$\operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{\frac{r^2}{R^2}\sin^2\beta_к}{1 - \frac{r^2}{R^2}\sin^2\beta_к}.$$

Таким образом, установим, что

$$\frac{d}{dr}(\sin\varphi) + \frac{\frac{r}{R^2}\sin^2\beta_к}{1 - \frac{r^2}{R^2}\sin^2\beta_к}\sin\varphi = \frac{2r\sin\varphi}{r^2 - r_0^2},$$

или, разделяя переменные,

$$\frac{1}{\sin\varphi}d(\sin\varphi) = \frac{2rdr}{r^2 - r_0^2} - \frac{\frac{\sin^2\beta_к}{R^2}rdr}{1 - \frac{\sin^2\beta_к}{R^2}r^2}.$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\ln(\sin\varphi) = \ln(r^2 - r_0^2) + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{\sin^2\beta_к}{R^2} r^2\right) + \ln C$$

и после потенцирования

$$\sin\varphi = C(r^2 - r_0^2)\sqrt{1 - \frac{\sin^2\beta_к}{R^2} r^2}.$$

Постоянную C можно определить из того условия, что при $r = R$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Это приводит к равенству

$$1 = C(R^2 - r_0^2)\cos\beta_к,$$

откуда

$$C = \frac{1}{(R^2 - r_0^2)\cos\beta_к}$$

и

$$\sin\varphi = \frac{(r^2 - r_0^2)\sqrt{1 - \frac{\sin^2\beta_к}{R^2} r^2}}{(R^2 - r_0^2)\cos\beta_к} = \frac{(r^2 - r_0^2)\cos\beta}{(R^2 - r_0^2)\cos\beta_к}. \qquad (111)$$

Уравнение (111) позволяет определить угол наклона нормали в произвольной точке профиля оболочки; оно в сущности представляет собой дифференциальное уравнение профиля.

Каждая точка профиля может быть задана координатами r, y (фиг. 398), причем

$$\sin\varphi = -\frac{dy}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dr}\right)^2}} \cdot \frac{dy}{dr},$$

поэтому уравнение (111) может быть представлено в форме

$$\frac{dy}{dr}\left[1 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{(r^2 - r_0^2)\sqrt{1 - \frac{\sin^2\beta_к}{R^2} r^2}}{(R^2 - r_0^2)\cos\beta_к}.$$

Это уравнение легко решается относительно $\frac{dy}{dr}$, и, таким образом, зависимость $y(r)$ может быть приведена к квадратуре.

К сожалению, однако, интегралы не приводятся к табулированным функциям, и их приходится определять численными методами. Значительно быстрее ведет к цели графическое интегрирование уравнения (111). Для того чтобы выполнить это интегрирование, вычислим кривизну меридиана оболочки. Используя соотношение (110), найдем

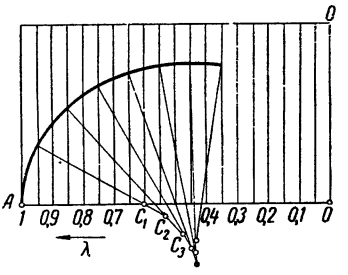
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d}{dr}(\sin\varphi) = \frac{d}{dr}\left[\frac{(r^2 - r_0^2)\sqrt{1 - \frac{\sin^2\beta_к}{R^2} r^2}}{(R^2 - r_0^2)\cos\beta_к}\right] =$$

$$= \frac{r}{R^2(R^2 - r_0^2)\cos\beta_к} \cdot \frac{2R^2 - (3r^2 - r_0^2)\sin^2\beta_к}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\beta_к}{R^2} r^2}}.$$

Если ввести безразмерную переменную $\lambda = \frac{r}{R}$ и обозначить $\frac{r_0}{R} = \lambda_0$, то для радиуса кривизны получим

$$\rho = R\,\frac{1-\lambda_0^2}{\lambda}\cdot\frac{\cos\beta_к\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\beta_к}}{2-(3\lambda^2-\lambda_0^2)\sin^2\beta_к}. \qquad (112)$$

Используя уравнение (112), можно приближенно построить по участкам равновесный профиль оболочки, заменяя его на каждом участке дугой окружности радиуса ρ, подсчитанного для средней точки данного участка.



Фиг. 399. Графическое построение равновесного профиля оболочки

Допустим, что требуется построить профиль оболочки с углом нити корда на экваторе $\beta_к$ и с отношением $\frac{r_0}{R} = \lambda_0$. Выбор наружного радиуса R определяет масштаб построения. Построение профиля представлено на фиг. 399.

Отложим от оси симметрии OO отрезок OA, равный R, и разделим его на равные части, соответствующие изменению отношения $\frac{r}{R}$, например на 0,05. Каждая точка деления соответствует определенному значению $\lambda = \frac{r}{R}$ от $\lambda = 1$ (точка A) до нуля (точка O).

Вычисляем по формуле (112) значения радиуса кривизны ρ для точек деления (при выбранном интервале $\Delta\lambda = 0{,}05$ для значений $\lambda = 1$; $\lambda = 0{,}9$; $\lambda = 0{,}8$; $\lambda = 0{,}7$ и т. д.).

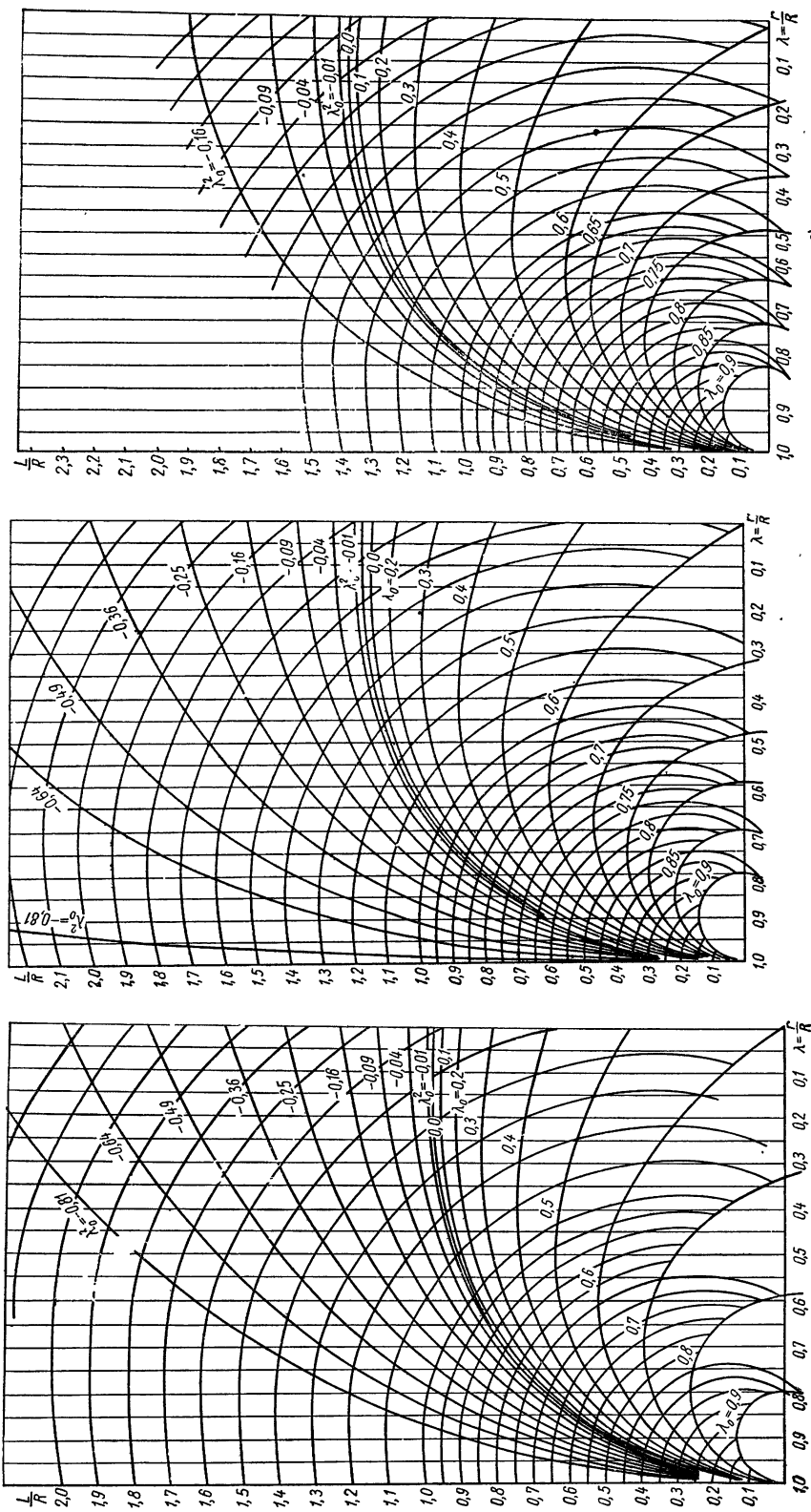
Откладывая от точки A вправо значение радиуса кривизны, полученного для $\lambda = 1$, находим центр кривизны C_1 для первого участка профиля. Считая, что на участке $1 > \lambda > 0{,}95$ кривизна профиля постоянна, строим дугу радиусом $\rho_{\lambda=1}$ и с центром в точке C_1, доводя эту дугу до вертикали, соответствующей $\lambda = 0{,}95$.

Далее строим следующий участок профиля $0{,}95 > \lambda > 0{,}85$, как дугу с радиусом $\rho_{\lambda=0{,}9}$, сопрягая ее с дугой для первого участка.

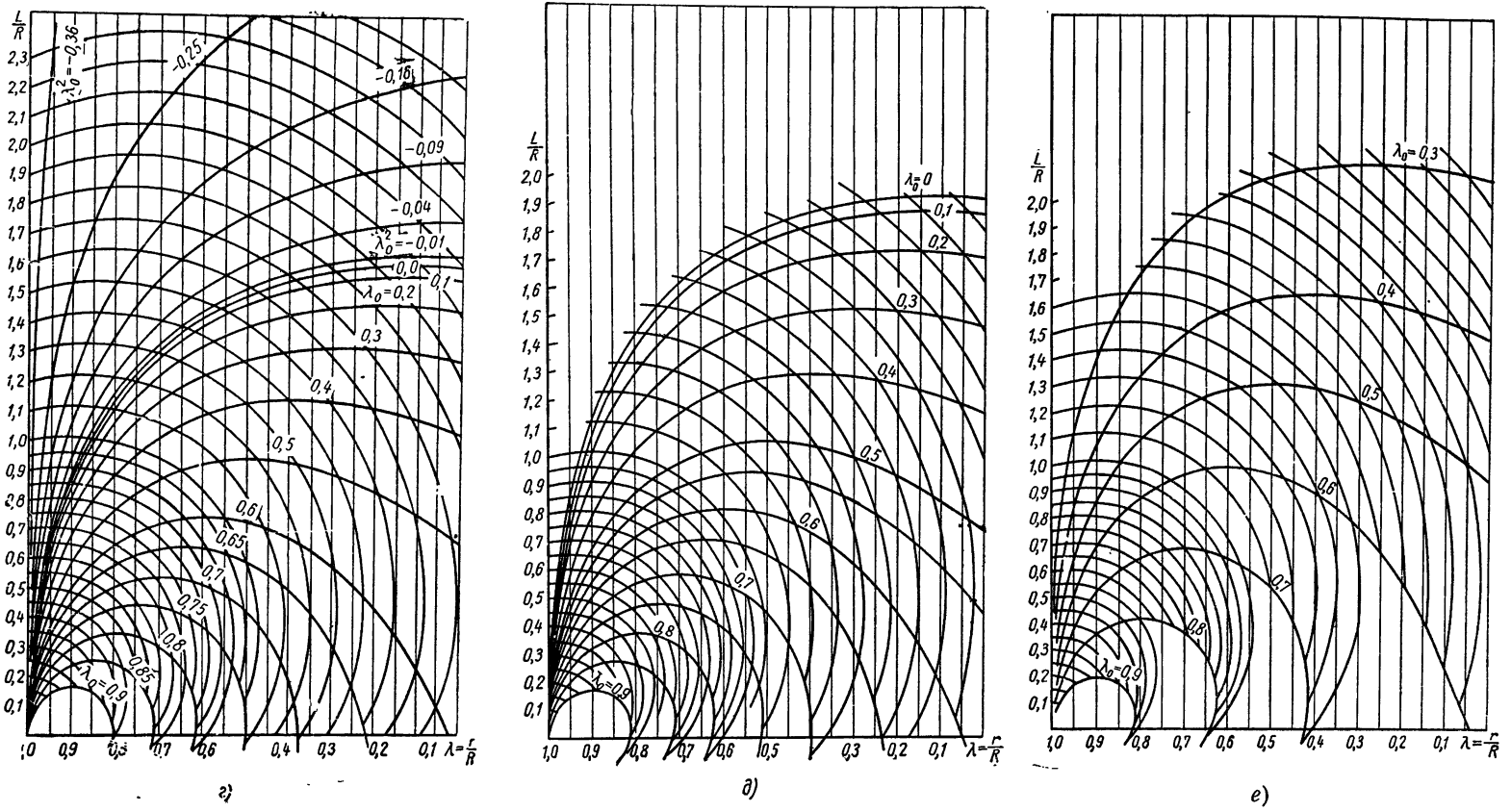
Построение для этого и последующих интервалов видно из фиг. 399. С помощью такого построения получены равновесные конфигурации оболочек при различных значениях угла $\beta_к$ и различных отношениях[1] $\lambda_0 = \frac{r_0}{R}$. Эти кривые изображены на фиг. 400. Их можно рассматривать как номограммы, позволяющие определять равновесную конфигурацию оболочки при заданных граничных условиях.

На номограммах фиг. 400, кроме кривых, определяющих форму профиля, нанесены также линии, соответствующие постоянным значе-

[1] Следует отметить, что параметр λ_0 может принимать и мнимые значения, что соответствует оболочкам, не имеющим точки нулевой кривизны. Построения и расчеты для таких оболочек производятся так же, как и при действительных λ_0, так как во все формулы входит только величина λ_0^2, которая в этом случае отрицательна.



Фиг. 400. Равновесные профили резино-кордных оболочек при различных значениях угла нити корда у экватора $\beta_к$:
а) $\beta_к=40°$; *б*) $\beta_к=45°$; *в*) $\beta_к=48°$.



Фиг. 400. Равновесные профили резино-кордных оболочек при различных значениях угла нити корда у экватора $\beta_к$:
г) $\beta_к=50°$; д) $\beta_к=52°$; е) $\beta_к=55°$.

ниям длины нити корда L от экватора до рассматриваемой точки оболочки. Для получения этих линий на профилях отложены участки

$$\Delta s = \Delta L \cos\beta = \Delta L \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \beta_к},$$

где ΔL — длина нити на каждом участке.

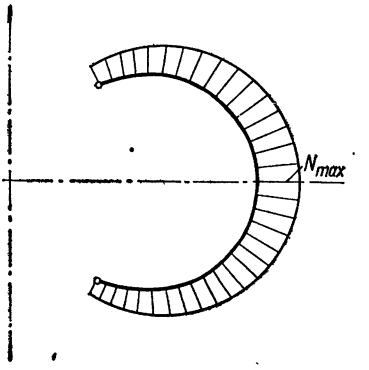
Полученное решение задачи о равновесной конфигурации оболочки позволяет теперь без труда определить и усилия, возникающие в нитях корда.

Подставляя в уравнение (106) для T_m значения $\sin\varphi$ по формуле (111), получим

$$T_m = p \frac{(R^2 - r_0^2)\cos\beta_к}{2r\cos\beta}. \qquad (113)$$

С другой стороны, согласно уравнению (92) при симметричной нагрузке, когда усилия в нитях смежных слоев одинаковы ($N_1 = N_2 = N$), эти усилия связаны с интенсивностью силы T_m формулой

$$N = \frac{t}{n\cos^2\beta} T_m,$$



Фиг. 401. Распределение усилий в нитях корда по контуру оболочки

где t — шаг нитей; n — число слоев корда.

Подставляя сюда значение T_m из уравнения (113) и умножая числитель и знаменатель на π, найдем

$$N = p \frac{\pi(R^2 - r_0^2)\cos\beta_к}{\cos^2\beta} \cdot \frac{t}{2\pi r n \cos\beta}. \qquad (114)$$

Заметим, что величина

$$\nu = \frac{2\pi r n \cos\beta}{t}$$

представляет собой суммарное число нитей корда во всех слоях, образующих оболочку, и, следовательно, является постоянной. Тогда

$$N = \frac{p}{\nu} \pi (R^2 - r_0^2)\cos\beta_к \frac{1}{\cos^2\beta}. \qquad (115)$$

В формуле (115) единственной переменной величиной является угол нити корда с меридианом β. Поэтому наибольшее усилие в нитях имеет место там, где угол β максимален, т. е. на экваторе оболочки (для выпуклых оболочек):

$$N_{max} = \frac{p}{\nu} \pi (R^2 - r_0^2) \frac{1}{\cos\beta_к}. \qquad (116)$$

Примерная эпюра изменения усилий в нитях корда по профилю оболочки представлена на фиг. 401.

§ 7. РАСЧЕТ РЕЗИНО-КОРДНЫХ И ОПЛЕТОЧНЫХ РУКАВОВ

Резино-кордные и оплеточные рукава широко применяются везде, где нужно получить гибкие коммуникации для жидкостей и газов. Кроме этого, нагруженные внутренним давлением рукава могут в отдель-

ных случаях успешно использоваться в качестве гибких валов для передачи крутящего момента.

Конструкции рукавов довольно разнообразны. Они различаются по конструкции каркаса (кордные рукава, оплеточные, рукава с каркасом из ткани квадратного переплетения), а также по качеству и расположению резиновых прослоек. В некоторых типах рукавов имеются также усиливающие проволочные спирали.

Ниже мы рассмотрим расчет рукавов простейшей конструкции — резино-кордных или оплеточных с тонкостенным каркасом. Конструкция резино-кордного рукава изображена на фиг. 385.

Прямой рукав можно рассматривать как тонкостенную цилиндрическую оболочку.

Как известно, при нагружении внутренним давлением в такой оболочке возникают кольцевые усилия интенсивности

$$T_1 = \frac{pD}{2} \tag{117}$$

и продольные усилия интенсивности

$$T_2 = \frac{pD}{4}. \tag{118}$$

Если обозначить через β угол, составляемый нитями корда с окружным направлением (угол подъема), то из уравнения (95) следует

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2} = \operatorname{tg}^2 \beta^*$$

и $\beta^* = 35°20'$.

Таким образом, внутреннее давление может быть воспринято нитями корда только в том случае, если последние составляют с окружным направлением угол $35°20'$.

Если изготовить рукав с другим углом нитей корда, то при подаче в него внутреннего давления рукав будет деформироваться так, что угол подъема нитей приблизится к равновесному значению $\beta^* = 35°20'$.

Если рукав изготовлен с углом подъема большим β^*, то под действием давления он будет увеличиваться по диаметру и укорачиваться.

При угле меньшем β^* рукав удлиняется и уменьшается в диаметре.

Покажем, что при равновесном угле подъема нитей рукав имеет максимальный внутренний объем при данной длине нитей корда. Допустим, что задана длина L нити корда в пределах одного шага намотки, тогда шаг обмотки равен

$$l = L \sin \beta,$$

а длина окружности

$$2\pi r = L \cos \beta.$$

Объем рукава в пределах одного шага равен

$$V = \pi r^2 l = \frac{L^3}{4\pi} \cos^2 \beta \sin \beta. \tag{119}$$

Исследуя это выражение на максимум, получим

$$\frac{dV}{d\beta} = \frac{L^3}{4\pi} [-2 \cos \beta \sin^2 \beta + \cos^3 \beta] = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2\beta = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, условие максимального объема рукава приводит к тому же значению угла β *, что и условия равновесия нитей.

Усилие в нитях корда легко найти, сопоставляя уравнения (92а) и (117); тогда

$$N = \frac{pDt}{2n\cos^2\beta}, \tag{120}$$

и, подставляя

$$\frac{1}{\cos^2\beta} = 1 + \operatorname{tg}^2\beta = \frac{3}{2},$$

имеем

$$N = \frac{3}{4} pD\,\frac{t}{n}, \tag{121}$$

где p — внутреннее давление;
D — средний диаметр каркаса рукава;
t — шаг нитей в слое по нормали к их направлению;
n — число слоев.

Если учесть, что величина

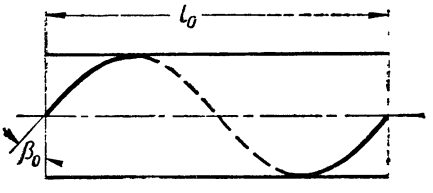
$$\nu = \frac{\pi Dn}{t}\sin\beta = \frac{\pi Dn}{t\sqrt{3}}$$

представляет собой полное число нитей корда в поперечном сечении рукава, то формулу (121) для усилия в нити можно представить также в виде

$$N = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{pD^2}{\nu}. \tag{121а}$$

В некоторых случаях (например, при изготовлении рукавов из закроенной уточной ткани) рукава изготовляются с углом, отличным от равновесного, чаще всего с углом 45°. Рассмотрим, как меняются размеры такого рукава при подаче в него внутреннего давления.

Если исходить из принятой ранее схемы, не учитывающей работы резины, то можно прийти к выводу, что при сколь угодно малом давлении угол нитей корда становится равновесным и соответственно изменяются размеры рукава. Для того чтобы исследовать зависимость размеров от давления, необходимо учесть работу, затрачиваемую на деформацию резины.



Фиг. 402. Участок резино-кордного рукава, соответствующий одному обороту нити корда

Рассмотрим участок рукава, соответствующий одному шагу обмотки l_0 (фиг. 402), и предположим, что рукав изготовлен с углом подъема нити корда $\beta_0 \neq \beta$ *, тогда длина участка рукава до деформации составит

$$l_0 = L\sin\beta_0,$$

где L — длина нити корда.

После подачи внутреннего давления p рукав деформируется и угол нити корда становится равным β, а длина участка достигнет величины

$$l = L \sin \beta.$$

Относительная деформация рукава в продольном направлении составит

$$\varepsilon_2 = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\sin \beta - \sin \beta_0}{\sin \beta_0}.$$

Соответствующая потенциальная энергия деформации стенок рукава может быть найдена по формуле (99):

$$U = 2\pi r l W = L^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 \, 2Gh_{np} (1 + \operatorname{tg}^4 \beta_0 - \operatorname{tg}^2 \beta_0) \varepsilon_2^2 =$$

$$= L^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 \, 2Gh_{np} (1 + \operatorname{tg}^4 \beta_0 - \operatorname{tg}^2 \beta_0) \frac{(\sin \beta - \sin \beta_0)^2}{\sin^2 \beta_0},$$

где h_{np} — приведенная толщина стенки, определяемая по формуле (101).

Единственной внешней нагрузкой, приложенной к рукаву, является внутреннее давление p.

Потенциал сил давления равен

$$\mathcal{U} = -pV,$$

где V—объем внутренней полости рукава, определяемый по формуле (119).

Полная энергия системы Π равна сумме потенциальной энергии деформации U и потенциала внешних сил $\mathcal{U}$:

$$\Pi = U + \mathcal{U} =$$

$$= L^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 \, 2Gh_{np} (1 + \operatorname{tg}^4 \beta_0 - \operatorname{tg}^2 \beta_0) \frac{(\sin \beta - \sin \beta_0)^2}{\sin^2 \beta_0} - p \frac{L^3}{4\pi} \cos^2 \beta \sin \beta.$$

Значение угла β, установившегося после нагружения рукава давлением p, найдем из условия минимума полной энергии системы:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \beta} = 0,$$

которое приводит к равенству

$$\sin \beta - \sin \beta_0 - A (1 - 3 \sin^2 \beta) = 0, \tag{122}$$

где

$$A = \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{16\pi (1 + \operatorname{tg}^4 \beta_0 - \operatorname{tg}^2 \beta_0)} \cdot \frac{pL}{Gh_{np}} \tag{123}$$

безразмерная величина, пропорциональная внутреннему давлению.

Уравнение (122) является квадратным относительно $\sin \beta$; решая его, находим

$$\sin \beta = \frac{1}{6A} \left[\sqrt{1 + 12A \sin \beta_0 + 12A^2} - 1 \right]. \tag{124}$$

Уравнение (124) при $A \to 0$ (т. е. при отсутствии внутреннего давления) дает $\sin \beta \to \sin \beta_0$ и при $A \to \infty$ $\sin \beta \to \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\beta \to \beta^*$ (35°20′).

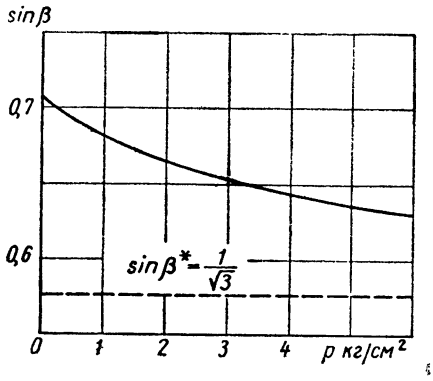
Для того чтобы исследовать характер зависимости угла β и размеров рукава от внутреннего давления, рассмотрим числовой пример.

Рукав со средним диаметром $D=50$ *мм* имеет каркас из четырех слоев хлопкового корда калибром нити 0,85 *мм* и плотностью 94 нити на 100 *мм* (шаг нитей $t=\frac{100}{94}=1{,}06$ *мм*). Суммарная толщина стенки рукава $h=6$ *мм*, модуль сдвига для резины $G=5$ *кг/см*^{2}. Выясним, как изменяются размеры этого рукава в зависимости от внутреннего давления, если первоначально рукав изготовлен с углом подъема нитей $\beta_0=45°$.

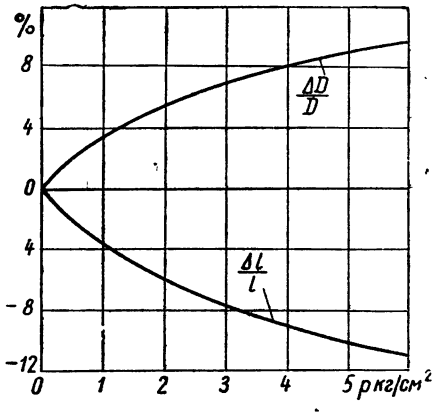
Определяем отношение толщины нити к шагу:

$$\frac{d}{t}=\frac{0{,}85}{1{,}06}=0{,}8$$

и по графику фиг. 391 находим соответствующий коэффициент $K=3{,}26$.



Фиг. 403. Изменение угла подъема нити корда в зависимости от внутреннего давления (к примеру расчета)



Фиг. 404. Изменение размеров рукава в зависимости от внутреннего давления (к примеру расчета)

По формуле (101) вычисляем приведенную толщину оболочки:

$$h_{пр}=h+nd(K-1)=6+4\cdot 0{,}85(3{,}26-1)=13{,}7\ мм.$$

Определяем длину нити корда в пределах одного шага:

$$L=\frac{\pi D}{\cos\beta_0}=\frac{\pi\cdot 5{,}0}{\cos 45°}=22{,}2\ см.$$

Подсчитываем по формуле (123) значение параметра A:

$$A=\frac{\operatorname{tg}\beta_0}{16\pi(1+\operatorname{tg}^4\beta_0-\operatorname{tg}^2\beta_0)}\cdot\frac{pL}{Gh_{пр}}=\frac{1}{16\pi(1+1-1)}\cdot\frac{22{,}2}{5{,}0\cdot 1{,}37}\,p=0{,}064\,p,$$

где p в *кг/см*^{2}.

Давая теперь различные значения давлению p, определяя A и подставляя его в формулу (124), устанавливаем соответствующие значения синуса угла нити корда. Результаты расчета представлены на графике фиг. 403. Как видно из графика, угол нити корда с увеличением давления уменьшается сначала быстро, а затем все медленнее, причем при допустимом для данного рукава давлении порядка 2—3 *кг/см*^{2} угол далеко не доходит еще до равновесного значения β^*.

Зная изменение угла β, легко подсчитать и изменение размеров рукава. Шаг его t выражается через угол по формуле

$$t=L\sin\beta$$

и, следовательно, изменяется (при нерастяжимых нитях) так же, как $\sin\beta$, а диаметр определяется как

$$D=\frac{1}{\pi}L\cos\beta.$$

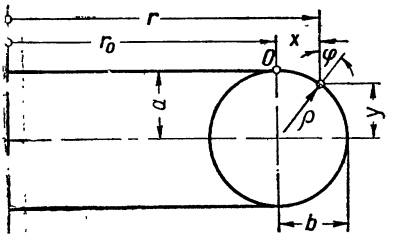
Подсчитанные по этим формулам изменения длины и диаметра рукава представлены на фиг, 404.

Из графика видно, что при рабочем давлении 2 *кг/см*² диаметр рукава увеличивается на 5,5%, а длина его уменьшается на 6%.

Изгиб резино-кордных рукавов

В процессе работы резино-кордные рукава, нагруженные внутренним давлением, часто испытывают изгиб. Расчетным путем можно определить возникающие при этом дополнительные усилия в нитях корда и жесткость рукава при изгибе.

Ограничимся рассмотрением чистого изгиба рукава. При этом прямолинейные образующие рукава искривляются по дугам окружностей и изогнутый рукав можно рассматривать как часть резино-кордной торообразной оболочки вращения. Для расчета можно полностью применить теорию, изложенную в § 6. Эта теория применима при любом по величине искривлении рукава, однако ниже кривизна изогнутого рукава будет считаться небольшой. В этом случае (фиг. 405) размеры поперечного сечения рукава и, в частности, координаты произвольной его точки x, y оказываются малыми по сравнению с радиусом r_0 окружности, проходящей через точки нулевой кривизны.



Фиг. 405. Геометрия резино-кордного рукава при чистом изгибе

Преобразуем уравнение (111), определяющее угол между нормалью к поверхности и осью симметрии, и выразим угол нити корда β в любом месте через угол ее в точке нулевой кривизны β_0.

В соответствие с формулой (103) имеем

$$\sin\beta = \frac{r}{r_0}\sin\beta_0 = \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)\sin\beta_0.$$

Для косинуса угла β получаем выражение

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(1+\frac{x}{r_0}\right)^2\sin^2\beta_0}.$$

Разложим это выражение в ряд по степеням $\frac{x}{r_0}$, удерживая вторую степень этого отношения. Тогда

$$\cos\beta = \cos\beta_0\left[1 - \frac{x}{r_0}\operatorname{tg}^2\beta_0 - \frac{x^2}{2r_0^2}\operatorname{tg}^2\beta_0\left(1+\operatorname{tg}^2\beta_0\right)\right]. \qquad (125)$$

Вводя это значение $\cos\beta$ в формулу (111) и заменяя в ней

$$r^2 - r_0^2 = (r - r_0)(r + r_0) = x(2r_0 + x),$$

получим

$$\sin\varphi = \frac{1}{\rho_0}\,x\left(1+\frac{x}{2r_0}\right)\left[1 - \frac{x}{r_0}\operatorname{tg}^2\beta_0 - \frac{x^2}{2r_0^2}\operatorname{tg}^2\beta_0\left(1+\operatorname{tg}^2\beta_0\right)\right], \qquad (126)$$

где обозначено

$$\rho_0 = \frac{\left(R^2 - r_0^2\right)\cos\beta_к}{2r_0\cos\beta_0}. \qquad (127)$$

Сопоставляя формулу (127) с полученной ранее формулой (112) и учитывая, что $\sin\beta_0 = \frac{r_0}{R}\sin\beta_к$, можно установить, что величина ρ_0 представляет собой радиус кривизны сечения изогнутого рукава в точке *O*.

Решим уравнение (126) относительно x, учитывая малость отношения $\frac{\rho_0}{r_0}$. Для этого положим

$$x = \rho_0 \sin\varphi\left[1 + a\frac{\rho_0}{r_0}\sin\varphi + b\left(\frac{\rho_0}{r_0}\right)^2 \sin^2\varphi\right].$$

Подставляя это выражение в уравнение (126) и требуя, чтобы это уравнение удовлетворялось с точностью до $\left(\frac{\rho_0}{r_0}\right)^2$, получим

$$a = -\frac{1}{2}(1 - 2\mathrm{tg}^2\beta_0);$$

$$b = \frac{1}{2}(1 - 2\,\mathrm{tg}^2\beta_0 + 5\,\mathrm{tg}^4\beta_0),$$

тогда имеем

$$x = r - r_0 = \rho_0 \sin\varphi\left[1 - \frac{1}{2}(1 - 2\,\mathrm{tg}^2\beta_0)\frac{\rho_0}{r_0}\sin\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(1 - 2\,\mathrm{tg}^2\beta_0 + 5\,\mathrm{tg}^4\beta_0)\left(\frac{\rho_0}{r_0}\right)^2 \sin^2\varphi\right]. \qquad (128)$$

Радиус кривизны контура сечения изогнутого рукава в произвольной точке определяется из соотношения

$$dr = \rho d\varphi\cos\varphi = \rho d(\sin\varphi),$$

откуда

$$\rho = \frac{dr}{d(\sin\varphi)} = \frac{dx}{d(\sin\varphi)}.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$\rho = \rho_0\left[1 - (1 - 2\,\mathrm{tg}^2\beta_0)\frac{\rho_0}{r_0}\sin\varphi + \frac{3}{2}(1 - 2\,\mathrm{tg}^2\beta_0 + 5\,\mathrm{tg}^4\beta_0)\left(\frac{\rho_0}{r_0}\right)^2 \sin^2\varphi\right]. \qquad (129)$$

От зависимости (129) легко перейти к уравнению профиля в параметрической форме. Действительно, одна из координат произвольной точки профиля x дается в зависимости от угла φ формулой (128), а другая y может быть установлена из соотношения

$$dy = -\rho d\varphi \sin\varphi,$$

откуда

$$y = -\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \rho \sin\varphi d\varphi.$$

Подставляя сюда значение ρ из равенства (129) и выполняя интегрирование, имеем

$$y = \rho_0\left[\cos\varphi - (1 - 2\,\mathrm{tg}^2\beta_0)\frac{\rho_0}{r_0}\cdot\frac{\pi - 2\varphi + \sin 2\varphi}{4} + \right.$$
$$\left. + (1 - 2\mathrm{tg}^2\beta_0 + 5\,\mathrm{tg}^4\beta_0)\left(\frac{\rho_0}{r_0}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos^3\varphi\right)\right]. \qquad (130)$$

Из условия замкнутости сечения рукава должно быть

$$y_{\varphi=0} = y_{\varphi=2\pi}.$$

Это условие выполняется только в том случае ≪, если

$$1 - 2\operatorname{tg}^2\beta_0 = 0. \tag{131}$$

Следовательно, при принятой точности расчета $\left(\text{до } \frac{\rho_0^2}{r_0^2}\right)$ угол нити корда в точке нулевой кривизны остается таким же как равновесный угол $\beta^* = 35°20'$ в прямом рукаве.

Постоянство угла β в этой точке свидетельствует об отсутствии в ней деформаций при изгибе.

Таким образом, нейтральная ось сечения проходит через точки O.

Равенство (131) позволяет упростить формулы определяющие геометрию сечения.

Эти формулы принимают теперь вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho_0 \sin\varphi \left(1 + \frac{5}{8}\cdot\frac{\rho_0^2}{r_0^2}\sin^2\varphi\right);\\ y &= \rho_0 \cos\varphi \left[1 + \frac{5}{8}\cdot\frac{\rho_0^2}{r_0^2}(3-\cos^2\varphi)\right];\\ \rho &= \rho_0\left(1 + \frac{15}{8}\cdot\frac{\rho_0^2}{r^2}\sin^2\varphi\right). \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

Зависимости (132) свидетельствуют о том, что при слабом изгибе, когда отношением $\frac{\rho_0^2}{r_0^2}$ можно пренебречь в сравнении с единицей, поперечное сечение рукава остается круглым с радиусом кривизны ρ_0.

При большом изгибе происходит некоторое сплющивание сечения, так как в этом случае полувысота сечения (фиг. 405)

$$b = x_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \rho_0\left(1 + \frac{5}{8}\cdot\frac{\rho_0^2}{r_0^2}\right)$$

оказывается немного меньше, чем его полуширина

$$a = y_{\varphi=0} = \rho_0\left(1 + \frac{5}{4}\cdot\frac{\rho_0^2}{r_0^2}\right).$$

Определим теперь усилия в нитях корда изогнутого рукава, пренебрегая $\frac{\rho_0^2}{r_0^2}$ по сравнению с единицей. В этом случае радиус кривизны ρ_0 равен радиусу сечения неизогнутого рукава $\frac{D}{2}$.

Интенсивность меридиональных[1] усилий T_m в точке O может быть найдена непосредственно из уравнения Лапласа (107). Так как в рассматриваемой точке $\sin\varphi = 0$, то

$$T_{m_{\varphi=0}} = p\rho_0.$$

Используя соотношение (92), установим величину усилия в нитях корда в этой точке:

$$N_0 = \frac{t_0}{n\cos^2\beta_0} T_m = \frac{p\rho_0 t_0}{n\cos^2\beta_0},$$

где t_0 — шаг нитей корда в точке O изогнутого рукава, равный их шагу в недеформированном рукаве. Сопоставляя полученную формулу с зависимостью (120), находим, что усилие в нитях корда в точке O остается таким же, каким оно было до изгиба рукава. Для определения усилия в нитях в других точках рукава можно воспользоваться полученным выше [см. формулу (115)] условием, что эти усилия обратно пропорциональны квадрату косинуса угла наклона нитей корда.

Таким образом, усилие в нитях в произвольной точке равно

$$N = N_0 \frac{\cos^2\beta_0}{\cos^2\beta},$$

где β — угол наклона нити корда в той же точке. Используя выражение (125) для $\cos\beta$ и сохраняя в разложении $\frac{1}{\cos^2\beta}$ по степеням $\frac{\rho_0}{r_0}$ только первую степень этого отношения, получим

$$N = N_0\left[1 + 2\frac{\rho_0}{r_0}\operatorname{tg}^2\beta_0\sin\varphi\right] = N_0\left(1 + \frac{\rho_0}{r_0}\sin\varphi\right).$$

Максимальное усилие, возникающее в наружной точке изогнутого рукава $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, составляет

$$N_{\max} = N_0\left(1 + \frac{\rho_0}{r_0}\right) = N_0\left(1 + \frac{D}{2r_0}\right).$$

Подсчитаем теперь изгибающий момент в поперечном сечении рукава.

В соответствие с уравнением (93а) интенсивность усилия T_t составляет

$$T_t = \frac{n}{t} N\sin^2\beta,$$

где t и β — шаг и угол наклона нитей в рассматриваемой точке.

Изгибающий момент в сечении, обусловленный натяжением нитей корда, равен

$$M_и = \int_s T_t x ds,$$

где интеграл берется по всему контуру.

---

[1] Меридиональные усилия T_m в изогнутом рукаве соответствуют кольцевым усилиям T_1 в прямом рукаве.

Подставляя сюда значение T_t, а также заменяя $x = \rho_0 \sin\varphi$ и $ds = \rho_0 d\varphi$, имеем

$$M_н = N_0 n \rho_0^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\rho_0}{r_0} \sin\varphi\right) \frac{\sin^2\beta}{t} \sin\varphi d\varphi.$$

Так как [см. формулу (105)]

$$t = t_0 \frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta_0\cos\beta_0},$$

то

$$M_н = N_0 \frac{n}{t_0} \rho_0^2 \sin\beta_0 \cos\beta_0 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\rho_0}{r_0} \sin\varphi\right) \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \sin\varphi d\varphi.$$

Заменяя $\sin\beta$ и $\cos\beta$ их приближенными выражениями с точностью до $\frac{\rho_0}{r_0}$ в первой степени и интегрируя, получим

$$M_н = \frac{5}{6} \pi \rho_0^3 N_0 \frac{n}{t_0} \cdot \frac{1}{r_0}$$

и после подстановки значения N_0

$$M_н = \frac{5}{4} \pi \rho_0^4 p \frac{1}{r_0}.$$

Так как величина $\frac{1}{r_0}$ представляет собой кривизну изогнутой оси рукава, то легко установить, что нагруженный внутренним давлением рукав ведет себя при изгибе так же, как балка, имеющая жесткость сечения при изгибе, равную

$$(EJ)_{экв} = \frac{5}{4} \pi \rho_0^4 p.$$

Интересно отметить, что эта величина равна жесткости при изгибе балки сплошного круглого сечения радиуса ρ_0 из материала с модулем упругости, равным $5p$.

В приведенном выше анализе не была учтена работа резины при изгибе рукава. Если ее учесть, что можно сделать энергетическим методом, то получим

$$EJ_{экв} = \frac{5}{4} \pi \rho_0^4 p + 3\pi G h_{пр} \rho_0^3,$$

где G — модуль сдвига для резины;

$h_{пр}$ — приведенная толщина стенки рукава, определяемая по формуле (101).

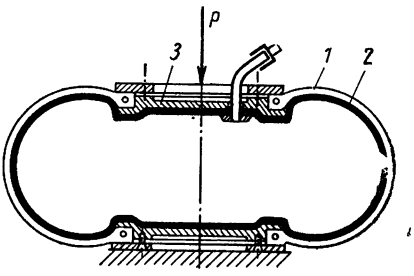
§ 8. РАСЧЕТ РЕЗИНО-КОРДНЫХ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ АМОРТИЗАТОРОВ

Резино-кордные пневматические амортизаторы получили распространение главным образом в качестве упругого элемента автомобильной подвески. Рабочим элементом амортизатора (фиг. 406) является резино-кордный баллон *1* с внутренней резиновой камерой *2*. К баллону прикреплены жесткие днища *3*, через которые передается аксиальная нагрузка.

Внутренняя полость камеры заполнена воздухом под некоторым давлением. Объем камеры может быть изолирован, как показано на

фиг. 406, или соединен с дополнительным ресивером в соответствии с фиг. 407. Изменение присоединенного объема, так же как и изменение начального давления, влияет на характеристику амортизатора. Если в трубку, соединяющую амортизатор с ресивером, ввести дроссель, работа амортизатора будет связана со значительным демпфированием.

Возможность простыми средствами изменять характеристику амортизатора в соответствии с изменением нагрузки на автомобиль и с изменением характера дороги послужила одной из основных причин, обеспечивших распространение таких амортизаторов в автомобильных и самолетных подвесках.



Фиг. 406. Резино-кордный пневматический амортизатор:
1 — баллон амортизатора; *2* — резиновая камера; *3* — днище

На фиг. 408 показаны конструкции амортизационных стоек самолета, а на фиг. 409 — автомобильная подвеска с применением амортизаторов рассматриваемого типа.

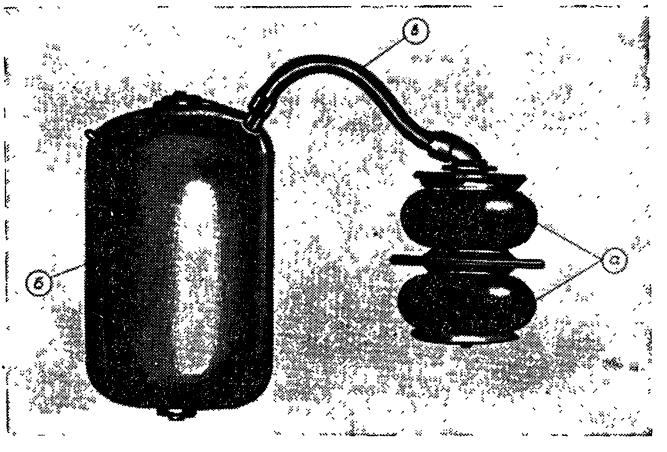
Для расчета амортизаторов может быть полностью использована теория, изложенная в § 6.

Основными задачами расчета является определение характеристики амортизатора, т. е. зависимости между нагрузкой и осадкой, и расчет усилий и деформаций в нитях корда и резине.

Рассматривая равновесие днища вместе с частью оболочки, вырезанной окружностью, проходящей через точку нулевой кривизны O (фиг. 410), установим, что нагрузка на амортизатор равна

$$P = p\pi r_0^2, \tag{133}$$

где p — внутреннее давление.



Фиг. 407. Резино-кордный пневматический амортизатор с дополнительным ресивером:
а — баллоны амортизатора; *б* — ресивер; *в* — соединительный шланг

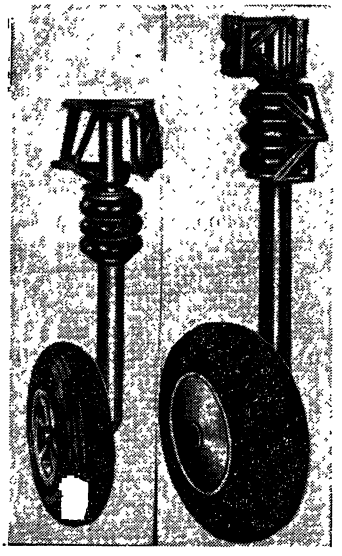
Формула (133) пригодна и в том случае, когда точка нулевой кривизны оказывается вне пределов оболочки (фиг. 411, *б*), а также и

тогда, когда эта точка вовсе отсутствует (фиг. 411, *в*). В последнем случае r_0 является мнимой величиной и сила P является растягивающей.

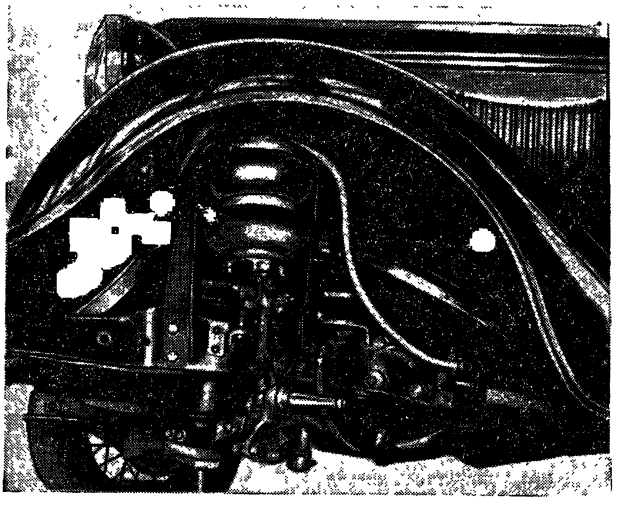
Характер изменения конфигурации оболочки при изменении нагрузки на амортизатор представлен на фиг. 412.

Как видно из фигуры, при деформации оболочки с изменением ее раствора $2h$ изменяется как радиус r_0, так и наружный радиус R.

Изменение радиуса R свидетельствует также о непостоянстве угла нити корда на экваторе оболочки, синус которого пропорционален R. Поэтому для определения профилей оболочки, соответствующих раз-



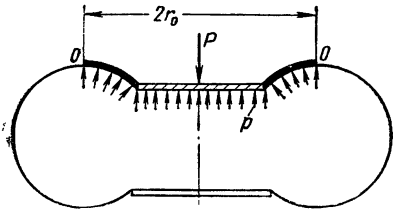
Фиг. 408. Амортизационные стойки самолетов с резино-кордными баллонами



Фиг. 409. Резино-кордный пневматический амортизатор в передней подвеске автомобиля

личным величинам ее деформации, придется использовать номограммы типа приведенных на фиг. 400 для разных значений угла корда на экваторе $\beta_к$.

При решении задачи будем исходить из того, что при деформации оболочки остаются постоянными как длина нити корда, так и радиус r_1 окружности, на которой оболочка прикреплена к днищам (радиус борта), а следовательно, и угол нити корда с меридианом у этой окружности β_1.



Фиг. 410. К определению нагрузки на амортизатор

Длина нити корда в изготовленной оболочке от экватора до борта определяется численным интегрированием по формуле

$$L = \int \frac{ds}{\cos\beta}, \qquad (134)$$

где β — угол, составляемый нитью корда с меридианом, а интеграл берется по дуге меридиана от экватора до борта.

Для вычисления интеграла (134) контур профиля оболочки разбивается на малые участки Δs_i (фиг. 413) и для середины каждого

участка в соответствии с формулой (103) определяется синус угла β_i наклона нити корда к меридиану через известный угол β_1 около борта, тогда

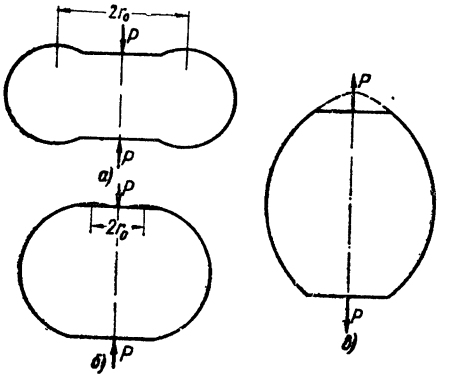
$$\sin\beta_i = \frac{r_i}{r_1}\sin\beta_1.$$

Затем определяются косинусы углов:

$$\cos\beta_i = \sqrt{1-\left(\frac{r_i}{r_1}\sin\beta_1\right)^2}$$

и подсчитывается длина нити сумированием:

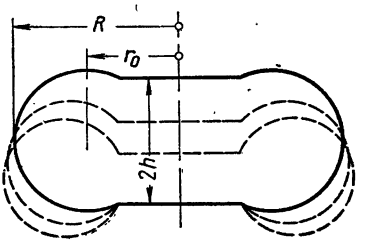
$$L = \sum \frac{\Delta s_i}{\cos\beta_i}.$$



Фиг. 411. Различные конфигурации оболочки амортизатора:

а — точка нулевой кривизны в пределах оболочки; *б* — точка нулевой кривизны вне пределов оболочки; *в* — точка нулевой кривизны отсутствует (r_0 является мнимым)

Далее задача состоит в том, чтобы по известным значениям β_1 и L на номограммах по фиг. 400 найти изображения контура рассчитываемой оболочки, соответствующие различным степеням ее деформации.



Фиг. 412. Изменение конфигурации оболочки на обжатии

Возьмем номограмму, построенную для какого-либо угла нити на экваторе $\beta_к$ (на фиг. 414 взята в качестве примера номограмма для $\beta_к = 52°$), и определим, в каком масштабе изображена на ней рассчитываемая оболочка.

Наружный радиус оболочки R, когда угол нити на экваторе равен $\beta_к$, определяется из соотношения

$$R = \frac{\sin\beta_к}{\sin\beta_1} r_1, \qquad (135)$$

где r_1 и β_1 — известные радиус борта и угол нити корда у борта.

На номограмме радиус R изображается отрезком OA, соответствующим $\lambda = 1$. Таким образом, масштаб, в котором оболочка изображена на номограмме, равен

$$m = \frac{OA}{R}.$$

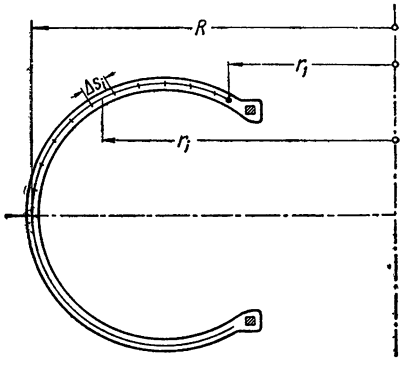
Наносим на номограмму вертикаль, соответствующую радиусу борта r_1. На фиг. 414 эта вертикаль изображена пунктиром, проходящим через точку B, причем отрезок OB равен

$$OB = mr_1.$$

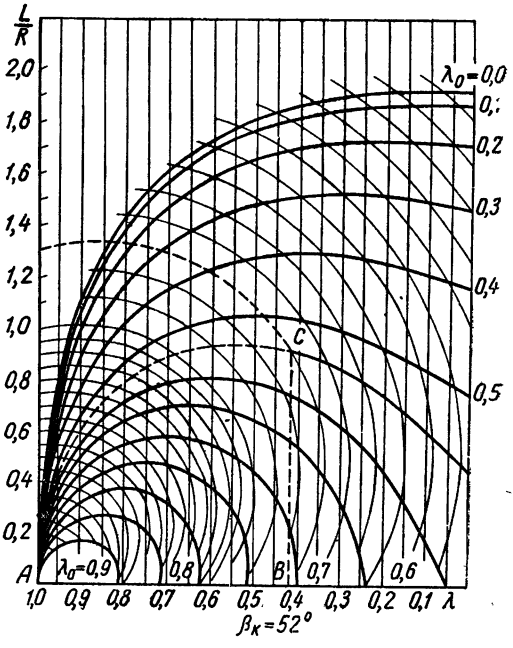
Пересечение этой вертикали с линией, соответствующей отношению длины нити L к радиусу R, подсчитанному по формуле (135) (на фиг. 414 принято $\frac{L}{R}=1{,}3$), дает точку C, являющуюся изображением на номограмме точки борта. Проходящая через эту точку кривая (пунктир AC) представляет собой изображение равновесной конфигурации оболочки в масштабе m.

Непосредственно с номограммы могут быть сняты соответствующие данной кривой значения λ_0 и $h=\frac{1}{m}BC$. Легко также (например, численным интегрированием) подсчитать объем внутренней полости оболочки V.

Проводя подобные расчеты по номограммам, построенным для различных значений $\beta_к$, можно построить зависимости от раствора бортов оболочки $2h$ величин R, λ_0, $r_0=R\lambda_0$ и V. Такие зависимости для



Фиг. 413. К определению длины нити корда в баллоне



Фиг. 414. Определение конфигурации оболочки с помощью номограммы

частного случая ($r_1=42{,}5$ *мм*; $\beta_1=23°$; $L=197$ *мм*) приведены на фиг. 415. Справа на той же фигуре изображено изменение конфигурации оболочки (пример заимствован из работы [13]).

Теперь построение характеристики амортизатора не вызывает затруднений. Для этого следует при каждом растворе бортов вычислить осевую нагрузку P по формуле (133), беря соответствующее значение r_0^2 с графика фиг. 415. Следует лишь учесть, что давление p также изменяется по мере осадки амортизатора. Если деформация осуществляется медленно, то процесс можно считать изотермическим. В этом случае давление определяется формулой

$$p=(p_0+1)\frac{V_0+V_p}{V+V_p}-1,$$

где p_0 — начальное избыточное давление в оболочке при объеме ее V_0;
V_p — объем присоединенного ресивера;
V — объем оболочки при рассматриваемой конфигурации, который берется из графика фиг. 415.

При быстрой деформации, когда теплообмен не имеет места, давление определяется формулой

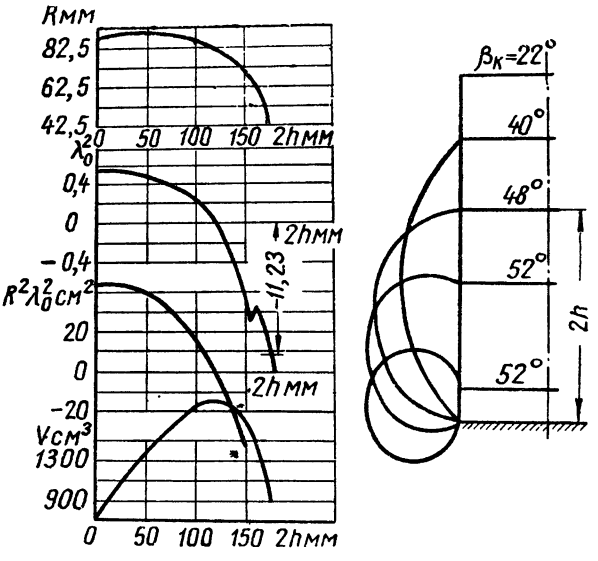
$$p = (p_0 + 1)\left(\frac{V_0 + V_p}{V + V_p}\right)^{\kappa} - 1,$$

где $\kappa = 1{,}4$ — показатель адиабаты.

Следует отметить, что можно осуществить не только положительный объем ресивера V_p, но и отрицательный; для этого следует залить во внутреннюю полость оболочки соответствующее количество жидкости.

Построенные описанным способом статические характеристики амортизатора при различных значениях объема ресивера представлены на фиг. 416. Там же дана динамическая характеристика, соответствующая адиабатическому процессу при $V_p = 0$.

После того как изменение конфигурации оболочки и давления в ней определено, не представляет затруднений определить цикл усилий, испытываемых нитями корда при деформации оболочки.



Фиг. 415. Изменение характерных размеров оболочки и ее объема при деформации

При каждом положении оболочки максимальное усилие в нитях корда по экватору определяется по формуле (116):

$$N_{\max} = \frac{p}{\nu}\pi R^2 (1 - \lambda_0^2)\frac{1}{\cos\beta_к}.$$

Величины p, R, λ_0 и $\beta_к$ для характерных положений оболочки определены выше, а величина ν (полное число нитей корда в оболочке) устанавливается в зависимости от условий ее изготовления:

$$\nu = n\frac{2\pi r_б \cos\alpha}{t_б},$$

где n — число слоев корда;

$r_б$ — радиус браслета;

$t_б$ — расстояние между соседними нитями корда в кордном полотне;

α — угол нитей корда в браслете (угол закроя).

Деформации резины в слоях каркаса определяются изменением его геометрии. Средняя деформация в окружном направлении равна

$$\varepsilon_{t\,ср} = \frac{\Delta r}{r},$$

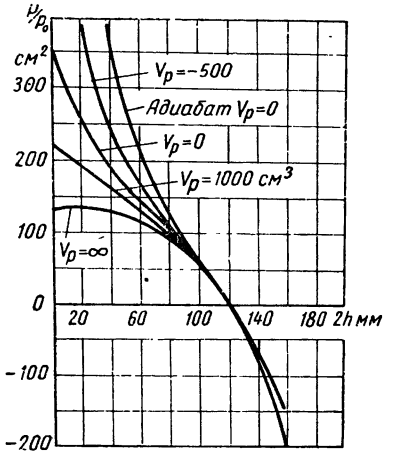
где Δr — радиальное перемещение точки.

Меридиональная деформация связана с окружной зависимостью (91):

$$\varepsilon_m = -\varepsilon_t \operatorname{tg}^2 \beta,$$

где β — угол корда в рассматриваемой точке.

Радиальные перемещения максимальны у экватора оболочки, где



Фиг. 416. Характеристика обжатия амортизатора при различных объемах ресивера

$$\varepsilon_{t\,ср} = \frac{\Delta R}{R_0};$$

$$\varepsilon_{m\,ср} = -\frac{\Delta R}{R_0} \operatorname{tg}^2 \beta_{ко}.$$

В этих формулах ΔR – изменение наружного радиуса оболочки при деформации; R_0 и $\beta_{ко}$ — наружный радиус и угол нити корда на экваторе ненагруженной оболочки.

Максимальные деформации, испытываемые резиной, заполняющей пространство между нитями, больше средних (см. § 5) и могут быть определены по формуле

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_{ср} \frac{t}{t-d},$$

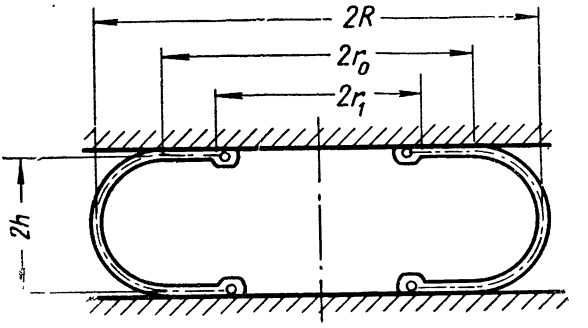
где t — шаг;

d — диаметр нитей корда.

Приведенные формулы свидетельствуют о том, что резина в оболочке работает в режиме заданных деформаций. Поэтому для изготовления оболочки целесообразно применять резины с низким модулем (малонаполненные).

Кроме того, для оболочек, работающих при циклической нагрузке, следует выбирать рабочий диапазон таким образом, чтобы величина $\frac{\Delta R}{R}$ не превышала определенного значения (порядка 10%).

Нецелесообразно также применение чрезмерно плотных кордов (с большим отношением $\frac{d}{t}$), так как в этом случае резко возрастают максимальные деформации резины.



Фиг. 417. Обжатие амортизатора между плоскими плитами

Выше рассмотрен случай свободной деформации баллона пневматического амортизатора. В некоторых конструкциях баллон по мере деформации обжимается между плоскими плитами (фиг. 417) или деформации баллона ограничиваются соприкосновением с соседними баллонами.

Характеристика амортизатора при наличии стеснения существенно отличается от характеристики амортизатора со свободным баллоном.

Рассмотрим расчет амортизатора, баллон которого соприкасается при деформации с плоскими плитами. В этом случае меридиан оболочки состоит из участка, где оболочка касается плиты ($r_1<r<r_0$), и свободного участка (фиг. 417). Нагрузка на амортизатор P и в этом случае определяется формулой (133):

$$P=p\pi r_0^2.$$

Таким образом, задача состоит в определении радиуса r_0 круга касания в зависимости от высоты оболочки $2h$.

При решении этой задачи снова будем исходить из условия постоянства длины нити корда.

На свободном участке оболочки $r_0<r<R$ конфигурация профиля определяется условиями равновесия, и для расчета этой формы могут быть использованы номограммы фиг. 400. Так же как и при расчете амортизатора со свободным баллоном, определив предварительно длину L нити корда от борта до экватора и зная угол нити корда у борта β_1, задаемся каким-нибудь значением угла нити корда на экваторе $\beta_к$, для которого построены номограммы.

Определяем соответствующее значение радиуса R экватора оболочки:

$$R=r_1\frac{\sin\beta_к}{\sin\beta_1}.$$

Полная длина нити корда L от борта до экватора складывается из длины нити корда на плоском участке оболочки L_1 и длины нити на свободном участке оболочки L_2:

$$L=L_1+L_2.$$

Длина L_1 определяется интегралом

$$L_1=\int_{r_1}^{r_0}\frac{dr}{\cos\beta}=\int_{\beta_1}^{\beta_0}\frac{d\left(r_1\frac{\sin\beta}{\sin\beta_1}\right)}{\cos\beta}=\frac{r_{1_2}}{\sin\beta_1}(\beta_0-\beta_1)=$$

$$=\frac{r_1}{\sin\beta_1}\left[\arcsin\left(\frac{r_0\sin\beta_1}{r_1}\right)-\beta_1\right].$$

Длина нити на свободном участке баллона L_2 в зависимости от величины $\lambda_0=\frac{r_0}{R}$ может быть непосредственно найдена по номограмме для выбранного значения $\beta_к$. Как L_1, так и L_2 зависят от радиуса r_0. Задаваясь несколькими значениями этого радиуса, можно построить график зависимости

$$L=L_1(r_0)+L_2(r_0).$$

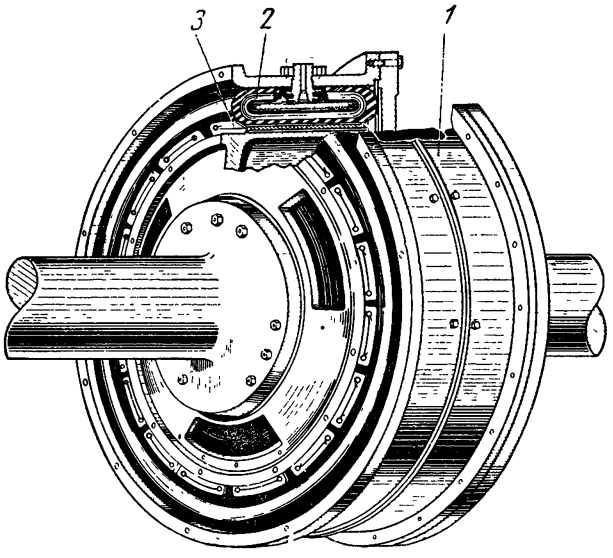
Значение радиуса круга касания r_0 при данном значении угла $\beta_к$ определяется пересечением построенного графика с горизонталью $L=L_0$, где L_0 — длина нити в оболочке. Зная r_0, можно по номограмме определить конфигурацию свободного участка оболочки и, в частно-

сти, его высоту h. Таким же образом производится расчет и при других значениях угла $\beta_к$. В результате получается последовательность конфигураций оболочки при различных степенях ее деформации, аналогичная изображенной на фиг. 415 для свободной оболочки. Дальнейший расчет не отличается от расчета свободной оболочки. Детали этого расчета рассмотрим в работе [5].

§ 9. РАСЧЕТ ШИННО-ПНЕВМАТИЧЕСКИХ МУФТ

Конструкция шинно-пневматической муфты одного из типов представлена на фиг. 418.

К наружному барабану *1* муфты, связанному с правым валом, неподвижно прикреплен кольцевой резино-кордный баллон *2*, на котором закреплены металлические колодки *3* с фрикционными накладка-



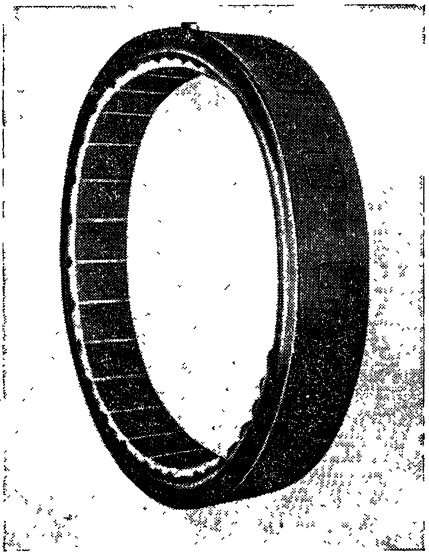
Фиг. 418. Конструкция шинно-пневматической муфты:
1 — наружный барабан; *2* — баллон муфты; *3* — фрикционные колодки

ми. При подаче давления во внутреннюю полость кольцевого баллона колодки плотно прижимаются к внутреннему барабану, связанному с левым валом, и муфта замыкается. При отсутствии давления в баллоне между фрикционными колодками и внутренним барабаном имеется зазор.

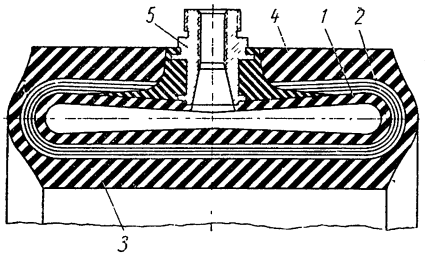
Общий вид баллона муфты с фрикционными накладками представлен на фиг. 419, а его разрез — на фиг. 420. Баллон состоит из внутреннего резинового слоя *1*, каркаса *2* из необходимого числа слоев обрезиненного корда, собранных крест-накрест, а также внутреннего и внешнего резиновых протекторов *3* и *4*. Ниппель *5* служит для подвода воздуха во внутреннюю полость баллона. Фрикционные колодки прикрепляются к баллону с помощью штифтов, проходящих через предусмотренные для этой цели отверстия во внутреннем протекторе баллона. Существуют и другие конструктивные варианты муфты. Так, например, баллон может быть прикреплен не к наружному, а к внутреннему барабану, могут быть изготовлены муфты не с радиальным, а с осевым замыканием и т. д.

Шинно-пневматические муфты допускают очень удобное дистанционное включение и выключение на ходу [1]. Вследствие большой радиальной податливости они нечувствительны к значительным несоосностям и перекосам соединяемых валов. Значительное внутреннее трение при угловых деформациях муфты способствует гашению крутильных колебаний в установках, где она применяется.

Перечисленные преимущества обеспечили широкое распространение шинно-пневматических муфт в машиностроении и прежде всего в агрегатах, где возможны большие несоосности (например, в буровых установках), а также там, где необходимо демпфирование колебаний валопроводов (например, в дизельных установках).



Фиг. 419. Баллон шинно-пневматической муфты с фрикционными колодками



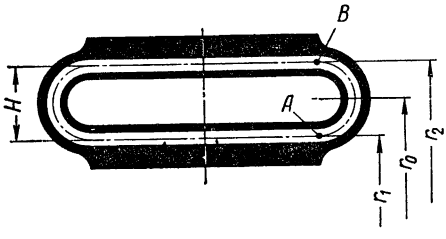
Фиг. 420. Разрез баллона шинно-пневматической муфты:

1 — внутренний слой резины; *2* — слои обрезиненного корда; *3* — внутренний протектор; *4* — внешний протектор; *5* — ниппель

Нет сомнения, что применение шинно-пневматических муфт будет и далее расширяться.

Здесь не будет рассматриваться расчет основных размеров фрикционной поверхности, который производится обычными методами. Ограничимся расчетом напряжений, возникающих в основных элементах муфты, и ее податливости при различных видах нагружения.

Рассмотрим сначала работу кордного каркаса в свободной его части (*AB* на фиг. 421).



Фиг. 421. Характерные размеры каркаса баллона

Конфигурация этой части каркаса определяется условиями равновесия нитей под действием внутреннего давления и не изменяется практически при нагружении муфты крутящим моментом. Для определения этой конфигурации может быть полностью применена теория, изложенная в § 6.

[1] Если муфта должна включаться только при неподвижном вале, она может быть выполнена без фрикционных колодок.

В данном случае можно считать, что наружный радиус каркаса r_2 и внутренний радиус r_1 заданы [1].

По формуле (111) без затруднений вычисляется радиус r_0 точки нулевой кривизны.

В точке A при $r=r_1$ угол φ, определяющий направление нормали к контуру, равен $-\frac{\pi}{2}$, и, следовательно, $\sin\varphi=-1$.

Подставляя эти значения в формулу (111), имеем

$$-1=\frac{\left(r_1^2-r_0^2\right)\cos\beta_1}{\left(r_2^2-r_0^2\right)\cos\beta_2},$$

где β_1 и β_2 — углы нити корда в точках A и B соответственно.

Решая полученное равенство относительно r_0^2, получим

$$r_0^2=\frac{r_2^2\cos\beta_2+r_1^2\cos\beta_1}{\cos\beta_2+\cos\beta_1}. \tag{136}$$

Вычисление r_0^2 по выведенной формуле не представляет затруднений. Угол β_1 может быть определен из соотношения

$$\sin\beta_1=\frac{r_1}{r_2}\sin\beta_2.$$

В большинстве случаев в муфтах высота профиля баллона $H=r_2-r_1$ мала по сравнению с радиусом. При этом радиус r_0 мало отличается от среднего радиуса:

$$r_c=\frac{r_1+r_2}{2}.$$

Заменяя в формуле (136) $r_2=r_c+\frac{H}{2}$ и $r_1=r_c-\frac{H}{2}$, а также выражая углы корда β_1 и β_2 через угол β_c, имеющий место на радиусе r_c, и ограничиваясь членами порядка $\frac{H^2}{r_c^2}$, получим приближенно

$$r_0^2=r_c^2-\frac{1}{4}\left(2\mathrm{tg}^2\beta_c-1\right)H^2 \tag{137}$$

и

$$r_0\approx r_c-\frac{1}{8}\left(2\mathrm{tg}^2\beta_c-1\right)\frac{H^2}{r_c}.$$

Зная r_0, легко по формуле (115) установить усилия в нитях, вызываемые внутренним давлением.

В случае, если высота профиля баллона H мала по сравнению с r_c, можно в формулу (115) подставить приближенное значение r_0^2 из формулы (137). Тогда после простых преобразований получим

$$N_p=pH\frac{\pi r_c\cos\beta_c}{\nu}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta} \tag{138}$$

[1] Рассматривается нагруженный давлением баллон. Поэтому радиус r_1 определяется при прижатых к барабану колодках.

или

$$N_p = pH\frac{t_c}{n}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta}, \tag{139}$$

где t_c — шаг нитей корда на окружности радиуса r_c;
n — число слоев корда.

Максимальное значение N_p имеет место в наружной части баллона и может быть вычислено по формуле (139), если в нее подставить $\beta=\beta_2$.

Для определения усилий, вызываемых давлением в нитях внутренней части баллона, надо в формулу (139) подставить $\beta=\beta_1$.

Рассмотрим теперь усилия, возникающие в нитях при нагружении муфты моментом M. В этом случае интенсивности усилий T_m и T_t, определяемые из условий равновесия элемента оболочки, останутся неизменными, но в кольцевом сечении баллона дополнительно возникнут сдвигающие усилия, уравновешивающие момент M.

Интенсивность усилия S_{mt} определим из уравнения

$$2S_{mt}2\pi r^2 = M. \tag{140}$$

Коэффициент 2 введен в это уравнение потому, что момент воспринимается двумя боковыми стенками баллона.

Из уравнения (140) находим

$$S_{mt} = \frac{M}{4\pi r^2}. \tag{141}$$

Если считать нити корда нерастяжимыми, то, зная S_{mt}, можно сразу по уравнению (94) определить разность усилий в нитях двух направлений:

$$N_1 - N_2 = \frac{2t}{n}\cdot\frac{1}{\sin\beta\cos\beta}\cdot\frac{M}{4\pi r^2},$$

или, поскольку величина $\frac{2\pi rn\cos\beta}{t} = \nu$ представляет собой полное количество нитей корда в баллоне,

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{M}{r\sin\beta}. \tag{142}$$

Полусумма же этих усилий остается в связи с постоянством T_m равной усилию, обусловленному действием давления:

$$\frac{1}{2}(N_1 + N_2) = N_p. \tag{143}$$

Из двух уравнений (142) и (143) можно вычислить усилия N_1 и N_2:

$$N_1 = N_p + N_M;$$

$$N_2 = N_p - N_M,$$

где

$$N_M = \frac{M}{2\nu r\sin\beta}. \tag{144}$$

Усилия в нитях корда, вызываемые внутренним давлением, увеличиваются с увеличением радиуса; усилия, вызываемые моментом, при этом уменьшаются.

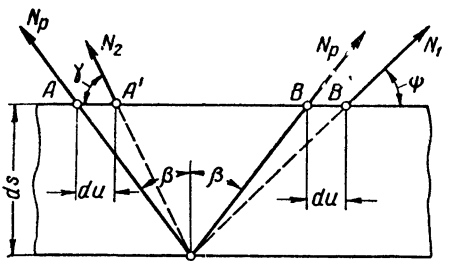
Несмотря на то, что максимальные суммарные усилия в нитях могут иногда иметь место у наружной стенки баллона (точка B на фиг. 421), разрушение обычно возникает у внутренней стенки (точка A) в связи с тем, что здесь максимальна амплитуда усилий при нагружении переменным моментом. Уменьшение усилия в нитях корда до нуля в четных или нечетных слоях также возможно прежде всего у внутренней стенки баллона.

Чтобы избежать работы нитей при деформациях сжатия, должно быть выполнено неравенство $N_M < N_p$ или

$$\frac{M}{2r_1 \sin \beta_1} < \frac{pH \pi r_c \cos \beta_c}{\cos^2 \beta_1}. \qquad (145)$$

Работа нитей корда при знакопеременных циклах способствует их быстрому разрушению.

Условие (145) представляет также границу приложимости выведенных формул, так как если усилие в нитях падает до нуля, то предположение о неизменности их длины оказывается несправедливым, потому что жесткость нитей при сжатии не является большой по сравнению с жесткостью резины.



Фиг. 422. К определению деформаций каркаса

Гипотеза о нерастяжимости нитей достаточно точна для вычисления усилий в них, но она не дает возможности определить крутильную податливость баллона. Для того чтобы вычислить эту величину, необходимо учесть удлинение нитей корда.

Рассмотрим вырезанный из оболочки двумя кольцевыми сечениями элемент ширины ds (фиг. 422). До нагружения моментом нити корда четных и нечетных слоев расположены под углами β к меридиану и усилия в них одинаковы и равны N_p. При нагружении муфты моментом M одно из кольцевых сечений сместится относительно другого на величину du, причем изменятся не только усилия в нитях, но и их направления. Так как деформации, связанные с удлинением нитей корда, очень малы, можно пренебречь возникающими при этом напряжениями в резине. Относительное удлинение нитей системы 1 составит

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} \sin \beta \cos \beta.$$

Нити системы 2 получат такое же по величине относительное укорочение.

Если считать упругую характеристику нитей линейной, то можно найти усилия в деформированных нитях:

$$N_1 = N_p + E_к \frac{du}{ds} \sin \beta \cos \beta$$

и

$$N_2 = N_p - E_к \frac{du}{ds} \sin \beta \cos \beta,$$

где $E_к = \frac{dN}{d\varepsilon}$ [кг] — характеристика упругости нити корда.

Проектируя силы N_1 и N_2 на окружное направление, найдем окружное усилие во всем кольцевом сечении:

$$P = \frac{\nu}{2}(N_1 \cos\psi - N_2 \cos\gamma), \tag{146}$$

где ν — полное число нитей в оболочке;
ψ и γ — углы, составляемые нитями с окружным направлением после деформации.

Учитывая, что

$$\cos\psi = \frac{ds\,\mathrm{tg}\,\beta + du}{\frac{ds}{\cos\beta}(1+\varepsilon_1)} \approx \sin\beta + \frac{du}{ds}\cos^3\beta,$$

а

$$\cos\gamma \approx \sin\beta - \frac{du}{ds}\cos^3\beta,$$

и подставляя значения N_1 и N_2 в формулу (146), получим

$$P = \frac{du}{ds}\nu\cos\beta\,(N_p\cos^2\beta_к + E_к\sin^2\beta_к).$$

В последнем выражении величина N_p всегда мала по сравнению с $E_к$ (т. е. с усилием, которое возникало бы в нити при двукратном удлинении в случае линейной зависимости N от ε).

Поэтому можно принять, что

$$P = \frac{du}{ds}\nu E_к \sin^2\beta\cos\beta. \tag{147}$$

Умножив окружное усилие на радиус сечения r и на 2 (за счет наличия двух стенок), получим скручивающий муфту момент:

$$M = 2Pr = \frac{du}{ds}2\nu E_к r\sin^2\beta\cos\beta,$$

откуда

$$\frac{du}{ds} = \frac{M}{2\nu E_к}\cdot\frac{1}{r\sin^2\beta\cos\beta}.$$

Угол закручивания муфты $d\Theta$ за счет деформации участка ds равен

$$d\Theta = \frac{du}{r} = \frac{M}{2\nu E_к}\cdot\frac{ds}{r^2\sin^2\beta\cos\beta}.$$

Суммарный угол закручивания муфты за счет деформации боковых стенок баллона определится интегрированием:

$$\Theta_б = \frac{M}{2\nu E_к}\int_s \frac{ds}{r^2\sin^2\beta\cos\beta}, \tag{148}$$

где интеграл берется по всей боковой стенке.

Если отношение высоты профиля каркаса баллона H к радиусу его r_c мало, то интеграл (148) можно приближенно вычислить, за-

менив подинтегральную функцию ее средним значением. В этом случае получим

$$\Theta_б = \frac{M}{2\nu E_к} \cdot \frac{\pi H}{2r_c^2 \sin^2 \beta_c \cos \beta_c} = M \frac{Ht_c}{2nE_к r_c^3 \sin^2 2\beta_c}, \qquad (149)$$

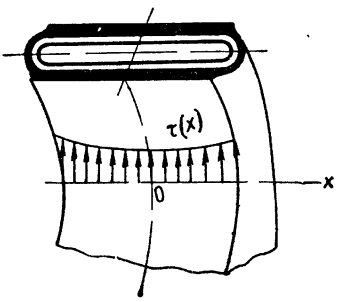
где r_c — средний радиус баллона;

β_c — угол нитей корда, соответствующий этому радиусу;

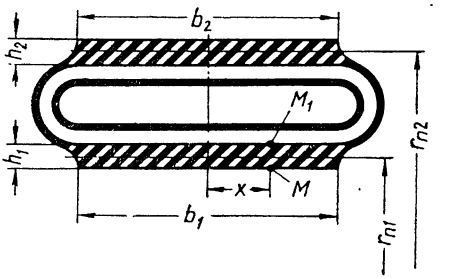
$t_c = \frac{2\pi r_c \cos \beta_c n}{\nu}$ — шаг нитей корда при $r = r_c$.

Теперь перейдем к рассмотрению работы цилиндрических участков баллона.

При подаче в баллон внутреннего давления протекторы муфты прижимаются к барабанам. Однако, ввиду того что изменение попе-



Фиг. 423. Нагрузка, передаваемая на протектор с барабана



Фиг. 424. Характерные размеры протекторов муфты

речных размеров протектора затруднено, деформации его крайне незначительны.

При нагружении муфты моментом M резина протектора испытывает деформации сдвига.

Рассмотрим сначала один какой-нибудь протектор, например внутренний.

Расположим начало координат в середине ширины протектора (фиг. 423) и направим ось x по оси симметрии муфты. Интенсивность сдвиговых сил передаваемых на протектор с внутреннего барабана (или с колодок), зависит, вообще говоря, от x, т. е.

$$\tau = \tau(x).$$

Ввиду того что толщина протектора мала по сравнению с радиусом, можно пренебречь изменением напряжения по толщине протектора, относя его к среднему радиусу протектора r_{n1} (фиг. 424).

В этом случае окружное смещение точки каркаса M_1 относительно соответствующей точки M на поверхности протектора составит

$$u = \frac{1}{G} \tau(x) h,$$

где h — толщина протектора;

G — модуль сдвига для резины протектора.

Окружное усилие в сечении x каркаса, отнесенное к его среднему радиусу r_1, определяется выражением

$$P_x = \frac{1}{r_1}\int_0^x \tau(x)\, 2\pi r_{n1}^2\, dx. \tag{151}$$

Для деформаций каркаса в окружном направлении справедливо соотношение (147), которое в данном случае принимает вид

$$P(x) = \frac{du}{dx}\nu E_к \sin^2\beta_1 \cos\beta_1,$$

где β_1 — угол нитей корда в протекторной части баллона.

Сопоставляя два выражения для окружного усилия $P(x)$ и учитывая равенство (150), получим

$$\frac{du}{dx}\nu E_к \sin^2\beta_1 \cos\beta_1 = \frac{2\pi r_{n1}^2}{r_1} G \int_0^x \frac{u}{h}\, dx,$$

или после дифференцирования по x

$$\frac{d^2u}{dx^2} - k^2 u = 0, \tag{152}$$

где

$$k^2 = \frac{2\pi r_{n1}^2 G}{r_1 h \nu E_к \sin^2\beta_1 \cos\beta_1} = 4\left(\frac{r_{n1}}{r_1}\right)^2 \frac{t_1 G}{nhE_к \sin^2 2\beta_1},$$

причем $t_1 = \frac{2\pi r_1 \cos\beta_1 n}{\nu}$ — шаг нитей корда, n — число слоев.

Если толщина протектора $h = h_1$ постоянна, то $k^2 = \text{const}$ и уравнение (152) имеет решение

$$u = C_1 \operatorname{ch} kx + C_2 \operatorname{sh} kx,$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Интенсивность касательных сил в соответствии с уравнением (150) равна

$$\tau(x) = \frac{G}{h}(C_1 \operatorname{ch} kx + C_2 \operatorname{sh} kx).$$

По симметрии должно выполняться условие

$$\left(\frac{d\tau}{dx}\right)_{x=0} = 0$$

и, следовательно, $C_2 = 0$.

Усилия $\tau(x)$, распределенные по поверхности протектора, дают момент M. Поэтому

$$2\pi r_{n1}^2 \int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} \tau(x)\, dx = M,$$

где b_1 — ширина протектора.

Выполняя интегрирование, получим

$$4\pi r_{n1}^2 = \frac{G}{kh_1} \operatorname{sh} \frac{kb_1}{2} C_1 = M,$$

откуда

$$C_1 = \frac{kh_1 M}{4\pi r_{n1}^2 G \operatorname{sh} \frac{kb_1}{2}}.$$

Таким образом, касательные напряжения распределены по ширине протектора по закону

$$\tau(x) = \frac{kM}{4\pi r_{n1}^2 \operatorname{sh} \frac{kb_1}{2}} \operatorname{ch} kx. \qquad (153)$$

Характер распределения $\tau(x)$ представлен на фиг. 423.

Максимальное напряжение возникает у краев протектора $\left(\text{при } x = \pm \frac{b_1}{2}\right)$; оно равно

$$\tau_{\max} = \frac{kM}{4\pi r_{n1}^2 \operatorname{th} \frac{kb_1}{2}}.$$

Отношение максимального напряжения к среднему $\tau_{cp} = \frac{M}{2\pi r_{n1}^2 b_1}$ составляет

$$\eta = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{cp}} = \frac{kb_1}{2\operatorname{th} \frac{kb_1}{2}}. \qquad (154)$$

Это отношение зависит только от безразмерной величины

$$kb_1 = 2\frac{r_{n1}}{r_1}\sqrt{\frac{t_1 b_1^2 G}{nh_1 E_к \sin^2 2\beta_1}}. \qquad (155)$$

Зависимость коэффициента η от величины kb представлена на фиг. 425.

Полученный закон изменения напряжений по ширине протектора справедлив только в том случае, когда толщина его h постоянна по всей ширине. Если выполнить протектор переменной толщины, можно получить и другое распределение напряжений. Так, в частности, равномерное по ширине распределение напряжений может быть достигнуто, если толщина протектора меняется по закону

$$h = h_0 + \frac{2Gr_{n1}^2 t_1}{nE_к r_1^2 \sin^2 2\beta_1} x^2, \qquad (156)$$

где h_0 — толщина протектора в средней точке.

В этом случае толщина протектора у его края должна быть больше на

$$\Delta h = \frac{Gr_{n1}^2 t_1 b_1^2}{2nE_к r_1^2 \sin^2 2\beta_1},$$

чем в середине.

Величина абсолютного сдвига протектора в сечении у его края определяется равенством

$$u = \frac{h}{G}\tau_{max} = \eta\frac{Mh_1}{G2\pi r_{n1}^2 b_1},$$

и соответствующий угол закручивания муфты

$$\Theta_{n1} = \frac{u_{max}}{r_{n1}} = \eta\frac{Mh_1}{G\,2\pi r_{n1}^3 b_1}.$$

Точно таким же образом можно рассмотреть работу внешнего протектора муфты.

Среднее касательное напряжение в этом протекторе составляет

$$\tau_{cp} = \frac{M}{2\pi r_{n2}^2 b_2},$$

где r_{n2} и b_2 — средний радиус и ширина внешнего протектора.

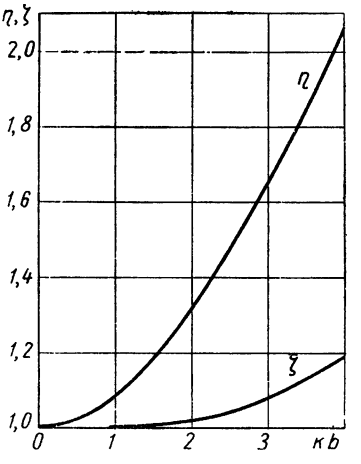
Максимальное напряжение у краев протектора равно

$$\tau_{max} = \eta_2 \tau_{cp}.$$

Коэффициент η_2 определяется по формуле (154) или по графику фиг. 426 в зависимости от величины

$$kb_2 = 2\frac{r_{n2}}{r_2}\sqrt{\frac{t_2 b_2^2 G}{nh_2 E_к \sin^2 2\beta_2}}, \qquad (157)$$

где (см. фиг. 424) r_{n2} — средний радиус наружного протектора; h_2 — его толщина; β_2 и t_2 — угол нитей корда и их шаг в наружной стенке каркаса.



Фиг 425. Зависимость коэффициентов η и ζ от величины kb

Угол закручивания муфты за счет деформации наружной протекторной части баллона равен

$$\Theta_{n2} = \eta_2\frac{Mh_2}{G2\pi r_{n2}^3 b_2}.$$

Полный угол закручивания муфты равен сумме углов ее закручивания за счет деформации боковых стенок баллона, а также за счет деформации внутренней и наружной протекторных частей:

$$\Theta = \Theta_б + \Theta_{n1} + \Theta_{n2} = M\left[\frac{Ht_c}{2nE_к r_c^3 \sin^2 2\beta_c} + \frac{\eta h_1}{G2\pi r_{n1}^3 b_1} + \frac{\eta_2 h_2}{G2\pi r_{n2}^3 b_2}\right].$$

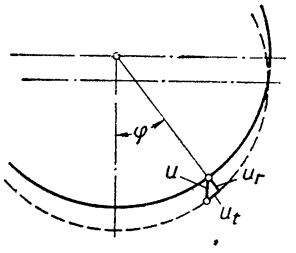
Таким образом, крутильная податливость муфты составляет

$$\delta_к = \frac{\Theta}{M} = \frac{Ht_c}{2nE_к r_c^3 \sin^2 2\beta_c} + \frac{\eta h_1}{G2\pi r_{n1}^3 b_1} + \frac{\eta_2 h_2}{G2\pi r_{n2}^3 b_2}. \qquad (158)$$

В зависимости от того, подсчитывается статическая или динамическая податливость муфты, в формулу должны подставляться статические или динамические модули упругости резины G и корда $E_к$.

Формула (158) показывает, в частности, что для геометрически подобных муфт, изготовленных из одинаковых материалов с числом слоев корда, пропорциональным линейным размерам. крутильная податливость изменяется обратно пропорционально кубу линейных размеров муфты.

Рассмотрим определение податливости муфты при боковой нагрузке. При боковой деформации (фиг. 426) смещение каждой точки внутреннего барабана может быть разложено на два компонента — радиальный



Фиг. 426. Перемещения при боковой нагрузке на муфту

$$u_r = u\cos\varphi$$

и окружной

$$u_t = u\sin\varphi.$$

Вследствие радиальной деформации изменяется высота профиля баллона и изгибаются его стенки. Связанная с такой деформацией затрата энергии очень мала, и ею можно пренебречь.

Окружное перемещение u_t связано с появлением в муфте деформаций такого же типа, как при скручивании. Приближенное значение боковой податливости муфты можно определить, если предположить, что каждый элемент $d\varphi$ муфты при боковой деформации поглощает столько же энергии, сколько и при закручивании муфты на угол $\Theta = \frac{u_t}{r_c}$, т. е.

$$dU = \frac{d\varphi}{2\pi}\cdot\frac{\Theta^2}{2\delta_к} = \frac{u^2}{4\pi r_c^2\delta_к}\sin^2\varphi\, d\varphi.$$

Полная энергия составит

$$U = \int dU = \frac{u^2}{4\pi r_c^2\delta_к}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{u^2}{4r_c^2\delta_к}.$$

С другой стороны, та же энергия может быть выражена через боковую податливость муфты δ_z:

$$U = \frac{u^2}{2\delta_z}.$$

Сопоставляя полученные значения U, найдем следующее приближенное выражение, связывающее боковую податливость муфты с крутильной:

$$\delta_z \approx 2r_c^2\delta_к. \qquad (159)$$

При использовании шинно-пневматических муфт в системах, испытывающих крутильные колебания, необходимо также знать величину потерь энергии в муфте. Эти потери характеризуются так называемым коэффициентом относительного внутреннего сопротивления ψ, представляющим собой отношение рассеянной за цикл энергии к энергии деформации муфты при амплитудном отклонении от равновесного положения.

Полная энергия деформации муфты при нагружении ее амплитудным моментом M составляет

$$\Pi = \frac{1}{2} M^2 \delta_к,$$

где $\delta_к$ — крутильная податливость муфты, вычисляемая по формуле (158).

Энергия деформации резины в муфте равна

$$U_p = \int \frac{\tau^2}{2G} dV,$$

причем интеграл берется по объему внутреннего и внешнего протекторов муфты.

Выражая касательное напряжение по формуле (153) и выполняя интегрирование, получим

$$U_p = \frac{M^2}{4\pi G} \left(\frac{h_1}{r_{n1}^3 b_1} \zeta_1 + \frac{h_2}{r_{n2}^3 b_2} \zeta_2 \right),$$

где коэффициент ζ_1 зависит от величины kb_1, определяемой по формуле (155):

$$\zeta_1 = \frac{kb_1 (\operatorname{sh} kb_1 + kb_1)}{8 \operatorname{sh}^2 \frac{kb_1}{2}}.$$

Коэффициент ζ_2 определяется по такой же формуле с заменой kb_1 на kb_2 по формуле (157). Зависимость коэффициента ζ от kb представлена на фиг. 426. Из этого графика видно, что при $kb < 2{,}5$ можно считать $\zeta = 1$.

Энергия деформации нитей корда равна, очевидно, разности между энергией деформации всей муфты и энергией деформации резины:

$$U_к = \Pi - U_p.$$

Если предположить, что коэффициенты относительного внутреннего трения для резины и корда постоянны и равны соответственно ψ_p и $\psi_к$, то потеря энергии за цикл составит

$$\Delta\Pi = \psi_p U_p + \psi_к U_к,$$

а коэффициент относительного внутреннего сопротивления для муфты будет равен

$$\psi = \frac{\Delta\Pi}{\Pi} = \psi_p \frac{U_p}{\Pi} + \psi_к \frac{U_к}{\Pi},$$

или

$$\psi = \psi_к + (\psi_p - \psi_к) \frac{1}{2\pi G \delta_к} \left(\frac{h_1 \zeta_1}{r_{n1}^3 b_1} + \frac{h_2 \zeta_2}{r_{n2}^3 b_2} \right), \qquad (160)$$

где $\delta_к$ определяется по формуле (158).

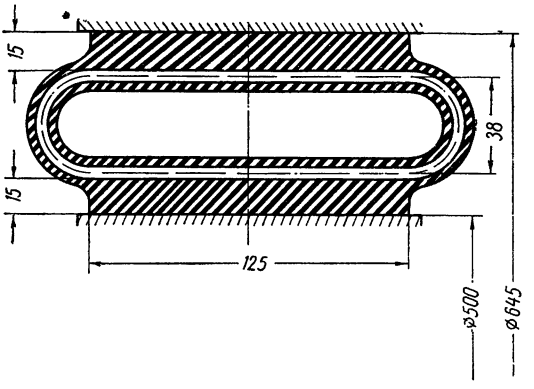
При использовании формулы (160) в нее надо подставить значения коэффициентов $\psi_к$ и ψ_p, которые определены при частотах, деформациях и температурах, имеющих место в муфте в условиях эксплуатации.

Рассмотрим пример поверочного расчета шинно-пневматической муфты.

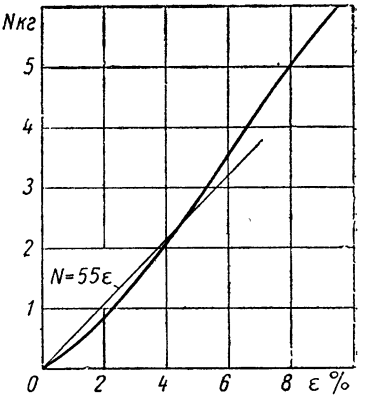
Профиль муфты во включенном положении представлен на фиг. 427.

Необходимые для расчета геометрические характеристики таковы: средний радиус каркаса $r_c = 28{,}6$ *см*; внутренний и внешний радиусы $r_1 = 26{,}7$ *см*, $r_2 = 30{,}5$ *см*; высота профиля по средней линии каркаса $H = 3{,}8$ *см*; толщина протекторов $h_1 = h_2 = 1{,}5$ *см*; ширина протекторов $b_1 = b_2 = 12{,}5$ *см*; средний радиус внутреннего протектора $r_{n1} = 25{,}75$ *см*; средний радиус наружного протектора $r_{n2} = 31{,}5$ *см*.

Каркас баллона четырехслойный из капронового корда. Характеристика растяжения нити корда представлена на фиг. 428. Угол наклона нитей корда к меридиану на среднем радиусе баллона (при $r = r_c$) составляет $\beta_c = 45°$, плотность нитей корда в этой же точке $i_c = 12$ нитей на 1 *см* и, следовательно, шаг нитей $t_c = 0{,}083$ *см*. Модуль сдвига для резины протектора составляет $G = 10$ *кг/см*^{2}. Внутреннее давление в баллоне муфты при ее включении $p = 8$ *кг/см*^{2}.



Фиг. 427. Баллон шинно-пневматической муфты (к примеру расчета)



Фиг. 428. Характеристика растяжения нити корда

Определяем углы нитей корда во внутренней и внешней частях каркаса β_1 и β_2.

$$\sin\beta_1 = \frac{r_1}{r_c}\sin\beta_c = \frac{26{,}7}{28{,}6}0{,}707 = 0{,}66; \quad \beta_1 = 41°20'; \quad \cos\beta_1 = 0{,}75;$$

$$\sin\beta_2 = \frac{r_2}{r_c}\sin\beta_c = \frac{30{,}5}{28{,}6}0{,}707 = 0{,}754; \quad \beta_2 = 49°; \quad \cos\beta_2 = 0{,}656.$$

По формуле (139) подсчитываем усилия, возникающие в нитях корда от внутреннего давления:

$$N_p = pH\frac{t_c}{n}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta} = 8\cdot 3{,}8\frac{0{,}083}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{0{,}635}{\cos^2\beta}.$$

Подставляя сюда значения $\cos\beta$ для различных точек профиля, находим усилия в этих точках, приходящиеся на одну нить:

на внешней стенке ($r = r_2$)

$$N_p = \frac{0{,}635}{\cos^2\beta_2} = 1{,}47 \text{ кг};$$

в средней точке ($r = r_c$)

$$N_p = \frac{0{,}635}{\cos^2\beta_c} = 1{,}27 \text{ кг};$$

на внутренней стенке ($r = r_1$)

$$N_p = \frac{0{,}635}{\cos^2\beta_1} = 1{,}12 \text{ кг}.$$

Дополнительные усилия в нитях при приложении момента определяются по формуле (144):

$$N_M = \frac{M}{2\nu r \sin\beta},$$

где

$$\nu = \frac{2\pi r_c \cos\beta_c n}{t_c} = \frac{2\pi 28{,}6 \cdot 0{,}707 \cdot 4}{0{,}083} = 6100$$

— полное число нитей корда в каркасе.

Максимальное усилие N_M имеет место у перехода от боковой к внутренней стенке баллона (при $r = r_1$). Оно равно

$$N_{M\,r=r_1} = \frac{M}{2\nu r_1 \sin\beta_1} = \frac{M}{2 \cdot 6100 \cdot 26{,}7 \cdot 0{,}66} = 5{,}35 \cdot 10^{-6} M.$$

Вычисляем предельный момент, при котором нити корда еще работают на растяжение, из условия, что при $r = r_1$

$$N_M = N_p$$

или

$$5{,}35 \cdot 10^{-6} M = 1{,}12,$$

откуда

$$M_{пред} = 0{,}21 \cdot 10^6 \text{ кгсм} = 2100 \text{ кгм}$$

При приложении этого момента[1] усилие в одной системе нитей (при $r = r_1$) уменьшится до нуля, а в другой возрастет до $2N_p = 2{,}24$ кг в каждой нити.

Определим среднее касательное напряжение в резине внутреннего протектора при приложении момента $M_{пред}$:

$$\tau_{ср} = \frac{M}{2\pi r_{n1}^2 b_1} = \frac{0{,}21 \cdot 10^6}{2\pi 25{,}75^2 \cdot 12{,}5} = 4{,}1 \text{ кг/см}^2.$$

По формуле (155) определяем величину

$$kb_1 = 2\frac{r_{n1}}{r_1}\sqrt{\frac{t_1 b_1^2 G}{n h_1 E_к \sin^2 2\beta_1}}.$$

Для этого предварительно находим $E_к$ как среднее значение производной $\frac{dN}{d\varepsilon}$ на участке растяжения нити в пределах $0 \leqslant N \leqslant 2{,}24$ кг. По характеристике растяжения корда (фиг. 428) получаем $E_к = 55$ кг.

Шаг нити на внутренней стенке баллона определяется из соотношения

$$t_1 = t_c \frac{\sin 2\beta_1}{\sin 2\beta_c} = 0{,}083 \frac{\sin 82°40'}{\sin 90°} = 0{,}082 \text{ см}.$$

Имеем

$$kb_1 = 2\frac{25{,}75}{26{,}7}\sqrt{\frac{0{,}082 \cdot 12{,}5^2 \cdot 10}{4 \cdot 1{,}5 \cdot 55 \cdot 0{,}98}} = 1{,}2.$$

Соответствующий этому значению kb_1 коэффициент η равен

$$\eta = \frac{kb_1}{2\,\text{th}\,\frac{kb_1}{2}} = 1{,}12$$

(см. фиг. 425).

[1] Величина момента, который можно приложить к муфте при вибрации, определяется в зависимости от характеристик усталостной прочности материалов.

Таким образом, максимальное напряжение у углов протектора на 12% больше среднего и при нагружении моментом $M_{пред} = 2100$ *кгм* составляет

$$\tau_{max} = \eta\tau_{ср} = 1{,}12 \cdot 4{,}1 = 4{,}6 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжение в наружном протекторе меньше, чем во внутреннем. Здесь среднее напряжение

$$\tau_{ср} = \frac{M}{2\pi r_{n2}^2 b_2} = \frac{0{,}21 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 31{,}5^2 \cdot 12{,}5} = 2{,}74 \text{ кг/см}^2.$$

Величина kb_2 равна

$$kb_2 = 2\frac{r_{n2}}{r_2}\sqrt{\frac{t_2 b_2^2 G}{nh_2 E_к \sin^2 2\beta_2}} = 2\frac{31{,}5}{30{,}5}\sqrt{\frac{0{,}082 \cdot 12{,}5^2 \cdot 10}{4 \cdot 1{,}5 \cdot 55 \cdot 0{,}98}} = 1{,}28,$$

где подставлено

$$t_2 = t_c \frac{\sin 2\beta_2}{\sin 2\beta_c} = 0{,}082 \text{ см}.$$

Соответствующее значение коэффициента η_2 будет $\eta_2 = 1{,}13$.

Вычислим по формуле (158) крутильную податливость муфты:

$$\delta_к = \frac{Ht_c}{2nE_к r_c^3 \sin^2 2\beta_c} + \frac{\eta h_1}{G2\pi r_{n1}^3 b_1} + \frac{\eta_2 h_2}{G2\pi r_{n2}^3 b_2} =$$

$$= \frac{3{,}8 \cdot 0{,}083}{2 \cdot 4 \cdot 55 \cdot 28{,}6^3 \cdot 1} + \frac{1{,}12 \cdot 1{,}5}{10 \cdot 2\pi \cdot 25{,}75^3 \cdot 12{,}5} + \frac{1{,}13 \cdot 1{,}5}{10 \cdot 2\pi \cdot 31{,}5^3 \cdot 12{,}5} =$$

$$= 0{,}0306 \cdot 10^{-6} + 0{,}126 \cdot 10^{-6} + 0{,}0694 \cdot 10^{-6} = 0{,}226 \cdot 10^{-6} \text{ 1/кгсм}.$$

Из подсчета видно, что 56% общей податливости определяется деформациями внутреннего протектора, 31% — деформациями внешнего протектора и остальные 13% — деформациями боковых стенок баллона.

Угол закручивания муфты при нагружении моментом $M_{пред} = 2100$ *кгм* равен

$$\theta = M\delta_к = 210\,000 \cdot 0{,}226 \cdot 10^{-6} = 0{,}047 \text{ радиана, или } 2{,}7°.$$

Радиальную податливость муфты можно приближенно подсчитать по формуле (159):

$$\delta_z = 2r_c^2 \delta_к = 2 \cdot 28{,}6^2 \cdot 0{,}226 \cdot 10^{-6} = 0{,}37 \cdot 10^{-3} \text{ см/кг}.$$

Вычисляем по формуле (160) коэффициент относительного внутреннего трения для муфты, предполагая, что значения ψ для резины и корда известны и равны соответственно $\psi_р = 0{,}6$; $\psi_к = 0{,}3$.

Так как для внутреннего и внешнего протекторов $kb < 2{,}5$, то $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ и

$$\psi = \psi_к + (\psi_р - \psi_к)\frac{1}{2\pi G_1 \delta_к}\left(\frac{h_1}{r_{n1}^3 b_1} + \frac{h_2}{r_{n2}^3 b_2}\right) =$$

$$= 0{,}3 + (0{,}6 - 0{,}3)\frac{1}{2\pi \cdot 10 \cdot 0{,}226 \cdot 10^{-6}}\left(\frac{1{,}5}{25{,}75^3 \cdot 12{,}5} + \frac{1{,}5}{31{,}5^3 \cdot 12{,}5}\right) = 0{,}53.$$

Как видно из расчета, коэффициент относительного внутреннего трения для муфты мало отличается от значения этого коэффициента для резины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфрей Т., Механические свойства высокополимеров, Издательство иностранной литературы, 1952.

2. Бидерман В. Л., Расчетное определение конфигурации пневматической шины и напряжений в ее элементах, «Труды НИИШП», сб. 3, Госхимиздат, 1957.

3. Бидерман В. Л., Расчет деформаций в камерах пневматических шин, «Труды НИИШП» сб. 3, Госхимиздат, 1957.

4. Бидерман В. Л., Вопросы расчета резиновых деталей, сб. «Расчеты на прочность», вып. 3, Машгиз, 1958.

5. Бидерман В. Л., Лапин А. А., К определению характеристик резинокордовых оболочек, «Инженерный сборник», т. XIV, изд. АН СССР, 1953.

6. Гаузер Э., Технология резины, т. I и II, ОНТИ, 1937.

7. Горелик Б. М., Некоторые особенности работы резины как конструкционного материала, «Труды НИИРП», сб. 2, Госхимиздат, 1955.

8. Горелик Б. М., Теплообразование при многократных деформациях резино-металлических шарниров, «Труды НИИРП», сб. 3, Госхимиздат, 1956.

9. Диллон Д., Усталостные явления в высокополимерах, перевод с англ., сб. «Усталостные свойства высокополимеров», Госхимиздат, 1957.

10. Израелит Г. Ш., Механические испытания резины и каучука, Госхимиздат, 1949.

11. Кошелев Ф. Ф., Технология резины, Госхимиздат, 1957.

12. Лапин А. А., Резино-кордовые оболочки как упругие и силовые элементы машин, сб. «Расчеты упругих элементов машин и приборов», МВТУ имени Баумана, Машгиз, 1952.

13. Лапин А. А., Графический способ расчета резино-кордовых оболочек, сб «Расчеты упругих элементов машин и приборов», МВТУ имени Баумана, Машгиз 1952.

14. Новожилов В. В., Основы нелинейной теории упругости, Гостехиздат, 1948.

15. Присс Л. С., Свободная энергия деформированной резины, «Доклады АН СССР», т. XCIII, № 5, 1953.

16. Ратнер С. Б., Резниковский М. М., Зуев Ю. С., Методы испытания резины и способы ее искусственного старения «Заводская лаборатория» № 7, 1954.

17. Резниковский М. М., Вострокнутов Е. Г., Присс Л. С., Методические вопросы изучения прочности резины при переменных во времени напряжениях, сб. «Старение и утомление каучуков и резин и повышение их стойкости», Госхимиздат, 1955.

18. Трелоар Л., Физика упругости каучука, Иноиздат, 1953.

19. Adkins J., A note on the finite plane strain equations for isotropic incompressible materials, «Proc. Cambridge Philos. Soc.», v 51, № 2, 1955.

20. Cadwell S., Merrill R., Sloman C., Yost F., Rubber in automotive industry, «Industrial and Engineering Chemistry», v. 33, № 3, 1941.

21. Genin G., Morisson B., Encyclopédie technologique de l'industrie du Caoutchouc, III, Paris, 1956.

22. Kimmich E., Rubber in compression, «Rubber Chemistry and Technology», v. XIV. № 2, 1941.

23. Rivlin R. S., Torsion of a rubber cylinder, «Journal of applied Physics», v. 18, № 5, 1947.

24. Treolar L., Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation, «Rubber Chemistry and Technology», v. XVII, № 4, 1944.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

РАСЧЕТЫ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

ГЛАВА VIII

ТЕОРИЯ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

§ 1. ЗНАЧЕНИЕ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Расчеты, основанные на законе Гука, во многих случаях современной практики не охватывают всего круга вопросов, возникающих перед конструктором.

В настоящее время при проектировании и изготовлении деталей машин все чаще и чаще приходится изучать деформации деталей за пределами упругости. Такие исследования необходимы при расчете на прочность деталей по методу предельного состояния, при разработке технологических операций по повышению несущей способности деталей методами предварительного пластического деформирования и при выполнении технологических расчетов в связи с изготовлением деталей.

Отметим, что расчеты деталей на ползучесть, рассмотренные в следующем разделе, также основаны на теории пластических деформаций.

А. Расчеты по предельному состоянию

Необходимость уменьшения веса машин требует применения при проектировании деталей наиболее совершенных методов расчета, в которых по возможности полно были бы отражены действительные условия работы конструкции.

В случае статического нагружения при постоянных во времени напряжениях и при условии, что ползучестью материала можно пренебречь, таким методом является так называемый расчет по предельному состоянию или предельным нагрузкам.

Для того чтобы показать особенности этого метода при расчете деталей, выполненных из пластичного материала, сопоставим его с так называемым способом расчета по допускаемым напряжениям, который в настоящее время широко используется в практике машиностроения.

При расчете по допускаемым напряжениям за предельное состояние конструкции принимается такое, при котором эквивалентное напряжение в наиболее напряженной точке детали, изготовленной из пластичного материала, достигает величины предела текучести. Коэффициент запаса детали по этому методу вычисляется как отношение предела текучести к максимальному эквивалентному напряжению.

Однако очевидно, что в случае неоднородного напряженного состояния возникновение пластических деформаций в одной наиболее напряженной точке еще не означает наступления предельного состояния. После наступления текучести в локальной зоне деталь еще может сопротивляться увеличению внешних сил до тех пор, пока пластические деформации не охватят значительного объема детали.

Для деталей из пластичного материала предельное состояние должно определяться величинами тех перемещений, превышения которых обращают конструкцию в геометрически изменяемую систему или нарушают условия ее нормальной эксплуатации.

Для деталей, выполненных из сравнительно хрупких материалов, за предельное состояние следует принять такое, при котором наступает разрушение.

Нагрузки, соответствующие предельному состоянию, называются предельными нагрузками.

В методе расчета по предельному состоянию вначале подсчитывается величина предельной нагрузки, после чего коэффициент запаса вычисляется как отношение предельной нагрузки к действительной.

Из изложенного следует, что этот метод расчета позволяет создать более экономичные конструкции, чем способ допускаемых напряжений, поскольку в методе расчета по предельному состоянию правильно устанавливаются величины предельных нагрузок, при которых исчерпывается несущая способность деталей. В связи с этим вскрываются дополнительные прочностные ресурсы, не учитываемые в способе допускаемых напряжений.

Ввиду того что предельное состояние наступает после образования в детали пластических деформаций, вычисление предельных нагрузок требует умения производить расчеты за пределами упругости.

Б. Расчет технологических операций по повышению несущей способности деталей путем пластического деформирования

В технологических процессах производства некоторых элементов конструкций предусмотрены специальные операции, позволяющие путем пластического деформирования повысить несущую способность деталей в пределах упругости.

Например, винтовые цилиндрические пружины растяжения, сжатия и кручения после навивки и термообработки выдерживаются в деформированном за пределы упругости состоянии определенное время (от 6 до 48 час.). Такая операция длительного деформирования пружин за пределами упругости в производственной практике называется заневоливанием.

Для цилиндрических пружин сжатия операция заневоливания заключается в длительном сжатии пружины до соприкосновения витков. Цилиндрические пружины растяжения выдерживаются в растянутом состоянии на величину максимальной в условиях эксплуатации стрелы растяжения, а цилиндрические пружины кручения в закрученном состоянии — на величину максимального предусмотренного эксплуатационными условиями угла закручивания. Аналогично заневоливаются и многожильные пружины. Тарельчатые пружины в ряде случаев получают предварительное пластическое обжатие на специальных прессах.

Заневоливание пружин в практике принято рассматривать как метод испытания пружин длительной нагрузкой, и срок заневоливания назначается в зависимости от того, насколько ответственна роль пружин в той или иной конструкции.

Ввиду того что при заневоливании пружин напряжения превосходят предел пропорциональности, при разгрузке размеры пружин меняются и в материале пружин возникают остаточные напряжения, которые позволяют повысить их рабочую нагрузку в эксплуатации. Поэтому процесс заневоливания следует рассматривать не только как испыта-

ние пружин длительной нагрузкой, но главным образом как способ повышения несущей способности пружин в пределах упругости.

Заневоливание является заключительной операцией в процессе изготовления пружин, позволяющей получить полезные остаточные напряжения, и поэтому никакая термическая обработка пружин после заневоливания недопустима.

Толстостенные трубы, нагружаемые в эксплуатации внутренним давлением, после изготовления подвергаются воздействию внутреннего давления, вызывающего пластические деформации. В результате этого в трубе создается благоприятное поле остаточных напряжений, снижающих рабочие напряжения в эксплуатационных условиях. Такая технологическая операция называется автоскреплением или автофретированием. В результате автоскрепления рабочее давление в трубе может быть повышено.

Отметим, что толстостенные трубы, подвергающиеся высоким давлениям (аппаратура высоких давлений), часто невозможно спроектировать так, чтобы эквивалентное напряжение в опасной точке не превосходило предела пропорциональности материала. Тогда они подвергаются автоскреплению. Назначение автоскрепления в этом случае — выбрать пластические деформации до начала эксплуатации труб.

Аналогично автоскреплению толстостенных труб делались попытки [75] повышения несущей способности турбинных дисков путем предварительного их пластического деформирования (раскручивание дисков). Для этого диски до эксплуатации на специальных стендах приводились во вращение с такими угловыми скоростями, при которых в дисках возникали пластические деформации.

Отметим, что пластическое деформирование для повышения несущей способности деталей в пределах упругости должно производиться нагрузками того же направления, что и при эксплуатации. Так, например, торсионные валы при заневоливании должны закручиваться в ту же сторону, что и в рабочих условиях.

Очевидно, что для установления наиболее эффективных условий пластического деформирования, правильного назначения размеров заготовок, определения остаточных напряжений, необходимых для расчета на прочность пластически деформированных деталей, требуется умение производить расчеты за пределами упругости.

В. Технологические расчеты в связи с изготовлением деталей

Технологические процессы обработки металлов давлением (прокатка, ковка, штамповка, волочение, прессование, навивка пружин) основаны на способности металла пластически деформироваться.

Технологические расчеты процессов обработки металлов давлением необходимы для правильного выбора мощности прокатных станов, ковочных машин, штампов, волочильных станов, прессов, автоматов для навивки пружин и т. п.

Такие расчеты во многих случаях позволяют точно устанавливать размеры заготовок и выяснять оптимальные условия деформирования, обеспечивающие изготовление изделий высокого качества.

Так, например, при холодной гибке листового металла в U-образных штампах, для того чтобы получить изделие заданной формы и размеров, следует правильно назначить радиус закругления пуансона, расстояние между опорами, а также предусмотреть размеры поперечного сечения заготовки, учитывая, что при гибке они сильно изменяются.

В случае навивки пружин необходимо решить вопрос о том, какого диаметра нужно навивать пружину, чтобы после навивки она получила запроектированный диаметр. Очевидно, что диаметр пружины при навивке должен быть несколько меньше, чем запроектированный, так как после навивки диаметр пружины увеличивается за счет упругой отдачи.

При правке или рихтовании возникают остаточные напряжения, которые могут привести к короблению деталей после правки. Такое коробление происходит за счет перераспределения во времени остаточных напряжений.

Известно, что наличие остаточных напряжений в двутавровой балке, выпрямленной в плоскости наименьшей жесткости, иногда приводит к боковому выпучиванию балки при изгибе ее в плоскости наибольшей жесткости. Поэтому в расчетах правки или рихтовки необходимо определять усилия, нужные для пластического деформирования деталей, а также вычислять остаточные напряжения, возникающие в результате этой технологической операции.

Из изложенного выше очевидно, что исследования процессов обработки металлов давлением требуют умения проводить расчеты за пределами упругости.

Так как при обработке металлов давлением деформации обычно значительны, технологические расчеты, как правило, производятся в предположении больших деформаций.

Поскольку деформации деталей машин в процессе эксплуатации очень малы, то в расчетах по предельному состоянию и в расчетах технологических операций по повышению несущей способности деталей в пределах упругости путем предварительного пластического деформирования можно считать деформации малыми.

В этой и следующих главах рассматриваются расчеты за пределами упругости при малых упруго-пластических деформациях. Интересующихся технологическими расчетами отсылаем к специальной литературе [10], [47], [51], [52], [53], [59], [60].

§ 2. МЕХАНИЗМ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим вкратце некоторые основные явления пластической деформации кристаллических твердых тел.

Согласно современным воззрениям, металлический кристалл представляет собой систему ионизированных и нейтральных атомов, совершающих незначительные колебательные движения около определенных точек, расположенных в пространстве строго закономерно. Эти точки называются узлами кристаллической решетки. Ионизированными атомами или ионами называются атомы, отщепившие часть своих валентных электронов.

Переход от нейтрального атома к ионизированному может происходить без затраты энергии. Поэтому в металлическом кристалле непрерывно осуществляется обмен электронами и всегда имеется некоторое количество свободных электронов.

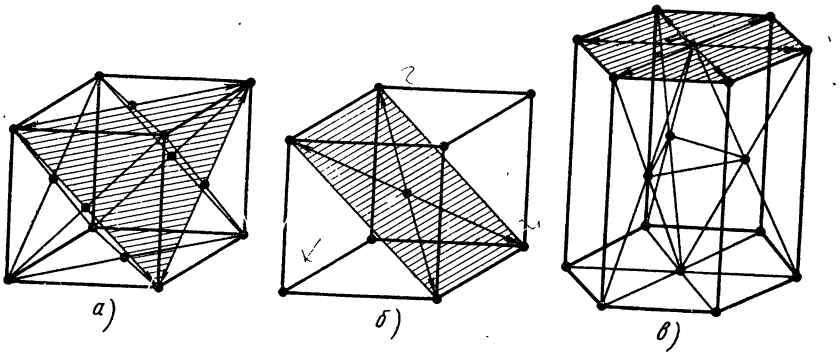
Таким образом, металлический кристалл представляет собой решетку ионов и нейтральных атомов, находящуюся в атмосфере «электронного газа» [34].

Обычно механизм пластической деформации кристаллических твердых тел изучается путем испытания образцов, изготовленных из монокристаллов (т. е. единичных кристаллов) достаточно больших размеров.

Пластическая деформация кристаллической решетки представляет собой результат необратимых смещений ионов и атомов в решетке и протекает в основном путем скольжения и двойникования. Рассмотрим раздельно явления скольжения и двойникования.

Скольжением или трансляцией называется смещение одной части кристалла относительно другой по некоторым так называемым кристаллографическим плоскостям, определенным образом ориентированным в кристалле.

Рассмотрим наиболее распространенные типы кристаллических решеток: кубическую гранецентрированную (фиг. 429,*а*), кубическую объемноцентрированную (фиг. 429,*б*) и гексагональную плотно упа-



Фиг. 429. Распространенные типы кристаллических решеток:
а — кубическая гранецентрированная; *б* — кубическая объемноцентрированная; *в* — гексагональная плотно упакованная

кованную (фиг. 429,*в*). В первой кристаллизуются γ-железо, медь, алюминий, никель, свинец, во второй α-железо, молибден, вольфрам и в третьей цинк, кадмий, магний.

В этих решетках кристаллографическими плоскостями скольжения являются плоскости, наиболее плотно усеянные ионами и атомами. Для кубической гранецентрированной решетки это будут четыре октаэдрические плоскости, кубической объемноцентрированной решетки — шесть диагональных плоскостей, гексагональной плотно упакованной решетки — две параллельные плоскости базиса. На фиг. 429 для всех трех случаев пштрихованы по одной из указанных выше плоскостей.

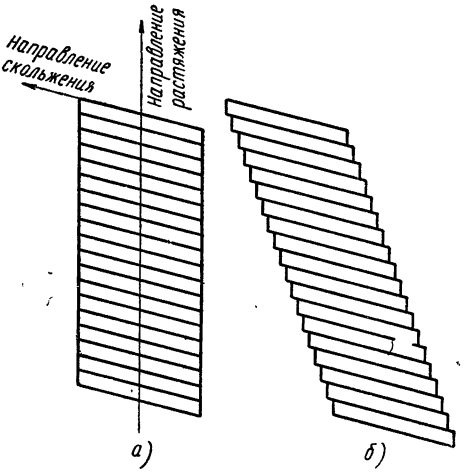
В свою очередь, в этих плоскостях направлениями скольжения являются направления, наиболее плотно усеянные ионами и атомами. Очевидно, что в каждой кристаллографической плоскости для кубической гранецентрированной решетки имеется три направления сдвига, для кубической объемноцентрированной два направления и для гексагональной плотно упакованной три таких направления. На фиг. 429 направления сдвига указаны стрелками.

Сдвиг представляет собой смещение на величину, кратную расстоянию между ионами или атомами, так что размещение ионов и атомов после сдвига сохраняется.

Скольжение обнаруживается в появлении параллельных полос на шлифованной поверхности монокристалла. Если кристаллографические плоскости направлены под углом к оси монокристаллического образца, то в результате растяжения образца в направлении его оси происходит сдвиг по этим плоскостям. Слои кристалла смещаются один относи-

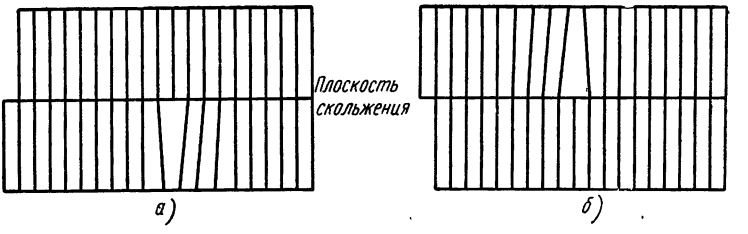
тельно другого, подобно тому как скользят одна по другой игральные карты, если сдвинуть колоду. На фиг. 430,*а* представлены направления растяжения и слоев скольжения монокристалла, а на фиг. 430,*б* — сдвинутые блоки.

Однако в действительности процесс скольжения значительно сложнее. Если подсчитать методами физики твердого тела касательные напряжения, необходимые для смещения одного слоя ионов и атомов относительно другого, то можно установить, что они в тысячи раз больше действительных пределов текучести при сдвиге монокристаллов. Полосы скольжения отделены друг от друга расстояниями порядка 10^{-4} *см*, в то время как порядок расстояния между ионно-атомными плоскостями 10^{-8} *см*, т. е. в 10^4 раз меньше.



Фиг. 430. Схема скольжения в монокристалле

Эти положения можно объяснить наличием изъянов в решетке реального кристалла. Дефект в периодичности кристаллической решетки называется дислокацией. Простейший тип дислокации представлен на фиг. 431. Такая дислокация возникает в том случае, когда число ионов и атомов в одной плоскости отличается от числа ионов и атомов в соседней плоскости на единицу. На фиг. 431 линии представляют собой следы атомных плоскостей, перпендикулярных к плоскости чертежа. Дислокация, изображенная на фиг. 431,*а*, условно называется положительной, а на фиг. 431,*б* — отрицательной [15], [45].



Фиг. 431. Схема линейной дислокации:
а — положительная дислокация; *б* — отрицательная дислокация

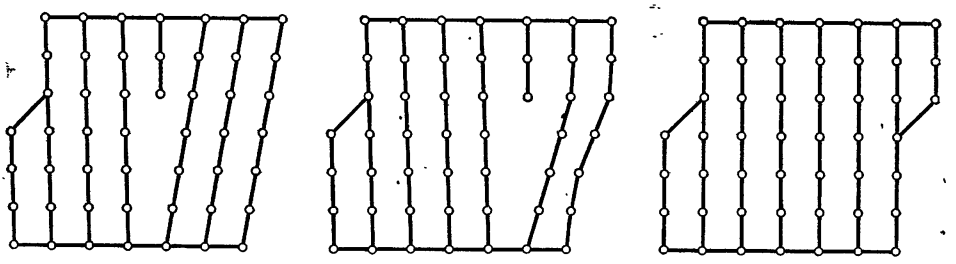
На фиг. 432 изображена схема движения положительной дислокации [15], [45]. Конечным результатом этого движения будет сдвиг на одно межионно-атомное расстояние.

Для того чтобы объяснить низкую прочность реального монокристалла по сравнению с теоретической прочностью, покажем, что сила, сдвигающая дислокацию на одно межионно-атомное расстояние, гораздо меньше, чем сила, сдвигающая две ионно-атомные плоскости при отсутствии дислокаций.

Рассмотрим силы между соседними ионно-атомными плоскостями при отсутствии (фиг. 433,*а*) и при наличии (фиг. 433,*б*) дислокаций.

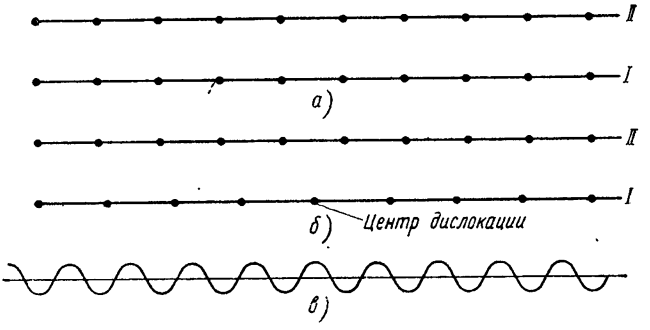
На фиг. 433,*в* представлена кривая, схематически изображающая энергию ионов и атомов в нижней плоскости (плоскости *I*), как функцию их положения по отношению к верхней плоскости (плоскости *II*).

При нормальном расположении (фиг. 433,*а*) все ионы и атомы в нижней плоскости *I* находятся в положениях, соответствующих минимумам этой кривой. Следовательно, если ионы и атомы одновременно смещены в одном и том же направлении, они испытывают одинаковые силы, противодействующие этому смещению.



Фиг. 432. Схема движения положительной дислокации

В случае наличия дислокации (фиг. 433,*б*) ионы и атомы, достаточно удаленные от центра дислокации, находятся в положениях, соответствующих минимумам энергии, но ионы и атомы вблизи центра дислокации уже не отвечают минимумам. Пары ионов и атомов в плоскости *I* (фиг. 433,*б*), расположенных симметрично относительно центра



Фиг. 433. К объяснению уменьшения прочности за счет дислокации

дислокации, испытывают со стороны ионов и атомов в верхней плоскости *II* силы, которые равны и противоположны. Следовательно, половина ионов и атомов вблизи центра дислокации испытывает силы, противодействующие смещению, а половина — силы, содействующие смещению. Отсюда следует, что сдвинуть дислокацию легче, чем идеальную кристаллическую решетку.

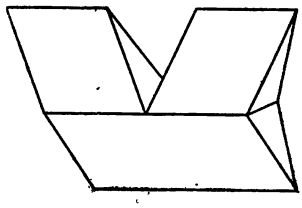
Отметим, что в работах А. В. Степанова [55], [56] приведена критика дислокационных теорий прочности и пластичности и изложены другие возможные направления в учении о прочности и пластичности кристаллов, существенно отличные от дислокационных представлений. При этом механизм пластической деформации объясняется с точки зрения устойчивости форм равновесия структуры тела или отдельных ее элементов.

Перейдем к рассмотрению явления двойникования. Двойникованием называется процесс смещения решетки части кристалла в новое поло-

жение, в результате чего обе части кристалла ориентируются симметрично относительно некоторой плоскости. Новая ориентировка монокристалла может быть выведена из старой путем вращения или отражения. Поэтому новый кристалл часто называют двойником [15]. В качестве примера приведем деформацию кристаллов кальцита. При определенном нагружении они расщепляются так, как показано на фиг. 434.

В процессе двойникования большие совокупности соседних ионно-атомных плоскостей сдвигаются друг относительно друга на расстояния, не равные целому кратному межионно-атомному расстоянию.

Отметим, что двойникование не всегда является результатом внешнего воздействия. Оно часто встречается в зернах, образовавшихся в процессе рекристаллизации или фазового перехода.



Фиг. 434. Кристалл кальцита после двойникования

Двойникование, вызванное механическим путем, исследовано в меньшей степени, чем скольжение. Предполагается, что между явлениями скольжения и двойникования есть много сходного. В настоящее время механизм двойникования, так же как и механизм скольжения, пытаются объяснить при помощи дислокаций [15].

При деформации реального монокристалла процессы скольжения и двойникования могут происходить одновременно и влиять друг на друга. Скачкообразное изменение ориентировки монокристалла при двойниковании может резко перевести плоскость, неблагоприятно расположенную по отношению к действующим силам, в положение, благоприятное для скольжения, и тем самым увеличить общую пластичность кристалла [64].

Механические свойства кристалла в различных направлениях неодинаковы. Поэтому кристалл анизотропен.

Технические металлы и сплавы представляют собой поликристаллы, т. е. состоят из отдельных зерен, имеющих кристаллическую структуру. На границах зерен имеются прослойки с неупорядоченным атомным строением. Ввиду этого механические свойства поликристалла значительно отличаются от свойств монокристалла того же металла.

Поскольку кристаллы в зернах и сами зерна, составляя тело, ориентированы друг относительно друга самым различным образом, индивидуальные особенности каждого кристалла не проявляются и металлы можно с достаточной точностью рассматривать как тела изотропные. Механические свойства поликристалла являются средними статическими свойствами всех его частиц. Они характеризуют весь комплекс зерен в целом.

При пластической деформации поликристаллических металлов, так же как и при деформации монокристаллов, имеют место скольжения и механические образования двойников.

Свойство поликристаллических металлов, как правило, невозможно получить усреднением по разным ориентировкам свойств монокристалла. Последнее объясняется влиянием границ между зернами. Оно выражается в том, что границы зерен являются барьерами теплопроводности и электропроводности. Скольжение на границах зерен протекает иначе, чем скольжение внутри зерен. Это объясняется тем, что расположение ионов и атомов на границах зерен иное, чем в самих зернах. Наконец, на границах зерен имеет место взаимодействие скольжений.

Соседние зерна сильно ограничивают величину и вид скольжений внутри зерен.

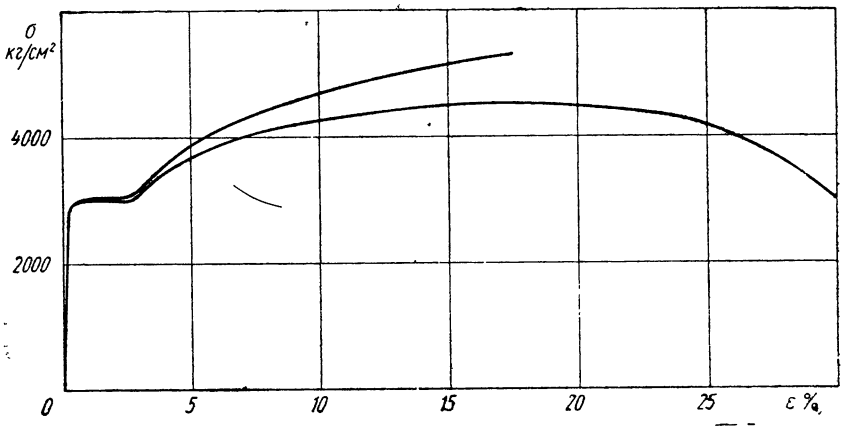
При пластической деформации поликристаллических металлов меняется ориентировка кристаллографических осей зерен. После пластической деформации возникает преимущественная ориентировка кристаллографических осей (металл получает текстуру). Таким образом, в результате пластической деформации поликристаллические металлы становятся в некоторой степени анизотропными.

Рассмотренный выше механизм пластической деформации кристаллических твердых тел изложен весьма кратко. Более подробно пластичность металлов с точки зрения физики твердого тела рассмотрена в работах [1], [15], [16], [25], [63], [64], [66].

§ 3. СХЕМАТИЗАЦИЯ ДИАГРАММ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ МАТЕРИАЛА

Расчеты за пределами упругости основываются на диаграммах растяжения и сжатия материалов. В основу расчета, вообще говоря, должны быть положены действительные диаграммы растяжения и сжатия, методы построения которых изложены в гл. V, т. I и работах [28], [26], [50].

Заметим, что до величины деформации $\varepsilon_в$, соответствующей временному сопротивлению, действительные диаграммы отличаются от условных только по напряжениям, причем это отличие сравнительно невелико. Для деформации $\varepsilon_в$ различие в напряжениях действительной и условной диаграмм обычно не превышает 15—20%.



Фиг. 435. Условная и действительная диаграммы растяжения стали 10

На фиг. 435 и 436 изображены условные и действительные диаграммы растяжения малоуглеродистой стали 10 и легированной стали 40Х. Действительные диаграммы на этих фигурах построены до величины деформации $\varepsilon_в$, соответствующей временному сопротивлению. Обратим внимние на то, что площадка текучести, которая на условной диаграмме параллельна оси абсцисс, на действительной диаграмме несколько наклонна. Однако этот наклон весьма незначителен, и в расчетах им можно пренебречь.

Как следует из фиг. 435, деформация, соответствующая концу площадки текучести, в 20 раз больше деформации, соответствующей пределу пропорциональности материала. Для других марок малоуглеродистых сталей это отношение меньше и лежит в интервале от 10 до 20.

В дальнейшем будем предполагать, что диаграммы растяжения и сжатия материала совпадают. Это справедливо для достаточно пластичных материалов — малоуглеродистых сталей, цветных металлов и сплавов и приближенно может быть принято для большинства легированных сталей.

На фиг. 437 и 438 изображены начальные участки действительных диаграмм растяжения и сжатия (см. приложение) для малоуглеродистой стали (фиг. 437) и алюминия (фиг. 438). Из этих фигур следует, что для деформаций, не превышающих 20%, приближенно можно принять, что диаграммы растяжения и сжатия совпадают. В таком случае для расчета достаточно располагать диаграммой растяжения. Заметим, что получить последнюю экспериментально проще, чем диаграмму сжатия (см. гл. V, т. I).

Расчеты деталей, выполненных из материалов, у которых диаграммы растяжения и сжатия не совпадают (инструментальные стали, чугуны), изложены в гл. XI, т. II.

Напомним, что при разгружении образца, растянутого за пределы упругости, диаграмма разгрузки является прямой, параллельной первоначальной прямой нагружения (фиг. 439). Уменьшение напряжений при разгрузке $\sigma_{разг}$ прямо пропорционально сокращению деформаций $\varepsilon_{разг}$, причем коэффициент пропорциональности тот же, что и в начальной стадии нагружения:

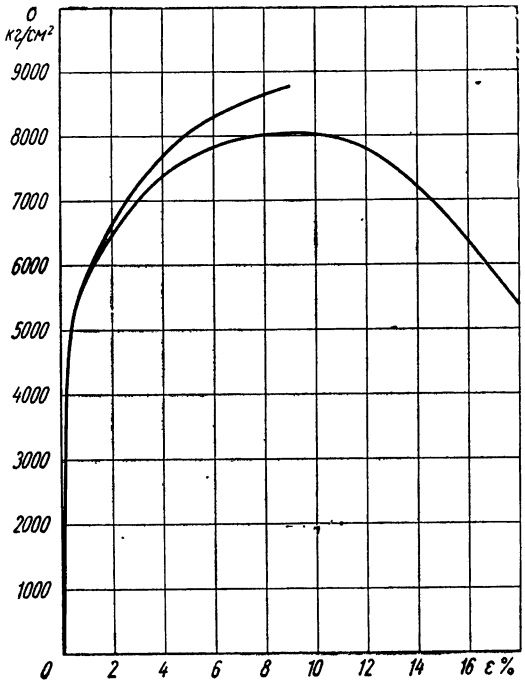
$$\sigma_{разг} = E\,\varepsilon_{разг}. \qquad (1)$$

Соотношение (1) является математической формулировкой закона разгрузки (см. гл. V, т. I).

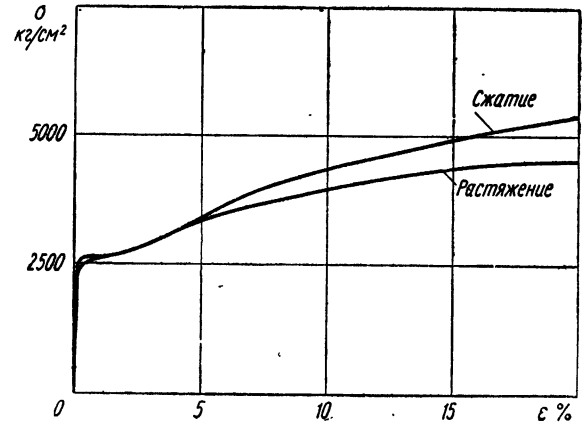
При вторичном нагружении после разгрузки диаграмма растяжения приближенно совпадает с диаграммой разгрузки на всем ее протяжении, а затем с диаграммой первичного нагружения. Следовательно, в результате пластического деформирования предел пропорциональности материала повышается. Однако это справедливо, если знаки первичного и вторичного нагружений совпадают.

Если знак повторного нагружения обратен знаку первичного, то предел пропорциональности оказывается меньшим, чем у материала, не получившего предварительного пластического деформирования. Таким образом, первичное пластическое деформирование материала снижает его сопротивление пластическому деформированию при повторной нагрузке, имеющей направление, противоположное первичному. Это явление называется эффектом Баушингера. Оно иллюстрировано на фиг. 440 на примере растяжения — сжатия. Однако это явление имеет место и в случае чистого сдвига. Заметим, что в большинстве современных теорий пластичности не представляется возможным отразить эффект Баушингера. В работах В. В. Москвитина [31], [32], на основе теории малых упруго-пластических деформаций построены уравнения, приближенно описывающие деформации тел при многократных нагружениях.

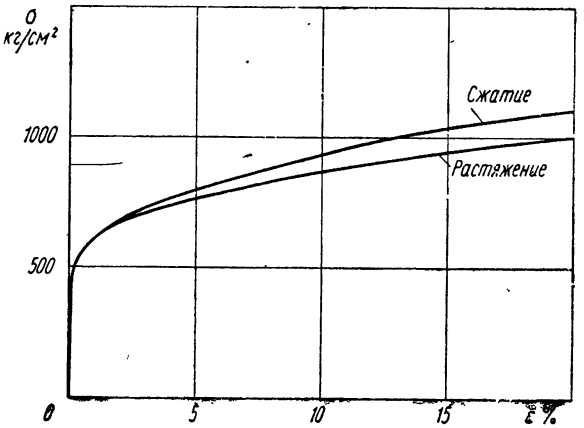
На основании изложенного выше заключаем, что для упруго-пластических материалов при напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала, не существует взаимно однозначного соответствия между напряжением и деформацией. Это означает, что одному и тому же напряжению σ_1 могут соответствовать деформации ε_1 или ε_2 (фиг. 439) в зависимости от того, при каком процессе возникло напряжение: при нагружении или разгрузке. В этом и заключается отличие пластической стадии деформирования от упругой.



Фиг. 436. Условная и действительная диаграммы растяжения стали 40Х

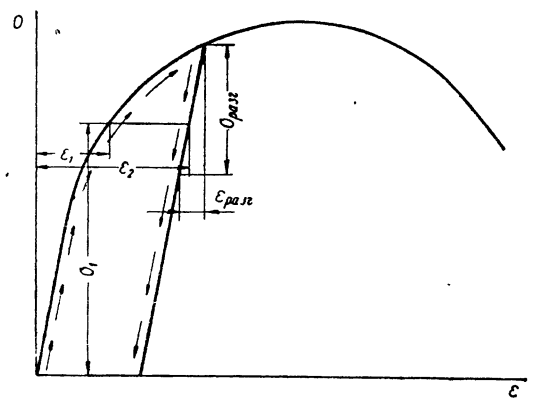


Фиг. 437. Начальные участки действительных диаграмм растяжения и сжатия малоуглеродистой стали.

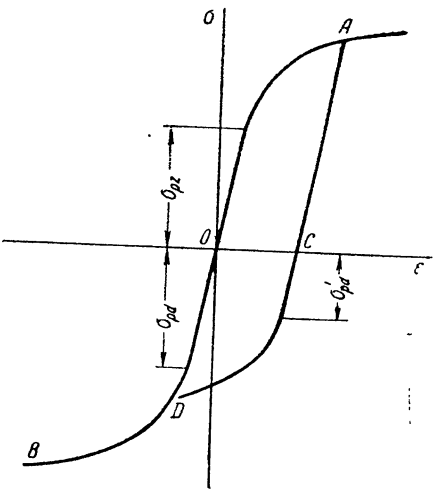


Фиг. 438. Начальные участки действительных диаграмм растяжения и сжатия алюминия.

Иногда ошибочно утверждают, что основное отличие пластического деформирования от упругого состоит в том, что в пределах упругости связь напряжений с деформацией линейная, а за пределами упругости нелинейная. Однако, как известно, существуют такие материалы, например резина, для которых имеет место взаимно однозначное соответствие между напряжениями и деформациями в определенном интер-



Фиг. 439. Диаграмма нагружения и разгрузки упруго-пластического материала за пределами упругости



Фиг. 440. Диаграммы первичного и вторичного растяжения и сжатия:
OA — первичное растяжение; *OB* — первичное сжатие; *AC* — разгрузка; *CD* — вторичное сжатие

вале деформирования, поскольку диаграммы нагружения и разгрузки совпадают (фиг. 441), несмотря на то, что зависимость напряжений от деформаций является нелинейной. Такие материалы в определенном интервале деформирования можно назвать нелинейно упругими.

Расчет деталей в нелинейно упругой стадии деформирования принципиально не отличается от расчета в упруго-пластической стадии при условии, что деталь подвергается нагружению [36].

Для металлов диаграмма растяжения в начале нагружения, как правило, имеет линейный участок, и зависимость напряжения от деформации в случае нагружения

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

при напряжениях, меньших предела пропорциональности, является линейной:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E — модуль упругости первого рода.

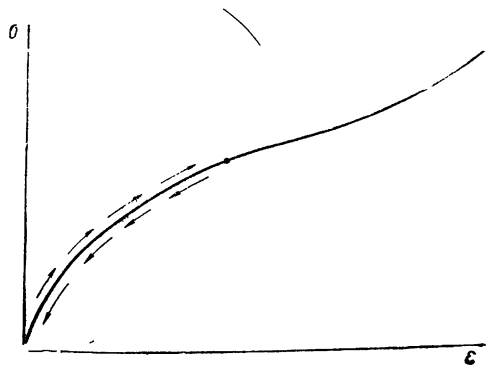
При напряжениях выше предела пропорциональности зависимость напряжений от деформаций уже нелинейна.

Напряжение σ, соответствующее некоторой деформации ε, может быть представлено в определенном масштабе как разность отрезков AB и AC (фиг. 442). Первый отрезок в выбранном масштабе равен условному напряжению $E\varepsilon$, которое соответствует идеально упругому материалу, а второй отражает ту часть этого напряжения, на которую оно понижается за счет пластических свойств материала. Эта часть может

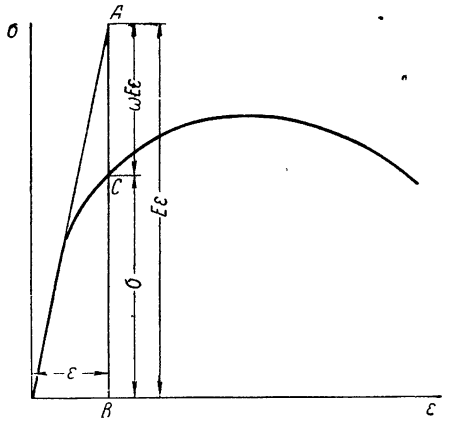
быть представлена в виде $\omega E\varepsilon$, где ω — безразмерная функция деформации. Таким образом, получаем

$$\sigma = E\varepsilon(1 - \omega). \qquad (2)$$

Такая форма зависимости напряжения от деформации, в которой выделена упругая часть, была предложена А. А. Ильюшиным [18]. В связи с этим будем называть функцию ω функцией Ильюшина. Оче-



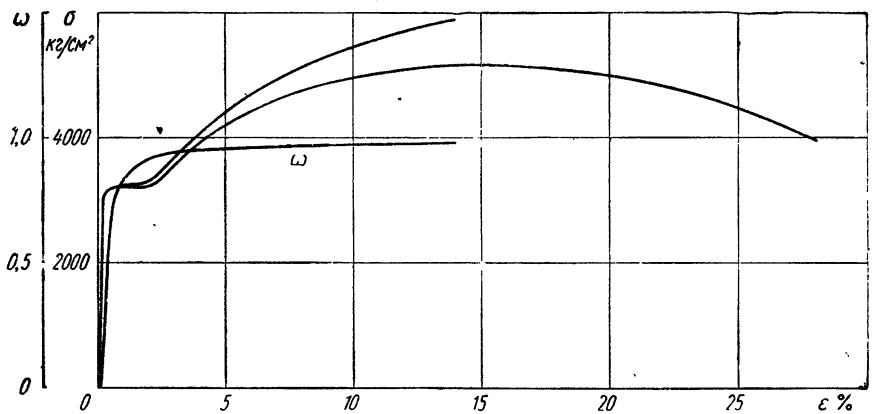
Фиг. 441. Диаграмма нагружения и разгрузки нелинейно упругого материала



Фиг. 442. К определению функции А. А. Ильюшина ω по диаграмме растяжения материала

видно, что эта величина изменяется в пределах $0 \leqslant \omega < 1$. При напряжениях, меньших предела пропорциональности материала, $\omega = 0$.

На фиг. 443 изображены условная и действительная диаграммы растяжения стали 30, а также приведен график функции А. А. Ильюши-



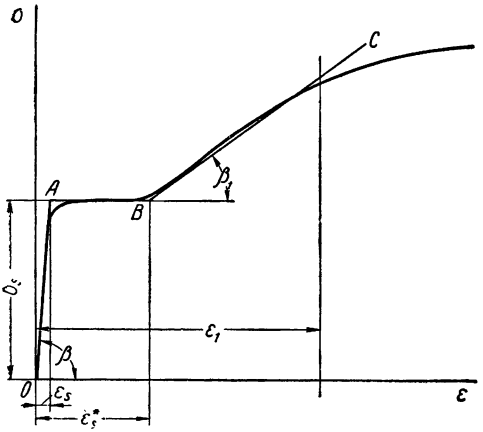
Фиг. 443. Условная и действительная диаграммы растяжения, а также график функции А. А. Ильюшина ω для стали 30

на ω, построенный на базе действительной диаграммы растяжения до деформации ε, соответствующей временному сопротивлению.

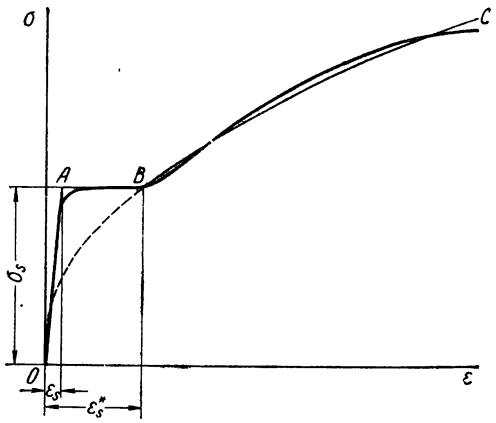
Диаграммы растяжения сводятся в основном к двум типам: к диаграмме с площадкой текучести (фиг. 435) и диаграмме без площадки текучести (фиг. 436). Первая диаграмма характерна для малоуглеро-

дистых и некоторых легированных сталей, вторая — для легированных сталей.

Для получения в расчетах за пределами упругости высокой степени точности следует использовать диаграммы растяжения без аппроксимации их какими-либо уравнениями. Однако это часто приводит к сильному усложнению расчетов, в связи с чем диаграммы растяжения обычно схематизируются, т. е. заменяются линиями (кривыми или прямыми), имеющими достаточно простое математическое выражение и в то же время хорошо совпадающими с экспериментально полученными



Фиг. 444. Схематизация диаграммы растяжения диаграммой с площадкой текучести и линейным упрочнением



Фиг. 445. Схематизация диаграммы растяжения диаграммой с площадкой текучести и степенным упрочнением

диаграммами. Так, например, диаграмма растяжения с площадкой текучести может быть схематизирована ломаной линией, состоящей из трех прямых OA, AB и BC (фиг. 444), или ломаной, состоящей из двух прямых OA и AB и участка параболы BC (фиг. 445). Первая схематизированная диаграмма (фиг. 444) называется диаграммой растяжения с площадкой текучести и линейным упрочнением, а вторая (фиг. 445) — диаграммой растяжения с площадкой текучести и степенным упрочнением.

В расчетах за пределами упругости для получения большей степени точности обычно схематизируется тот участок экспериментально полученной диаграммы, который используется в расчете.

Отметим, что при схематизации диаграмм различие между пределами пропорциональности и текучести стирается. В дальнейшем всюду эти величины различать не будем. Это позволит предел пропорциональности называть пределом текучести.

Приведем зависимости напряжений от деформаций и значения функции А. А. Ильюшина ω на различных участках схематизированных диаграмм.

Для диаграммы растяжения с площадкой текучести и линейным упрочнением:

при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s = \dfrac{\sigma_s}{E}$

$$\sigma = E\varepsilon; \quad \omega = 0; \tag{3}$$

при $\varepsilon_s \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s^*$

$$\sigma = \sigma_s; \quad \omega = 1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon}; \tag{4}$$

при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_s^*$

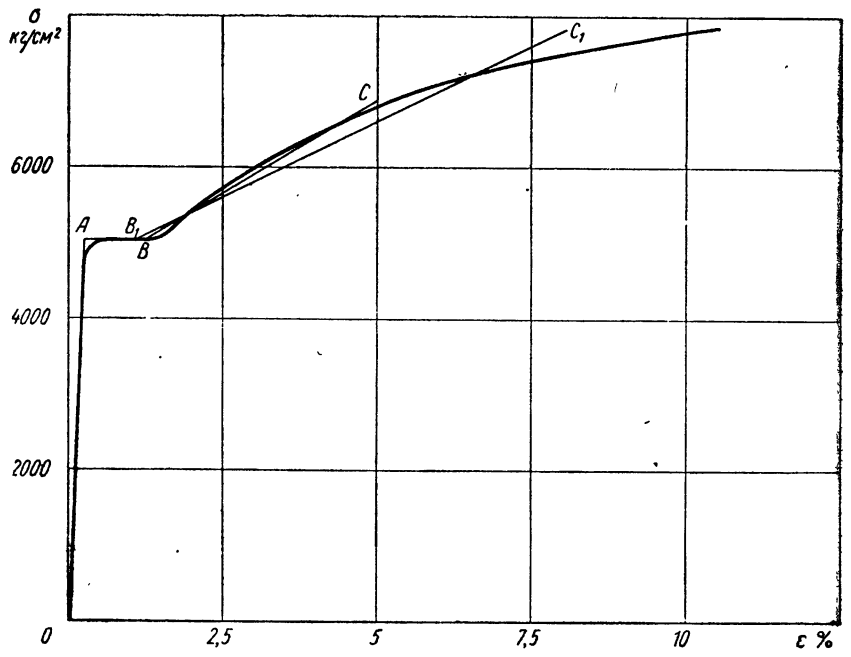
$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s^*); \\ \omega &= \lambda - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon} + (1-\lambda)\frac{\varepsilon_s^*}{\varepsilon}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В этих уравнениях ε_s — деформация, соответствующая пределу текучести материала; ε_s^* — деформация, соответствующая началу упрочнения; E_1 — модуль упрочнения материала в *кг/см*^{2}, численно равный в выбранном масштабе $\operatorname{tg}\beta_1$ (фиг. 444);

$$\lambda = 1 - \frac{E_1}{E} \tag{6}$$

параметр упрочнения.

Заметим, что величина модуля упрочнения зависит от того, как провести прямую *BC*. На фиг. 444 прямая *BC* проведена так, что схематизированная диаграмма может быть использована при деформа-



Фиг. 446. Схематизация начального участка действительной диаграммы растяжения стали 30ХГСА

циях, не превышающих величины ε_1. В случае использования схематизированной диаграммы при больших значениях деформаций необходимо провести прямую *BC* более полого.

На фиг. 446 изображен начальный участок действительной диаграммы растяжения стали 30ХГСА. Если схематизируется участок диаграммы растяжения до величины деформации, равной 5%, прямая упрочнения проводится так, как изображено на фиг. 446 линией *BC*. Тогда

получаем $\varepsilon_s^* = 1{,}25\%$ и $E_1 = 48\,800$ *кг/см*^{2}. В случае необходимости схематизирования участка диаграммы до величины деформации, равной 8%, прямая упрочнения проводится так, как показано на фиг. 446 линией B_1C_1. В этом случае $\varepsilon_s^* = 1{,}1\%$ и $E_1 = 40\,000$ *кг/см*^{2}, а схематизация диаграммы является менее точной, чем в первом варианте. Заметим, что при схематизации с линейным упрочнением обычно величина модуля упрочнения оказывается в 10—50 раз меньше модуля упругости.

Для диаграммы растяжения с площадкой текучести и степенным упрочнением (фиг. 445):

при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s$

$$\sigma = E\varepsilon; \quad \omega = 0; \tag{7}$$

при $\varepsilon_s \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s^*$

$$\sigma = \sigma_s; \ \omega = 1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon}; \tag{8}$$

при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_s^*$

$$\sigma = \sigma_s \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s^*}\right)^m; \ \omega = 1 - \frac{\varepsilon_s \varepsilon^{m-1}}{(\varepsilon_s^*)^m}, \tag{9}$$

где показатель степени m изменяется в пределах $0 < m < 1$.

Диаграмма растяжения без площадки текучести может быть схематизирована ломаной линией, состоящей из двух прямых (фиг. 447), или ломаной, состоящей из прямой и участка параболы (фиг. 448). Первая схематизированная диаграмма называется диаграммой растяжения с линейным упрочнением, а вторая — диаграммой растяжения со степенным упрочнением.

Зависимости напряжений от деформаций и функция А. А. Ильюшина ω для схематизированной диаграммы с линейным упрочнением имеют вид:

при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s$

$$\sigma = E\varepsilon; \ \omega = 0; \tag{10}$$

при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_s$

$$\sigma = \sigma_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s);$$

$$\omega = \lambda\left(1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon}\right). \tag{11}$$

Для схематизированной диаграммы со степенным упрочнением:

при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s$

$$\sigma = E\varepsilon; \quad \omega = 0; \tag{12}$$

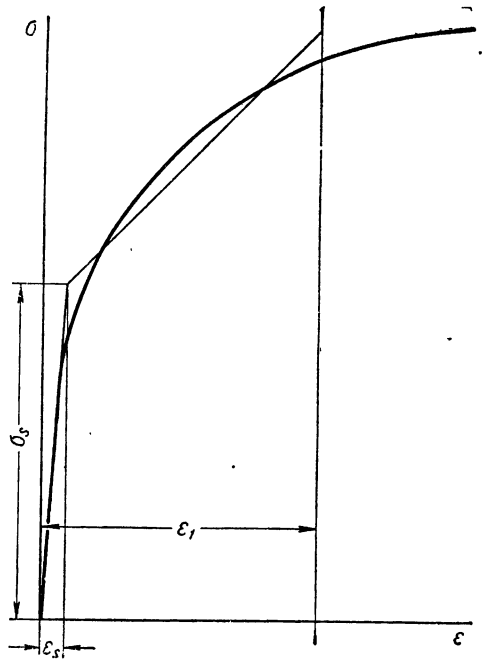
при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_s$

$$\sigma = \sigma_s \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}\right)^m; \ \omega = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}\right)^{m-1}. \tag{13}$$

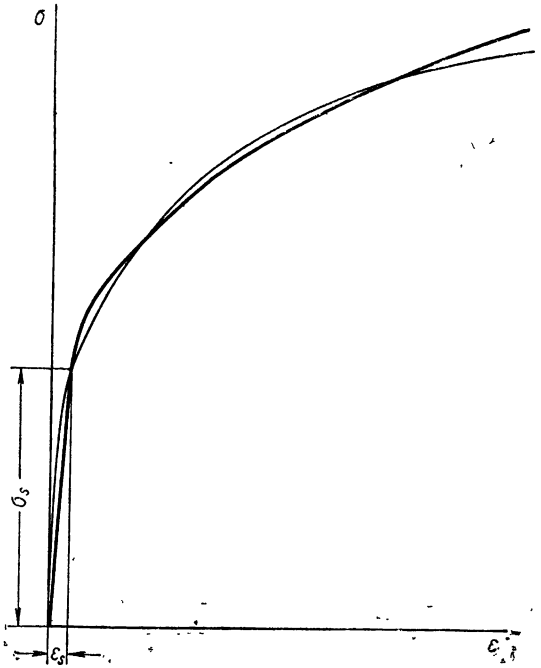
Иногда для упрощения расчетов зависимость напряжений от деформаций не только в области упрочнения, а во всем интервале изменения деформаций апроксимируют степенной функцией

$$\sigma = A\varepsilon^m, \tag{14}$$

причем по-прежнему показатель степени m изменяется в пределах $0 < m < 1$. В этом случае схематизированная диаграмма растяжения

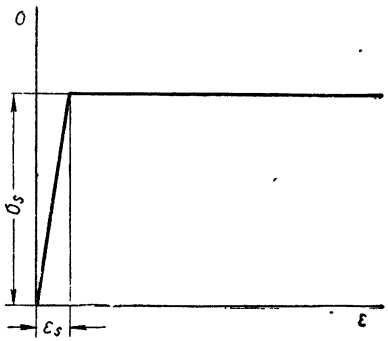


Фиг. 447. Схематизация диаграммы растяжения диаграммой с линейным упрочнением

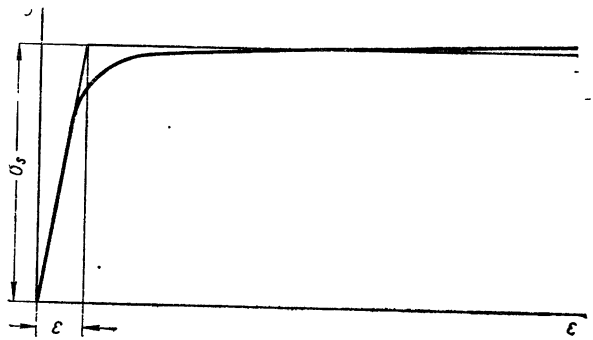


Фиг. 448. Схематизация диаграммы растяжения диаграммой со степенным упрочнением

изображена сплошной тонкой линией на фиг. 448. Надо иметь в виду, что такая схематизация диаграммы растяжения грубо искажает экспериментально полученную диаграмму при малых деформациях. Действительно, как следует из соотношения (14), при $0<m<1$ производная от напряжения по деформации в начале координат равна бесконечности, в то время как в действительности эта величина равна модулю упругости первого рода.



Фиг. 449. Схематизированная диаграмма растяжения без упрочнения — диаграмма растяжения совершенного упруго-пластического тела



Фиг. 450. Схематизация диаграммы растяжения диаграммой без упрочнения

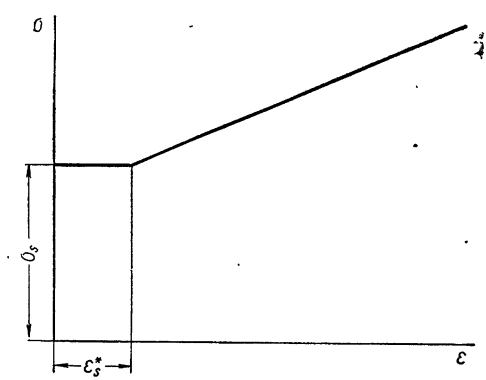
Частным случаем диаграммы с линейным упрочнением (фиг. 447) является диаграмма без упрочнения или так называемая диаграмма совершенного упруго-пластического тела (фиг. 449), для которого модуль упрочнения равен нулю ($E_1=0$). Для такого тела:

при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s$

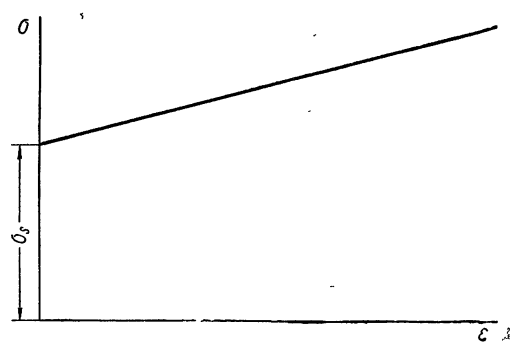
$$\sigma = E\varepsilon; \quad \omega = 0; \tag{15}$$

при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_s$

$$\sigma = \sigma_s; \ \omega = 1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon}. \tag{16}$$



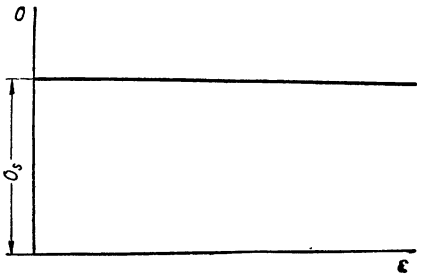
Фиг. 451. Диаграмма жестко упрочняющегося тела с площадкой текучести



Фиг. 452. Диаграмма жестко упрочняющегося тела

Эта диаграмма может быть использована для материалов, имеющих ярко выраженную длинную площадку текучести при условии, что деформации детали не превосходят величины деформации ε_s^*. Кроме

этого, рассматриваемая диаграмма используется в тех случаях, когда она с достаточной степенью точности апроксимирует действительную диаграмму растяжения, например, как это представлено на фиг. 450.



Фиг. 453 Диаграмма жестко пластичного тела

Для упрощения расчетов за пределами упругости иногда модулю упругости придают бесконечное значение. Если добавочно принять линейное упрочнение, то получаем схематизированные диаграммы растяжения, изображенные на фиг. 451—453. Первая диаграмма иногда называется диаграммой жестко упрочняющегося тела с площадкой текучести, вторая — диаграммой жестко упрочняющегося тела и третья — диаграммой жестко пластичного тела [24]. Очевидно, что использование этих диаграмм в расчетах равносильно пренебрежению упругой областью по сравнению с пластической.

§ 4. ПРОСТОЕ И СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТЕЛА

В гл. I, т. I рассмотрено разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор. Тензор напряжений

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & \sigma_y, & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z \end{Vmatrix}$$

был представлен в виде

$$T_\sigma = T_{\sigma_0} + D_\sigma,$$

где

$$T_{\sigma_0} = \begin{Vmatrix} \sigma_0, & 0, & 0 \\ 0, & \sigma_0, & 0 \\ 0, & 0, & \sigma_0 \end{Vmatrix}$$

шаровой тензор напряжений, а

$$D_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_x - \sigma_0, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & \sigma_y - \sigma_0, & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z - \sigma_0 \end{Vmatrix} \tag{17}$$

девиатор напряжений.

Аналогично (см. гл. II, т. I) тензор деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x, & \frac{\gamma_{xy}}{2}, & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2}, & \varepsilon_y, & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2}, & \frac{\gamma_{zy}}{2}, & \varepsilon_z \end{Vmatrix}$$

может быть представлен в виде

$$T_\varepsilon = T_{\varepsilon_0} + D_\varepsilon,$$

где

$$T_{\varepsilon_0} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_0, 0, 0 \\ 0, \varepsilon_0, 0 \\ 0, 0, \varepsilon_0 \end{Vmatrix}$$

шаровой тензор деформаций,

$$D_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0, \frac{\gamma_{xy}}{2}, \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2}, \varepsilon_y - \varepsilon_0, \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2}, \frac{\gamma_{zy}}{2}, \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{Vmatrix} \tag{18}$$

девиатор деформаций.

Напомним, что в выражениях (17) и (18)

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \tag{19}$$

среднее нормальное напряжение,

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \tag{20}$$

средняя линейная деформация.

Девиатор напряжений показывает, насколько заданное напряженное состояние уклоняется от всестороннего равного растяжения, у которого главные напряжения равны среднему арифметическому нормальных напряжений исходного напряженного состояния. Аналогичный смысл имеет девиатор деформаций.

Разложение тензоров напряжений и деформаций на шаровые тензоры и девиаторы имеет большое значение в расчетах за пределами упругости, ввиду того что возникновение и развитие пластических деформаций по современным воззрениям связывают с понятиями девиаторов напряжений и деформаций.

В гл. I и II, т. I были определены интенсивности напряжений и деформаций. Напомним, что интенсивностью напряжений σ_i называется величина, пропорциональная квадратному корню из второго инварианта девиатора напряжений:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \tag{21}$$

а интенсивностью деформаций — величина, пропорциональная квадратному корню из второго инварианта девиатора деформаций:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \tag{22}$$

Выражение интенсивности напряжений через главные напряжения имеет вид

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \tag{23}$$

Интенсивность деформаций связана с главными деформациями соотношением

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}. \tag{24}$$

Интенсивность напряжений пропорциональна октаэдрическому касательному напряжению τ_n, а интенсивность деформаций — октаэдрическому сдвигу γ_n (см. гл. I и II, т. I).

Октаэдрическое касательное напряжение иногда называется интенсивностью касательных напряжений и обозначается τ_i:

$$\tau_i = \tau_n = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)}. \tag{25}$$

Аналогично октаэдрический сдвиг иногда называется интенсивностью деформаций сдвига и обозначается

$$\gamma_i = \gamma_n = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+\frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)}. \tag{26}$$

Сопоставляя формулы (23) и (25), а также (24) и (26), заключаем, что

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_i; \qquad \varepsilon_i = \frac{\gamma_i}{\sqrt{2}}. \tag{27}$$

Введем понятия направляющих тензоров напряжений и деформаций, необходимые для дальнейшего изложения.

Направляющим тензором напряжений называется отношение девиатора напряжений D_σ к интенсивности касательных напряжений τ_i

$$\bar{D}_\sigma = \frac{D_\sigma}{\tau_i} = \begin{Vmatrix} \bar{\sigma}_x, & \bar{\tau}_{xy}, & \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{\tau}_{yx}, & \bar{\sigma}_y, & \bar{\tau}_{yz} \\ \bar{\tau}_{zx}, & \bar{\tau}_{zy}, & \bar{\sigma}_z \end{Vmatrix}, \tag{28}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x-\sigma_0}{\tau_i}; \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_i}; \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{\tau_i}; \\ &\bar{\tau}_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{\tau_i}; \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y-\sigma_0}{\tau_i}; \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_i}; \\ &\bar{\tau}_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{\tau_i}; \quad \bar{\tau}_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{\tau_i}; \quad \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z-\sigma_0}{\tau_i} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

представляют собой компоненты направляющего тензора напряжений.

Аналогично направляющим тензором деформаций называется отношение девиатора деформаций D_ε к половине интенсивности деформаций сдвига $\frac{\gamma_i}{2}$:

$$\bar{D}_\varepsilon = \frac{2D_\varepsilon}{\gamma_i} = \begin{Vmatrix} \bar{\varepsilon}_x, & \frac{\bar{\gamma}_{xy}}{2}, & \frac{\bar{\gamma}_{xz}}{2} \\ \frac{\bar{\gamma}_{yx}}{2}, & \bar{\varepsilon}_y, & \frac{\bar{\gamma}_{yz}}{2} \\ \frac{\bar{\gamma}_{zx}}{2}, & \frac{\bar{\gamma}_{zy}}{2}, & \bar{\varepsilon}_z \end{Vmatrix}, \tag{30}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\varepsilon}_x = 2\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_0}{\gamma_i}; \quad \bar{\gamma}_{xy} = 2\frac{\gamma_{xy}}{\gamma_i}; \quad \bar{\gamma}_{xz} = 2\frac{\gamma_{xz}}{\gamma_i}; \\ &\bar{\gamma}_{yx} = 2\frac{\gamma_{yx}}{\gamma_i}; \quad \bar{\varepsilon}_y = 2\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_0}{\gamma_i}; \quad \bar{\gamma}_{yz} = 2\frac{\gamma_{yz}}{\gamma_i}; \\ &\bar{\gamma}_{zx} = 2\frac{\gamma_{zx}}{\gamma_i}; \quad \bar{\gamma}_{yz} = 2\frac{\gamma_{yz}}{\gamma_i}; \quad \bar{\varepsilon}_z = 2\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_0}{\gamma_i} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

являются компонентами направляющего тензора деформаций.

Из соотношений (29) и (31) следует, что компоненты направляющих тензоров напряжений и деформаций — безразмерные величины.

Подставляя эти компоненты в выражения (25) и (26), заключаем, что интенсивность касательных напряжений для напряженного состояния, характеризуемого направляющим тензором напряжений, равна единице, а интенсивность деформаций сдвига для деформированного состояния, определяемого направляющим тензором деформаций, равна двум.

Обозначим главные компоненты направляющего тензора напряжений $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ и $\bar{\sigma}_3$, а главные компоненты направляющего тензора деформаций $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$ и $\bar{\varepsilon}_3$; тогда, согласно соотношениям (29), (19) и (25) а также (31), (20) и (26),

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3 = 0; \\ &(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3)^2 + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1)^2 = 9; \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 = 0; \\ &(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2)^2 + (\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3)^2 + (\bar{\varepsilon}_3 - \bar{\varepsilon}_1)^2 = \frac{9}{4}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Таким образом, имеем по два соотношения между главными компонентами направляющих тензоров напряжений и деформаций. Зададим еще по одному соотношению между этими величинами в виде

$$\chi_\sigma = \frac{\bar{\sigma}_2 - \dfrac{\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3}{2}}{\dfrac{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3}{2}} = \frac{2\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3}{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3}; \tag{34}$$

$$\chi_\varepsilon = \frac{\bar{\varepsilon}_2 - \dfrac{\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_3}{2}}{\dfrac{\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3}{2}} = \frac{2\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3}{\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3}. \tag{35}$$

Величины χ_σ и χ_ε называются параметрами Надаи — Лоде. Отметим, что можно было бы взять любые независимые от выражений (32) и (33) соотношения. Однако, как будет установлено позднее, соотношения (34) и (35) удобны для формулировки гипотез теории малых упруго-пластических деформаций.

На основании выражений (29) и (31) заключаем, что

$$\chi_\sigma = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}; \tag{36}$$

$$\chi_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}}{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}} = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}. \tag{37}$$

Очевидно, что эти величины представляют собой отношения отрезков (фиг. 454):

$$\chi_\sigma = \frac{MB}{MC}; \quad \chi_\varepsilon = \frac{M_1B_1}{M_1C_1}.$$

Решая совместно уравнения (32) и (34), а также (33) и (35), устанавливаем:

$$\bar{\sigma}_1 = \pm \frac{3 - \chi_\sigma}{\sqrt{2(3 + \chi_\sigma^2)}}; \quad \bar{\sigma}_2 = \pm \frac{2\chi_\sigma}{\sqrt{2(3 + \chi_\sigma^2)}};$$

$$\bar{\sigma}_3 = \mp \frac{3 + \chi_\sigma}{\sqrt{2(3 + \chi_\sigma^2)}};$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = \pm \frac{3 - \chi_\varepsilon}{2\sqrt{2(3 + \chi_\varepsilon^2)}}; \quad \bar{\varepsilon}_2 = \pm \frac{\chi_\varepsilon}{\sqrt{2(3 + \chi_\varepsilon^2)}};$$

$$\bar{\varepsilon}_3 = \mp \frac{3 + \chi_\varepsilon}{2\sqrt{2(3 + \chi_\varepsilon^2)}}.$$

Таким образом, зная параметры Надаи — Лоде χ_σ и χ_ε, можно определить главные компоненты направляющих тензоров напряжений и деформаций $\bar{D}_\sigma$ и $\bar{D}_\varepsilon$.

Следовательно, направляющие тензоры напряжений и деформаций определяются четырьмя независимыми компонентами: тремя параметрами направления главных осей и величиной одного главного компонента или отношением любой пары главных компонентов.

Перейдем к рассмотрению простого и сложного нагружения тела. *Простым нагружением тела называется такое нагружение, при котором направляющие тензоры напряжений в каждой точке тела сохраняют постоянные для этой точки значения.* Очевидно, что это имеет место в том случае, когда при нагружении во всех точках тела компоненты напряжения возрастают пропорционально некоторому параметру β (β — время или другая величина, определяющая последовательные значения напряжений, например, характерная нагрузка).

Если при нагружении хотя бы в одной точке тела направляющий тензор напряжений изменяется, то нагружение называется сложным.

В случае однородного напряженного состояния нагружение тела будет простым при возрастании внешних сил пропорционально одному

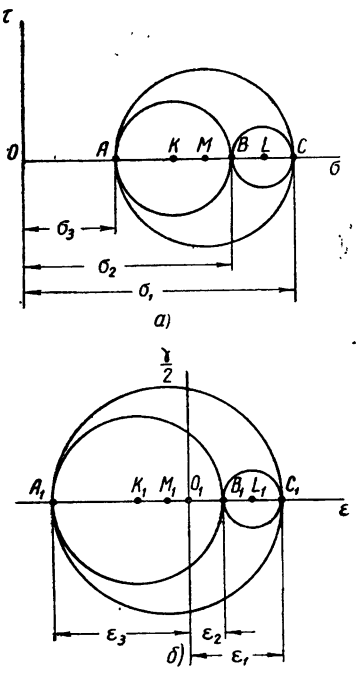
общему для всех сил параметру. Это объясняется тем, что при однородном напряженном состоянии, возможном только в случае отсутствия массовых сил, деформированное состояние тоже будет однородным. Тогда дифференциальные уравнения равновесия (см. § 8 этой главы) и условия совместности деформаций (см. гл. II, т. I) выполняются тождественно. Поэтому напряженное состояние определяется только граничными условиями, т. е. только поверхностными силами. Следовательно, при возрастании их пропорционально некоторому параметру напряжения во всех точках тела будут возрастать пропорционально тому же параметру и нагружение тела будет простым.

Вопрос о том, как в процессе нагружения должны возрастать внешние силы для того, чтобы в общем случае неоднородного напряженного состояния направляющий тензор напряжений оставался постоянным, т. е. нагружение было простым, в общем виде не решен. А. А. Ильюшиным дано [18] частное решение этой задачи.

Им доказано, что *для того, чтобы направляющие тензоры напряжений во всех точках тела оставались постоянными в процессе нагружения его силами, возрастающими пропорционально общему параметру* β, *достаточно, чтобы зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций была степенной функцией вида*

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m. \qquad (38)$$

Это положение называется теоремой о простом нагружении. Оно будет доказано в § 11 этой главы. Заметим, что соблюдение зависимости (38) является условием достаточным, но не необходимым для обеспечения простого нагружения.



Фиг. 454. Круговые диаграммы напряжений (*а*) и деформаций (*б*)

Простое нагружение имеет место в некоторых частных случаях при возрастании внешних сил пропорционально одному общему для всех сил параметру, если зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций отлична от зависимости (38) [18]. С другой стороны, при отсутствии упрочнения в случае нагружения тела силами, возрастающими пропорционально общему параметру, элементы тела могут испытывать сложное нагружение и даже разгрузку [18], [23], [44].

Д. Д. Ивлевым [17] недавно было показано, что если зависимость интенсивности напряжений от интеснивности деформаций имеет вид полинома, то для осуществления простого нагружения тела необходимо приложение внешних сил, изменяющихся непропорционально одному общему для всех сил параметру. В таком случае, как показано в работе [17], простое нагружение тела вообще практически неосуществимо.

Несмотря на это, учитывая, что выражение (38) с достаточной степенью точности апроксимирует зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций в области пластических деформаций, приближенно можно считать, что нагружение тела будет простым, если

внешние силы возрастают пропорционально одному общему для всех сил параметру.

Введем еще понятия активной и пассивной деформаций. *Деформация элемента тела называется активной, если интенсивность напряжений не меньше всех предшествующих значений этой величины. Если интенсивность напряжений меньше хотя бы одного из ее предшествующих значений, то деформация элемента называется пассивной.* Иначе говоря, активная деформация есть процесс нагружения, а пассивная — процесс разгрузки. В случае активной деформации тела за пределами упругости пластическая деформация его возрастает, а в случае пассивной остается постоянной, так как разгрузка сопровождается уменьшением лишь упругой части деформации.

§ 5. НАЗНАЧЕНИЕ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Расчеты за пределами упругости при одноосном напряженном состоянии производятся на основе диаграммы растяжения материала. В случае неодноосного напряженного состояния для расчета необходимо располагать зависимостями компонентов напряжений от компонентов деформаций за пределами упругости. Эти зависимости устанавливаются в теории пластичности.

Вначале не будем рассматривать вопросов пластичности, связанных с фактором времени (ползучесть). Расчетам на ползучесть посвящен следующий раздел настоящего тома. Тогда задачи теории пластичности заключаются в том, чтобы по заданным внешним силам или деформациям отдельных частей тела (или по тому и другому вместе) определить напряжения и деформации во всех точках детали; установить остаточные напряжения и деформации после полной или частичной разгрузки; выяснить, как меняются механические свойства материала в результате пластической деформации; найти напряжения и деформации при повторных нагружениях тела. Существующие в настоящее время теории пластичности можно разбить на две группы.

В первой группе теорий устанавливаются зависимости между напряжениями и деформациями. Они могут быть названы теориями деформационного типа.

Во второй группе рассматриваются связи между бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжений, а также самими напряжениями. В частном случае устанавливаются зависимости скорости деформаций от напряжений. В этих теориях пластическая деформация рассматривается как процесс пластического течения материала. Поэтому они называются теориями течения.

Основные уравнения теорий первой группы более просты и удобны для конструктивных расчетов в инженерной практике, чем теорий второй группы. В случае простого нагружения, как доказано А. А. Ильюшиным [18], различные теории деформационного типа и теории течения совпадают и существует единая теория пластичности. Эта теория называется теорией малых упруго-пластических деформаций.

Как будет показано в § 7 этой главы, теория малых упруго-пластических деформаций хорошо подтверждается опытами в случае простого нагружения тела. При сложном нагружении она, строго говоря, несправедлива, хотя при слабой зависимости направляющего тензора напряжений от параметра β ее результаты приближенно верны. Для сложного нагружения в настоящее время теории пластичности не существует, ввиду того что результаты экспериментального изучения сложного на-

гружения еще недостаточны для того, чтобы или окончательно остановиться на какой-нибудь из существующих теорий пластичности, или разработать совершенно новую теорию пластичности. Пока имеются лишь отдельные попытки создания такой теории.

В работах Гу и Марина [69] и В. В. Новожилова [38] рассмотрен класс сложных нагружений, при котором сохраняются направления главных осей в течение всего процесса деформирования. В статье [38] показно, что для этого случая может быть построена достаточно простая теория интегрирования дифференциальных зависимостей деформаций от напряжений.

В работе А. А. Ильюшина [19] обсуждаются результаты экспериментальных исследований и гипотезы, позволяющие дать в первом приближении простейшие формулировки основных соотношений теории пластичности при сложном нагружении.

§ 6. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Рассмотрим основные гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций и на их базе установим зависимости между напряжениями и деформациями за пределами упругости. Заметим, что сформулированные ниже гипотезы справедливы и в пределах упругости.

Таким образом, основные положения теории малых упруго-пластических деформаций являются обобщениями соответствующих положений в теории упругости.

В основу теории малых упруго-пластических деформаций положены следующие гипотезы.

1. Объемная деформация пропорциональна среднему нормальному напряжению, причем связывающий их коэффициент пропорциональности тот же, что и в пределах упругости.

2. Направляющие тензоры напряжений и деформаций совпадают.

3. Интенсивность напряжений является вполне определенной функцией интенсивности деформаций, не зависящей от характера напряженного состояния.

Перейдем к более подробному разбору этих положений.

Согласно первой гипотезе

$$\Delta = c\,\sigma_0,$$

причем коэффициент пропорциональности c тот же, что и в пределах упругости, а это означает [см. соотношения (6) и (7), гл. III, т. I, выражения (71), гл. II, т. I, а также формулы (19)], что

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta}{3} = \frac{1-2\mu}{E}\,\sigma_0. \tag{39}$$

Как будет показано ниже (см. § 7), экспериментально установлено, что изменение объема сравнительно невелико и им можно пренебречь. Поэтому в приближенных расчетах можно положить

$$\varepsilon_0 = 0. \tag{40}$$

В таком случае принято говорить, что материал несжимаем, а условие (40) представляет собой условие несжимаемости.

Заметим, что, используя формулу (40), можно выражение для интенсивности деформаций (22) преобразовать к виду

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \qquad (41)$$

или, если воспользоваться главными деформациями, то в этом случае

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}. \qquad (42)$$

Как следует из формулы (39), допущение о равенстве объемной деформации нулю эквивалентно предположению, что коэффициент поперечной деформации равен $\mu = 0{,}5$.

Математическая формулировка второй гипотезы имеет вид

$$\overline{D}_\sigma = \overline{D}_\varepsilon,$$

откуда, используя соотношения (28), (30) и (27), устанавливаем, что

$$D_\sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} D_\varepsilon.$$

Из пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций следует, что компоненты их также пропорциональны, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_x - \varepsilon_0); & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_y - \varepsilon_0); & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_z - \varepsilon_0); & \tau_{zx} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{zx}. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Решим уравнения (43) относительно компонентов деформаций, используя при этом соотношения (39) и (19). Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} + \frac{1-2\mu}{3E}\right)\sigma_x - \left(\frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i} - \frac{1-2\mu}{3E}\right)(\sigma_y + \sigma_z); \\ \varepsilon_y &= \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} + \frac{1-2\mu}{3E}\right)\sigma_y - \left(\frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i} - \frac{1-2\mu}{3E}\right)(\sigma_z + \sigma_x); \\ \varepsilon_z &= \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} + \frac{1-2\mu}{3E}\right)\sigma_z - \left(\frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i} - \frac{1-2\mu}{3E}\right)(\sigma_x + \sigma_y); \\ \gamma_{xy} &= \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{xy};\quad \gamma_{yz} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{yz};\quad \gamma_{zx} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{zx}. \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Обратим внимание на то, что уравнения (44) по внешней форме напоминают зависимости деформаций от напряжений в пределах упругости. Действительно, последние соотношения имеют вид (см. гл. III, т. I)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xe} &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_{ye} &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

$$\varepsilon_{ze} = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)];$$

$$\gamma_{xye} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yze} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zxe} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Однако зависимости (44) значительно сложнее соотношений (45), потому что в них, кроме постоянных величин модулей упругости и коэффициента поперечной деформации, сомножителем при компонентах напряжения входит отношение интенсивности напряжений к интенсивности деформаций, которое, в свою очередь, зависит от компонентов напряжения или деформации. Таким образом, зависимости (44) в отличие от выражений (45) являются нелинейными.

Принимая условие несжимаемости материала (40), приводим уравнения (43) к виду

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_x; \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_y; \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_z; \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{zx}. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Если пластическое деформирование сопровождается нагревом тела, то зависимости (44) остаются в силе, а в соотношение (39) добавляется слагаемое равное температурной деформации θ. В этом случае соотношение (39) принимает вид

$$\varepsilon_0 = \frac{1-2\mu}{E}\sigma_0 + \theta. \tag{47}$$

Напомним (см. гл. III, т. I), что при нагреве от температуры $\vartheta_н$ до температуры ϑ температурная деформация θ определяется по формуле

$$\theta = \alpha_{ср}(\vartheta - \vartheta_н),$$

где $\alpha_{ср}$ — среднее значение коэффициента линейного расширения в интервале температур $\vartheta - \vartheta_н$.

Принимая условие несжимаемости материала ($\mu = 0{,}5$) из соотношения (47), получаем

$$\varepsilon_0 = \theta. \tag{48}$$

Для того чтобы лучше выяснить сущность второй гипотезы, рассмотрим иные ее формулировки.

Построим круговые диаграммы напряжений и деформаций для некоторых наиболее простых напряженных состояний: одноосного растяжения, одноосного сжатия и чистого сдвига.

Для одноосного растяжения (фиг. 455)

$$\sigma_1 = \sigma; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \tag{49}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{3}{2}\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{50}$$

Для одноосного сжатия (фиг. 456)

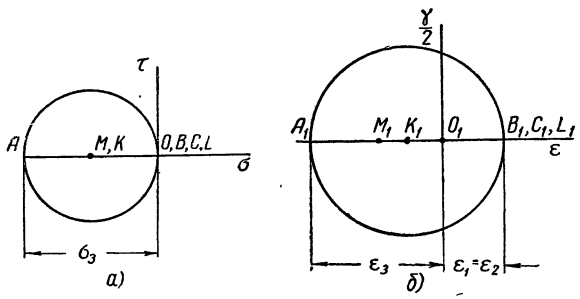
$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\sigma; \tag{51}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{3}{2}\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon}{2}; \quad \varepsilon_3 = -\varepsilon. \tag{52}$$

Для чистого сдвига (фиг. 457)

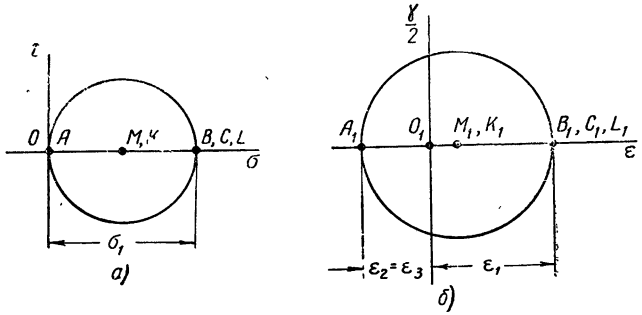
$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau; \tag{53}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma}{2}; \quad \varepsilon_2 = 0; \quad \varepsilon_3 = -\frac{\gamma}{2}. \tag{54}$$



Фиг. 455. Круговые диаграммы напряжений (*а*) и деформаций (*б*) для одноосного растяжения

Отметим, что на фиг. 455—457 круговые диаграммы деформаций построены в предположении, что материал в пластическом состоянии несжимаем.



Фиг. 456. Круговые диаграммы напряжений (*а*) и деформаций (*б*) для одноосного сжатия

Вычислим параметры Надаи — Лоде χ_σ и χ_ε [см. формулы (36) и (37)] для рассматриваемых простейших напряженных состояний. По формулам (36) и (37), учитывая приведенные выше значения главных напряжений и главных деформаций [формулы (49)—(54)], получаем:

для одноосного растяжения

$$\chi_\sigma = \chi_\varepsilon = -1;$$

для одноосного сжатия

$$\chi_\sigma = \chi_\varepsilon = 1;$$

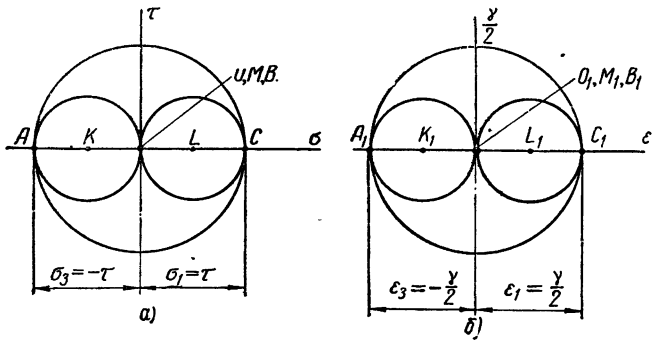
для чистого сдвига

$$\chi_\sigma = \chi_\varepsilon = 0.$$

Назовем круговые диаграммы напряжений и деформаций подобными в том случае, когда параметры Надаи — Лоде равны, т. е.

$$\chi_\sigma = \chi_\varepsilon. \tag{55}$$

Следовательно, для выбранных простейших напряженных состояний круговые диаграммы напряжений и деформаций подобны в уста-



Фиг. 457. Круговые диаграммы напряжений (*а*) и деформаций (*б*) для чистого сдвига

новленном выше смысле. Естественно предположить, что круговые диаграммы напряжений и деформаций подобны для всех напряженных состояний.

Подставляя в условие (55) величины χ_σ и χ_ε по формулам (36) и (37), получим

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3},$$

что после преобразований приводит к выражению

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} = \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{\varepsilon_2 - \varepsilon_0} = \frac{\sigma_3 - \sigma_0}{\varepsilon_3 - \varepsilon_0}. \tag{56}$$

Таким образом, исходя из гипотезы подобия круговых диаграмм напряжений и деформаций, получено условие пропорциональности компонентов девиаторов напряжений и деформаций. Следовательно, можно предложить иную формулировку второй гипотезы: направления главных нормальных напряжений и главных линейных деформаций совпадают, а круговые диаграммы напряжений и деформаций подобны.

Заметим также, что положение о совпадении главных нормальных напряжений и главных линейных деформаций представляет собой лишь иную формулировку экспериментально установленного факта совпадения направлений главных касательных напряжений и главных деформаций сдвига.

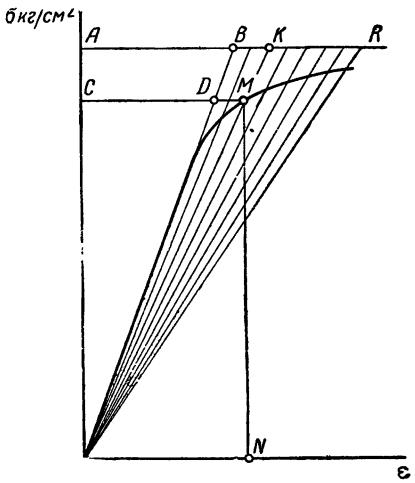
Из соотношений (56), используя выражения (19) и (20), после преобразования получаем следующие пропорции:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}$$

или, учитывая выражения (44) гл. I, т. I и (61) гл. II, т. I, имеем

$$\frac{\tau_1}{\gamma_1} = \frac{\tau_2}{\gamma_2} = \frac{\tau_3}{\gamma_3}.$$

Таким образом, вторая гипотеза может быть сформулирована еще и так: направления главных нормальных напряжений и главных линейных деформаций совпадают, а главные касательные напряжения пропорциональны главным угловым деформациям.



Фиг. 458. К графоаналитическому методу построения диаграммы деформирования по диаграмме растяжения

Перейдем теперь к рассмотрению третьей гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций, согласно которой интенсивность напряжений является определенной функцией интенсивности деформаций, не зависящей от характера напряженного состояния. В соответствии с третьей гипотезой для определения зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций можно воспользоваться результатами испытаний на растяжение. Проведение последних, как правило, проще, чем испытаний при иных типах нагружения.

График зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций будем называть диаграммой деформирования материала.

Рассмотрим построение диаграммы деформирования по диаграмме растяжения. Для одноосного растяжения на основании выражений (23), (24), (49) и (50)

$$\sigma_i = \sigma; \tag{57}$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \varepsilon_0 \tag{58}$$

или, учитывая соотношения (39), (19) и (49),

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \frac{1-2\mu}{3E}\sigma. \tag{59}$$

Представим полную деформацию ε в виде суммы деформаций упругой ε_e и пластической ε_p; тогда, учитывая, что $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$, приведем выражение (5) к следующему виду:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{3E}\left[2(1+\mu) + 3\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e}\right]\sigma_i. \tag{60}$$

Формулы (57) и (60) позволяют по диаграмме растяжения построить диаграмму деформирования.

Для этого пересчета может быть использовано следующее вспомогательное построение, представленное на фиг. 458. Продолжим прямую линию, отражающую закон Гука, до пересечения с некоторой пря-

мой AR, проведенной параллельно оси абсцисс на произвольно выбранном от нее расстоянии. Очевидно, что

$$\frac{DM}{CD} = \frac{BK}{AB},$$

но

$$DM = \varepsilon_p; \quad CD = \varepsilon_e,$$

и, следовательно,

$$\frac{BK}{AB} = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e}.$$

Примем отрезок AB за единицу масштаба для шкалы переменного отношения $\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e}$. В точке B ставим ноль шкалы. Далее делим линию BR на равные части, составляющие некоторую долю от отрезка AB, и проводим лучи из начала координат через намеченные деления. Ординаты точек пересечения лучей с диаграммой растяжения дают величины $\sigma = \sigma_i$. Таким образом, задаваясь величиной отношения $\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e}$, по диаграмме растяжения находим $\sigma = \sigma_i$, а по формуле (60) вычисляем ε_i. Затем по установленным координатам строим диаграмму деформирования. Отметим, что изложенный графоаналитический прием впервые был использован Г. А. Смирновым-Аляевым для построения диаграммы сдвига по диаграмме растяжения [49].

Рассмотрим предложенный А. Н. Чекановым [65] чисто графический метод построения диаграммы деформирования по диаграмме растяжения материала.

Возьмем на диаграмме растяжения материала OA_1A (фиг. 459) произвольную точку A_1 с координатами ε, σ. Как следует из соотношений (57) и (59), ордината соответствующей ей точки на диаграмме деформирования равна ординате точки A_1, а абсцисса меньше абсциссы точки A_1 на величину $\frac{1-2\mu}{3E}\sigma$.

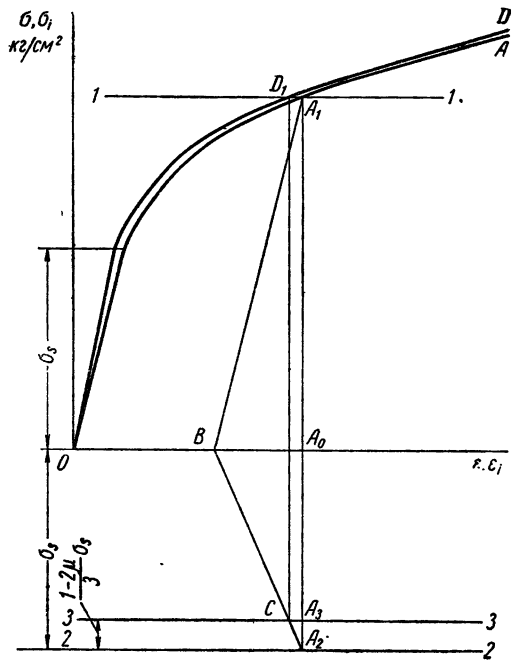
Таким образом, точка на диаграмме деформирования, соответствующая точке A_1, лежит на горизонтали *1—1*, проведенной через точку A_1. Для определения положения ее на этой горизонтали проведем вспомогательную горизонтальную прямую *2—2* на расстоянии σ_s от оси ε и вторую вспомогательную горизонтальную прямую *3—3* на расстоянии $\frac{1-2\mu}{E}\sigma_s$ от прямой *2—2*. Опустим из точки A_1 перпендикуляр на направление оси ε и обозначим точки пересечения его с осью ε и прямыми *2—2* и *3—3* A_0, A_2 и A_3 соответственно. Далее из точки A_1 до оси ε проведем прямую линию A_1B, параллельную начальному линейному участку диаграммы растяжения. Очевидно, что на основании закона разгрузки отрезок A_0B в масштабе оси абсцисс будет равен $\frac{\sigma}{E}$. Соединим теперь точку B с точкой A_2 и обозначим точку пересечения отрезка BA_2 с прямой *3—3* через C.

Очевидно, что

$$\frac{CA_3}{BA_0} = \frac{A_3A_2}{A_0A_2} = \frac{1-2\mu}{3}.$$

Учитывая, что отрезок BA_0 в определенном масштабе равен $\frac{\sigma}{E}$, заключаем, что отрезок CA_3 в том же масштабе равен $\frac{1-2\mu}{3}\cdot\frac{\sigma}{E}$.

Следовательно, для получения точки на диаграмме деформирования необходимо через точку C провести вертикаль. Точка D_1 пересечения ее с горизонталью *1—1* и определяет положение точки на диаграмме деформирования, соответствующей точке A_1. Повторяя подобные построения для ряда исходных точек A_1 на диаграмме растяжения, получим диаграмму деформирования (линия OD_1D на фиг. 459).



Фиг. 459. К графическому методу построения диаграммы деформирования по диаграмме растяжения [65]

Если принять условие несжимаемости материала (40), то тогда из соотношений (57) и (58) заключаем, что диаграмма деформирования материала совпадает с диаграммой растяжения.

Получим теперь условие возникновения пластических деформаций, исходя из теории малых упруго-пластических деформаций. При одноосном напряженном состоянии образование пластических деформаций начинается в том случае, когда $\sigma=\sigma_s$. Следовательно, в общем случае неодноосного напряженного состояния материала на основании формулы (57) образование пластических деформаций начинается при $\sigma_i=\sigma_s$. Используя формулу (21), представим условие наступления текучести при неодноосном напряженном состоянии в следующем виде:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)}=\sigma_s.$$

Таким образом, по теории малых упруго-пластических деформаций условие наступления текучести совпадает с условием по энергетической гипотезе (см. гл. VI, т. I).

Установим зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций в форме выражения (2). При этом учтем, что для случая одноосного растяжения интенсивность деформаций в пределах упругости при $\sigma<\sigma_s$ по формулам (59) и (3)

$$\varepsilon_i=\frac{2}{3}(1+\mu)\varepsilon. \qquad (61)$$

Обозначим величину интенсивности деформаций, при которой в материале возникают пластические деформации, через ε_{is}. По формуле (61) получим

$$\varepsilon_{is} = \frac{2}{3}(1+\mu)\,\varepsilon_s. \tag{62}$$

В пределах упругости при $\varepsilon_i \leqslant \varepsilon_{is}$ согласно формулам (57) и (61), имеем

$$\sigma_i = 3G\,\varepsilon_i, \tag{63}$$

поэтому зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций, аналогичная соотношению (2), имеет вид

$$\sigma_i = 3G\,\varepsilon_i\,(1-\omega_i). \tag{64}$$

По формулам (64), (2), (57) и (59) устанавливаем, что

$$\omega_i = \frac{3\omega}{2(1+\mu)+(1-2\mu)\,\omega}. \tag{65}$$

Если принять условие несжимаемости материала ($\mu=0{,}5$), то из соотношения (65) получим

$$\omega_i = \omega,$$

что, впрочем, очевидно, поскольку, как отмечалось выше, в этом случае диаграмма деформирования совпадает с диаграммой растяжения материала.

Перейдем теперь к установлению аналитических зависимостей интенсивности напряжений от интенсивности деформаций при схематизированных диаграммах растяжения. Вначале примем, что диаграмма растяжения имеет площадку текучести и линейное упрочнение. При $\varepsilon_i \leqslant \varepsilon_{is}$ $\sigma_i \leqslant \sigma_s$ зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций определяется формулой (63). Обозначим через ε^*_{is} интенсивность деформаций, при которой на диаграмме деформирования кончается площадка текучести и начинается область упрочнения. По формуле (59) имеем

$$\varepsilon^*_{is} = \varepsilon^*_s - \frac{1-2\mu}{3E}\,\sigma_s, \tag{66}$$

тогда на основании выражений (57) и (4) при $\varepsilon_{is} \leqslant \varepsilon_i \leqslant \varepsilon^*_{is}$

$$\sigma_i = \sigma_s. \tag{67}$$

Подставляя в уравнение (5) σ и ε по формулам (57) и (59), используя выражение (66), после преобразований получим, что при $\varepsilon_i \geqslant \varepsilon^*_{is}$

$$\sigma_i = \sigma_s + D_1(\varepsilon_1 - \varepsilon^*_{is}), \tag{68}$$

где

$$D_1 = \frac{E_1}{1-\frac{E_1}{3E}(1-2\mu)}. \tag{69}$$

Допустим теперь, что диаграмма растяжения имеет площадку текучести и степенное упрочнение; тогда соотношения (62), (63), (66) и (67)

сохраняют силу. Для получения зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций в области упрочнения подставим в уравнение (9) σ и ε по формулам (57) и (59). Используя соотношение (66), получим при $\varepsilon_i \geqslant \varepsilon_{is}^*$

$$\sigma_i = \sigma_s \left[\frac{3E\,\varepsilon_i + (1-2\mu)\,\sigma_i}{3E\varepsilon_{is}^* + (1-2\mu)\,\sigma_s} \right]^m. \tag{70}$$

Установленные соотношения (43) и (39) или (46) и представляют собой зависимости компонентов напряжения от компонентов деформации за пределами упругости.

Напомним, что выше всюду предполагалось, что диаграммы растяжения и сжатия материала совпадают, а следовательно, выведенные выше зависимости напряжений от деформаций справедливы при этом условии.

В работах В. В. Новожилова [36], [37] установлены зависимости между напряжениями и деформациями в изотропных средах как при малых, так и при больших деформациях. Эти зависимости применимы для нелинейно-упругой и пластической стадий деформирования материала. В них отражено отличие диаграммы растяжения от диаграммы сжатия. Как отмечает В. В. Новожилов [36], использование полученных им зависимостей в расчетах за пределами упругости возможно только после тщательной экспериментальной их проверки.

Установим теперь зависимости компонентов пластической деформации от компонентов напряжения. Компоненты деформации ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} могут быть представлены в виде суммы компонентов упругой деформации ε_{xe}, ε_{ye}, ε_{ze}, γ_{xye}, γ_{yze}, γ_{zxe} и компонентов пластической деформации ε_{xp}, ε_{yp}, ε_{zp}, γ_{xyp}, γ_{yzp}, γ_{zxp}, т. е.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xe} + \varepsilon_{xp};\quad \gamma_{xy} = \gamma_{xye} + \gamma_{xyp};$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_{ye} + \varepsilon_{yp};\quad \gamma_{yz} = \gamma_{yze} + \gamma_{yzp};$$
$$\varepsilon_z = \varepsilon_{ze} + \varepsilon_{zp};\quad \gamma_{zx} = \gamma_{zxe} + \gamma_{zxp}.$$

Зависимости пластических деформаций от напряжений могут быть получены вычитанием выражений (45) из уравнений (44). При этом следует учесть, что модули упругости первого и второго рода и коэффициент поперечной деформации связаны соотношением (см. гл. III, т. I)

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

В результате преобразований устанавливаем

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{xp} &= \frac{\varphi}{3G}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right];\\
\varepsilon_{yp} &= \frac{\varphi}{3G}\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)\right];\\
\varepsilon_{zp} &= \frac{\varphi}{3G}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right];\\
\gamma_{xyp} &= \frac{\varphi}{G}\tau_{xy};\\
\gamma_{yzp} &= \frac{\varphi}{G}\tau_{yz};\\
\gamma_{zxp} &= \frac{\varphi}{G}\tau_{zx},
\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

где

$$\varphi = 3G\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} - 1. \tag{72}$$

Складывая первые три соотношения (71), получаем, что

$$\varepsilon_{xp} + \varepsilon_{yp} + \varepsilon_{zp} = 0,$$

т. е. за счет пластических деформаций изменение объема не происходит и, следовательно, тензор пластических деформаций представляет собой девиатор.

Это положение является следствием первой гипотезы, согласно которой объемная деформация прямо пропорциональна среднему нормальному напряжению.

Подставим в выражение (22) компоненты упругой деформации по формулам (45).

Тогда, используя соотношение (21), получим зависимость интенсивности упругих деформаций от интенсивности напряжений в следующем виде:

$$\varepsilon_{ie} = \frac{\sigma_i}{3G}. \tag{73}$$

Аналогично, подставляя в соотношение (22) компоненты пластической деформации по формулам (71) и используя выражение (21), можно установить зависимость интенсивности пластических деформаций от интенсивности напряжений:

$$\varepsilon_{ip} = \frac{\varphi}{3G}\sigma_i. \tag{74}$$

Сложим соотношения (73) и (74); тогда, принимая во внимание выражение (72), имеем

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ie} + \varepsilon_{ip}. \tag{75}$$

Таким образом, интенсивности полных упругих и пластических деформаций обладают теми же аддитивными свойствами, что и сами деформации.

§ 7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОСНОВНЫХ ГИПОТЕЗ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Рассмотрим вначале результаты экспериментальных исследований, по которым может быть проверена первая гипотеза. Бриджменом [5], [6], [2] были проведены испытания материалов в условиях всестороннего равного сжатия при давлениях 100 000—120 000 *кг/см*^{2} и температурах 30 и 75°.

В результате была установлена следующая зависимость абсолютного значения объемной деформации Δ от давления p:

$$|\Delta| = ap - bp^2, \tag{76}$$

где a и b — опытные постоянные.

Значения этих постоянных для некоторых металлов приведены в табл. 21.

Таблица 21

Данные по сжимаемости металлов

Металл	$a \cdot 10^7$ в $см^2/кг$	$b \cdot 10^{12}$ в $см^4/кг^2$	$p = 10\,000$ $кг/см^2$				$E \cdot 10^{-6}$ в $кг/см^2$	μ	$3\frac{1-2\mu}{E} 10^7$ в $см^2/кг$	Погрешность формулы (78) в %
			$ap \cdot 10^3$	$bp^2 \cdot 10^3$	Погрешность формулы (77) в %	$\Delta \cdot 10^3$				
Железо . . .	5,84	0,54	5,84	0,054	0,9	5,79	2.00	0,30	6,00	2,7
Медь	7,16	1,04	7,16	0,104	1,4	7,06	1,3	0,33	7,69	7 4
Алюминий .	13,4	3,44	13,4	0,3 4	2,3	13,1	0,72	0,33	13,9	3.7
Никель . . .	5,26	0,54	5,26	0,054	1,0	5,21	2,1	0,33	4,76	9,5
Свинец . . .	23,7	15,69	23,7	1,569	7,2	22,1	0,17	0,42	28,2	16,0

В той же таблице даны величины первого и второго слагаемых формулы (76) при давлении $p=10\,000$ $кг/см^2$. Из этого сопоставления следует, что даже при сравнительно большом давлении $p=10\,000$ $кг/см^2$ второе слагаемое значительно меньше первого и приближенно зависимость абсолютного значения объемной деформации от давления может быть принята линейной:

$$|\Delta| = ap. \tag{77}$$

В табл. 21 приведены погрешности приближенной формулы (77) для давления $p=10\,000$ $кг/см^2$. Из этой таблицы следует, что при давлении $p=10\,000$ $кг/см^2$ погрешность приближенной формулы (77) не превышает 7,5%.

Отметим, что при всестороннем равном сжатии $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=-p$. Следовательно, согласно формуле (19, $\sigma_0=-p$.) Подставляя эту величину в выражение (39), получаем для всестороннего равного сжатия

$$\Delta = -3\frac{1-2\mu}{E}p.$$

Таким образом, теоретическая величина коэффициента a в формуле (77)

$$a = 3\frac{1-2\mu}{E}. \tag{78}$$

В табл. 21 приведены величины коэффициента a, подсчитанные по ориентировочным значениям модуля упругости, и коэффициента поперечной деформации (см. табл. 3, гл. III, т. I) для указанных в табл. 21 материалов. В той же таблице дана погрешность формулы (78). Как следует из табл. 21, эта погрешность для большинства металлов не превышает 10% и только для свинца составляет 16%. Учитывая, что величины модуля упругости и коэффициента поперечной деформации были взяты грубо ориентировочно, заключаем, что формула (78) имеет достаточную для практических расчетов точность.

Наибольшей сжимаемосью обладают щелочные металлы. Наиболее сжимаем из них цезий, объем которого уменьшается на одну треть под давлением 15 000 $кг/см^2$.

На основании данных, приведенных в табл. 21, заключаем, что для таких материалов, как железо, медь, никель, при сравнительно большом давлении $p=10\,000$ $кг/см^2$ объемная деформация не превышает 0,01, для

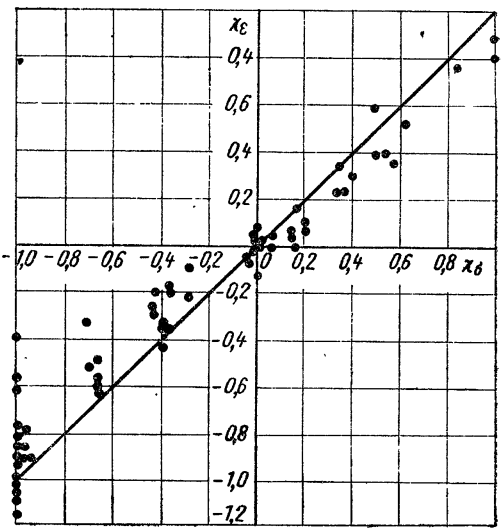
алюминия при том же давлении она составляет 0,0131, а для свинца 0,0221. Таким образом, даже при сравнительно большом давлении $p=10\,000$ *кг/см*^{2} изменение объема составляет незначительную величину начального объема. Поэтому, как уже отмечалось ранее, в расчетах за пределами упругости можно приближенно считать объемную деформацию равной нулю (материал несжимаем).

На основании изложенного выше заключаем, что опыты Бриджмена подтверждают первую гипотезу теории малых упруго-пластических деформаций.

Перейдем к рассмотрению экспериментальных исследований, на основании которых можно произвести проверку второй и третьей гипотез теории малых упруго-пластических деформаций (см. стр. 617). При этом мы не будем касаться экспериментального изучения условия возникновения пластических деформаций. Этот вопрос подробно разобран в гл. V, т. I.

Точно так же в основном не будем рассматривать результаты экспериментальных исследований, посвященных проверке теорий течения при сложном нагружении. Они изложены в работах Моррисона и Шепферда [72], Филлипса [73], [74], Дэвиса [67], А. М. Жукова и Ю. Н. Работнова [11], А. М. Жукова [12], [13], [14], Марина и Гу [70] и др.

Опыты Лоде [58]. Опыты были проведены по инициативе Надаи. Испытанию подвергались тонкостенные стальные, медные и никелевые трубы. Они нагружались продольной растягивающей силой и внутренним давлением.



Фиг. 460. Результаты опытов Лоде по проверке второй гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций [58]

В результате такого нагружения осуществлялись различные двухосные напряженные состояния. Нагружение являлось сложным.

На основании результатов испытаний определялись параметры Надаи — Лоде χ_ε в зависимости от χ_σ. На фиг. 460 представлены экспериментально полученные точки. Как следует из этой фигуры, они скучиваются вблизи прямой, уравнение которой $\chi_\varepsilon=\chi_\sigma$, хотя при $\chi_\sigma = -1$ все же заметно значительное отклонение ряда точек от этой прямой. Последнее, по-видимому, объясняется недостаточной точностью построения диаграммы растяжения материала [18].

Таким образом, опыты Лоде подтверждают вторую гипотезу теории малых упруго-пластических деформаций, согласно которой параметры Надаи — Лоде равны при всех напряженных состояниях.

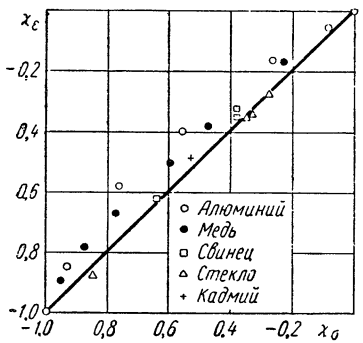
Опыты Роша и Эйхингера [58]. Тонкостенные стальные трубы подвергались испытаниям при раздельном и совместном растяжении, сжатии и кручении их. В последнем случае испытания проводились в условиях простого нагружения.

В результате испытаний было установлено, что интенсивность касательных напряжений является вполне определенной функцией интенсив-

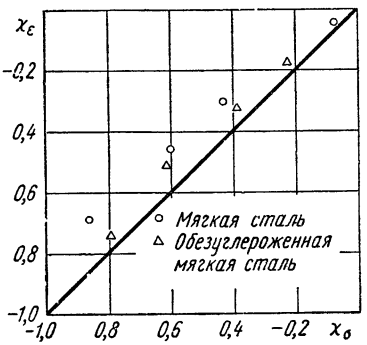
ности угловых деформаций, не зависящей от типа напряженного состояния. Следовательно, опыты Роша и Эйхингера согласуются с третьей гипотезой теории малых упруго-пластических деформаций.

Опыты Тейлора и Квинни [76]. Испытаниям на совместное растяжение и кручение подвергались стальные, медные, алюминиевые, свинцовые, кадмиевые и стеклянные трубы. Последние испытывались при повышенной температуре. В процессе испытания отношение растягивающей силы к крутящему моменту не было постоянным, т. е. нагружение в этих опытах являлось сложным.

На основании испытаний подсчитывались параметры Надаи — Лоде χ_ε в зависимости от χ_σ. Как следует из фиг. 461 и 462, экспериментально полученные точки близки к прямой, уравнение которой $\chi_\varepsilon = \chi_\sigma$. Отметим,



Фиг. 461. Результаты опытов Тэйлора и Квинни по проверке второй гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций [76]



Фиг. 462. Результаты опытов Тэйлора и Квинни по проверке второй гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций [76]

что для кадмия и свинца согласование результатов теории и эксперимента оказалось лучшим, чем для алюминия и меди. Для стекла экспериментально полученные точки почти в точности ложатся на прямую.

Таким образом, опыты Тейлора и Квинни с еще большей степенью точности, чем опыты Лоде, подтверждают вторую гипотезу теории малых упруго-пластических деформаций (см. стр. 617).

Опыты Шмидта [58]. Тонкостенные стальные и медные трубы подвергались испытаниям при раздельном и совместном растяжении и кручении их. Часть испытаний проводилась при простом нагружении, а часть — при сложном.

В первом случае установлено, что интенсивность касательных напряжений является определенной функцией интенсивности угловых деформаций, не зависящей от характера напряженного состояния. Во втором случае (при сложном нагружении) эта зависимость не имеет места.

Следовательно, при простом нагружении опыты Шмидта, так же как и опыты Роша и Эйхингера, подтверждают третью гипотезу теории малых упруго-пластических деформаций (см. стр. 617).

Опыты Дэвиса [58]. Испытаниям подвергались тонкостенные медные и стальные трубы. Они нагружались продольной растягивающей силой и внутренним давлением. В результате такого нагружения были созданы различные типы двухосных напряженных состояний. В течение каждого испытания отношение величины растягивающей силы к внутреннему давлению оставалось постоянным. Следовательно, в каждом испытании име-

ло место простое нагружение. Почти во всех испытаниях образцы доводились до разрушения.

При обработке результатов определялись действительные деформации и напряжения. Первые подсчитывались по формуле

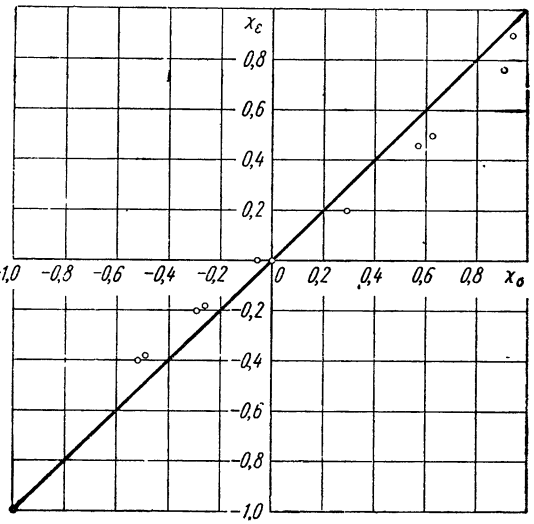
$$\varepsilon_{дейст} = \ln(1 + \varepsilon),$$

где ε — условная линейная деформация.

Вторые вычислялись с учетом изменения в процессе испытания толщин стенок трубчатых образцов.

На основании результатов испытаний медных образцов подсчитывались параметры Надаи — Лоде χ_ε в зависимости от χ_τ. На фиг. 463 изображены полученные таким образом точки. Как следует из этой фигуры, они близки к прямой, уравнение которой $\chi_\varepsilon = \chi_\tau$.

По результатам испытаний медных и стальных образцов строились графики зависимости максимального касательного напряжения от максимальной угловой деформации и интенсивности касательных напряжений от интенсивности угловых деформаций. Все эти величины подсчитывались по истинным значениям напряжений и деформаций. На фиг. 464 и 465 изображены точки, полученные в результате испытаний медных образцов из двух партий материала при различных напряженных состояниях. Совокупность точек на фиг. 464 устанавливает зависимость максимального касательного напряжения от максимальной угловой деформации. На фиг. 465 представлены точки, полученные экспериментально при испытании медных образцов. Они связывают интенсивность касательных напряжений с интенсивностью угловых деформаций.

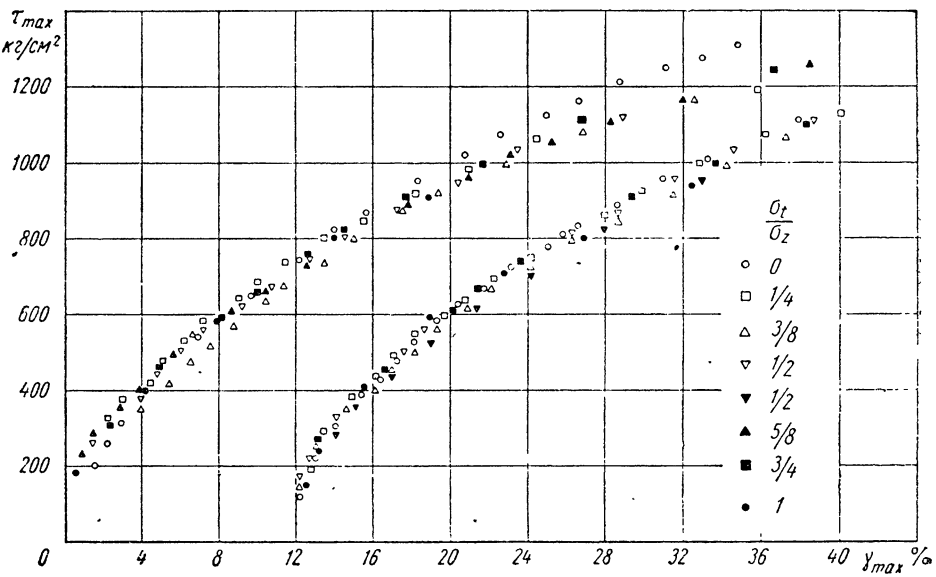


Фиг. 463. Результаты опытов Дэвиса по проверке второй гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций [58]. Испытания медных образцов

Как следует из фиг. 464 и 465, опытные точки ложатся достаточно кучно. Следовательно, максимальное касательное напряжение является определенной не зависящей от типа напряженного состояния функцией максимальной угловой деформации, точно так же как интенсивность касательных напряжений есть функция интенсивности угловых деформаций, не зависящая от вида напряженного состояния. Как следует из фиг. 464 и 465, первое положение при испытании медных образцов подтверждается несколько более точно, чем второе.

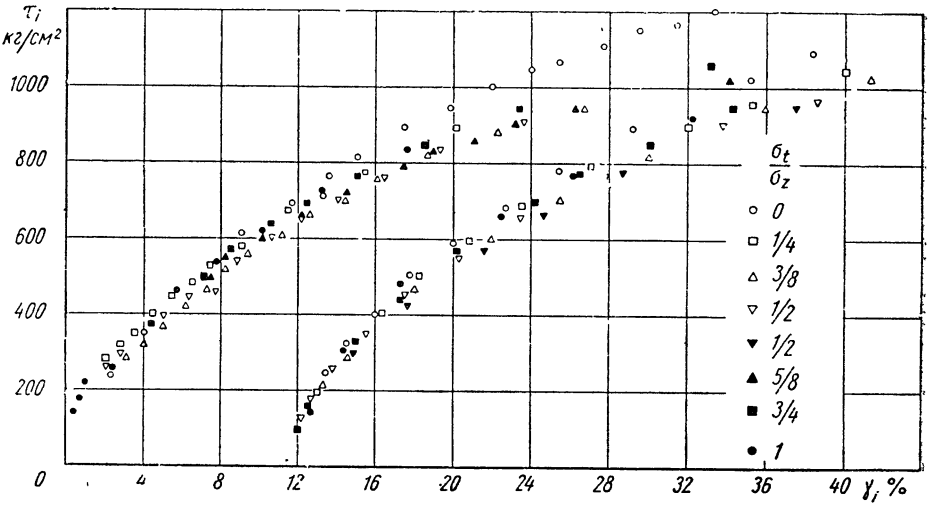
На фиг. 466 и 467 представлены результаты испытаний стальных образцов при различных напряженных состояниях. Сплошными линиями на фиг. 466 изображены графики зависимости максимального касательного напряжения от максимальной угловой деформации, а на фиг. 467 — графики зависимости интенсивности касательных напряжений от интенсивности угловых деформаций, построенные по результатам испытания труб на растяжение. Буквой R помечены разрушившиеся образцы.

Как следует из фиг. 466 и 467, в рассматриваемом случае, в отличие от испытаний медных труб, разброс точек для зависимости максимального касательного напряжения от максимальной угловой деформации несколько больший, чем для зависимости интенсивности касательных напряжений от интенсивности угловых деформаций.



Фиг. 464. Результаты опытов Дэвиса по выявлению связи максимального касательного напряжения с максимальной угловой деформацией. Испытания медных образцов [58]

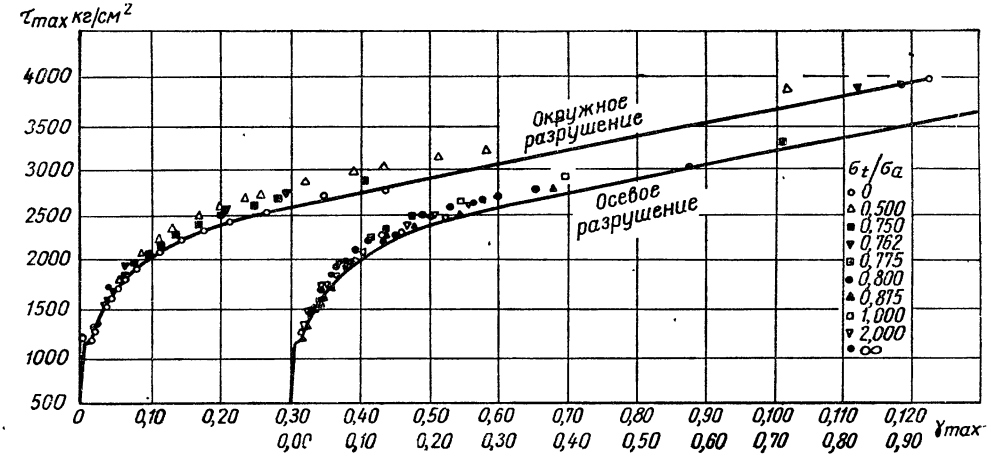
В более поздних опытах Дэвиса [67] тонкостенные стальные трубы подвергались воздействию внутреннего давления, растяжения и кручения. При этом направления главных осей в течение всего процесса деформирования сохранялись постоянными. В результате испытаний



Фиг. 465. Результаты опытов Дэвиса по проверке третьей гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций. Испытания медных образцов [58]

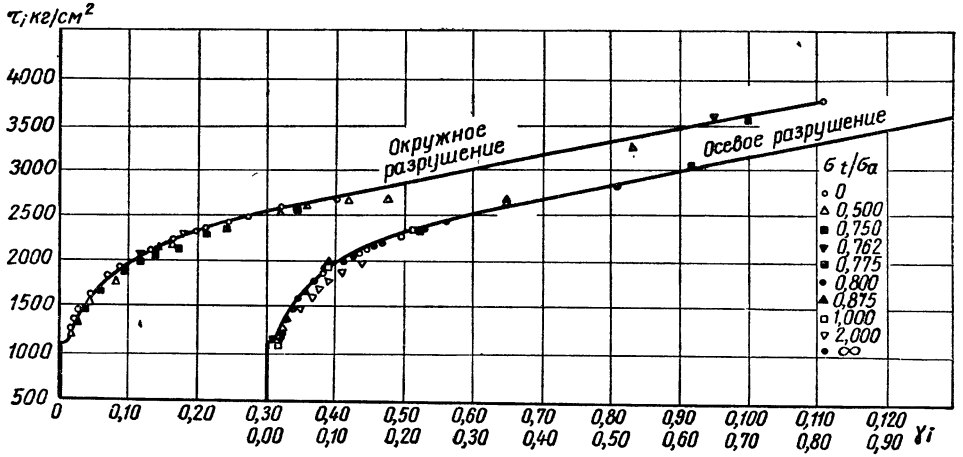
установлено, что интенсивность касательных напряжений с достаточной степенью точности является функцией интенсивности деформаций сдвига, не зависящей от типа напряженного состояния.

На основании изложенного выше заключаем, что опыты Дэвиса хорошо согласуются со второй и третьей гипотезами теории малых упруго-пластических деформаций (см. стр. 617).



Фиг. 466. Результаты опытов Дэвиса по выявлению связи максимального касательного напряжения с максимальной угловой деформацией. Испытания стальных образцов [58]

Опыты Марина и Коталика [71]. Тонкостенные трубчатые образцы из сплава алюминия нагружались растягивающей силой и внутренним давлением. Испытания велись как в условиях простого нагружения при постоянном отношении величины внутреннего давления к растягивающей силе, так и в условиях сложного нагружения при переменной вели-

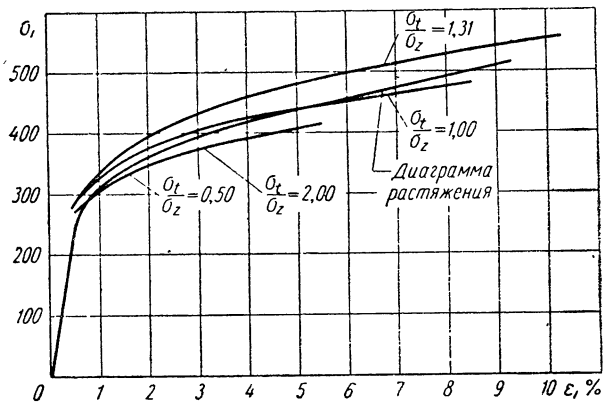


Фиг. 467. Результаты опытов Дэвиса по проверке третьей гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций. Испытания стальных образцов [58]

чине этого отношения. Во втором случае образцы вначале нагружались внутренним давлением определенной величины, а затем при постоянном внутреннем давлении возрастающая растягивающая сила доводила образец до разрушения. Так же как и в опытах Дэвиса, при обработке результатов определялись действительные деформации и напряжения.

На фиг. 468 и 469 приведено сопоставление графиков зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций, полученных путем испытаний при различных указанных на чертежах отношениях окружного напряжения к осевому, с диаграммой растяжения, которая при использовании условия несжимаемости (40) совпадает с диаграммой деформирования материала. На фиг. 468 представлены результаты испытаний в условиях простого, а на фиг. 469 — в условиях сложного нагружения.

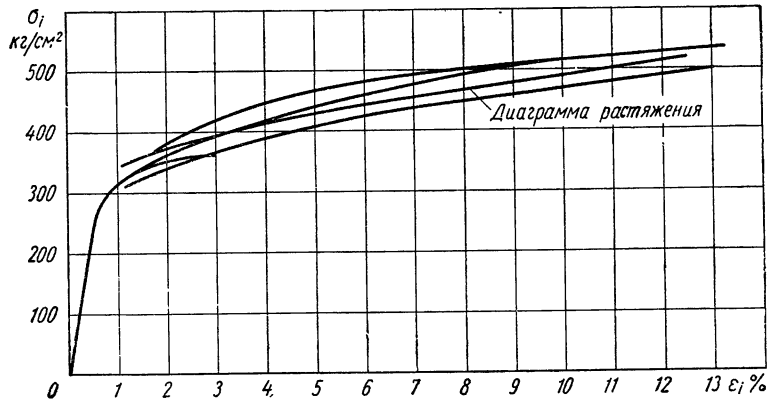
Как следует из фиг. 468 и 469, опыты Марина и Коталика подтверждают третью гипотезу теории малых упруго-пластических деформаций как при простом, так и при сложном нагружении, имевшем место в испытаниях.



Фиг. 468. Результаты опытов Марина и Коталика по проверке третьей гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций. Испытания при простом нагружении [71]

Опыты А. М. Жукова и *Ю. Н. Работнова* [11]. Тонкостенные трубы из стали 25 испытывались в условиях сложного нагружения. Они вначале подвергались воздействию растягивающей силы, создающей пластические деформации с последующим добавлением крутящего момента.

На фиг. 470 представлены диаграммы растяжения четырех образцов. Конец каждой кривой соответствует началу догрузки кручением. На



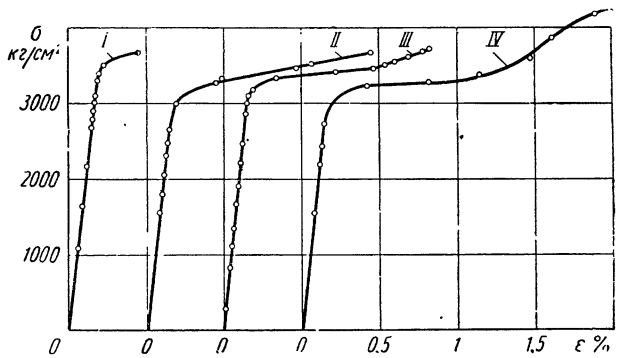
Фиг. 469. Результаты опытов Марина и Коталика по проверке третьей гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций. Испытания при сложном нагружении [71]

фиг. 471 представлены начальные участки кривых при догрузке. По теории малых упруго-пластических деформаций применительно к начальному участку догрузки в рассматриваемом случае [см. уравнения (43)]

$$\delta\tau = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\,\delta\gamma,$$

где $\delta\gamma$ — приращение угловой деформации, соответствующее приращению касательного напряжения $\delta\tau$.

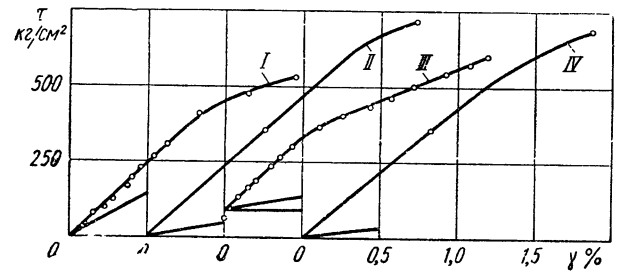
Таким образом, пластический модуль сдвига $\frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}$ в начальный момент догрузки должен быть равен одной трети секущего модуля $\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$.



Фиг. 470. Диаграммы растяжения четырех образцов в опытах А. М. Жукова и Ю. Н. Работнова [11]

На фиг. 471 нанесены также начальные участки догрузки по теории малых упруго-пластических деформаций. Как следует из сопоставления данных теории и эксперимента, теория не согласуется с результатами опытов.

Таким образом, опыты А. М. Жукова и Ю. Н. Работнова показали, что при сложном нагружении основные уравнения теории малых упруго-



Фиг. 471. Диаграммы сдвига при догрузке растянутых образцов в опытах А. М. Жукова и Ю. Н. Работнова [11]

пластических деформаций, вообще говоря, могут привести к неверным результатам. К такому же выводу приводят опыты А. М. Жукова, результаты которых изложены в работе [13].

Опыты А. М. Жукова [12], [14]. Испытаниям в условиях простого и сложного нагружения подвергались тонкостенные трубы из хромоникелевой стали [12]. Образцы нагружались растягивающей силой и внутренним давлением. Большинство испытаний проводилось в условиях простого нагружения, так что заданное отношение главных напряжений сохранялось до момента разрушения. Однако в некоторых испытаниях это отношение в определенных интервалах нагружения преднамеренно нарушалось. Этим создавалось сложное нагружение.

В табл. 22 приведены теоретические и экспериментальные значения напряжений и деформаций, полученные в результате испытания образцов, нагруженных одним внутренним давлением. Теоретические величины напряжений подсчитывались при помощи основных уравнений теории малых упруго-пластических деформаций по экспериментально полученным значениям деформаций и, наоборот, теоретические величины деформаций вычислялись при помощи тех же уравнений по выбранным в испытаниях значениям напряжений. Как следует из табл. 22, опытные данные хорошо согласуются с теоретическими.

Таблица 22

Сопоставление теоретических данных с экспериментальными в опытах А. М. Жукова [12]

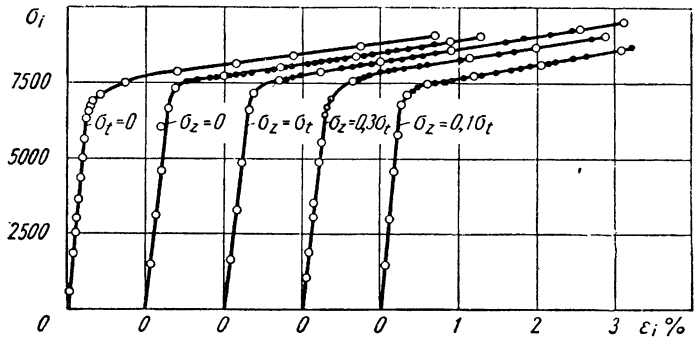
p в *ат*	σ_t в *кг/см²*		σ_z в *кг/см²*		$\varepsilon_t \cdot 10^4$		$\varepsilon_z \cdot 10^4$	
	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.
220	7220	7300	3700	3600	32,4	32,4	6,2	6,35
230	7630	7660	3750	3780	40,6	41,3	6,8	6,7
240	8000	8050	3910	3970	73,5	73,5	6,9	7,2
250	8400	8420	4170	4160	129,2	129,5	6,9	7,6
260	8840	8950	4350	4410	205,5	208	7,9	8,1
262	9010	9050	4510	4470	223,9	222	8,1	8,3

На фиг. 472 и 473 изображены графики зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций, построенные в результате испытаний образцов при различных отношениях осевого напряжения к окружному. Точки, полученные экспериментально при различных напряженных состояниях, совмещены на фиг. 474. Из этой фигуры следует, что диаграмма деформирования материала не зависит от типа напряженного состояния.

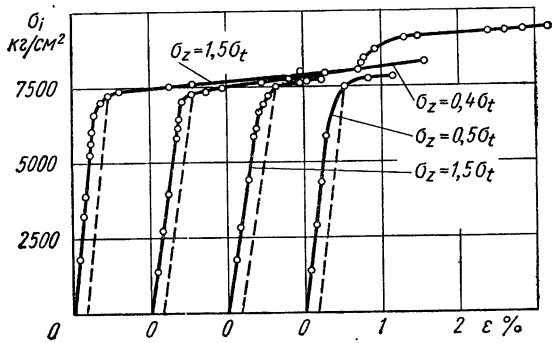
На фиг. 472 черными кружками обозначены точки, соответствующие сложному нагружению. Осуществление сложного нагружения производилось следующим образом. Вначале при постоянной продольной силе внутреннее давление увеличивалось последовательно ступенями от 2 до 10 *ат*. Потом при постоянном внутреннем давлении продольная сила увеличивалась последовательно тремя ступенями так, чтобы в следующей точке, изображенной светлым кружком, отношение главных напряжений стало равно первоначальному отношению. Как следует из фиг. 472, черные кружки лежат очень близко к кривой, проведенной через светлые кружки. Это, очевидно, объясняется тем, что в рассматриваемом сложном нагружении главные оси тензора напряжений не поворачивались и, следовательно, нагружение по своему характеру было близко к простому.

В более поздних опытах А. М. Жукова [14] воздействию внутреннего давления и растягивающей силы подвергались тонкостенные трубчатые образцы из стали ЭИ415. Восемь образцов испытывались в условиях простого, а три — в условиях сложного нагружения. Сложное нагружение состояло в том, что отношение главных напряжений при испытаниях изменилось. При этом, однако, ни одно из главных напряжений не убывало и направления главных осей сохранялись постоянными.

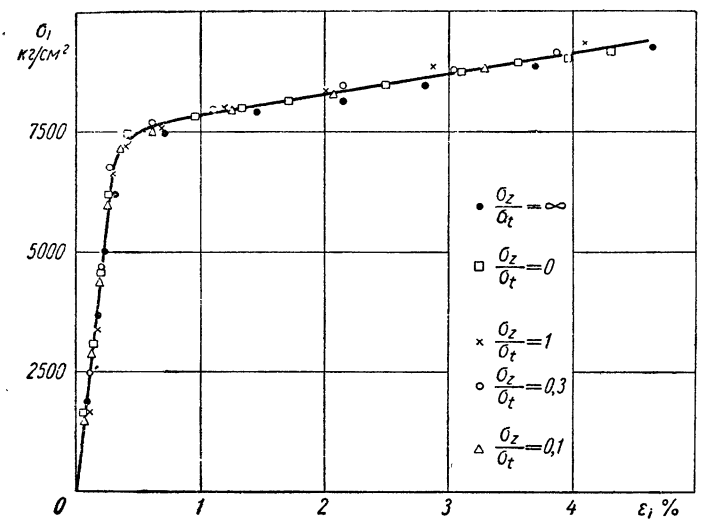
На фиг. 475 и 476 представлены графики зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций, полученные в испытаниях



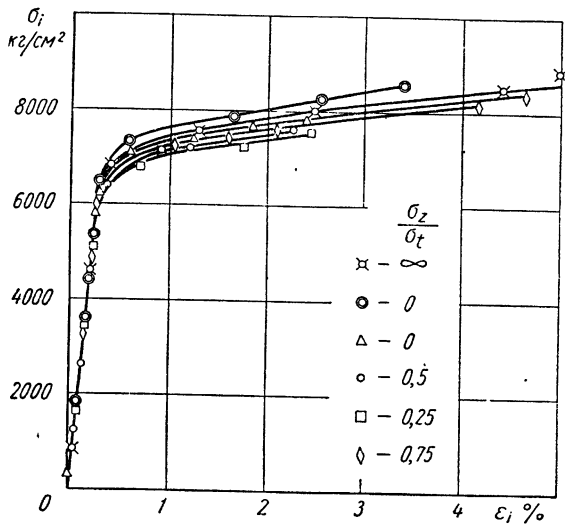
Фиг. 472. Результаты опытов А. М. Жукова по проверке третьей гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций [12]. Испытания образцов хромоникелевой стали



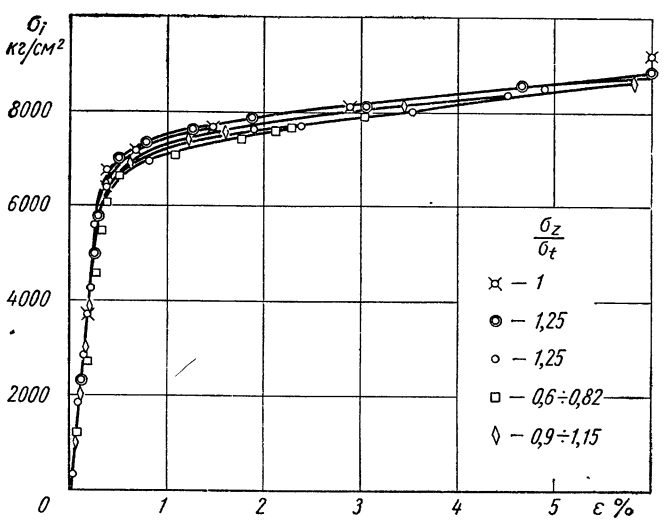
Фиг. 473. Результаты опытов А. М. Жукова по проверке третьей гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций [12]. Испытания образцов хромоникелевой стали



Фиг. 474. Результаты опытов А. М. Жукова по проверке третьей гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций [12]. Испытания образцов хромоникелевой стали



Фиг. 475. Результаты опытов А. М. Жукова по проверке третьей гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций [14]. Испытания образцов стали ЭИ415

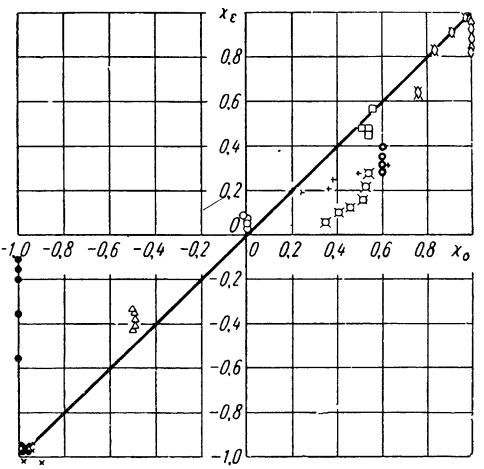


Фиг. 476. Результаты опытов А. М. Жукова по проверке третьей гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций [14]. Испытания образцов стали ЭИ415

при различных отношениях осевого напряжения к окружному. Из этих фигур следует, что как при простом нагружении, так и при указанном выше сложном нагружении диаграмма деформирования не зависит от типа напряженного состояния.

На фиг. 477 точки, полученные экспериментально, представлены в координатах χ_σ, χ_ε. Из этой фигуры следует, что экспериментально полученные точки располагаются вблизи прямой, уравнение которой $\chi_\varepsilon = \chi_\sigma$, причем указанное выше сложное нагружение почти не влияет на расположение точек по отношению к прямой.

Таким образом, опыты А. М. Жукова хорошо подтверждают вторую и третью гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций для простого нагружения и для сложного нагружения, близкого к простому.



Фиг. 477. Результаты опытов А. М. Жукова по проверке второй гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций [14]. Испытания образцов стали ЭИ415

На основании изложенного выше заключаем, что многочисленные экспериментальные исследования, проведенные до настоящего времени, хорошо подтверждают основные гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций при простом нагружении, а также и при сложном нагружении, близком к простому.

Отметим, что имеются и возражения против некоторых из гипотез теории малых упруго-пластических деформаций. В работе С. И. Ратнер [43] указывается, что для некоторых алюминиевых и магниевых сплавов третья гипотеза не подтверждается опытами. С. И. Ратнер [43] объясняет это тем, что указанные сплавы имеют метастабильную структуру. Метастабильные структуры распадаются при пластическом деформировании с образованием новых фаз.

Возможно, что для таких случаев необходимо некоторое видоизменение третьей гипотезы [42]. Т. Н. Мартыновой [30] рассмотрено обобщение теории малых упруго-пластических деформаций для метастабильных сплавов.

Отметим, что во всех опытах, результаты которых изложены выше, испытаниям подвергались тонкостенные трубчатые образцы при совместном нагружении их внутренним давлением, растягивающей силой и крутящим моментом. При таком нагружении в образцах возникают двухосные смешанные напряженные состояния и двухосные растяжения (см. гл. V, т. I).

Испытания при двухосных сжатиях и трехосных напряженных состояниях до сих пор почти не проводились. В настоящее время сделаны первые шаги в изучении деформации материалов за пределами упругости при этих напряженных состояниях [7], [29], [43]. В частности, в МВТУ создана установка, позволяющая осуществлять испытания при однородных трехосных напряженных состояниях в условиях простого нагружения [29] (см. гл. V, т. I).

§ 8. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАСЧЕТОВ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Приведем основные уравнения расчетов на прочность и жесткость за пределами упругости. Они состоят из дифференциальных уравнений равновесия, условий на поверхности, условий совместности деформаций и зависимостей напряжений от деформаций.

Дифференциальные уравнения равновесия, как известно [61], имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+\rho X=0;\\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+\rho Y=0;\\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\rho Z=0, \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

где ρ — плотность материала в $кг\,сек^2/см^4$;

X, Y, Z — проекции на оси x, y, z соответственно массовой (объемной) силы, отнесенной к единице массы.

Условия на поверхности или граничные условия связывают компоненты напряжения X_ν, Y_ν, Z_ν на площадке поверхности, направляющие косинусы нормали ν к которой l, m, n, с напряжениями в трех взаимно перпендикулярных площадках в той же точке. Эти уравнения представляют собой условия равновесия элементарной призмы, вырезанной у поверхности тела. Они были выведены в гл. I, т. I и имеют вид

$$\left.\begin{aligned} X_\nu=\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n;\\ Y_\nu=\tau_{yx}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n;\\ Z_\nu=\tau_{zx}l+\tau_{zy}m+\sigma_z n. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Условия на поверхности тесно связаны с дифференциальными уравнениями равновесия. Их необходимо рассматривать совместно. Уравнения (79) не могут иметь определенного решения, пока не даны условия (80). Если дифференциальные уравнения равновесия и условия на поверхности удовлетворены, то это говорит о том, что все элементы тела, как внутри него, так и у поверхности, находятся в равновесии. Следовательно, обеспечено и равновесие тела в целом.

Условия совместности деформаций выражают отсутствие разрывов и непрерывность деформации тела. Они были выведены в гл. II, т. I. Согласно этим условиям компоненты деформации связаны между собой зависимостями

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2};\\ \frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2};\\ \frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2};\\ 2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right); \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right);\\ 2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\}$$

В решениях упруго-пластических задач, так же как и в теории упругости, вместо условий совместности деформаций часто используются зависимости компонентов деформации от компонентов перемещения u, v, w.

Напомним, что компонентами перемещения u, v, w называются проекции полного линейного перемещения точки на оси x, y, z соответственно.

Компоненты деформации и компоненты перемещения связаны зависимостями (см. гл. II, т. I)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x};\quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};\quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};\quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},\\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

Условия совместности деформаций выводятся путем исключения компонентов перемещения u, v, w из соотношений (82).

Зависимости компонентов напряжения от компонентов деформации были выведены в § 6 этой главы. Они имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_x - \varepsilon_0); \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy};\\ \sigma_y - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_y - \varepsilon_0); \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{yz};\\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_z - \varepsilon_0); \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{zx},\end{aligned}\right\} \qquad (83)$$

причем средняя линейная деформация ε_0 связана со средним нормальным напряжением σ_0 соотношением

$$\varepsilon_0 = \frac{1-2\mu}{E}\sigma_0, \qquad (84)$$

а интенсивность напряжений σ_i является определенной, не зависящей от типа напряженного состояния функцией интенсивности деформаций ε_i:

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i). \qquad (85)$$

Как указывалось выше, для упрощения решения задач вместо уравнения (84) часто принимается

$$\varepsilon_0 = 0. \qquad (86)$$

Зависимость (85) иногда представляется в виде

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i(1-\omega_i). \qquad (87)$$

Уравнения (79)—(87) являются основными уравнениями расчета за пределами упругости.

Упруго-пластические задачи, так же как и упругие задачи, обычно решаются либо в перемещениях, либо в напряжениях.

В первом случае за неизвестные принимаются перемещения и задача сводится к отысканию трех неизвестных функций u, v, w. Для этого при помощи соотношений (83)—(85), (21) и (22) в дифференциальные уравнения равновесия (79) и условия на поверхности (80) вводятся компоненты перемещений. Решения полученных относительно u, v, w уравнений, удовлетворяющих условиям на поверхности в перемещениях, определяют функции u, v и w. После этого по формулам (83) — (85), (21) и (22) могут быть найдены деформации и напряжения.

Во втором случае за неизвестные принимаются напряжения и задача сводится к отысканию шести неизвестных функций σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}. Для этого используются три дифференциальных уравнения равновесия (79), а также шесть условий совместности деформаций, в которых компоненты деформаций предварительно выражаются через компоненты напряжения при помощи соотношений (83)—(85), (21) и (22). При этом должны быть удовлетворены и условия на поверхности (80). После определения напряжений деформации могут быть найдены по формулам (83)—(85), (21) и (22).

Дифференциальные уравнения в частных производных относительно перемещений (при решении задач в перемещениях) или относительно напряжений (при решении задач в напряжениях) за пределами упругости, как правило, являются нелинейными. Это объясняется тем, что зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций не является однородно линейной.

Решение таких уравнений связано со значительными математическими трудностями. В замкнутом виде решается очень небольшой круг задач. Поэтому в расчетах за пределами упругости важное значение имеют различные приближенные методы. Удобным для практического использования является предложенный А. А. Ильюшином [18] метод упругих решений. Он будет изложен в следующем параграфе.

§ 9. МЕТОД УПРУГИХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим разработанный А. А. Ильюшиным приближенный метод решения задач за пределами упругости.

Введем в дифференциальные уравнения равновесия (79) и условия на поверхности (80) перемещения. Для этого вначале выразим напряжения через перемещения. Преобразуя уравнения (83) при помощи соотношений (84), (87) и (82), имеем

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\Delta - 2G\omega_i\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}G\omega_i\Delta;\\
\sigma_y &= 2G\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\Delta - 2G\omega_i\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3}G\omega_i\Delta;\\
\sigma_z &= 2G\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\Delta - 2G\omega_i\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2}{3}G\omega_i\Delta;\\
\tau_{xy} &= G(1-\omega_i)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);\\
\tau_{yz} &= G(1-\omega_i)\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right);\\
\tau_{zx} &= G(1-\omega_i)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

где

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

так называемая постоянная Ляме.

Подставим теперь выражения (88) в уравнения (79) и (80); тогда получим

$$\left.\begin{aligned} G\nabla^2 u + (G+\lambda)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \rho X = GR_x; \\ G\nabla^2 v + (G+\lambda)\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \rho Y = CR_y; \\ G\nabla^2 w + (G+\lambda)\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \rho Z = GR_z; \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

$$\left.\begin{aligned} \left(2G\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\Delta\right) l + G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) m + \\ + G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) n = X_v + T_x; \\ G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) l + \left(2G\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\Delta\right) m + \\ + G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) n = Y_v + T_y; \\ G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) l + G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) m + \\ + \left(2G\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\Delta\right) n = Z_v + T_z, \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

где

$$\left.\begin{aligned} R_x = \omega_i \nabla^2 u + \frac{\omega_i}{3}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \frac{4}{3}\cdot\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - \\ - \frac{2}{3}\cdot\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial \omega_i}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \\ + \frac{\partial \omega_i}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right); \\ R_y = \omega_i \nabla^2 v + \frac{\omega_i}{3}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \frac{4}{3}\cdot\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \\ - \frac{2}{3}\cdot\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial \omega_i}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \\ + \frac{\partial \omega_i}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \\ R_z = \omega_i \nabla^2 w + \frac{\omega_i}{3}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{4}{3}\cdot\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} - \\ - \frac{2}{3}\cdot\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial \omega_i}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \\ + \frac{\partial \omega_i}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

$$\left.\begin{aligned} T_x = G\omega_i\left[\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\Delta\right) l + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) m + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) n\right]; \\ T_y = G\omega_i\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) l + \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\Delta\right) m + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) n\right]; \\ T_z = G\omega_i\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) l + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) m + \left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\Delta\right) n\right]; \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Уравнения (89) являются дифференциальными уравнениями равновесия в перемещениях, а соотношения (90) — условиями на поверхности в перемещениях. Заметим, что уравнения (89) по форме сходны с уравнениями Ляме в теории упругости [61]. Отличие от них заключается только в том, что в уравнениях Ляме в правых частях стоят нули, а в уравнениях (89) правые части R_x, R_y, и R_z, определяемые формулами (91), являются в конечном счете функциями координат x, y и z. Условия на поверхности (90) отличаются от соответствующих условий в теории упругости [61] наличием в правых частях равенств слагаемых T_x, T_y, и T_z, определяемых формулами (92).

Основная идея метода упругих решений заключается в использовании последовательных приближений. В нулевом приближении полагается $\omega_i=0$, и, следовательно, на основании соотношений (91) и (92) $R_x=R_y=R_z=0$, $T_x=T_y=T_z=0$. Очевидно, что в этом случае рассматривается обычная задача теории упругости. Предположим, что она решена и компоненты u, v и w определены.

После этого по формулам (88) устанавливаются зависимости напряжений от координат x, y, z, а затем по формуле (21) интенсивность напряжений. Зная интенсивность напряжений для различных точек тела, по графику зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций в этих точках подсчитываются интенсивности деформаций, после чего по формуле (87) устанавливается зависимость функции ω_i от координат x, y, z. Зная перемещения и функцию ω_i, по формулам (91) и (92) определяют зависимости величин R_x, R_y, R_z, T_x, T_y и T_z от x, y и z.

Теперь вновь надлежит решить задачу теории упругости с массовыми силами $\rho X-GR_x$, $\rho Y-GR_y$, $\rho Z-GR_z$ и поверхностными силами X_v+T_x, Y_v+T_y, $Z+T_z$. Решение этой задачи определяет перемещения в первом приближении, которые позволяют установить и величины напряжений в первом приближении [формулы (88)]. Повторяя этот процесс последовательных приближений, можно получить величины перемещений и напряжений в любом приближении.

Вычисления по методу последовательных приближений заканчиваются тогда, когда разница между результатами двух последовательных приближений будет достаточно малой. Подсчеты показывают, что этот процесс быстро сходится. Обычно третье приближение дает вполне удовлетворительные результаты.

В работе И. А. Биргера [4] решение задач теории пластичности также сводится к решению последовательности линейных задач.

§ 10. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

Интенсивности напряжений и деформаций связаны с главными напряжениями и деформациями достаточно сложными нелинейными зависимостями (23) и (24). Это создает трудности в практических расчетах за пределами упругости.

А. А. Ильюшиным [18] и В. В. Соколовским [54] показано, что приближенно интенсивности напряжений и деформаций можно связать линейными зависимостями с главными напряжениями и деформациями.

Рассмотрим приближенные представления интенсивностей напряжений и деформаций. Введем в зависимость интенсивности напряжений от главных напряжений (23) главные касательные напряжения τ_1, τ_2, τ_3.

Последние связаны с главными напряжениями $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ следующими соотношениями (см. гл. I, т. I):

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \tag{93}$$

откуда следует, что

$$\tau_1 > 0; \quad \tau_2 < 0; \quad \tau_3 > 0$$

и

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0. \tag{94}$$

Заметим, что максимальное касательное напряжение τ_{max} равно абсолютной величине главного касательного напряжения τ_2:

$$\tau_{max} = |\tau_2| > \begin{cases} \tau_1, \\ \tau_3. \end{cases} \tag{95}$$

Подставим соотношения (93) в зависимость (23), тогда получим

$$\sigma_i = \sqrt{2}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}.$$

Используя выражения (94) и (95), устанавливаем, что

$$\sigma_i = 2\sqrt{\tau_1^2 - \tau_1 \tau_{max} + \tau_{max}^2}. \tag{96}$$

Рассмотрим теперь разность

$$\delta = \sigma_i - \tau_{max}. \tag{97}$$

Подставляя в эту формулу соотношение (96), получим

$$\delta = 2\sqrt{\tau_1^2 - \tau_1\tau_{max} + \tau_{max}^2} - \tau_{max}. \tag{98}$$

Таким образом, разность δ является функцией двух переменных τ_1 и τ_{max}. Для определения экстремума этой функции приравняем нулю частные производные от δ по τ_1 и τ_{max}:

$$\frac{\partial\delta}{\partial\tau_1} = \frac{2\tau_1 - \tau_{max}}{\sqrt{\tau_1^2 - \tau_1\tau_{max} + \tau_{max}^2}} = 0;$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial\tau_{max}} = \frac{-\tau_1 + 2\tau_{max}}{\sqrt{\tau_1^2 - \tau_1\tau_{max} + \tau_{max}^2}} - 1 = 0.$$

Из первого соотношения следует

$$\tau_1 = \frac{\tau_{max}}{2}, \tag{99}$$

а из второго

$$-\tau_1 + 2\tau_{max} = \sqrt{\tau_1^2 - \tau_1\tau_{max} + \tau_{max}^2},$$

откуда получаем

$$\tau_1 = \tau_{max}, \tag{100}$$

поскольку значение $\tau_{max}=0$ интереса не представляет. В этом случае $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ и, следовательно, интенсивность напряжений $\sigma_i=0$.

Подставим выражения (99) и (100) в соотношение (98), тогда получим соответственно

$$\delta_{min}=\left(\sqrt{3}-1\right)\tau_{max};\quad \delta_{max}=\tau_{max}.$$

Таким образом,

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\tau_{max}\leqslant\delta\leqslant\tau_{max}.$$

Следовательно, учитывая соотношение (97), имеем

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\tau_{max}\leqslant\sigma_i-\tau_{max}\leqslant\tau_{max},$$

откуда заключаем, что

$$\sqrt{3}\leqslant\frac{\sigma_i}{\tau_{max}}\leqslant 2.$$

Среднее значение отношения интенсивности напряжений к максимальному касательному напряжению составляет

$$\frac{\sigma_i}{\tau_{max}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}=1{,}866.$$

Оно отличается от крайних значений 1,732 и 2,000 на 7,7 и 6,7% соответственно.

Итак, с достаточной степенью точности получаем, что

$$\sigma_i=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\tau_{max}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}(\sigma_1-\sigma_3)=0{,}9330\,(\sigma_1-\sigma_3),\qquad(101)$$

причем $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$.

Аналогично можно доказать, что

$$\varepsilon_i=\frac{2+\sqrt{3}}{6}\gamma_{max}=\frac{2+\sqrt{3}}{6}(\varepsilon_1-\varepsilon_3)=0{,}6220\,(\varepsilon_1-\varepsilon_3),\qquad(102)$$

причем $\varepsilon_1\geqslant\varepsilon_2\geqslant\varepsilon_3$.

Выражения (101) и (102) устанавливают приближенные зависимости интенсивностей напряжений и деформаций от главных напряжений и главных деформаций соответственно. Эти зависимости являются линейными, и поэтому расчеты за пределами упругости с использованием их проще расчетов, в основу которых положены точные нелинейные зависимости (23) и (24).

Неудобство использования соотношений (101) и (102) заключается в том, что обычно заведомо неизвестно, какое главное напряжение является наибольшим, а какое наименьшим.

§ 11. ТЕОРЕМА О ПРОСТОМ НАГРУЖЕНИИ

Докажем сформулированную выше теорему А. А. Ильюшина о простом нагружении: *для того чтобы направляющие тензоры напряжений во всех точках тела оставались постоянными (т. е. нагружение было про-*

стым), при возрастании внешних сил пропорционально общему параметру β *достаточно, чтобы интенсивность деформаций была степенной функцией интенсивности напряжений*

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m, \tag{103}$$

где $0 < m < 1$.

Примем условие несжимаемости материала (40).

Допустим, что для какого-либо определенного значения параметра β, например для $\beta = 1$, пластическая задача решена. Обозначим напряжения деформации и перемещения, полученные в решении, через σ_x^*, σ_y^*, σ_z^*, τ_{xy}^*, τ_{yz}^*, τ_{zx}^*, ε_x^*, ε_y^*, ε_z^*, γ_{xy}^*, γ_{yz}^*, γ_{zx}^*, u^*, v^*, w^*. Очевидно, что компоненты напряжения удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (79) и условиям на поверхности (80), а компоненты деформации—условиям совместности деформаций (81). Также удовлетворяются зависимости компонентов деформации от компонентов перемещения (82) и зависимости компонентов напряжения от компонентов деформации (83). На основании соотношения (103) имеем

$$\sigma_i^* = A(\varepsilon_i^*)^m. \tag{104}$$

Попытаемся найти решение той же пластической задачи для β, отличного от единицы, в виде

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x = \beta\sigma_x^*;\ \sigma_y = \beta\sigma_y^*;\ \sigma_z = \beta\sigma_z^*;\\ &\tau_{xy} = \beta\tau_{xy}^*;\ \tau_{yz} = \beta\tau_{yz}^*;\ \tau_{zx} = \beta\tau_{zx}^*; \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

$$u = \nu u^*;\ v = \nu v^*;\ w = \nu w^*, \tag{106}$$

где ν — некоторая функция β.

На основании соотношений (82) и (106) заключаем, что

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \nu\varepsilon_x^*;\ \varepsilon_y = \nu\varepsilon_y^*;\ \varepsilon_z = \nu\varepsilon_z^*;\\ &\gamma_{xy} = \nu\gamma_{xy}^*;\ \gamma_{yz} = \nu\gamma_{yz}^*;\ \gamma_{zx} = \nu\gamma_{zx}^*. \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

Очевидно, что если выбранные ранее компоненты напряжений деформаций и перемещений удовлетворяют уравнениям (79)—(83), то компоненты напряжений, перемещений и деформаций, определяемые формулами (105)—(107), также удовлетворяют этим уравнениям. На основании соотношений (103), (21), (22), (105), (107) и (104) заключаем, что

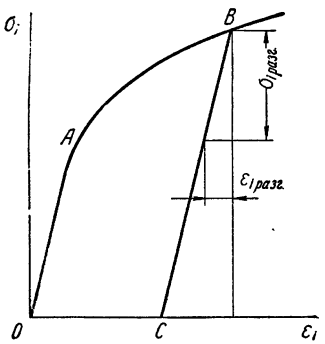
$$\nu = \beta^{\frac{1}{m}}.$$

При выполнении этого условия формулы (105)—(107) дают решение упруго-пластической задачи. Из соотношений (105) следует, что нагружение является простым.

§ 12. ТЕОРЕМА О РАЗГРУЗКЕ

Закон разгрузки при одноосном растяжении формулируется следующим образом: уменьшение напряжений при разгрузке $\sigma_{разг}$ прямо пропорционально уменьшению деформаций $\varepsilon_{разг}$, причем коэффициент пропорциональности тот же, что и в начальной стадии нагружения (см. § 3).

Выше (см. § 6) отмечалось, что интенсивность деформаций может быть представлена в виде суммы интенсивности упругих и интенсивности пластических деформаций. Поэтому диаграмма деформирования материала имеет такой же вид, что и диаграмма растяжения, не только при нагружении, но и при разгрузке. Следовательно, диаграмма разгрузки на графике $\sigma_i - \varepsilon_i$ является прямой BC, параллельной начальной прямой нагружения OA (фиг. 478).



Фиг. 478. Диаграммы деформирования при нагружении и разгрузке.

Уменьшение интенсивности напряжений при разгрузке прямо пропорционально уменьшению интенсивности деформаций, причем коэффициент пропорциональности тот же, что и в пределах упругости. Таким образом, математическая формулировка закона разгрузки имеет вид

$$\sigma_{i\,разг} = 3G\varepsilon_{i\,разг}. \tag{108}$$

Допустим, что в результате нагружения тела массовыми X, Y, Z и поверхностными X_ν, Y_ν, Z_ν силами за пределы упругости в нем возникли напряжения σ_x, $\sigma_y, \ldots, \tau_{zx}$ и деформации ε_x, $\varepsilon_y, \ldots, \gamma_{zx}$.

Предположим далее, что нагруженное тело разгружается. Объемные и поверхностные силы уменьшаются до значений X^*, Y^*, Z^*, X^*_ν, Y^*_ν, Z^*_ν, а напряжения и деформации уменьшаются на величины $\sigma_{x\,разг}$, $\sigma_{y\,разг}, \ldots, \tau_{zx\,разг}$, $\varepsilon_{x\,разг}$, $\varepsilon_{y\,разг}, \ldots, \gamma_{zx\,разг}$ до значений остаточных напряжений и деформаций $\sigma_{x\,ост}$, $\sigma_{y\,ост}, \ldots, \tau_{zx\,ост}$, $\varepsilon_{x\,ост}$, $\varepsilon_{y\,ост}, \ldots, \gamma_{zx\,ост}$. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x\,ост} &= \sigma_x - \sigma_{x\,разг};\ \tau_{xy\,ост} = \tau_{xy} - \tau_{xy\,разг};\\ \sigma_{y\,ост} &= \sigma_y - \sigma_{y\,разг};\ \tau_{yz\,ост} = \tau_{yz} - \tau_{yz\,разг};\\ \sigma_{z\,ост} &= \sigma_z - \sigma_{z\,разг};\ \tau_{zx\,ост} = \tau_{zx} - \tau_{zx\,разг}; \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{x\,ост} &= \varepsilon_x - \varepsilon_{x\,разг};\ \gamma_{xy\,ост} = \gamma_{xy} - \gamma_{xy\,разг};\\ \varepsilon_{y\,ост} &= \varepsilon_y - \varepsilon_{y\,разг};\ \gamma_{yz\,ост} = \gamma_{yz} - \gamma_{yz\,разг};\\ \varepsilon_{z\,ост} &= \varepsilon_z - \varepsilon_{z\,разг};\ \gamma_{zx\,ост} = \gamma_{zx} - \gamma_{zx\,разг}. \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Очевидно, что компоненты деформаций ε_x, $\varepsilon_y, \ldots, \gamma_{zx}$ и $\varepsilon_{x\,ост}$, $\varepsilon_{y\,ост}, \ldots, \gamma_{zx\,ост}$ удовлетворяют условиям совместности деформаций (81).

Компоненты напряжений σ_x, $\sigma_y, \ldots, \tau_{zx}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (79) и условиям на поверхности (80) с массовыми силами X, Y, Z и поверхностными силами X_ν, Y_ν, Z_ν. Компоненты напряжений $\sigma_{x\,ост}$, $\sigma_{y\,ост}, \ldots, \tau_{zx\,ост}$ удовлетворяют тем же уравнениям с массовыми силами X^*, Y^*, Z^* и поверхностными силами X^*_ν, Y^*_ν, Z^*_ν. Поэтому и компоненты напряжений $\sigma_{x\,разг}$, $\sigma_{y\,разг}$, $\ldots, \tau_{zx\,разг}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (79) и условиям на поверхности (80) с массовыми силами $X - X^*$, $Y - Y^*$, $Z - Z^*$ и поверхностными силами $X_\nu - X^*_\nu$, $Y_\nu - Y^*_\nu$, $Z_\nu - Z^*_\nu$, а

компоненты деформаций $\varepsilon_{x\,разг}$, $\varepsilon_{y\,разг}$, ..., $\gamma_{zx\,разг}$ удовлетворяют условиям совместности деформаций (81).

Учитывая, что при разгрузке уменьшение интенсивности напряжений прямо пропорционально уменьшению интенсивности деформаций, заключаем, что напряжения и деформации разгрузки определяются путем решения задачи теории упругости для внешних сил, равных разностям сил при нагружении и остающихся после разгрузки. В случае полной разгрузки последние равны нулю и задача теории упругости решается для внешних сил, нагружающих тело. Это положение в общем виде было доказано А. А. Ильюшиным [18] и называется теоремой о разгрузке.

Остаточные напряжения и деформации согласно формулам (109) и (110) определяются как разности напряжений и деформаций, возникающих при нагружении, и уменьшений напряжений и деформаций при разгрузке (разгрузочных напряжений и деформаций).

Рассмотренная выше теорема о разгрузке справедлива в предположении, что в процессе разгрузки материал вновь не выходит за пределы упругости. В работе В. В. Москвитина [31] приводится обобщение теоремы о разгрузке с учетом перехода материала в процессе разгрузки за пределы упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барретт Ч. С., Структура металлов, Металлургиздат, 1948.

2. Бахшиян Ф. А., Об уравнении состояния твердых тел, «Инженерный сборник», т. VIII, изд. АН СССР, 1950.

3. Безухов Н. И., Теория упругости и пластичности, ГИТТЛ, 1953.

4. Биргер И. А., Некоторые общие методы решения задач теории пластичности, «Прикладная математика и механика», т. XV, вып. 6, изд. АН СССР, 1951.

5. Бриджмен П. В., Физика высоких давлений, ОНТИ, 1935.

6. Бриджмен П. В., Новейшие работы в области высоких давлений, Государственное издательство иностранной литературы, 1948.

7. Бриджмен П., Исследование больших пластических деформаций и разрыва, Издательство иностранной литературы, 1955.

8. Гвоздев А. А., Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия, Стройиздат, 1949.

9. Гольденблат И. И., Некоторые вопросы механики деформируемых сред, ГИТТЛ, 1955.

10. Губкин С. И., Теория обработки металлов давлением, Металлургиздат, 1947.

11. Жуков А. М. и Работнов Ю. Н., Исследование пластических деформаций стали при сложном нагружении, «Инженерный сборник», т. XVIII, изд. АН СССР, 1954.

12. Жуков А. М., Пластические свойства и разрушение стали при двухосном напряженном состоянии, «Инженерный сборник», т. XX, изд АН СССР, 1954.

13. Жуков А. М., Пластические доформации стали при сложном нагружении, «Известия АН СССР, Отд. техн. наук» № 11, 1954.

14. Жуков А. М., Сложное нагружение и теории пластичности изотропных металлов, «Известия АН СССР, Отд. техн. наук» № 8, 1955.

15. Зейтц Ф., Физика металлов, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947.

16. Зейтц Ф., Современная теория твердого тела ГИТТЛ, 1949.

17. Ивлев Д. Д., К теории простого деформирования пластических тел, «Прикладная математика и механика», т. XIX, вып. 6, изд. АН СССР, 1955.

18. Ильюшин А. А., Пластичность, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.

19. Ильюшин А. А., О связи между напряжениями и малыми деформациями в мсханике сплошных сред, «Прикладная математика и механика», т. XVIII, вып. 6, изд. АН СССР, 1954.

20. Ильюшин А. А., Современные вопросы теории пластичности, «Вестник Московского университета» № 4—5, 1955.

21. Ишлинский А. Ю., Пластичность, сб. «Механика в СССР за тридцать лет», ГИТТЛ, 1950.

22. Качанов Л. М., Механика пластических сред, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.

23. Качанов Л. М., К вопросу о сложном нагружении, «Прикладная математика и механика», т. XIX, вып. 3, изд. АН СССР, 1955.

24. Качанов Л. М., Основы теории пластичности, ГИТТЛ, 1956.

25. Кузнецов В. Д., Физика твердого тела, изд-во Кубуч, 1932.

26. Лапин А. А., Механические испытания как основы расчета на прочность, ВНИТОМАШ. Заочные курсы усовершенствования инженеров-конструкторов, Машгиз, 1951.

27. Ленский В. С., Упругость и пластичность, ГИТТЛ, 1950.

28. Лихарев К. К., К практике построения диаграмм истинных напряжений, «Заводская лаборатория» № 11, 1949.

29. Лихарев К. К., Установки для испытания материалов при трехосных напряженных состояниях, МВТУ имени Н. Э. Баумана, «Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций», вып. 26, Машгиз, 1953.

30. Мартынова Т. Н., Опыт обобщения теории малых упруго-пластических деформаций А. А. Ильюшина для метастабильных сплавов, «Вестник Московского университета» № 12, 1955.

31. Москвитин В. В., О вторичных пластических деформациях, «Прикладная математика и механика» т. XVI, вып. 3, изд. АН СССР, 1952.

32. Москвитин В. В., Упруго-пластические деформации тел при повторных нагружениях, «Прикладная математика и механика», т. XIX, вып. 6, изд. АН СССР, 1955.

33. Надаи А., Пластичность и разрушение твердых тел, Изд-во иностранной литературы, 1954.

34. Некрасов Б. В., Курс общей химии, Госхимиздат, 1952.

35. Никифоров С. Н., Теория упругости и пластичности, Госстройиздат, 1955.

36. Новожилов В. В., О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно упругой среде. «Прикладная математика и механика», т. XV, вып. 2, изд. АН СССР, 1951.

37. Новожилов В. В., О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов, «Прикладная математика и механика», т. XV, вып. 6, изд. АН СССР, 1951.

38. Новожилов В. В., О классе сложных нагружений, который характеризуется сохранением направлений главных осей, «Прикладная математика и механика», т. XVIII, вып. 4, изд. АН СССР, 1954.

39. Пашков П. О., Пластичность и разрушение металлов, Судпромгиз, 1949.

40. Прагер В. и Ходж Ф. Г., Теория идеально-пластических тел, Изд-во иностранной литературы, 1956.

41. Работнов Ю. Н., Сопротивление материалов, Изд-во МГУ, 1950.

42. Работнов Ю. Н., Малые пластические деформации как проблема механики, «Известия АН СССР, Отд. техн. наук» № 7, 1954.

43. Ратнер С. И., Прочность и пластичность металлов, Оборонгиз, 1949.

44. Ржаницын А. Р., Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов, Госстройиздат, 1954.

45. Салли А., Ползучесть металлов и жаропрочные сплавы, Оборонгиз, 1953.

46. Сапожков Н. М., Пластические деформации и их значение в расчетах деталей машин, ВНИТОМАШ, Заочные курсы усовершенствования инженеров-конструкторов, Машгиз, 1951.

47. Сахненко В. Л., Холодная гибка и правка деталей, Машгиз, 1951.

48. Серенсен С. В., Когаев В. П., Козлов Л. А., Шнейдерович Р. М., Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность, Машгиз, 1954.

49. Смирнов-Аляев Г. А., Процессы пластического растяжения и кручения металлов в их взаимном сопоставлении, сб. «Экспериментальные методы определения напряжений и деформаций в упругой и пластической зонах», ОНТИ НКТП, 1935.

50. Смирнов-Аляев Г. А., Метод построения действительной кривой растяжения по данным испытания металла на прессе Гагарина, сб. «Экспериментальные

методы определения напряжений и деформаций в упругой и пластической зонах», ОНТИ НКТП, 1935.

51. Смирнов-Аляев Г. А., Сопротивление материалов пластическим деформациям, Машгиз, 1949.

52. Смирнов-Аляев Г. А. и Розенберг В. М., Технологические задачи теории пластичности, ч. I, Лениздат, 1951.

53. Смирнов-Аляев Г. А. и Розенберг В. М., Теория пластических деформаций металлов, Машгиз, 1956.

54. Соколовский В. В., Теория пластичности, ГИТТЛ, 1950.

55. Степанов А. В., Основы физического учения о прочности и пластичности кристаллов, «Известия АН СССР, Серия физическая», т. XVII, № 3, 1953.

56. Степанов А. В., О дислокационных теориях прочности и пластичности, «Известия АН СССР, Отд. техн. наук» № 9, 1954.

57. Стрелецкий Н. С., Материалы к курсу стальных конструкций, вып. 1, Работа стали в строительных конструкциях, Госстройиздат, 1956.

58. Теория пластичности, сб. ст. под ред. Ю. Н. Работнова, Изд-во иностранной литературы, 1948.

59. Томленов А. Д., Теория пластических деформаций металлов, Машгиз, 1951.

60. Унксов Е. П., Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением, Машгиз, 1955.

61. Филоненко-Бородич М. М., Теория упругости, ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.

62. Филоненко-Бородич М. М., Изюмов С. М., Олисов Б. А., Кудрявцев И. Н., Мальгинов Л. И., Курс сопротивления материалов, ч. I и II, ГИТТЛ ,1955, 1956.

63. Френкель Я. И., Введение в теорию металлов, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1958.

64. Фридман Я. Б., Механические свойства металлов, Оборонгиз, 1952.

65. Чеканов А. Н., Графическое построение диаграммы зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций по диаграмме растяжения или диаграмме сдвига, МВТУ им. Н. Э. Баумана. Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций, сб. 26, Машгиз, 1953.

66. Шмид Е. и Боас В., Пластичность кристаллов — в особенности металлических, ГОНТИ НКТП СССР, 1938.

67. Davis E. A., Combined tension — torsion tests with fixed principal directions, «Journal of applied mechanics», v. 22, № 3, 1955.

68. Drucker D. C., Relation of experiments to mathematical theories of plasticity, «Journal of applied mechanics», v. 16, № 4, 1949.

69. Hu L. W. and Marin J., Determination of theoretical plastic stress-strain relations for variable combined stress ratios, «Journal of applied mechanics», v. 19, № 4, 1952.

Перевод: Гу и Марин, Нахождение теоретической зависимости между напряжением и деформацией в пластической области при переменном отношении напряжений, сб. сокращенных переводов и обзоров иностранной периодической литературы, «Механика», вып. 5, Издательство иностранной литературы, 1953.

70. Marin J. and Hu L. W., Biaxial plastic stress-strain relations of a mild steel for variable stress ratios, «Transactions of the ASME», v. 78, № 3, 1956.

71. Marin J. and Kotalik B. J., Plastic biaxial stress-strain relations for alcoa 24 S-T, subjected to variable-stress ratios, «Journal of applied mechanics», v. 17, № 4, 1950.

Перевод: Марин и Коталик, Соотношение между напряжениями и деформациями в двухосном пластическом напряженном состоянии для алюминиевого сплава 24 S-T при переменном отношении главных напряжений, сб. сокращенных переводов и рефератов иностранной периодической литературы, «Механика», вып. 3, Издательство иностранной литературы, 1951.

72. Morrison J. and Shepherd W., An experimental investigation of plastic stress-strain relations, «The Institution of mechanical engineers Proceedings». v. 163, 1950.

Перевод: Моррисон и Шепферд, Опытное исследование соотношений между напряжениями и деформациями за пределом упругости, сб. сокращенных переводов иностранной периодической литературы «Механика», вып. 1, Издательство иностранной литературы, 1952

73. Phillips A., Combined tension — torsion tests for aluminum alloy 2S-0, «Journal of applied mechanics», v. 19, № 4, 1952.

Перевод: Филлипс, Испытание алюминиевого сплава 2S-0 при совместном растяжении и кручении, сб. сокращенных переводов и обзоров иностранной периодической литературы, «Механика», вып. 5, Издательство иностранной литературы, 1953.

74. Phillips A. and Kaechele Z., Combined stress tests in plasticity, «Journal of applied mechanics», v. 23, № 1, 1956.

75. Stodola A., Dampf und Gasturbinen, 1924.

76. Taylor G. J. and Quinney H., The plastic distortion of metals, «Philosophical transactions of the Royal Society», Ser. A, 230, 1931.

ГЛАВА IX

РАСЧЕТЫ СТЕРЖНЕЙ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

§ 1. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ — СЖАТИИ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

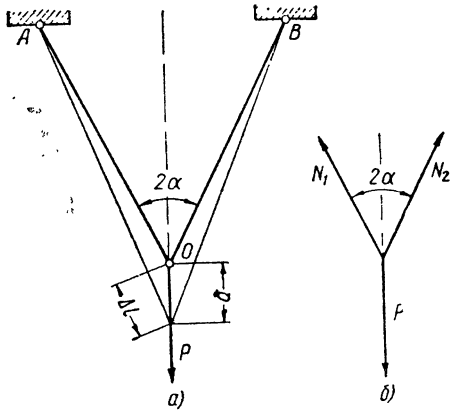
Расчеты за пределами упругости растянутых или сжатых статически определимых стержневых систем достаточно элементарны [1]. Для стержней постоянного поперечного сечения, растянутых или сжатых не изменяющимися по длине силами, пластические деформации во всех точках возникают одновременно. По диаграмме растяжения или сжатия материала стержней, зная напряжения, представляется возможным подсчитать деформации, и наоборот.

Для статически определимой системы, изображенной на фиг. 479,*а*, усилия в стержнях (фиг. 479,*б*), определяемые из уравнений статики, равны

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2\cos\alpha}.$$

Зная усилия по диаграмме растяжения образца в координатах Δl, P, можно определить удлинения стержней Δl. После этого в случае малых перемещений опускание точки A подсчитывается из геометрических соображений (фиг. 479, *а*):

$$\delta = \frac{\Delta l}{\cos\alpha}.$$



Фиг. 479. К примеру расчета статически определимой стержневой системы за пределами упругости.

Отметим, что после полной разгрузки статически определимой системы, нагруженной так, что в отдельных ее стержнях возникли пластические деформации, остаточных напряжений не образуется.

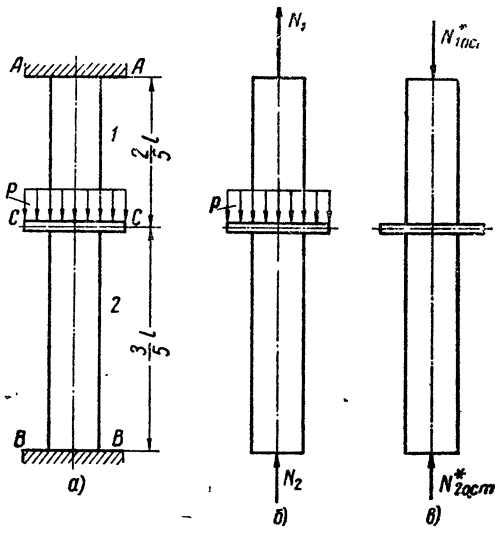
Это следует из того, что в статически определимой системе внутренние силы определяются только из уравнений статики. После полной разгрузки внешние силы отсутствуют, и, следовательно, условия равновесия приводятся к системе однородных относительно остаточных сил уравнений, корни которой имеют нулевые значения.

Отсутствие остаточных напряжений в рассматриваемом случае объясняется тем, что статически определимая система содержит только

[1] В дальнейшем при расчете сжатых за пределы упругости стержней будем предполагать, что устойчивость их обеспечена. Устойчивость таких стержней рассмотрена в т. III.

такие связи, которые определяют ее форму и обеспечивают ее геометрическую неизменяемость. Изменение длины одного или нескольких стержней в статически определимой системе не вызывает внутренних сил в ее элементах.

При наличии пластических деформаций остаточные удлинения стержней определяются из диаграммы растяжения образца по известным величинам усилий в стержнях. Зная остаточные удлинения, можно изобразить систему в деформированном состоянии.



Фиг. 480. К примеру расчета бруса за пределами упругости.

Коэффициент запаса по текучести или разрушению в статически определимых системах подсчитывается как отношение предела текучести или предела прочности к максимальному напряжению. Расчет статически определимых стержневых систем по методу предельного состояния и методу допускаемых напряжений приводит к одинаковым результатам.

Несколько сложнее расчет статически неопределимых стержневых систем за пределами упругости. Для того чтобы понять особенности таких расчетов, рассмотрим несколько примеров. В дальнейшем, как уже отмечалось выше, будем предполагать, что диаграммы растяжения и сжатия материала совпадают.

Пример 1. Брус постоянного поперечного сечения F длиной l нагружен в сечении C на расстоянии $\frac{2}{5}l$ от верхнего торца силой P (фиг. 480, *а*). Верхний A и нижний B торцы бруса закреплены неподвижно. Диаграмма растяжения материала схематизирована в виде диаграммы без упрочнения (см. фиг. 449). Исследуем деформацию бруса в пределах и за пределами упругости.

Решая 1 раз статически неопределимую задачу в пределах упругости, получаем величины нормальных сил в сечениях первого AC и второго CB участков:

$$N_1 = \frac{3}{5}P; \quad N_2 = -\frac{2}{5}P \tag{1}$$

соответственно. Знак минус во второй формуле указывает на то, что второй участок стержня сжат.

Поскольку $|N_1| > |N_2|$, пластические деформации возникнут вначале на первом участке. Значение силы P_s, при которой это произойдет, устанавливаем, приравнивая напряжения в поперечных сечениях первого участка пределу текучести материала σ_s

$$\frac{\frac{3}{5}P_s}{F} = \sigma_s,$$

откуда

$$P_s = \frac{5}{3}\sigma_s F. \tag{2}$$

При нагружении силой $P > P_s$ согласно диаграмме растяжения — сжатия без упрочнения (см. фиг. 449) напряжения в поперечных сечениях первого участка оста-

ются постоянными и равными σ_s. Поэтому нормальная сила в поперечных сечениях первого участка при дальнейшем нагружении ($P > P_s$) также остается постоянной и равной

$$N_1 = \sigma_s F. \tag{3}$$

Нормальную силу в поперечных сечениях второго участка можно установить из уравнения равновесия

$$N_2 = -(P - \sigma_s F). \tag{4}$$

Знак минус перед скобкой поставлен потому, что второй участок стержня сжат.

Таким образом, за пределами упругости задача становится статически определимой. Это объясняется тем, что в рассматриваемой задаче используется схематизированная диаграмма растяжения без упрочнения. Согласно такой диаграмме за пределами упругости напряжение постоянно и равно пределу текучести материала. Следовательно, после образования пластических деформаций величина нормальной силы на наиболее напряженном участке постоянна при нагружении и известна, что понижает на единицу степень статической неопределимости системы. Поскольку в рассматриваемом примере система 1 раз статически неопределима, за пределами упругости она превращается в статически определимую.

При использовании диаграммы растяжения материала с упрочнением за пределами упругости степень статической неопределимости системы не уменьшается.

Как следует из выражения (4), нормальная сила в поперечных сечениях второго участка при нагружении за пределами упругости возрастает. Это возрастание имеет место до тех пор, пока напряжение в поперечных сечениях второго участка не достигнет величины предела текучести. При этом несущая способность стержня исчерпывается, поскольку материал его перестает сопротивляться воздействию внешних сил Стержень неограниченно деформируется при постоянной силе, т. е. становится геометрически изменяемым.

Предельную силу $P_{пр}$, соответствующую исчерпанию несущей способности, можно установить, если приравнять абсолютную величину напряжения в поперечных сечениях второго участка BC пределу текучести материала σ_s, т. е.

$$\frac{P_{пр} - \sigma_s F}{F} = \sigma_s,$$

откуда

$$P_{пр} = 2\sigma_s F. \tag{5}$$

Отметим, что предельная нагрузка может быть найдена без анализа процесса деформирования стержня. Для определения ее в рассматриваемом случае достаточно положить, что напряжения в поперечных сечениях первого и второго участков достигли предела текучести и, следовательно, $N_1 = \sigma_s F$ и $|N_2| = \sigma_s F$. В таком случае из уравнения равновесия получаем соотношение (5).

Для реальных материалов площадка текучести не является неограниченной. Она переходит в кривую упрочнения и, следовательно, задолго до разрушения стержень опять начнет сопротивляться воздействию внешних сил. Таким образом, геометрическая изменяемость стержня является временной. Тем не менее она недопустима для конструкции. Поэтому нагрузка на стержень должна быть меньше предельной.

При расчете по методу допускаемых напряжений предельной нагрузкой является сила P_s и допускаемая сила

$$P_{доп} = \frac{P_s}{n} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sigma_s F}{n}, \tag{6}$$

где n — принятый коэффициент запаса.

В случае расчета по методу предельного состояния величина допускаемой силы равна

$$P_{доп} = \frac{P_{пр}}{n} = \frac{2\sigma_s F}{n} \tag{7}$$

Сопоставляя выражения (6) и (7), заключаем, что, как отмечалось выше (см. § 1, гл. VIII, т. II), метод расчета по предельному состоянию вскрывает дополнительные прочностные рессурсы, не используемые в способе допускаемых напряжений. В рассматриваемом случае расчет по предельному состоянию дает величину допускаемой нагрузки на 20% больше, чем расчет по допускаемым напряжениям, при условии, что запасы прочности в обоих методах одинаковы.

Для иллюстрации процесса деформирования стержня на различных этапах нагружения построим график зависимости силы P от перемещения λ сечения приложения ее.

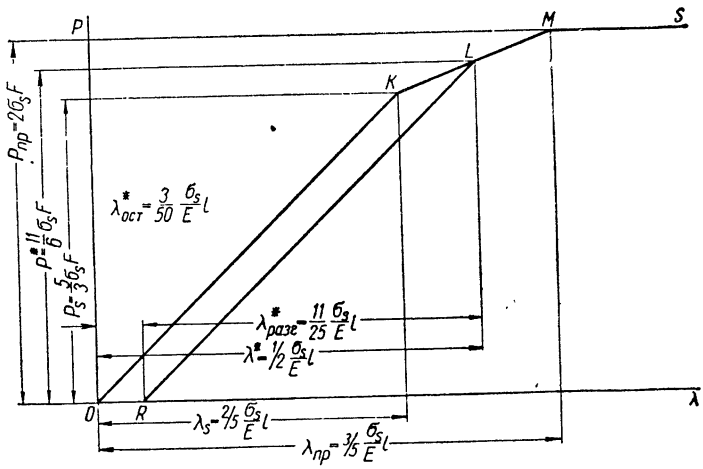
В упругой стадии деформирования стержня при $0 \leqslant P \leqslant P_s$ нормальные силы в поперечных сечениях первого и второго участков определяются по формулам (1). Перемещение сечения C равно растяжению первого или сжатию второго участков стержня:

$$\lambda = \frac{\frac{3}{5} P \frac{2}{5} l}{EF} = \frac{\frac{2}{5} P \frac{3}{5} l}{EF} = \frac{6}{25} \cdot \frac{Pl}{EF},$$

откуда

$$P = \frac{25}{6} \cdot \frac{EF}{l} \lambda. \tag{8}$$

При $P = P_s$ имеем $\lambda = \lambda_s = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sigma_s}{E} l$. График зависимости (8)—прямая линия OK, проходящая через начало координат (фиг. 481).



Фиг. 481. К примеру расчета бруса за пределами упругости. График зависимости силы P от перемещения λ сечения CC.

В упруго-пластической стадии деформирования стержня при $P_s \leqslant P \leqslant P_{пр}$ нормальные силы в поперечных сечениях определяются по формулам (3) и (4). Перемещение сечения C, равное сжатию второго участка стержня, может быть подсчитано по формуле, основанной на законе Гука, поскольку при $P_s \leqslant P \leqslant P_{пр}$ деформации в точках второго участка упругие:

$$\lambda = \frac{(P - \sigma_s F) \frac{3}{5} l}{EF},$$

откуда

$$P = \sigma_s F + \frac{5}{3} \cdot \frac{EF}{l} \lambda. \tag{9}$$

Заметим, что перемещение сечения C не может быть непосредственно связано с деформацией первого участка ввиду того, что последняя определяется деформацией второго участка. Из уравнения (9) получаем:

при $P = P_s = \frac{5}{3} \sigma_s F$

$$\lambda = \lambda_s = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sigma_s}{E} l;$$

при $P = P_{пр} = 2\sigma_s F$

$$\lambda = \lambda_{пр} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sigma_s}{E} l.$$

График зависимости (9) — прямая линия KM (фиг. 481). При $\lambda > \lambda_{пр}$ $P = P_{пр} =$ $= \text{const}$.

Обратим внимание на то, что в предельном состоянии деформация первого участка

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda_{пр}}{\frac{2}{5} l} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma_s}{E} = \frac{3}{2} \varepsilon_s.$$

Если обратиться к реальным материалам, то, как указывалось выше, деформация, соответствующая окончанию площадки текучести ε_s^*, для малоуглеродистых сталей в 10—20 раз больше величины ε_s. Следовательно, до образования пластических деформаций на втором участке материал первого участка не переходит в область упрочнения. Это подтверждает высказанное выше (см. гл. VIII, т. II) положение о возможности полагать в расчетах по предельному состоянию длину площадки текучести неограниченной.

Допустим теперь, что стержень был нагружен силой $P^* = \frac{11}{6} \sigma_s F$, а затем разгружен. Ввиду того что $P_s < P^* < P_{пр}$, усилия, возникающие в поперечных сечениях стержня при нагружении, должны быть определены по формулам (3) и (4):

$$N_1^* = \sigma_s F; \quad N_2^* = -\frac{5}{6} \sigma_s F, \tag{10}$$

а перемещение сечения C по соотношению (9):

$$\lambda^* = \frac{\sigma_s}{2E} l. \tag{11}$$

Уменьшение нормальных сил при разгрузке согласно закону разгрузки определяется по формулам (1):

$$\begin{aligned} N_{1\,разг}^* &= \frac{3}{5} P^* = \frac{11}{10} \sigma_s F; \\ N_{2\,разг}^* &= \frac{2}{5} P^* = \frac{11}{15} \sigma_s F. \end{aligned} \tag{12}$$

Остаточные усилия после полной разгрузки могут быть получены вычитанием из усилий, возникающих при нагружении (10), уменьшения нормальных сил при разгрузке (12). В результате устанавливаем

$$N_{1\,ост}^* = -\frac{1}{10} \sigma_s F; \quad N_{2\,ост}^* = -\frac{1}{10} \sigma_s F. \tag{13}$$

Равенство остаточных усилий $N_{1\,ост}^* = N_{2\,ост}^*$ следует из условия равновесия стержня после разгрузки (фиг. 480, *в*).

Знак минус в соотношениях (13) указывает на то, что остаточные усилия являются сжимающими. Это легко объяснить. Второй сжатый участок стержня, до разгрузки деформированный упруго, при разгрузке стремится полностью восстановить свои размеры. Этому противодействует первый пластически деформированный участок, который при разгрузке сжимается, но не полностью, а лишь частично. В результате стержень после разгрузки остается сжатым.

Перемещение сечения C при разгрузке определяется по формуле (8). Полагая в ней $P = P^*$, устанавливаем

$$\lambda_{разг}^* = \frac{11}{25} \cdot \frac{\sigma_s}{E} l. \tag{14}$$

Остаточное перемещение сечения C равно разности перемещений при нагружении (1) и при разгрузке (14). После вычитания получим

$$\lambda^*_{ост} = \frac{3}{50} \cdot \frac{\sigma_s}{E} l.$$

Прямой LR на фиг. 481 изображен график разгрузки.

Пример 2. Три стержня одинаковой длины l, равной площади поперечного сечения F, выполненные из одного и того же материала, связаны абсолютно жесткой плитой, к которой приложена сила P (фиг. 482). Диаграмма растяжения материала стержней схематизирована в виде диаграммы без упрочнения (см. фиг. 449). Пренебрегая весом плиты по сравнению с силой P, определим величину предельной силы $P_{пр}$.

Система является 1 раз статически неопределимой.

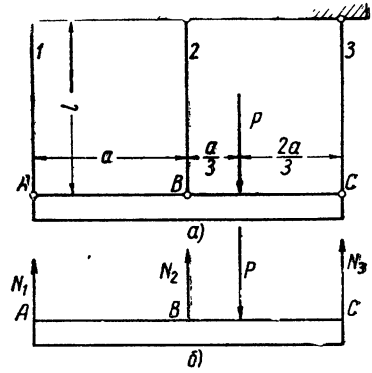
В рассматриваемом случае очевидно, что как в пределах упругости, так и за пределами упругости нормальные силы в первом, втором и третьем стержнях подчиняются неравенству $N_1 < N_2 < N_3$. Поэтому исчерпание несущей способности системы наступит тогда, когда напряжения в третьем и втором стержнях достигнут величины предела текучести и усилия в них станут равными $N_3 = \sigma_s F$; $N_2 = \sigma_s F$.

Поскольку в предельном состоянии система еще находится в равновесии, запишем для этого состояния условие равенства нулю относительно точки A суммы моментов всех сил, приложенных к плите, тогда получим

$$\sigma_s F a + \sigma_s F\, 2a - P_{пр} \frac{4}{3} a = 0,$$

откуда

$$P_{пр} = \frac{9}{4} \sigma_s F. \qquad (15)$$



Фиг. 482. К примеру расчета по предельному состоянию статически неопределимой стержневой системы

Предположим теперь, что заведомо неизвестно, какие стержни нагружены сильнее, а какие слабее. В таком случае нужно рассмотреть все возможные варианты исчерпания несущей способности, каждый раз вычисляя предельную нагрузку. Наименьшая из них и будет действительной. Этот так называемый кинематический метод применительно к общему случаю расчета статически неопределимых систем по предельному состоянию был разработан А. А. Гвоздевым [11].

Вариант возникновения пластических деформаций в третьем и втором стержнях был рассмотрен выше.

Разберем два других варианта образования пластических деформаций в третьем и первом, а затем во втором и первом стержнях.

Предположим вначале, что $N_1 = \sigma_s F$ и $N_3 = \sigma_s F$. Заметим, что при этом предположении усилие в первом стержне является сжимающим. Приравняем нулю сумму моментов относительно точки B, тогда получим

$$\sigma_s F a + \sigma_s F a - P_{пр} \frac{a}{3} = 0,$$

откуда

$$P_{пр} = 6\sigma_s F. \qquad (16)$$

Допустим теперь, что $N_1 = \sigma_s F$ и $N_2 = \sigma_s F$, тогда, приравнивая нулю сумму моментов всех сил относительно точки C, имеем

$$-\sigma_s F\, 2a - \sigma_s F a + P \frac{2}{3} a = 0,$$

откуда устанавливаем

$$P_{пр} = \frac{9}{2} \sigma_s F. \qquad (17)$$

Сопоставляя выражения (15) — (17), заключаем, что предельная нагрузка для конструкции определяется формулой (15).

Невозможность реализации второй и третьей схем предельного состояния следует из величин внутренних сил в предельном состоянии для стержней, усилия в которых заведомо не равны $\sigma_s F$. Если определить величины внутренних сил, то получим во второй схеме $N_2 = 6\sigma_s F$, а в третьей схеме $N_3 = \frac{5}{2}\sigma_s F$, в то время как фактическое усилие не может превысить величины $\sigma_s F$.

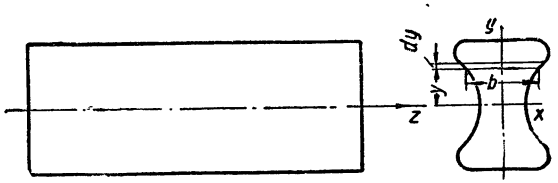
§ 2. ЧИСТЫЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА

Рассмотрим чистый изгиб бруса с поперечным сечением, имеющим две оси симметрии. Допустим, что изгибающий момент лежит в плоскости симметрии. В рассматриваемом случае в этой плоскости заключена ось y (фиг. 483), тогда ось симметрии x, перпендикулярная к оси y, является нейтральной осью.

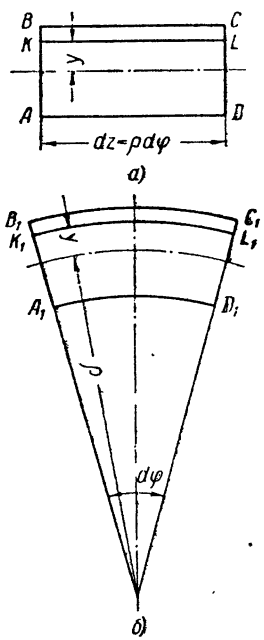
Изгиб бруса, поперечное сечение которого имеет одну ось симметрии, при условии, что изгибающий момент лежит в плоскости симметрии, рассмотрен в книгах А. Надаи [38] и В. В. Соколовского [60].

При чистом изгибе бруса как в пределах, так и за пределами упругости поперечное сечение бруса поворачивается относительно нейтральной оси, оставаясь плоским. Отсутствие искривления поперечного сечения является следствием симметрии нагружения и деформации бруса при чистом изгибе.

Для поперечного изгиба это положение уже не очевидно. Более того, можно показать, что в этом случае оно, строго говоря, не имеет места и может быть принято только приближенно. Однако и при поперечном изгибе, как указывает В. В. Новожилов [39], гипотеза плоских сечений не включает в себя никаких предположений о свойствах материала, из которого изготовлен брус. Поэтому гипотеза плоских сечений не требует специальной экспериментальной проверки за пределами упругости. Впрочем такая проверка производилась [6] и, как следовало ожидать, подтвердила справедливость высказанного выше положения в случае чистого изгиба и показала, что и при поперечном изгибе оно имеет достаточную для практики степень точности.



Фиг. 483. Брус, поперечное сечение которого имеет две оси симметрии, находящейся в условиях чистого изгиба



Фиг. 484. Элемент бруса до деформации (*а*) и после деформации (*б*)

Учитывая все изложенное выше, установим закон изменения линейной деформации ε по высоте сечения.

Для этого рассмотрим элемент бруса $ABCD$ длиной dz до и после деформации (фиг. 484). После изгиба сечения A_1B_1 и C_1D_1 образуют элементарный угол $d\varphi$ (фиг. 484,*б*) и все волокна бруса искривятся,

имея в точке O общий центр кривизны. Волокна нейтрального слоя сохраняют при этом прежнюю длину $dz=\rho d\varphi$, где ρ — радиус кривизны изогнутой оси.

Подсчитаем деформацию волокна KL на расстоянии y от нейтрального слоя:

$$\varepsilon=\frac{K_1L_1-KL}{KL}=\frac{(\rho+y)\,d\varphi-\rho\,d\varphi}{\rho\,d\varphi},$$

откуда

$$\varepsilon=y\varkappa, \tag{18}$$

где $\varkappa=\frac{1}{\rho}$ — кривизна изогнутой оси бруса.

Как следует из соотношения (18), наибольшая линейная деформация ε_{max} имеет место в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси x при $y=\frac{h}{2}$, где h — высота поперечного сечения:

$$\varepsilon_{max}=\frac{h}{2}\varkappa. \tag{19}$$

Допустим, как и при расчете в пределах упругости, что напряженное состояние всех точек балки при чистом изгибе и за пределами упругости является одноосным.

В таком случае нормальное напряжение в поперечном сечении σ является определенной функцией линейной деформации ε, которая устанавливается диаграммой растяжения материала.

А. А. Ильюшиным [21] установлено, что сформулированное допущение за пределами упругости является приближенным и эквивалентно допущению о том, что коэффициент поперечной деформации в упругой и пластической областях одинаков и равен 0,5. Только в этом случае удовлетворяются условия совместности деформаций.

Уточненное решение показывает [21], что за счет довольно резкого возрастания коэффициента поперечной деформации в пластической области по сравнению с величиной его в пределах упругости в сечениях, перпендикулярных к поперечным, возникают нормальные напряжения, а в поперечных сечениях, кроме нормальных напряжений, имеются также и касательные.

Однако экспериментальные исследования чистого изгиба хорошо согласуются с данными теории, построенной на базе сформулированных выше допущений. Заметим, что решение, основанное на этих допущениях, дает несколько преувеличенные деформации.

Пластические деформации в поперечном сечении балки возникают в том случае, когда абсолютная величина наибольшего напряжения в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси x, достигает величины σ_s, т. е. когда изгибающий момент равен

$$M_s=\sigma_s W_x, \tag{20}$$

где W_x — момент сопротивления поперечного сечения относительно оси x $см^3$.

Заметим, что при возникновении пластических деформаций наибольшая линейная деформация достигает величины ε_s.

При $M < M_s$ зависимость кривизны от изгибающего момента линейная:

$$\varkappa = \frac{M}{EJ_x}, \tag{21}$$

где J_x — момент инерции поперечного сечения относительно оси x в $см^4$.

Кривизну балки, при которой начинается образование пластических деформаций, обозначим через $\varkappa_s$.

Из формул (19) и (21) следует, что

$$\varkappa_s = \frac{2\varepsilon_s}{h} = \frac{M_s}{EJ_x}. \tag{22}$$

Допустим, что диаграмма растяжения материала известна (фиг. 485,*а*). Тогда, зная кривизну бруса $\varkappa$, можно построить эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении и определить изгибающий момент.

Для этого располагаем поперечное сечение бруса под диаграммой растяжения, как изображено на фиг. 485,*б*. По формуле (19) подсчитываем наибольшую линейную деформацию ε_{max} и откладываем на оси абсцисс диаграммы растяжения отрезок OL, равный в выбранном масштабе величине ε_{max}.

Через точки O и L проводим вертикальные линии OT и LU до пересечения в точках T и U с продолжением нейтральной оси x. Через точку A проведем горизонтальную линию до пересечения в точках R и S с вертикалями OT и LU. Затем соединяем точки T и S прямой линией. Очевидно, что треугольник TRS является эпюрой линейных деформаций, при помощи которой легко определить напряжение в любой точке поперечного сечения.

Так, например, для определения напряжения в точке поперечного сечения C необходимо провести через эту точку горизонтальную прямую CV. Из точки V пересечения ее с прямой TS следует провести вертикаль. Отрезок последней на диаграмме растяжения и определит напряжение в точке $C(\sigma_c)$. Откладывая эту величину напряжения перпендикулярно прямой параллельной оси y и повторяя подобные построения для ряда других точек сечения, получаем эпюру напряжений в поперечном сечении, изображенную на фиг. 485,*в*. Очевидно, что эта эпюра является перестроенной диаграммой растяжения, взятой до величины ε_{max}.

Если $\varepsilon_{max} > \varepsilon_s$ в части поперечного сечения, близкой к нейтральной оси, деформации являются упругими и напряжения меньше предела текучести материала (упругая область), а в другой части деформации слагаются из упругих и пластических и напряжения больше предела текучести материала (пластическая область).

На границе между упругой и пластической областями деформация достигает величины ε_s, а напряжение — величины предела текучести материала σ_s.

Обозначим высоту упругой области через h_s, тогда на основании соотношения (18) имеем

$$\varepsilon_s = \frac{h_s}{2}\varkappa, \tag{23}$$

Из выражений (19), (23) и (22) устанавливаем

$$\frac{h_s}{h} = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{max}} = \frac{\sigma_s}{E\varepsilon_{max}} = \frac{\varkappa_s}{\varkappa}. \tag{24}$$

По формулам (24) определяется высота упругой области.

Перейдем к вычислению изгибающего момента. Для этого составим его выражение:

$$M = \int_F \sigma\, y dF. \tag{25}$$

В рассматриваемом случае

$$dF = b dy, \tag{26}$$

где b — ширина поперечного сечения на расстоянии y от нейтральной оси x.

Используя соотношение (26) и учитывая, что поперечное сечение бруса симметрично относительно оси y, преобразуем выражение (25) к виду

$$M = 2\int_0^{\frac{h}{2}} \sigma\, b y dy. \tag{27}$$

Из соотношения (18) устанавливаем

$$y = \frac{\varepsilon}{\varkappa} \tag{28}$$

и, следовательно,

$$dy = \frac{d\varepsilon}{\varkappa}. \tag{29}$$

Подставим выражения (28) и (29) в соотношение (27), тогда, используя формулу (19), получим

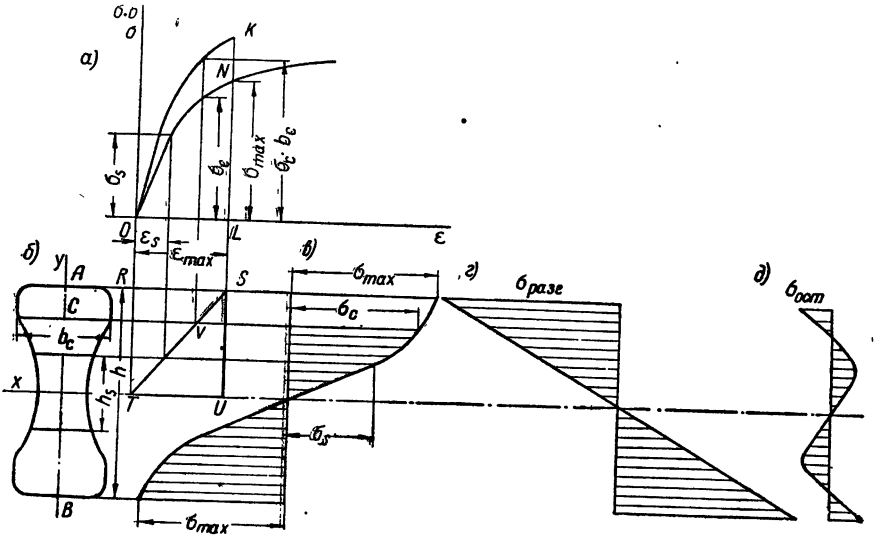
$$M = \frac{h^2}{2\varepsilon_{max}^2}\int_0^{\varepsilon_{max}} \sigma\, b\, \varepsilon\, d\varepsilon. \tag{30}$$

Для бруса прямоугольного поперечного сечения ($b = \text{const}$) формула (30) принимает вид

$$M = \frac{bh^2}{2\varepsilon_{max}^2}\int_0^{\varepsilon_{max}} \sigma\varepsilon\, d\varepsilon. \tag{31}$$

Интеграл в формуле (31) представляет собой статический момент площади ONL диаграммы растяжения относительно оси σ (фиг. 485,a). По формулам (30) или (31), используя диаграмму растяжения материала, можно подсчитать изгибающий момент, соответствующий выбранной величине $\varkappa$. В случае использования формулы (30) для этого удобно перестроить диаграмму растяжения, умножая величины напря-

жений σ на соответствующую ширину поперечного сечения b (например, напряжение σ_c умножается на b_c) (фиг. 485). Статический момент полученной площади OKL (фиг. 485,*а*) относительно оси σ равен интегралу в формуле (30).



Фиг. 485. К определению напряжений при изгибе бруса за пределами упругости

В работе Г. Г. Баловнева [2] рассмотрено вычисление интеграла (31) при помощи фокально-графического метода А. А. Попова.

Если брус выполнен из ограниченно пластичного материала, имеющего сравнительно небольшую величину деформации при разрушении $\varepsilon_{разр}$, то для определения разрушающего момента необходимо в формуле (30) положить $\varepsilon_{max}=\varepsilon_{разр}$.

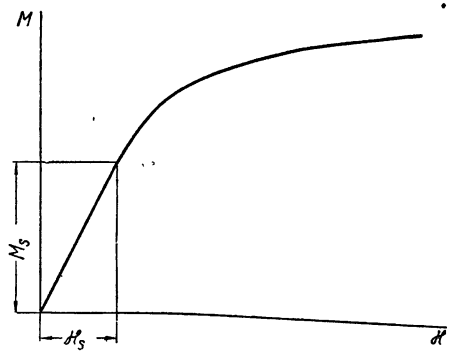
Выше было рассмотрено определение напряжений в поперечном сечении и изгибающего момента по заданной кривизне. Для решения обратной задачи: вычисления напряжений и кривизны по заданному изгибающему моменту $M>M_s$ удобно располагать графиком зависимости изгибающего момента от кривизны, который называется диаграммой изгиба.

При $M<M_s$, $\varkappa<\varkappa_s$ диаграмма изгиба (фиг. 486) является прямой уравнения (21). Для построения диаграммы изгиба при $M>M_s$ необходимо, задаваясь различными значениями кривизны $\varkappa>\varkappa_s$, определить для каждого из них указанным выше способом изгибающие моменты, после чего по точкам построить диаграмму изгиба.

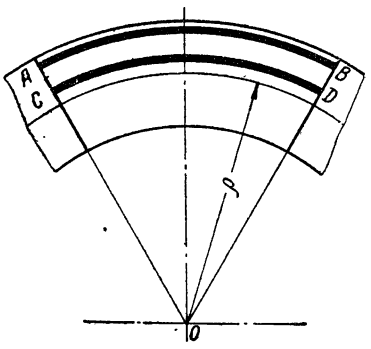
Если диаграмма изгиба известна, то для подсчета напряжений по заданному изгибающему моменту вначале из диаграммы изгиба определяется кривизна, после чего так, как изложено выше, вычисляются напряжения и строится эпюра напряжений.

Представим себе, что после нагружения балки, при котором внутренний изгибающий момент $M>M_s$, балка разгружается. Если бы для всех частиц материала деформации были упругими, то при разгрузке они постепенно уменьшались бы и в конце этого процесса сделались бы равными нулю, при наличии же частиц, претерпевших пластическое деформирование и принадлежащих к пластической области, процесс перегруппировки внутренних сил во время разгрузки протекает более сложно.

Если вырезать элементарную полоску AB в пластической области балки (фиг. 487), то после разгрузки такая полоска не может сократиться до первоначальной величины и сохранит некоторую остаточную деформацию. Если таким же образом освободить упруго деформированную полоску CD, то в свободном состоянии эта полоска примет свои первоначальные размеры. В действительности, однако, полоски AB и CD не свободны; они представляют собой лишь части одного сплошного тела и связаны условием плоских сечений, т. е. деформируются



Фиг. 486. Диаграмма изгиба



Фиг. 487. Элемент бруса в деформированном состоянии

так, что сечения, бывшие плоскими до деформации, остаются такими же и после деформации.

При разгрузке, когда брус начнет выпрямляться, волокна в растянутой части сечения сокращаются. При этом часть волокон, лежащих в пластической области балки, вскоре достигнет такой величины, которую имели бы волокна в свободном состоянии, в то время как волокна упругой области все еще находятся в растянутом состоянии. Волокна упругой области балки продолжают сокращаться и далее, что влечет за собой поджатие внешних волокон. Так продолжается до тех пор, пока внутренние силы не придут в равновесие. Равновесие внутренних сил выразится в равенстве нулю изгибающего момента в любом сечении бруса.

После разгрузки в ранее растянутой области балки верхние волокна окажутся сжатыми, а нижние — растянутыми; наоборот, в ранее сжатой области нижние волокна будут растянутыми, а верхние — сжатыми.

Таким образом, после разгрузки бруса возникают остаточные напряжения. Их можно определить путем вычитания из напряжений σ, возникающих при нагружении (фиг. 485,*в*) так называемых разгрузочных напряжений $\sigma_{разг}$ (фиг. 485,*г*):

$$\sigma_{ост} = \sigma - \sigma_{разг}. \tag{32}$$

Уменьшение напряжений при разгрузке или разгрузочные напряжения на основании теоремы о разгрузке определяются по формуле

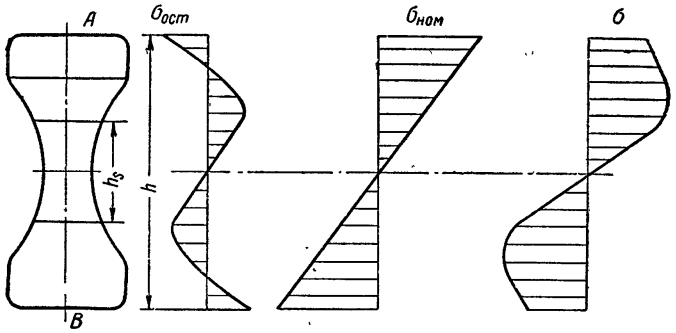
$$\sigma_{разг} = \frac{My}{J_x}. \tag{33}$$

Следовательно, эпюра разгрузочных напряжений (фиг. 485,*г*) является линейной. Разгрузку можно представить себе как нагружение

балки в пределах упругости изгибающим моментом, имеющим знак, обратный моменту при нагружении. Заметим, что построение эпюры разгрузочных напряжений является удобным расчетным приемом для определения остаточных напряжений. В действительности при разгрузке в поперечном сечении балки разгрузочные напряжения не возникают.

Эпюра остаточных напряжений получается вычитанием из эпюры напряжений, возникающих при нагружении, эпюры разгрузочных напряжений. На фиг. 485,*д* представлена эпюра остаточных напряжений, соответствующая полной разгрузке балки.

Теорема о разгрузке, рассмотренная в гл. VIII т. II, доказана в предположении, что в процессе разгрузки материал вновь не выхо-



Фиг. 488. Эпюры остаточных, номинальных и действительных напряжений

дит за пределы упругости. Поэтому изложенное выше определение остаточных напряжений справедливо только при этом условии.

При вторичном нагружении бруса изгибающим моментом M_2, меньшим или равным изгибающему моменту первого нагружения ($M_2 \leqslant M_1$), эпюру напряжений в поперечном сечении можно получить, суммируя эпюру остаточных напряжений (фиг. 485,*д*) с эпюрой номинальных напряжений, построенных в соответствии с законом вторичного нагружения по формуле

$$\sigma_{ном} = \frac{M_2 y}{J_x}. \tag{34}$$

На фиг. 488 представлено получение эпюры напряжений для случая $M_2 < M_1$.

Если изгибающий момент при вторичном нагружении равен изгибающему моменту при первом нагружении ($M_2 = M_1$), то эпюра номинальных напряжений представляет собой эпюру разгрузки, взятую с обратным знаком, и, следовательно, при вторичном нагружении эпюра напряжений имеет тот же вид, что и при первом.

Если при вторичном нагружении изгибающий момент больше, чем при первом нагружении ($M_2 \geqslant M_1$), то эпюру напряжений в поперечном сечении можно получить, не учитывая остаточные напряжения, возникшие при первом нагружении. Задачу следует решить заново, руководствуясь моментом M_2.

В случае вторичного нагружения, по знаку обратного первичному, в расчете необходимо учесть эффект Баушингера (см. § 3 гл. VIII т. II). Чистый упруго-пластический изгиб бруса при циклических нагрузках

с учетом эффекта Баушингера рассмотрен в работах В. В. Москвитина [33], [35].

После полной разгрузки брус остается криволинейным. Остаточная кривизна бруса $\varkappa_{ост}$ может быть определена как разность кривизны, возникшей при нагружении $\varkappa$ и уменьшения кривизны при разгрузке $\varkappa_{разг}$:

$$\varkappa_{ост} = \varkappa - \varkappa_{разг}. \tag{35}$$

Уменьшение кривизны при разгрузке $\varkappa_{разг}$ на основании теоремы о разгрузке может быть определено по общеизвестной формуле теории сопротивления материалов

$$\varkappa_{разг} = \frac{M}{EJ_x}. \tag{36}$$

Учитывая, что кривизна есть величина, обратная радиусу кривизны, из формул (35) и (37) получаем

$$\frac{1}{\rho_{ост}} = \frac{1}{\rho} - \frac{M}{EJ_x}, \tag{37}$$

где $\rho_{ост}$ — радиус кривизны балки после разгрузки;
ρ — радиус кривизны нагруженной балки.

Практические расчеты при упруго-пластическом изгибе значительно упрощаются для частных случаев поперечных сечений, если в основу положить схематизированную диаграмму растяжения.

Примем схематизированную диаграмму растяжения с линейным упрочнением без площадки текучести (см. фиг. 447), тогда зависимость напряжений от деформаций определяется формулами (10) и (11) гл. VIII т. II. Подставляя эти выражения в соотношение (31), получим при $\varepsilon_{max} > \varepsilon_s$

$$M = \frac{h^2}{2\varepsilon_{max}^2}\left\{\int_0^{\varepsilon_s} Eb\,\varepsilon^2\,d\varepsilon + \int_{\varepsilon_s}^{\varepsilon_{max}} [\sigma_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s)]\,b\,\varepsilon\,d\varepsilon\right. \tag{38}$$

Для бруса прямоугольного поперечного сечения

$$b = \text{const}. \tag{39}$$

Используя выражения (39), (19), (20) и (22), из уравнения (38) после преобразований получим

$$\frac{M}{M_s} = \frac{1}{2}\left\{2\frac{E_1}{E}\frac{\varkappa}{\varkappa_s} + \left(1 - \frac{E_1}{E}\right)\left[3 - \left(\frac{\varkappa_s}{\varkappa}\right)^2\right]\right\}. \tag{40}$$

Для бруса круглого поперечного сечения

$$b = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2};$$

с учетом формулы (28) и того, что $y_{max} = \frac{d}{2}$,

$$b = \frac{2}{\varkappa}\sqrt{\varepsilon_{max}^2 - \varepsilon^2}, \tag{41}$$

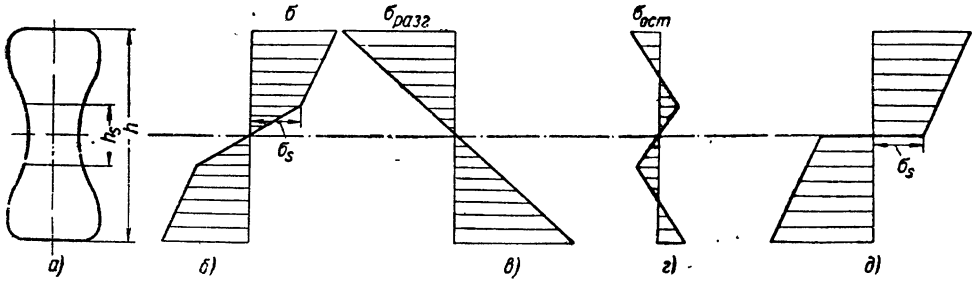
тогда, используя выражения (41), (19), (20) и (22), из уравнения (38) после преобразований имеем

$$\frac{M}{M_s}=\frac{2}{3\pi}\left\{3\frac{\varkappa}{\varkappa_s}\left(\arcsin\frac{\varkappa_s}{\varkappa}+\frac{E_1}{E}\arccos\frac{\varkappa_s}{\varkappa}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{E_1}{E}\right)\left[5-2\left(\frac{\varkappa_s}{\varkappa}\right)^2\right]\sqrt{1-\left(\frac{\varkappa_s}{\varkappa}\right)^2}\right\}. \qquad (42)$$

Формулы (40) и (42) устанавливают зависимость изгибающего момента от кривизны балки при $M\geqslant M_s$ [значение M_s определяется по формуле (20)]. При $M<M_s$ эта зависимость, как известно, является линейной [см. формулу (21)].

На фиг. 489 представлены эпюры напряжений, возникающих в поперечном сечении бруса при $M>M_s$ (фиг. 489,*б*), линейная эпюра



Фиг. 489. Эпюры напряжений, возникающих в поперечном сечении (*а*), при нагружении (*б*), разгрузочных (*в*), остаточных (*г*), возникающих при нагружении, после исчезновения упругой зоны (*д*). Схематизированная диаграмма растяжения материала с линейным упрочнением без площадки текучести.

разгрузки (фиг. 489,*в*) и эпюра остаточных напряжений (фиг. 489,*г*) при условии, что диаграмма растяжения материала с линейным упрочнением не имеет площадки текучести.

В случае диаграммы растяжения без упрочнения (см. фиг. 449) зависимость изгибающего момента от кривизны при $M>M_s$ можно определить из формул (40) и (42), полагая модуль упрочнения $E_1=0$, тогда получим для бруса прямоугольного поперечного сечения по формуле (40)

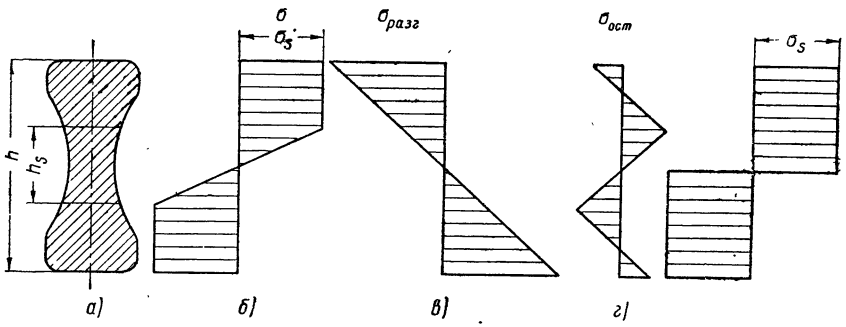
$$\frac{M}{M_s}=\frac{1}{2}\left[3-\left(\frac{\varkappa_s}{\varkappa}\right)^2\right], \qquad (43)$$

для бруса круглого поперечного сечения по формуле (42)

$$\frac{M}{M_s}=\frac{2}{3\pi}\left\{3\frac{\varkappa}{\varkappa_s}\arcsin\frac{\varkappa_s}{\varkappa}+\left[5-2\left(\frac{\varkappa_s}{\varkappa}\right)^2\right]\sqrt{1-\left(\frac{\varkappa_s}{\varkappa}\right)^2}\right\}. \qquad (44)$$

На фиг. 490 представлены эпюры напряжений, возникающих в поперечном сечении бруса при $M>M_s$ (фиг. 490,*б*), линейная эпюра разгрузки (фиг. 490,*в*) и эпюра остаточных напряжений (фиг. 490,*г*) для этого случая.

Преобразуем уравнения (40) и (42), предполагая, что кривизна бруса весьма велика ($\varkappa \gg \varkappa_s$). Из соотношения (24) заключаем, что в этом случае высота упругой зоны значительно меньше высоты сече-



Фиг. 490. Эпюры напряжений, возникающих в поперечном сечении (*а*), при нагружении (*б*), разгрузочных (*в*), остаточных (*г*) и возникающих при нагружении в предельном состоянии (*д*). Схематизированная диаграмма растяжения материала без упрочнения

ния ($h_s \ll h$) и практически ее можно не принимать во внимание и считать, что напряжения выше предела текучести во всех точках поперечного сечения.

Пренебрежем в этом случае в уравнениях (40) и (42) величиной $\frac{\varkappa_s}{\varkappa}$ по сравнению с единицей. При этом учтем, что

$$\arccos\frac{\varkappa_s}{\varkappa} = 1 \text{ и } \arcsin\frac{\varkappa_s}{\varkappa} \approx \frac{\varkappa_s}{\varkappa},$$

тогда после преобразований, используя соотношение (22), получим для бруса прямоугольного поперечного сечения

$$M = \frac{3}{2} M_s + E_1 J_x \varkappa, \tag{45}$$

а для бруса круглого поперечного сечения

$$M = \frac{16}{3\pi} M_s + E_1 J_x \varkappa. \tag{46}$$

Таким образом, после исчезновения упругой зоны зависимость изгибающего момента от кривизны является линейной. Эпюра напряжений в поперечном сечении для этого случая представлена на фиг. 489,*д*.

Заметим, что соотношения (45) и (46) можно получить, положив в основу расчета диаграмму растяжения жестко упрочняющегося тела (см. фиг. 452).

Если диаграмма растяжения материала бруса схематизирована в виде диаграммы без упрочнения ($E_1 = 0$), то из соотношений (45) и (46) можно получить величины предельных моментов:

для бруса прямоугольного поперечного сечения

$$M_{пр} = \frac{3}{2} M_s = \frac{\sigma_s b h^2}{4}; \tag{47}$$

для бруса круглого поперечного сечения

$$M_{пр} = \frac{16}{3\pi} M_s = \frac{\sigma_s d^3}{6}. \tag{48}$$

Величины предельных моментов получены для материала, имеющего значительную площадку текучести, в предположении бесконечно большой кривизны. Это предположение [см. формулу (24)] эквивалентно допущению об отсутствии упругой зоны ($h_c = 0$). Эпюра напряжений для этого случая представлена на фиг. 490,*д*.

Однако кривизна бруса не может стать бесконечно большой. Бесконечно большой кривизне на основании формулы (24) соответствует бесконечно большая наибольшая линейная деформация. В процессе нарастания она достигнет величины, соответствующей концу площадки текучести ε_s^*, и материал в наиболее удаленных от нейтральной оси точках перейдет в область упрочнения.

Таким образом, эпюра напряжений, представленная на фиг. 490,*д*, строго говоря, не реализуется, тем не менее величина предельного момента для материала, имеющего значительную площадку текучести, должна подсчитываться исходя из предположения распространения текучести по всему сечению. Это объясняется тем, что в таком состоянии несущая способность бруса исчерпывается полностью, брус перестает сопротивляться воздействию внешних сил и становится геометрически изменяемым. Для примера представим себе брус прямоугольного поперечного сечения, выполненный из стали, у которой $\frac{\varepsilon_s^*}{\varepsilon_s} = 10$. На основании формулы (24) заключаем, что переход материала в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси в зону упрочнения имеет место при $\frac{h_s}{h} = \frac{\varkappa_s}{\varkappa} = 0{,}1$.

Величину изгибающего момента, соответствующего этому отношению кривизн, вычисляем по формуле (43): $M = 0{,}997 M_{пр}$. Таким образом, полученная величина изгибающего момента ничтожно отличается от предельной его величины. Как указывалось выше, для малоуглеродистых сталей обычно $\frac{\varepsilon_s^*}{\varepsilon_s} > 10$, и поэтому можно приближенно считать, что материал в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии, еще не переходит в область упрочнения до распространения текучести по всему сечению.

Рассмотрим теперь определение предельного момента для общего случая сечения, имеющего одну ось симметрии (фиг. 491).

Положение нейтральной оси χ в предельном состоянии устанавливается из условия равенства нулю нормальной силы:

$$\int_F \sigma \, dF = 0. \tag{49}$$

Обозначим через F_z площадь растянутой части, а через F_d — площадь сжатой части поперечного сечения, тогда, учитывая, что в

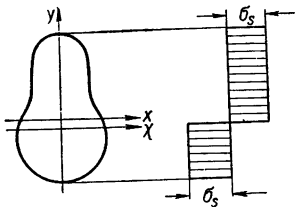
предельном состоянии во всех точках растянутой части поперечного сечения напряжения равны σ_s, а во всех точках сжатой части $-\sigma_s$, из выражения (49) получаем

$$\int_{F_z} \sigma_s \, dF - \int_{F_d} \sigma_s \, dF = 0,$$

откуда следует

$$F_z = F_d. \tag{50}$$

Таким образом, нейтральная линия делит площадь поперечного сечения на две равные по площади части. Очевидно, что если сечение имеет две оси симметрии, то в предельном состоянии нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения.



Фиг. 491. К определению предельного момента для сечения, имеющего одну ось симметрии

Величину предельного изгибающего момента можно установить по формуле (25), если учесть, что предельное состояние наступает тогда, когда в растянутой части поперечного сечения напряжения достигают величины σ_s, а в сжатой равны $-\sigma_s$, тогда по формуле (25) получаем

$$M_{пр} = \int_{F_z} \sigma_s \, y dF + \int_{F_d} (-\sigma_s)(-y) \, dF,$$

откуда устанавливаем

$$M_{пр} = \sigma_s (S_\chi^z + S_\chi^d), \tag{51}$$

где S_χ^z и S_χ^d — абсолютные значения статических моментов растянутой и сжатой частей сечения относительно нейтральной линии χ.

В частном случае, когда поперечное сечение имеет две оси симметрии,

$$S_\chi^z = S_\chi^d = S_\chi$$

и

$$M_{пр} = 2\sigma_s S_\chi. \tag{52}$$

В табл. 23 приведены величины $S_\chi^z + S_\chi^d$ или $2S_x$ для различных форм поперечного сечения изгибаемого бруса.

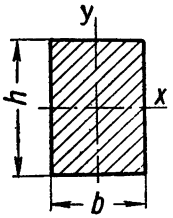
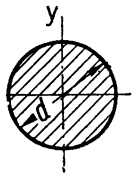
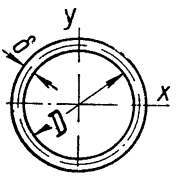
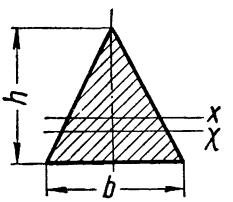
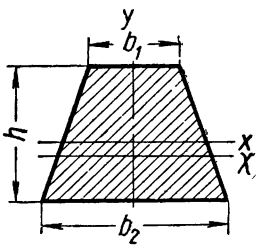
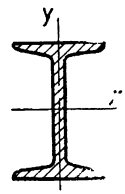
§ 3. ИЗГИБ КОЛЕЦ НА ОПРАВКЕ

Рассмотрим на базе теории чистого упруго-пластического изгиба расчет технологической операции изготовления круглых колец путем изгиба прутка на оправке (фиг. 492). При этом не будем учитывать изменение формы поперечного сечения прутка при его изгибе.

Более подробно с учетом изменения формы поперечного сечения и смещения нейтральной оси при деформации задача пластического изгиба применительно к заводским условиям холодной гибки листового материала исследована в работах А. Н. Малова [31], М. П. Марковца [32], Е. Н. Мошнина [36], [37], И. П. Ренне [50], [51], В. П. Романовского [53], [54], В. Л. Сахненко [55], Л. А. Шофмана и П. И. Локотош [63] и др.

Таблица 23

Статические моменты для некоторых сечений

			
$2S_x = \frac{bh^2}{4}$	$2S_x = \frac{d^3}{6}$	$2S_x = D^2\delta$	$S_\chi^z + S_\chi^d = 0{,}0977bh^2$
			
$S_\chi^z + S_\chi^d = \frac{h^2}{3(b_2 - b_1)^2}\left[b_1^3 + b_2^3 - \left(b_1^2 + b_2^2\right)\sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}}\right]$			$2S_x = (1{,}14 \div 1{,}17)\,W_x$

Рассмотрим, какой момент следует приложить к прутку и на оправке какого диаметра его нужно изгибать для того, чтобы после изгиба кольцо имело запроектированный диаметр. Очевидно, что диаметр кольца при изгибе на оправке должен быть меньше, чем запроектированный диаметр, так как после изгиба он несколько увеличивается за счет так называемой упругой отдачи кольца.

Наибольшая линейная деформация ε_{max} в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, на основании соотношения (19) определяется формулами

$$\varepsilon_{max} = \frac{h}{D_н} \tag{53}$$

для кольца прямоугольного поперечного сечения и

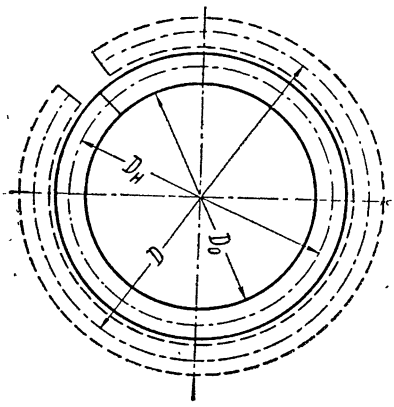
$$\varepsilon_{max} = \frac{d}{D_н} \tag{54}$$

для кольца круглого поперечного сечения.

В формулах (53) и (54) h и d — высота и диаметр прямоугольного и круглого поперечных сечений кольца соответственно, $D_н$ — средний диаметр кольца при изгибе его на оправке.

Обычно отношения $\frac{h}{D_н}$ и $\frac{d}{D_н}$ колеблются в пределах 0,1—0,5.

Поэтому величина наибольшей линейной деформации, как правило, не меньше 0,1. Деформация ε_s, соответствующая пределу текучести материала, обычно не превышает 0,005. Следовательно, в наиболее часто встречающихся случаях $\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{max}} \leqslant 0{,}05$. Таким образом, на основании соотношения (24) заключаем, что обычно высота упругой области $h_s \leqslant 0{,}05h$. Это дает право пренебречь упругой областью и считать, что во всех точках поперечного сечения прутка при его изгибе на оправке напряжения равны или выше предела текучести материала. Такое предположение равносильно исключению упругого участка из диаграммы растяжения материала.



Фиг. 492. Кольцо при изгибе на оправке (сплошные линии) и после снятия с оправки (штриховые линии).

Ввиду того что обычно действительная диаграмма растяжения за пределами упругости хорошо схематизируется диаграммой с линейным упрочнением без площадки текучести, после исключения из нее упругого участка получаем диаграмму растяжения, изображенную на фиг. 452.

Зависимости изгибающего момента от кривизны в этом случае определяются формулами (45) или (46).

Обозначим запроектированный диаметр кольца через D, тогда учитывая, что в рассматриваемом случае $\rho_{ост} = \frac{D}{2}$, $\rho = \frac{D_н}{2}$, из формулы (37) имеем

$$\frac{2}{D} = \frac{2}{D_н} - \frac{M}{EJ_x}, \tag{55}$$

где M — изгибающий момент в поперечном сечении прутка при изгибе его на оправке;

E — модуль упругости первого рода материала прутка;

J_x — момент инерции поперечного сечения проволоки (для прутка прямоугольного сечения с шириной b и высотой h $J_x = \frac{bh^3}{12}$, для прутка круглого сечения диаметра d $J_x = \frac{\pi d^4}{64}$).

Подставим в выражение (55) изгибающий момент вначале по формуле (45), а затем по формуле (46). При этом учтем соотношения (22) и (20), а также то, что $\varkappa = \frac{2}{D_н}$, тогда после преобразований получим величину среднего диаметра кольца при изгибе его на оправке для прутка прямоугольного поперечного сечения и

$$D_н = \frac{\lambda}{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma_s}{E} \cdot \frac{D}{h}} D, \tag{56}$$

а для прутка круглого поперечного сечения

$$D_н = \frac{\lambda}{1+\frac{16}{3\pi}\cdot\frac{\sigma_s}{E}\cdot\frac{D}{d}} D. \qquad (57)$$

В формулах (56) и (57) параметр упрочнения λ определяется формулой (6) гл. VIII т. II.

После определения диаметра $D_н$ кольца при изгибе прутка на оправке диаметр последней может быть установлен следующим образом:

для прутка прямоугольного поперечного сечения

$$D_0 = D_н - h,$$

для прутка круглого поперечного сечения

$$D_0 = D_н - d.$$

Изгибающий момент, возникающий в сечениях прутка при изгибе его на оправке, определяется по формулам (45) или (46) подстановкой в них $\varkappa = \frac{2}{D_н}$.

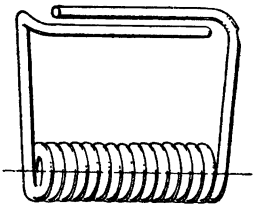
Формулы (55) и (57) могут быть использованы и для определения диаметра пружины малого угла подъема при ее навивке по заданному проектному диаметру [26].

В работе [42] учтено закручивание проволоки круглого поперечного сечения при навивке пружины. Это позволяет теоретически изучить навивку пружин с любым углом подъема и определить упругую отдачу не только по диаметру, но и по шагу и числу витков.

Теория навивки винтовых цилиндрических пружин растяжения с начальным натяжением (межвитковым давлением) разработана С. М. Заседателевым [15], [17], [18], [19].

§ 4. ЗАНЕВОЛИВАНИЕ ВИНТОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН КРУЧЕНИЯ

Как уже отмечалось выше (см. § 1 гл. VIII т. II), винтовые цилиндрические пружины кручения, так же как и пружины других конструкций, после навивки и термообработки обычно выдерживаются в деформированном за пределы упругости состоянии определенное время (от 6 до 48 час.). Такая операция длительного деформирования пружин за пределы упругости в производственной практике называется заневоливанием. Для винтовых цилиндрических пружин кручения (фиг. 493) операция заневоливания заключается в длительном закручивании пружины на величину максимального предусмотренного эксплуатационными условиями угла закручивания.



Фиг. 493. Пружина кручения.

При заневоливании пружин напряжения превосходят предел пропорциональности. Поэтому после разгрузки размеры пружин изменяются и в сечениях проволоки возникают остаточные напряжения.

В результате заневоливания повышается несущая способность пружин в пределах упругости. Одновременно при этом пружины подвергаются испытанию длительной нагрузкой, что способствует отсеиванию неполноценной продукции.

Проволока винтовых цилиндрических пружин кручения с малым углом подъема в основном изгибается. Изгибающий момент в поперечном сечении проволоки M приближенно равен моменту $\mathfrak{M}$, закручивающему пружину:

$$M = \mathfrak{M}. \tag{58}$$

Угол закручивания пружины φ связан с изменением кривизны проволоки $\Delta\varkappa$ соотношением (см. гл. XIII т. I)

$$\varphi = \pi D i \Delta\varkappa, \tag{59}$$

где D — средний диаметр пружины;

i — число рабочих витков.

Для пружин достаточно большого индекса можно пренебречь влиянием кривизны и вести расчет по формулам чистого упруго-пластического изгиба прямого бруса.

На основании соотношений (58) и (30), а также (59) и (19) устанавливаем

$$\mathfrak{M} = \frac{h^2}{2\varepsilon_{max}^2} \int_0^{\varepsilon_{max}} \sigma_b \varepsilon d\varepsilon; \tag{60}$$

$$\varphi = \frac{2\pi D i}{h} \varepsilon_{max}, \tag{61}$$

где h — высота поперечного сечения проволоки (для проволоки круглого сечения $h = d$);

b — ширина поперечного сечения проволоки на расстоянии y от нейтральной оси x (для проволоки прямоугольного поперечного сечения $b = \text{const}$);

ε_{max} — максимальная линейная деформация в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

По формулам (60) и (61), подобно тому как в § 2 строилась диаграмма изгиба бруса, может быть построен график зависимости момента, скручивающего пружину, от угла закручивания ее (диаграмма кручения пружины). При помощи этого графика по заданному крутящему моменту устанавливается угол закручивания и наоборот.

Так, как изложено в § 2, могут быть получены напряжения, возникающие при заневоливании, а также определены остаточные напряжения и остаточный угол закручивания после заневоливания.

Рассмотрим порядок проектирования заневоленных пружин кручения на заданные максимальный крутящий момент $\mathfrak{M}_{max}$ и максимальный угол закручивания φ_{max}. Вначале обычно задаются отношением высоты упругой области к высоте сечения при максимальном крутящем моменте:

$$\beta = \frac{h_s}{h}.$$

Во избежание образования остаточных деформаций у пружин в эксплуатации целесообразно принимать $\beta \geqslant 0{,}5$ [44].

По выбранной величине β на основании формулы (24) определяется максимальная линейная деформация:

$$\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_s}{E\beta}. \tag{62}$$

Заметим, что отношение

$$n_в^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{разр}}{\varepsilon_{max}},$$

где $\varepsilon_{разр}$ — действительная линейная деформация при разрыве, характеризует запас прочности по разрушению.

Общепринятая величина запаса прочности как отношения предела прочности проволоки к максимальному нормальному напряжению

$$n_в = \frac{\sigma_{вz}}{\sigma_{max}}$$

в рассматриваемом случае часто бывает непоказательна. Это объясняется тем, что в случае пологой диаграммы растяжения максимальные напряжения могут не сильно отличаться от предела прочности проволоки и запас прочности получается близким к единице. Несмотря на это, для доведения проволоки до разрушения удлинения ее волокон могут быть еще значительно увеличены.

После определения ε_{max} высота поперечного сечения проволоки h может быть найдена по формуле, которая следует из соотношения (60):

$$h = \sqrt[3]{\frac{2\mathfrak{M}_{max}}{\Phi}}, \tag{63}$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_{max}^2} \int_0^{\varepsilon_{max}} \sigma \frac{h}{h} \varepsilon \, d\varepsilon. \tag{64}$$

Величина Φ определяется по диаграмме растяжения пружинной проволоки, как это было изложено в § 2.

Заметим, что для проволоки круглого поперечного сечения $h=d$, для проволоки прямоугольного поперечного сечения $b=\text{const}$. В последнем случае отношением $\frac{b}{h}$ необходимо задаться исходя из наличия прутков с определенными отношениями $\frac{b}{h}$.

После определения высоты поперечного сечения h средний диаметр пружины вычисляется по формуле

$$D = ch, \tag{65}$$

где $c = \frac{D}{h}$ — индекс пружины, который рекомендуется выбирать в интервале от 4 до 10.

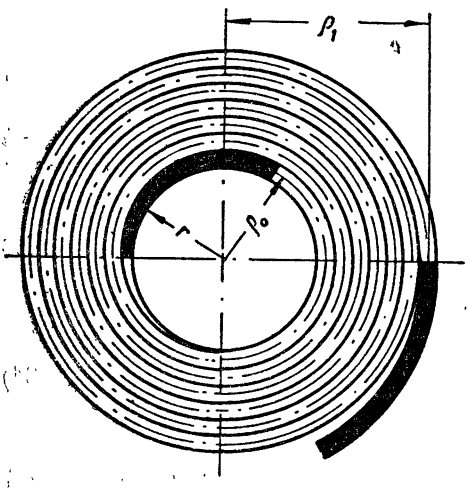
Ввиду того что после заневоливания в пределах изменения крутящего момента $0 \leqslant \mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{M}_{max}$ характеристика пружины линейная, рабочее число витков определяется из формулы (30д) гл. XIII т. I:

$$i = \frac{EJ_x \varphi_{max}}{\pi D \mathfrak{M}_{max}}, \tag{66}$$

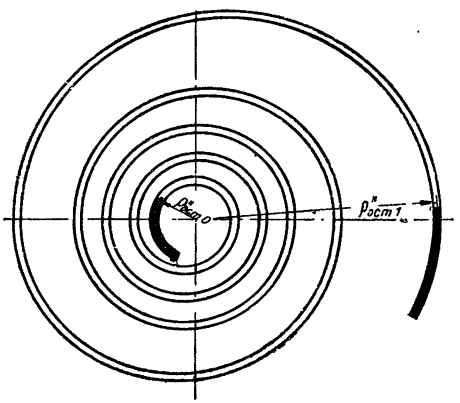
где J_x — момент инерции поперечного сечения проволоки пружины (для прямоугольного поперечного сечения со сторонами b и h $J_x = \frac{bh^3}{12}$, для проволоки круглого поперечного сечения диаметра d $J_x = \frac{\pi d^4}{64}$).

§ 5. ТЕОРИЯ НАВИВКИ ПЛОСКИХ СПИРАЛЬНЫХ ПРУЖИН

При изготовлении спиральной пружины стальная лента навивается на валик так, что витки ее последовательно плотно накладываются друг на друга (фиг. 494). Перед навивкой концы ленты отжигаются и поэтому обладают механическими свойствами, отличными от свойств всей остальной части ленты. Длина этих отожженных участков колеб-



Фиг. 494. Схема навивки ленты на валик.



Фиг. 495. Плоская спиральная пружина в свободном состоянии.

лется в пределах 30—40 *мм*, что при общей длине пружины 1000—1200 *мм* не оказывает существенного влияния на механические характеристики пружины. Если после навивки пружину распустить, то в свободном состоянии она примет вид некоторой спирали (фиг. 495). Однако для стабилизации формы спирали пружину после навивки на валик, почти не распуская, помещают в обойму, где и выдерживают некоторое время — от 24 до 48 час. Последняя операция носит название заневоливания пружины. Термическая обработка пружины после заневоливания не допускается. После этого пружина считается готовой, если только в ней не обнаружилось после заневоливания каких-либо пороков. Готовая пружина в свободном состоянии изображена на фиг. 495.

В результате навивки ленты в сечениях ее возникают остаточные напряжения, учет которых необходим при исследовании работы пружины.

В настоящем параграфе рассматривается теория навивки плоских спиральных пружин. В основу исследования положена экспериментально полученная диаграмма растяжения стальной ленты.

Витки ленты при навивке ее на валик плотно прилегают друг к другу. Поэтому ось ленты, плотно навитой на валик, изогнута по архимедовой спирали, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$\rho = \frac{h\varphi}{2\pi}, \tag{67}$$

где ρ — текущий радиус-вектор;
φ — полярный угол;
h — толщина ленты.

Зная величину радиусов-векторов ρ_0 и ρ_1 начала и конца неотожженной части ленты, легко определить соответствующие им углы φ_0 и φ_1.

Из уравнения (67) имеем

$$\varphi_0 = \frac{2\pi\rho_0}{h}; \quad \varphi_1 = \frac{2\pi\rho_1}{h}. \tag{68}$$

Так как касательная к геометрической оси заневоленной ленты в любой ее точке образует с радиусом-вектором в этой же точке угол, весьма близкий к прямому, то приближенно можно считать, что радиус кривизны пружины в любом сечении равен радиусу-вектору, тогда

$$ds = \rho\, d\varphi = \frac{h\varphi\, d\varphi}{2\pi}. \tag{69}$$

Интегрируя уравнение (69), получаем зависимость длины дуги от полярного угла:

$$s = \frac{h\varphi^2}{4\pi} + C. \tag{70}$$

Постоянная интегрирования C зависит от выбора начала отсчетов углов и дуги s. Для удобства выкладок примем, что углу $\varphi=0$ соответствует $s=0$, тогда в формуле (70) $C=0$ и, следовательно,

$$\varphi = 2\sqrt{\frac{\pi s}{h}}. \tag{71}$$

Подставляя выражение (71) в формулу (69), получим

$$\rho = \sqrt{\frac{hs}{\pi}}. \tag{72}$$

Величина s меняется в пределах $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$, где дуги s_0 и s_1 определяются заданием каких-либо двух величин из следующих трех: ρ_0, ρ_1 и длины закаленной части ленты l (отожженные концы во внимание не принимаются). Особенно удобно исходить из начального радиуса-вектора и длины заготовки l, тогда

$$s_0 = \frac{\pi\rho_0^2}{h}; \quad s_1 = s_0 + l; \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{hs_1}{\pi}}. \tag{73}$$

Имея экспериментально полученную диаграмму растяжения ленты, можно построить эпюру напряжений в произвольном поперечном сечении ленты, координируемом длиной дуги s. Для этого по формуле (72) определяем радиус кривизны ρ оси ленты в рассматриваемом сечении.

Зная радиус кривизны ρ, находим кривизну $\varkappa = \frac{1}{\rho}$ и далее, как изложено в § 2, строим эпюру нормальных напряжений в рассматриваемом сечении, определяем в этом сечении изгибающий момент M и строим эпюру остаточных напряжений, имеющих место в сечении после снятия пружины с валика.

Рассмотрим определение формы пружины после снятия ее с валика. Зная радиус кривизны ρ какого-либо сечения пружины при навивке ее на валик, по формуле (37) находим радиус кривизны $\rho_{ост}$ этого сечения после снятия пружины с валика:

$$\rho_{ост} = \frac{\rho EJ_x}{EJ_x - M\rho}. \tag{74}$$

Уравнения (72) и (74) связывают величину $\rho_{ост}$ с длиной дуги s.

Принимая, так же как и раньше, радиус кривизны равным радиусу-вектору, на основании формулы (69) получаем

$$\Delta\varphi_{ост} = \frac{\Delta s}{\rho_{ост.ср}},$$

т. е.

$$\varphi_{ост\ i+1} - \varphi_{ост\ i} = 2\,\frac{s_{i+1} - s_i}{\rho_{ост\ i+1} + \rho_{ост\ i}}. \tag{75}$$

Задаваясь длиной дуги s_i, начиная с $s = s_0$, и выбирая достаточно малые приращения $s_{i+1} - s_i$, определяем по формулам (72) и (74) радиусы-векторы $\rho_{ост\ i}$, затем из зависимости (75) устанавливаем приращения $\varphi_{ост\ i+1} - \varphi_{ост\ i}$ и, принимая приближенно $\varphi_{ост.\,0} = \varphi_0$, определяем углы $\varphi_{ост\ i}$.

Таким образом, можно получить табличную зависимость $\rho_{ост}$ от $\varphi_{ост}$ и по точкам построить ось пружины в свободном состоянии.

Напряжения, возникающие при работе пружины, называются рабочими напряжениями. Эпюра рабочих напряжений может быть получена как сумма двух эпюр: эпюры остаточных напряжений и обычной линейной эпюры от изгибающего момента M_0, создаваемого рабочей нагрузкой. Последняя строится по формуле

$$\sigma = \frac{M_0 y}{J_x}.$$

Ввиду того что в заведенной пружине внутренние витки обычно ложатся на валик того же диаметра, что и при навивке, напряжения в сечениях их достигают той же величины, что и напряжения при заневоливании.

Так же как и при заневоливании винтовых цилиндрических пружин кручения в рассматриваемом случае, запас прочности по разрушению целесообразно определять через деформации как отношение действительной деформации при разрыве к максимальной деформации:

$$n_в^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{разр}}{\varepsilon_{max}}.$$

Положив в основу исследования схематизированную диаграмму растяжения, можно получить аналитические выражения для остаточ-

ных напряжений и для координат, определяющих форму свободной пружины.

В работе [25] исследована навивка плоских спиральных пружин на основе диаграммы растяжения с линейным упрочнением. В этом случае в упругой области при $y \leqslant \frac{h_s}{2}$ на основании формул (10) гл. VIII т. II и (18)

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}, \tag{76}$$

а в пластической области согласно формулам (11) гл. VIII т. II и (18)

$$\sigma = \lambda\sigma_s + E_1\frac{y}{\rho}, \tag{77}$$

где λ — параметр упрочнения, определяемый формулой (6) гл. VIII т. II.

Преобразуем уравнение (40) при помощи соотношений (20), (24), (19) и (72), тогда получим

$$M = \frac{\sigma_s b h^2}{12}\left\{\frac{E_1}{\sigma_s}\sqrt{\frac{\pi h}{s}} + \lambda\left[3 - 4\left(\frac{\sigma_s}{E}\right)^2\frac{s}{\pi h}\right]\right\}. \tag{78}$$

Остаточные напряжения определяем по формуле (32), используя соотношения (76), (77), (33) и (78). После преобразований имеем в упругой области при $y \leqslant \frac{h_s}{2}$

$$\sigma_{ост} = E\lambda\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi h}{s}} - \frac{3}{2}\frac{\sigma_s}{E} + \frac{2s}{\pi h}\left(\frac{\sigma_s}{E}\right)^3\right]\frac{2y}{h} \tag{79}$$

и в пластической области при $y \geqslant \frac{h_s}{2}$

$$\sigma_{ост} = \lambda\left[\left(1 - \frac{3y}{h}\right)\sigma_s + \frac{4s}{\pi h}E\left(\frac{\sigma_s}{E}\right)^3\frac{y}{h}\right]. \tag{80}$$

Получим теперь уравнение свободной спирали. Подставим в соотношение (74) выражения (72) и (78), тогда устанавливаем зависимость остаточного радиуса кривизны $\rho_{ост}$ от длины дуги s:

$$\rho_{ост} = \frac{h}{\lambda\left[\sqrt{\frac{\pi h}{s}} - 3\frac{\sigma_s}{E} + \frac{4s}{\pi h}\left(\frac{\sigma_s}{E}\right)^3\right]}. \tag{81}$$

Как уже указывалось выше, радиус кривизны без заметной погрешности можно принять равным радиусу—вектору.

На основании соотношений (69) и (81) имеем

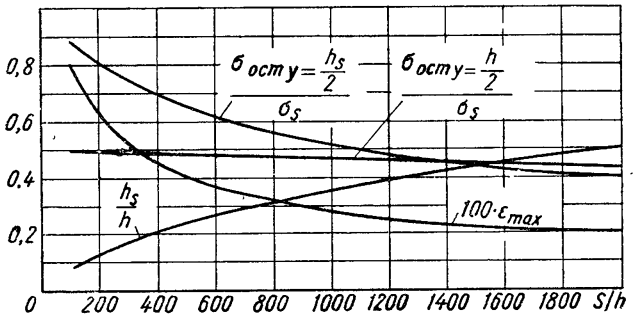
$$d\varphi_{ост} = \frac{ds}{\rho_{ост}} = \frac{\lambda}{h}\left[\sqrt{\frac{\pi h}{s}} - 3\frac{\sigma_s}{E} + \frac{4s}{\pi h}\left(\frac{\sigma_s}{E}\right)^3\right]ds.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$\varphi_{ост} = \lambda\left[\sqrt{\frac{4\pi s}{h}} - 3\frac{\sigma_s}{E}\cdot\frac{s}{h} + 2\left(\frac{\sigma_s}{E}\right)^3\frac{s^2}{\pi h^2}\right]. \tag{82}$$

Уравнения (81) и (82) являются параметрическими уравнениями свободной спирали.

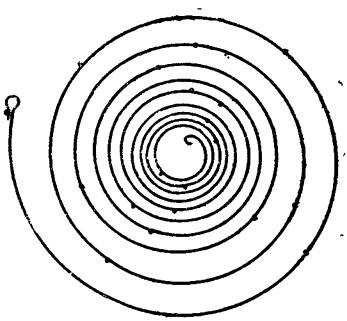
Если диаграмма растяжения пружинной ленты схематизирована в виде диаграммы без упрочнения, то тогда уравнения остаточных напряжений и параметрические уравнения свободной спирали могут



Фиг. 496. Вспомогательные графики для расчета навивки плоских спиральных пружин.

быть получены из соотношений (79)—(82) подстановкой в них $E_1=0$ и, следовательно, $\lambda=1$. В таком предположении навивка плоских спиральных пружин исследована в работе [62].

На фиг. 496 представлены графики зависимостей $\frac{\sigma_{ост\ y=\frac{h_s}{2}}}{\sigma_s}$; $\frac{\sigma_{ост\ y=\frac{h}{2}}}{\sigma_s}$; $\frac{h_s}{h}$ и ε_{max} от $\frac{s}{h}$. Использование их значительно упрощает расчеты пружин из ленты, диаграмма растяжений которой может быть схематизирована в виде диаграммы без упрочнения.



Фиг. 497. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных по навивке плоских спиральных пружин. Сплошная линия — отпечаток реальной пружины, точки нанесены по результатам вычислений [62].

Сопоставление свободных спиралей, полученных теоретически и экспериментально, привело к хорошим результатам. На фиг. 497 сплошной линией показан отпечаток реальной пружины, а точки построены по результатам вычислений [62].

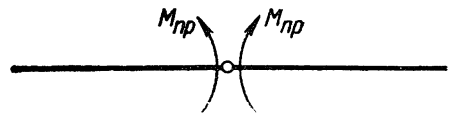
§ 6. ПОПЕРЕЧНЫЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ БАЛОК

Как и в § 2, предположим, что поперечное сечение балки имеет две оси симметрии, одна из которых лежит в плоскости действия изгибающего момента. Касательными напряжениями в поперечных сечениях балки пренебрежем.

В таком случае расчет статически определимых балок за пределами упругости производится по формулам, выведенным в § 2. Отличие от чистого упруго-пластического изгиба только в том, что при поперечном изгибе изгибающий момент изменяется от сечения к сечению. Для статически определимых балок из-

гибающий момент определяется из уравнений равновесия отсеченной части балки.

Пластические деформации в балке возникают в том случае, когда в опасном сечении наибольшее нормальное напряжение в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии, достигнет величины предела текучести или, что то же, когда изгибающий момент в опасном сечении сравняется с величиной M_s. При дальнейшем возрастании нагрузки в балке образуется пластическая область, напряжения в которой равны или больше предела текучести материала балки σ_s. Участок балки, на котором имеется пластическая область, называется упруго-пластическим участком в отличие от упругого участка, на котором пластической области нет. Границей упругого и упруго-пластического участков балки является сечение, в котором величина изгибающего момента равна M_s.



Фиг. 498 Пластический шарнир.

В случае если схематизированная диаграмма растяжения материала балки не имеет упрочнения, несущая способность статически определимой балки исчерпывается полностью (балка становится геометрически изменяемой), если в наиболее напряженном сечении пластическая область заполняет все сечение (упругая область исчезает), тогда принято говорить, что в балке возникает *пластический шарнир*. Последнее объясняется тем, что в сечении пластического шарнира изгибающий момент постоянен и равен предельному моменту. Условно на чертежах это изображается так, как представлено на фиг. 498.

Несущая способность статически неопределимых балок рассмотрена в § 7.

Линейные и угловые перемещения поперечных сечений балок определяются при помощи интеграла Мора для определения перемещений брусьев, выполненных из материала, не подчиняющегося закону Гука (см. гл. X т. I). В этом случае интеграл Мора записывается в следующем виде:

$$v = \int_l^x M_1 dz, \tag{83}$$

где $\varkappa$ — кривизна бруса от заданной нагрузки;

M_1 — изгибающий момент в текущем сечении от единичной нагрузки, приложенной в направлении искомого перемещения в том сечении, перемещение которого определяется.

При вычислении прогибов под единичной нагрузкой понимается единичная сила, а при подсчете углов поворота — единичный момент.

Интеграл (83) может быть вычислен различными методами. В частности, для его подсчета возможно использование графо-аналитического способа А. Н. Верещагина (см. гл. X т. I).

В работе Г. Г. Баловнева [3] рассмотрено применение фокально-графического метода А. А. Попова для определения прогибов при упруго-пластическом изгибе балок.

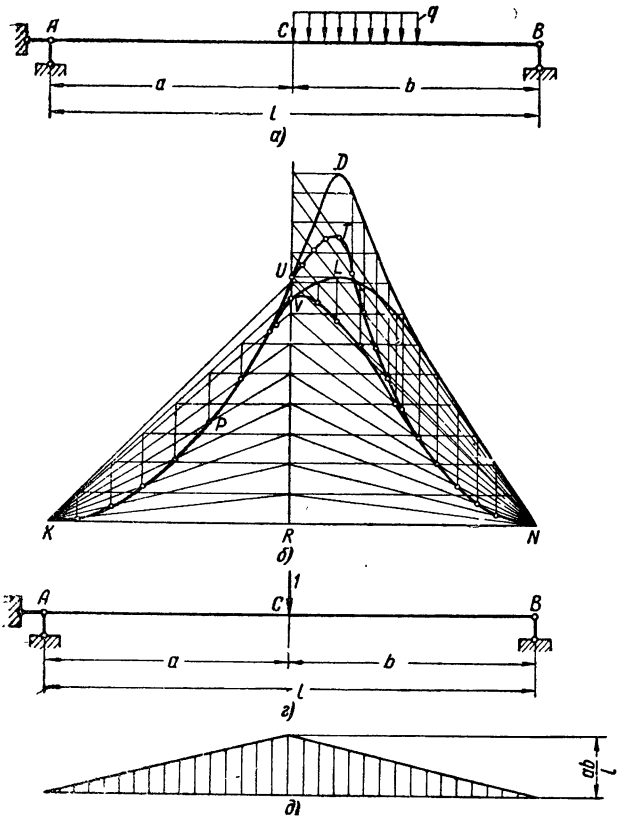
Ниже изложен наглядный и эффективный графический способ вычисления интеграла Мора в общем случае произвольной диаграммы растяжения [45].

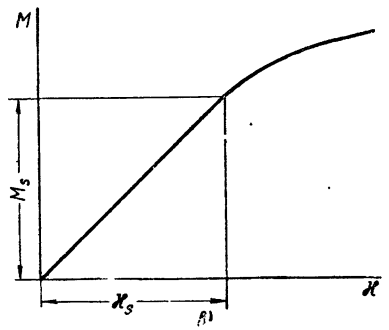
Допустим, что необходимо определить прогиб и угол поворота сечения C для балки, изображенной на фиг. 499,*а*, в масштабе α *см/мм*.

Вначале строим эпюру изгибающих моментов в масштабе β *кгсм/мм* (линия *KVLN*) (фиг. 499,*б*). На продолжении оси абсцисс эпюры изгибающих моментов чертим диаграмму изгиба (фиг. 499,*в*), по-прежнему принимая для оси ординат масштаб β *кгсм/мм*. Кривизна по оси абсцисс откладывается в масштабе $\gamma \frac{1}{см}/мм$. Заметим, что удобно принимать

$$\gamma = \frac{\beta}{EJ_x}. \qquad (84)$$

В таком случае линейный участок диаграммы изгиба наклонен к осям координат под углом 45°.





Фиг. 499. К графическому методу определения прогибов балок за пределами упругости

При помощи эпюры изгибающих моментов и диаграммы изгиба строим график изменения кривизны по длине балки (эпюру кривизны). На фиг. 499,*б* эпюра кривизны изображена линией *KUDN*.

При выборе масштаба γ согласно формуле (84) эпюры изгибающих моментов и кривизн на упругих участках балки совпадают.

Приложим в сечении *C* единичную силу (фиг. 499,*г*) и построим эпюру изгибающих моментов, возникающих от этой силы (фиг. 499,*д*). В рассматриваемом случае на участке *AC*

$$M_1 = \frac{bz}{l},$$

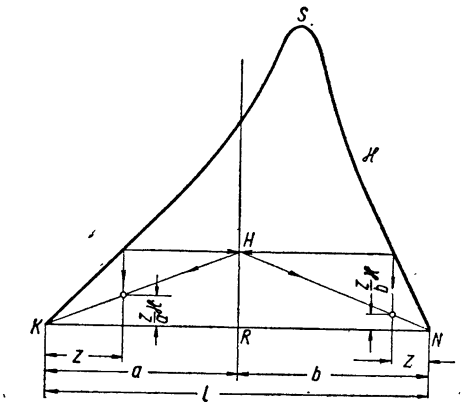
а на участке CB

$$M_1 = \frac{az}{l},$$

поэтому интеграл (83) принимает вид

$$v_C = \int_0^a \frac{bz}{l} \varkappa\, dz + \int_0^b \frac{az}{l} \varkappa dz = \frac{ab}{l}\left[\int_0^a \frac{z}{a} \varkappa\, dz + \int_0^b \frac{z}{b} \varkappa dz\right]. \qquad (85)$$

Отрезки $\frac{z}{a}\varkappa$ и $\frac{z}{b}\varkappa$ определяются графически по соответствующим ординатам эпюры кривизны так, как это показано стрелками на фиг. 500. Ординаты $\varkappa$ эпюры кривизны сносятся на перпендикуляр, восставленный в точке R, чем определяется точка H. Лучи KH и NH отсекают на исходных ординатах $\varkappa$ отрезки $\frac{z}{a}\varkappa$ и $\frac{z}{b}\varkappa$. На фиг. 499 функция $\frac{z}{a}\varkappa$ представлена кривой KPU, а функция $\frac{z}{b}\varkappa$ — кривой NTU.



Фиг. 500. Схема определения отрезков $\frac{z}{a}\varkappa$ и $\frac{z}{b}\varkappa$

Интегралы в квадратной скобке выражения (85) в определенном масштабе равны площади $KPUR$ и $NTUR$. Обозначим сумму этих площадей Ω *мм*^{2}, тогда согласно формуле (85) получим

$$v_C\,[см] = \frac{a\,[см]\,b\,[см]}{l\,[см]}\,\Omega\,[мм^2]\,\alpha\,[см/мм]\,\gamma\left[\frac{1}{см}/мм\right].$$

Предположим, что после нагрузки балка полностью разгружается. На основании теоремы о разгрузке уменьшение прогиба при разгрузке определяется по формуле (см. гл. X т. I)

$$v_{C\,разг} = \int_l \frac{MM_1 dz}{EJ_x}.$$

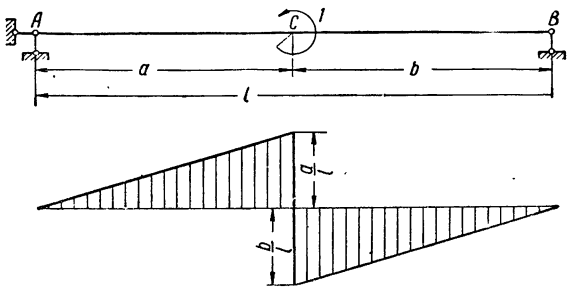
Для вычисления этого интеграла можно применить тот же графический прием, с помощью которого вычислялся интеграл в формуле (83). Следует лишь вместо эпюры кривизны воспользоваться эпюрой изгибающих моментов и перестроить ее, изменив ординаты эпюры моментов так же, как ранее были изменены ординаты эпюры кривизн [41]. Уменьшение прогиба при разгрузке пропорционально площади ω, ограниченной кривой $OPVWN$:

$$v_{C\,разг}\,[см] = \frac{a\,[см]\,b\,[см]}{l\,[см]}\,\omega\,[мм^2]\,\alpha\,[см/мм]\,\gamma\left[\frac{1}{см}/мм\right].$$

Остаточный прогиб после полной разгрузки балки

$$v_{C\ ост}[см] = v_C - v_{C\ разг} = \frac{a\,[см]\,b\,[см]}{l\,[см]} S[мм^2]\,\alpha[см/мм]\,\gamma\left[\frac{1}{см}/мм\right],$$

где $S = \Omega - \omega$ — площадь криволинейной фигуры $KPUTNWV$.



Фиг. 501. Эпюра изгибающих моментов от единичного момента.

Для определения угла поворота в сечении C прикладывается единичный момент (фиг. 501), тогда уравнения изгибающих моментов от этой нагрузки на участке AC

$$M_1 = \frac{z}{l},$$

а на участке CB

$$M_1 = -\frac{z}{l}.$$

В этом случае интеграл (83) принимает вид

$$\theta_C = \int_0^a \frac{z}{l} \times dz - \int_0^b \frac{z}{l} \times dz = \frac{a}{l}\int_0^a \frac{z}{a} \times dz - \frac{b}{l}\int_0^b \frac{z}{b} \times dz,$$

Первый интеграл в определенном масштабе равен площади $KPUR$, а второй — площади $RUTN$ (фиг. 499). Обозначая эти площади Ω_1 и Ω_2 соответственно, имеем

$$\theta_C = \left(\frac{a}{l}\Omega_1 - \frac{b}{l}\Omega_2\right)[мм^2]\,\alpha[см/мм]\,\gamma\left[\frac{1}{см}/мм\right].$$

Аналогично уменьшение угла поворота при разгрузке

$$\theta_{C\ разг} = \left(\frac{a}{l}\omega_1 - \frac{b}{l}\omega_2\right)[мм^2]\,\alpha[см/мм]\,\gamma\left[\frac{1}{см}/мм\right],$$

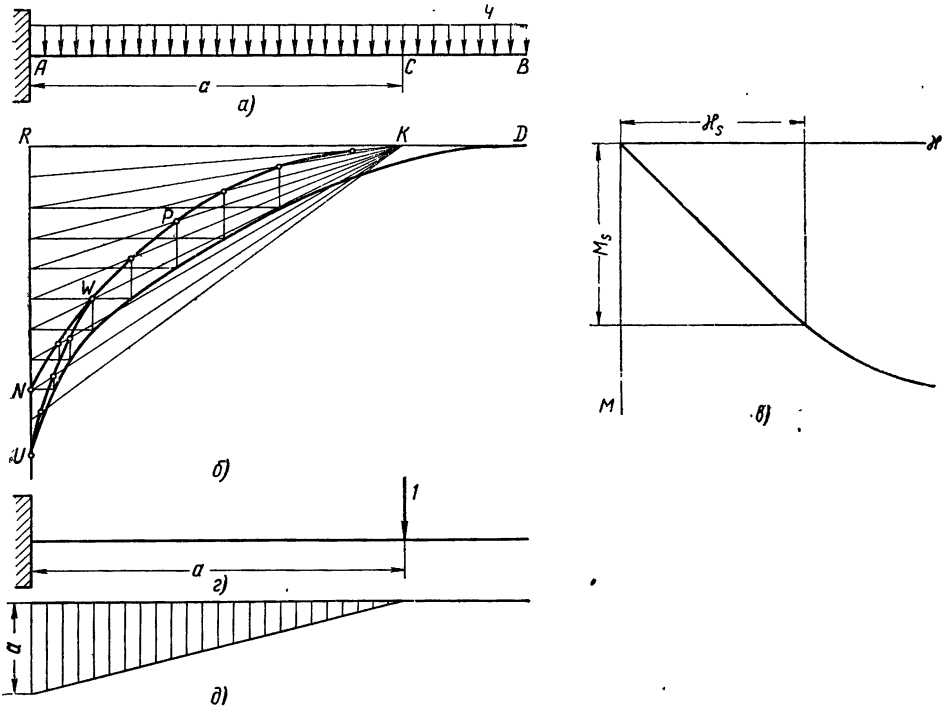
где ω_1 и ω_2 — соответственно площади $KPVR$ и $RVWN$.

Остаточный угол поворота после полной разгрузки

$$\theta_{C\ ост} = \theta_C - \theta_{C\ разг}.$$

Рассмотрим определение прогибов при изгибе консольных балок. Допустим, что необходимо определить прогиб в сечении C для консольной балки, изображенной на фиг. 502,*а* в масштабе α *см/мм*.

Вначале, так же как и раньше, строим эпюру изгибающих моментов в масштабе β *кгсм/мм* (линия *DLN* на фиг. 502,*б*), а затем диаграмму изгиба (фиг. 502,*в*). По осям абсцисс и ординат в диаграмме изгиба принимаем масштабы $\gamma = \frac{\beta}{EJ_x}\ \frac{1}{см}$ / *мм* и $\beta =$ *кгсм/мм*. При помощи эпюры изгибающих моментов и диаграммы изгиба строим эпюру кривизны. На фиг. 502,*б* она изображена кривой *DLU*.



Фиг. 502. К графическому методу определения прогибов консольных балок за пределами упругости.

Приложим в сечении *C* единичную силу (фиг. 502,*г*) и построим эпюру изгибающих моментов, возникающих от этой силы (фиг. 502,*д*). В рассматриваемом случае

$$M_1 = z,$$

поэтому интеграл (83) принимает вид

$$v_C = \int_0^a z \varkappa\, dz = a \int_0^b \frac{z}{a} \varkappa\, dz, \tag{86}$$

где a — расстояние от сечения, в котором вычисляется прогиб до заделки.

Графические построения для определения величины $\frac{z}{a}\varkappa$ по эпюре кривизны показаны стрелками на фиг. 503. Каждая из ординат $\varkappa$ эпюры кривизны *DU* сносится на перпендикуляр, восставленный в заделанном сечении, чем определяется точка *H*. Луч *KH* отсекает на

исходной ординате отрезок $\frac{z}{a}\varkappa$. На фиг. 502 графиком функции $\frac{z}{a}\varkappa$ является кривая KPU.

Интеграл в формуле (86) в определенном масштабе равен площади $KPUR$. Обозначая эту площадь через Ω, имеем

$$v_C\,[см] = a\,[см]\,\Omega\,[мм^2]\,\alpha\,[см/мм]\,\gamma\left[\frac{1}{см}/мм\right].$$

Уменьшение прогиба при полной разгрузке балки

$$v_{C\ разг}\,[см] = a\,[см]\,\omega\,[мм^2]\,\alpha\,[см]\,\gamma\left[\frac{1}{см}/мм\right],$$

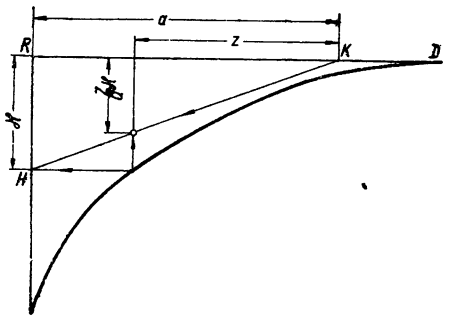
где ω — площадь, ограниченная кривой $KPWNR$, полученной перестройкой эпюры изгибающих моментов так же, как была построена кривая $KPUR$ по эпюре кривизны.

Остаточный прогиб после полной разгрузки балки

$$v_{C\ ост}\,[см] = a\,[см]\,S\,[мм^2]\,\alpha\,[см/мм]\,\gamma\left[\frac{1}{см}/мм\right],$$

где $S = \Omega - \omega$ — площадь криволинейного треугольника NWU.

Для поперечных сечений простейшей формы (прямоугольник, круг) при использовании схематизированных диаграмм исследование поперечного изгиба балок за пределами упругости может быть выполнено аналитически, тогда возможно получение аналитической зависимости величины прогиба или угла поворота сечения от нагрузки.



Фиг. 503 Схема определения отрезков $\frac{z}{a}\varkappa$.

В статье Ю. А. Раковщика [49] приведены графики, значительно облегчающие вычисление прогибов за пределами упругости для балок, имеющих поперечное сечение в форме прямоугольника, круга и тонкостенного кольца. При этом принимается, что схематизированная диаграмма растяжения материала балки имеет линейное упрочнение.

Рассмотрим два примера поперечного упруго-пластического изгиба балок прямоугольного поперечного сечения, диаграмма растяжения материала которых не имеет упрочнения (см. фиг. 449).

Пример 1. Двухопорная балка нагружена силой P, приложенной посередине пролета (фиг. 504).

При некотором значении силы $P = P_s$ в наиболее напряженном сечении балки возникнут пластические деформации. Это произойдет тогда, когда наибольшие нормальные напряжения в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии, в среднем сечении достигнут величины предела текучести σ_s или, что то же, когда изгибающий момент в среднем сечении сравняется с величиной M_s.

Изгибающий момент в текущем сечении балки на расстоянии z от опоры

$$M = \frac{Pz}{2}. \qquad (87)$$

Наибольший изгибающий момент имеет место в среднем сечении при $z = \frac{l}{2}$

$$M_{max} = \frac{Pl}{4}. \qquad (88)$$

Приравнивая эту величину M_s, получаем

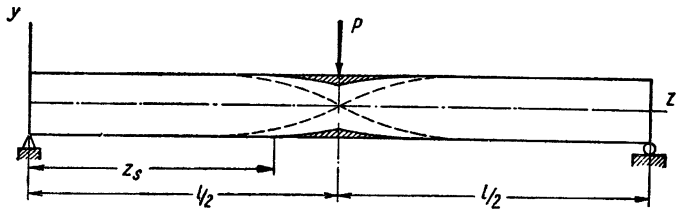
$$P_s = \frac{4M_s}{l}. \tag{89}$$

При увеличении силы P свыше P_s в балке образуется пластическая область, т. е. область, напряжения в которой равны пределу текучести σ_s.

Границу упругого и упруго-пластического участков балки z_s можно установить, приравнивая величину изгибающего момента в текущем сечении величине M_s, откуда, учитывая выражение (89), получим

$$\frac{z_s}{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_s}{P}. \tag{90}$$

В пределах изменения z от 0 до z_s участок балки является упругим, а в пределах от z_s до $\frac{l}{2}$ упруго-пластическим.



Фиг. 504. Пластические области в двухопорной балке, нагруженной сосредоточенной силой в среднем сечении.

Перейдем к определению границы между упругой и пластической областями на упруго-пластическом участке балки.

Из формулы (43) имеем

$$\varkappa = \frac{\varkappa_s}{\sqrt{3 - 2\frac{M}{M_s}}}. \tag{91}$$

Формулу (91) при помощи выражений (24), (87) и (89) легко преобразовать к виду

$$h_s = h\sqrt{3 - 4\frac{P}{P_s} \cdot \frac{z}{l}}, \tag{92}$$

где h_s — высота упругой области в текущем сечении балки при $z > z_s$.

Из формулы (92) следует, что границы упругой и пластической областей на упруго-пластическом участке балки являются квадратными параболами. На фиг. 504 пластическая область балки при $\frac{P}{P_s} = \frac{5}{4}$ заштрихована.

Предельное значение силы $P_{пр}$, при котором балка теряет несущую способность, соответствует исчезновению упругой области в среднем сечении. Значение $P_{пр}$ получим, приравнивая величину изгибающего момента в среднем сечении (88) $M_{пр}$, откуда

$$P_{пр} = \frac{4M_{пр}}{l}. \tag{93}$$

Сопоставляя выражения (89), (93), (47), имеем

$$P_{пр} = \frac{3}{2}P_s. \tag{94}$$

Граница упругого и упруго-пластического участков балки при $P = P_{пр}$ определяется по формуле (90):

$$\frac{z_s}{l} = \frac{1}{3}. \tag{95}$$

Границу упругой и пластической областей в предельном состоянии получаем по формуле (92), полагая $P = P_{пр}$:

$$h_s = \sqrt{3}\,h\sqrt{1-2\frac{z}{l}}. \tag{96}$$

По формуле (96) на фиг. 504 штриховой линией представлена граница упругой и пластической областей в предельном состоянии.

Перейдем к определению максимального прогиба балки в среднем сечении. Для этого используем интеграл Мора (83).

В рассматриваемом случае на упругом участке балки ($0 \leqslant z \leqslant z_s$; $0 \leqslant M \leqslant M_s$)

$$\varkappa = \frac{M}{EJ_x}, \tag{97}$$

на упруго-пластическом участке $\left(z_s \leqslant z \leqslant \frac{l}{2};\ M_s \leqslant M \leqslant M_{\max} = \frac{Pl}{4}\right)$ согласно формулам (91) и (22)

$$\varkappa = \frac{M_s}{EJ_x\sqrt{3-2\frac{M}{M_s}}}. \tag{98}$$

Изгибающий момент от единичной силы в любом сечении $\left(0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}\right)$

$$M_1 = \frac{z}{2}. \tag{99}$$

Для удобства выкладок примем за переменную интегрирования в формуле (83) величину изгибающего момента M.

Из соотношения (87) имеем

$$z = \frac{2M}{P}, \tag{100}$$

и, следовательно,

$$dz = \frac{2dM}{P}. \tag{101}$$

Преобразуем выражение (83), используя соотношения (97) — (101), тогда получим

$$v_{\max} = 2\int_0^{M_s}\frac{M}{EJ_x}\cdot\frac{M}{P}\cdot\frac{2dM}{P} + 2\int_{M_s}^{M_{\max}}\frac{M_s}{EJ_x\sqrt{3-2\frac{M}{M_s}}}\cdot\frac{M}{P}\cdot\frac{2dM}{P}.$$

Выполним интегрирование, тогда после преобразований с использованием формул (88) и (89) устанавливаем

$$\frac{v_{\max}}{v_{\max s}} = 5\left(\frac{P_s}{P}\right)^2 - \left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{1}{2}}\left(3\frac{P_s}{P}+1\right)\sqrt{3\frac{P_s}{P}-2}, \tag{102}$$

где

$$v_{\max s} = \frac{P_s l^3}{48\,EJ_x} \tag{103}$$

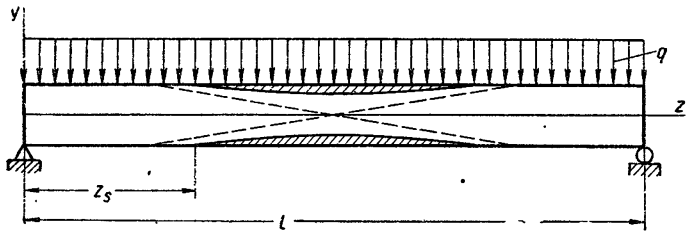
величина максимального прогиба балки посередине пролета при $P = P_s$.

По уравнениям (102) и (103) для силы P, изменяющейся в пределах $P_s \leqslant P \leqslant P_{пр}$, можно определить максимальный прогиб балки. Отметим, что при $P = \frac{5}{4} P_s$ $\frac{v_{\max}}{v_{\max s}} = 1{,}28$; при $P = P_{пр} = \frac{3}{2} P_s$ $\frac{v_{\max}}{v_{\max s}} = 2{,}22$.

Пример 2. Двухопорная балка нагружена равномерно распределенной силой интенсивности q *кг/см* (фиг. 505).

Изгибающий момент в текущем сечении балки на расстоянии z от опоры

$$M = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2}. \tag{104}$$



Фиг. 505. Пластические области в двухопорной балке, нагруженной равномерно распределенной силой.

Максимальный изгибающий момент имеет место в среднем сечении при $z = \frac{l}{2}$

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}. \tag{105}$$

Приравнивая эту величину вначале M_s, а затем $M_{пр}$, устанавливаем интенсивность нагрузки, при которой в балке начинается образование пластических деформаций q_s, и интенсивность предельной нагрузки $q_{пр}$, при которой исчерпывается несущая способность балки:

$$q_s = \frac{8M_s}{l^2}, \tag{106}$$

$$q_{пр} = \frac{8M_{пр}}{l^2}. \tag{107}$$

Из соотношений (106), (107) и (47) имеем

$$q_{пр} = \frac{3}{2} q_s. \tag{108}$$

Границу упругого и упруго-пластического участков балки z_s устанавливаем, приравнивая величину изгибающего момента в текущем сечении (104) величине M_s. Решая полученное квадратное уравнение относительно z_s, учитывая при этом соотношение (106), имеем

$$z_s = \frac{l}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{q_s}{q}}\right). \tag{109}$$

Заметим, что перед радикалом выбран знак минус, поскольку очевидно, что $z_s < \frac{l}{2}$.

Подставляя в выражение (109) вместо q интенсивность предельной нагрузки по формуле (108), устанавливаем границу упругого и упруго-пластического участков балки в предельном состоянии:

$$\frac{z_s}{l} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} = 0{,}2113.$$

Определим границу между упругой и пластической областями по длине балки. Для этого преобразуем формулу (91), используя соотношения (24), (104) и (106), тогда получим уравнение для высоты упругой области h_s:

$$h_s = h\sqrt{3 - 8\frac{q}{q_s}\left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}\right)}. \tag{111}$$

Из этого уравнения следует, что границы упругой и пластической областей являются гиперболами. Полагая в уравнении (111) $q = q_{пр}$ согласно формуле (108), имеем

$$h_s = \sqrt{3}h\left(1 - 2\frac{z}{l}\right). \tag{112}$$

Таким образом, в предельном состоянии упругие и пластические области разграничены прямыми, которые являются асимптотами для упомянутых выше гипербол.

На фиг. 505 пластическая область балки при $q = \frac{5}{4}q_s$ заштрихована. Границы упругой и пластической областей в предельном состоянии при $q = q_{пр} = \frac{3}{2}q_s$ на фиг. 505 изображены штриховыми линиями.

Определим прогиб в среднем сечении при помощи интеграла Мора (83).

В рассматриваемом случае, так же как и в предыдущем примере, на упругом участке балки ($0 \leqslant z \leqslant z_s$, $0 \leqslant M \leqslant M_s$), кривизна связана с изгибающим моментом соотношением (97), а на упруго-пластическом участке $\left(z_s \leqslant z \leqslant \frac{l}{2},\ M_s \leqslant M \leqslant M_{\max} = \frac{ql^2}{8}\right)$ — зависимостью (98). Изгибающий момент от единичной силы в любом сечении $\left(0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}\right)$ определяется формулой (99).

Так же как и в первом примере, примем за переменную интегрирования в формуле (83) величину изгибающего момента M.

Из соотношения (104) имеем

$$z = \frac{l}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8M}{ql^2}}\right), \tag{113}$$

и, следовательно,

$$dz = \frac{2}{ql} \cdot \frac{dM}{\sqrt{1 - \frac{8M}{ql^2}}}. \tag{114}$$

Преобразуем выражение (83), используя соотношения (97) — (99), а также (113) и (114), тогда получим

$$v_{\max} = 2\int_0^{M_s} \frac{M}{EJ_x} \cdot \frac{l}{4}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8M}{ql^2}}\right)\frac{4}{ql} \cdot \frac{dM}{\sqrt{1 - \frac{8M}{ql^2}}} +$$

$$+ 2\int_{M_s}^{M_{\max}} \frac{M_s}{EJ_x\sqrt{3 - 2\frac{M}{M_s}}} \cdot \frac{l}{4}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8M}{ql^2}}\right)\frac{4}{ql} \cdot \frac{dM}{\sqrt{1 - \frac{8M}{ql^2}}}.$$

Выполним интегрирование, тогда после преобразований с использованием формул (105) и (106) устанавливаем

$$\frac{v_{\max}}{v_{\max s}} = \frac{6}{5}\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{q}{q_s} - \frac{3}{2}\cdot\frac{q_s}{q} - \frac{2}{3}\cdot\frac{q}{q_s}\left(2+\frac{q_s}{q}\right)\sqrt{1-\frac{q_s}{q}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{q_s}{q}}\sqrt{3\frac{q_s}{q}-2} + \sqrt{\frac{q_s}{2q}}\ln\frac{2-3\frac{q_s}{q}}{\frac{q_s}{q}-2+2\sqrt{2\frac{q_s}{q}}\sqrt{1-\frac{q_s}{q}}}\right], \quad (115)$$

где

$$v_{\max s} = \frac{5}{384}\cdot\frac{q_s l^4}{EJ_x} \quad (116)$$

величина максимального прогиба балки посередине пролета при $q = q_s$.

Из уравнения (115) следует, что в предельном состоянии прогиб получает неопределенное значение. Раскрывая неопределенность, устанавливаем, что в этом случае прогиб обращается в бесконечность.

Таким образом, оказывается, что в первом примере в предельном состоянии прогиб конечен, а во втором обращается в бесконечность. Отметим, что конечность прогибов в предельном состоянии является условной, поскольку в этом состоянии балка становится геометрически изменяемой и, следовательно, незначительное возрастание нагрузки сверх предельного значения приводит к бесконечно большим перемещениям.

Несмотря на это, различие результатов решений первого и второго примеров для предельного состояния можно объяснить теоретически.

Для этого учтем, что изгибающий момент от единичной силы изменяется по длине балки по линейному закону

$$M_1 = az + b$$

и что для балки прямоугольного поперечного сечения

$$M_{пр} = \frac{3}{2} M_s,$$

тогда на основании изложенного выше заключаем, что в выражение для максимального прогиба балки будет входить интеграл

$$J = \int_{z_s}^{z_{\max}} \frac{(az+b)\,dz}{\sqrt{M_{пр} - M}}, \quad (117)$$

где z_s — координата границы упругого и упруго-пластического участков балки;

$z_{\max}$ — координата опасного сечения (для балок на фиг. 504 и 505 $z_{\max} = \frac{l}{2}$).

Рассматривая координату z как функцию изгибающего момента M и учитывая, что при $z = z_s$ $M = M_s$, при $z = z_{\max}$ $M = M_{пр}$, а также, что производная изгибающего момента равна поперечной силе Q, преобразуем интеграл (117) к виду

$$J = \int_{M_s}^{M_{пр}} \frac{(az+b)\frac{1}{Q}\,dM}{\sqrt{M_{пр} - M}}. \quad (118)$$

Интеграл (118) является несобственным, поскольку подинтегральная функция обращается в бесконечность при $M=M_{пр}$. Если несобственный интеграл (118) будет сходиться, прогиб балки в предельном состоянии конечен. В случае, если он расходится, прогиб обращается в бесконечность.

Как известно [57], согласно признаку Коши, если подинтегральная функция при M близких $M_{пр}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\left|\frac{az+b}{Q}\right|}{\sqrt{M_{пр}-M}} < \frac{A}{(M_{пр}-M)^p}, \tag{119}$$

где A и p — положительные постоянные, причем $p<1$, то несобственный интеграл (118) сходится и притом абсолютно. Полагая $p=\frac{1}{2}$ и учитывая, что $az+b$ является конечной величиной при любых значениях z, заключаем, что для того, чтобы несобственный интеграл (118) сходился, необходимо, чтобы в опасном сечении балки поперечная сила не обращалась в ноль.

Следовательно, условие конечности прогибов в предельном состоянии может быть сформулировано так: максимальный прогиб балки в предельном состоянии конечен, если в опасном сечении, где момент достигает предельного значения, поперечная сила не равна нулю. В противном случае прогиб обращается в бесконечность.

Физически это объясняется тем, что при равенстве нулю поперечной силы (условие максимума изгибающего момента в опасном сечении) при отступлении от опасного сечения изгибающий момент уменьшается медленно. Сечения, соседние с опасным, значительно напряжены, в результате чего возникают весьма большие прогибы.

Отметим, что интеграл (83), при помощи которого определяются прогибы, только тогда выражается через элементарные функции, когда изгибающий момент может быть представлен в виде целой алгебраической функции первой или второй степени.

Последнее имеет место при нагружении балки сосредоточенными силами или парами, а также равномерно распределенной нагрузкой. В случае, если изгибающий момент является целой алгебраической функцией третьей или четвертой степени (треугольная нагрузка, нагрузка по параболе второй степени), то уравнение изогнутой оси выражается в эллиптических интегралах.

В работе С. М. Заседателева [16] изложен графический метод расчета упруго-пластического изгиба стержней при больших перемещениях.

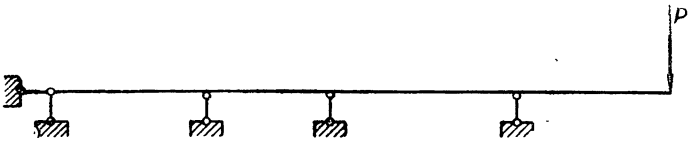
§ 7. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК ПО ПРЕДЕЛЬНОМУ СОСТОЯНИЮ

Как уже отмечалось выше (§ 6), статически определимые балки теряют свою несущую способность (становятся геометрически изменяемыми), когда в наиболее напряженном сечении пластическая область заполняет все сечение, т. е. когда в этом сечении образуется пластический шарнир. При этом предполагается, что диаграмма растяжения материала балки не имеет упрочнения.

Для статически неопределимых балок образование одного пластического шарнира, вообще говоря, еще не приводит к исчерпанию грузоподъемности балки, а только снижает степень статической неопреде-

лимости ее на единицу. В случае n раз статически неопределимой балки исчерпание несущей способности имеет место при возникновении $n+1$ пластических шарниров. Однако иногда часть балки может стать геометрически изменяемой при значительно меньшем числе пластических шарниров.

Так, например, для статически неопределимой балки с консолью (фиг. 506) несущая способность ее исчерпывается в случае возникновения пластического шарнира над опорой, граничащей с консолью.



Фиг. 506. Статически неопределимая балка с консолью.

Ниже излагается несколько примеров определения предельной нагрузки для статически неопределимых балок, диаграмма растяжения материала которых не имеет упрочнения (см. фиг. 449).

Пример *1*. Трехопорная балка нагружена силой (фиг. 507, *а*).

Эта балка 1 раз статически неопределима. На фиг. 507, *б* представлена эпюра изгибающих моментов при условии, что во всех точках балки деформации упругие. Значение силы P_s, при которой в наиболее напряженной точке балки напряжение достигает предела текучести, может быть установлено из равенства наибольшего изгибающего момента $M_{\max} = \frac{13}{64}Pl$ величине M_s:

$$P_s = \frac{64}{13} \cdot \frac{M_s}{l}.$$

В случае балки прямоугольного поперечного сечения

$$M_s = \sigma_s \frac{bh^2}{6},$$

и, следовательно,

$$P_s = \frac{32}{39} \cdot \frac{\sigma_s bh^2}{l}. \qquad (120)$$

При дальнейшем увеличении силы $P (P > P_s)$ пластическая область в балке увеличивается. При некотором значении силы в сечении B возникает пластический шарнир, тогда величина изгибающего момента в этом сечении становится равной $M_{пр}$. При дальнейшем возрастании нагрузки изгибающий момент в сечении B остается постоянным и равным $M_{пр}$. Таким образом, трехопорная балка приобретает как бы шарнир в точке B. При этом она нагружена силой P и двумя моментами $M_{пр}$, приложенными в разных торцах сечения B (фиг. 508). Следовательно, в рассматриваемом случае возникновение одного пластического шарнира превращает 1 раз статически неопределимую балку в балку статически определимую.

При дальнейшем увеличении силы P изгибающие моменты в сечении B и на участке AB не возрастают, а изгибающие моменты на участке BCD постепенно растут. Теперь наибольшая величина изгибающего момента имеет место в сечении C, где он раньше всего и достигнет предельной величины. Когда в сечении C изгибающий момент достигнет предельного значения $M_{пр}$, т. е. когда в этом сечении возникнет пластический шарнир, несущая способность балки исчерпывается, балка превращается в геометрически изменяемую систему.

Величина предельной силы $P_{пр}$ находится из уравнений равновесия и условий равенства изгибающего момента в сечениях пластического шарнира предельному моменту.

Составим последние условия (фиг. 508, *б*):

$$R_A \frac{l}{2} = M_{пр}; \quad R_D l = M_{пр},$$

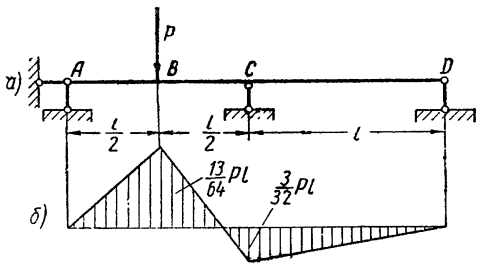
откуда

$$R_A = \frac{2M_{пр}}{l}; \quad R_D = \frac{M_{пр}}{l}. \tag{121}$$

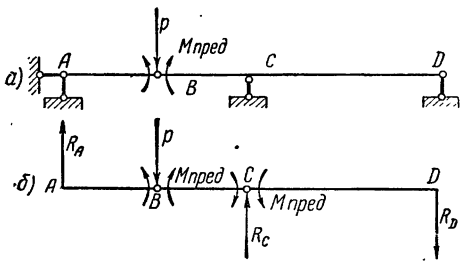
Далее, составим сумму моментов всех сил относительно точки A и сумму проекций всех сил на вертикальную ось:

$$P_{пр}\frac{l}{2} - R_C\, l + R_D\, 2l = 0; \tag{122}$$

$$R_A + R_C - P_{пр} - R_D = 0. \tag{123}$$



Фиг. 507. Эпюра изгибающих моментов в статически неопределимой балке в пределах упругости



Фиг. 508. Статически неопределимая балка при наличии одного (*а*) и двух (*б*) пластических шарниров.

Из уравнений (122) и (123), учитывая выражения (121), получим

$$P_{пр} = 6\frac{M_{пр}}{l}.$$

Используя выражение (47) предельного изгибающего момента для балки прямоугольного поперечного сечения, имеем

$$P_{пр} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma_s bh^2}{l}. \tag{124}$$

При расчете по методу допускаемых напряжений предельной нагрузкой является сила P_s и допускаемая сила

$$P_{доп} = \frac{P_s}{n} = \frac{32}{39}\cdot\frac{\sigma_s bh^2}{nl}, \tag{125}$$

где n — принятый коэффициент запаса.

В случае расчета по методу предельного состояния величина допускаемой силы равна

$$P_{доп} = \frac{P_{пр}}{n} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma_s bh^2}{nl}. \tag{126}$$

Сопоставляя выражения (125) и (126), заключаем, что метод расчета по предельному состоянию дает величину допускаемой нагрузки на 83% больше, чем метод расчета по допускаемым напряжениям, при условии, что коэффициенты запаса в обоих методах приняты одинаковыми.

Пример 2. Балка с одним защемленным и вторым шарнирно закрепленным концами нагружена двумя одинаковыми силами (фиг. 509, *а*).

Определим величину предельной силы кинематическим методом А. А. Гвоздева (см. пример 2 в § 1).

Рассматриваемая балка 1 раз статически неопределима, и, следовательно, несущая способность ее исчерпывается в случае образования двух пластических шарниров Последние могут возникнуть в сечениях A, B и C. Для определения предельной нагрузки согласно кинематическому методу А. А. Гвоздева необходимо рассмотреть различные варианты образования пластических шарниров в двух сечениях из трех. Число таких вариантов равно числу сочетаний из трех элементов по два, т. е. трем.

Для этих вариантов составляются уравнения равновесия и условия равенства

изгибающего момента в сечениях пластического шарнира предельному моменту. Из полученных выражений определяется величина предельной нагрузки. Действительной предельной нагрузкой будет наименьшая из вычисленных для различных вариантов.

Рассмотрим различные варианты образования пластических шарниров.

Первый вариант. Пластические шарниры в сечениях A и B (фиг. 509, *б*)

$$R_A + R_D = 2P_{пр};$$

$$P_{пр}l + P_{пр}\,2l - R_D\,3l = M_{пр};$$

$$R_D\,2l - P_{пр}\,l = M_{пр},$$

откуда

$$P_{пр} = \frac{5}{3} \cdot \frac{M_{пр}}{l}. \qquad (127)$$

Второй вариант. Пластические шарниры в сечениях A и C (фиг. 509, *в*):

$$R_A + R_D = 2P_{пр};$$

$$P_{пр}l + P_{пр}\,2l - R_D\,3l = M_{пр};$$

$$R_D\,l = M_{пр},$$

откуда

$$P_{пр} = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{пр}}{l}. \qquad (128)$$

Третий вариант. Пластические шарниры в сечениях B и C (фиг. 509, *г*):

$$R_A + R_D = 2P_{пр};$$

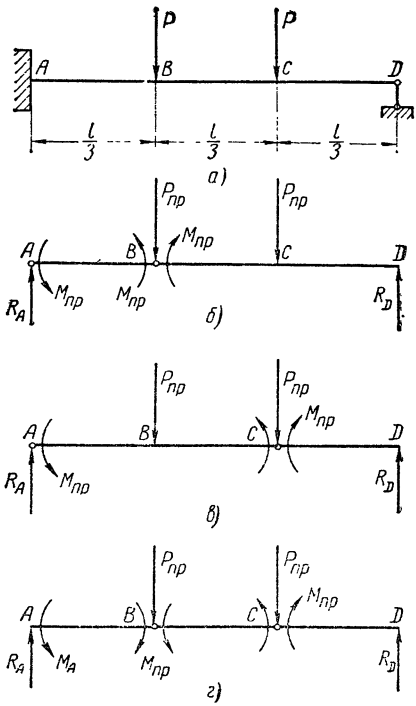
$$P_{пр}l + P_{пр}2l - R_D\,3l = M_A;$$

$$M_A - R_A l = M_{пр};$$

$$RDl = M_{пр},$$

откуда

$$P_{пр} = 3\,\frac{M_{пр}}{l}. \qquad (129)$$



Фиг. 509. Различные варианты образования пластических шарниров в статически неопределимой балке

Сопоставляя предельные нагрузки в рассмотренных трех вариантах (127) — (129), заключаем, что наименьшая предельная нагрузка имеет место во втором варианте (128). Она и является предельной нагрузкой для балки.

Пример 3. Трехопорная балка нагружена равномерно распределенной силой интенсивностью q (фиг. 510, *а*). Балка 1 раз статически неопределима. На фиг. 510, *б* изображена эпюра изгибающих моментов при условии, что во всех точках балки деформации являются упругими.

Из этой эпюры следует, что первый пластический шарнир возникает в сечении B, а второй на участке AB. Обозначим расстояние от сечения A до сечения D, в котором возникает второй пластический шарнир, через z (фиг. 510, *в*) и составим условия равенства изгибающих моментов в сечениях D и B предельному моменту, тогда получим

$$R_A\,z - \frac{qz^2}{2} = M_{пр};$$

$$2ql^2 - R_A\,2l = M_{пр}.$$

Исключая из этих уравнений R_A, устанавливаем

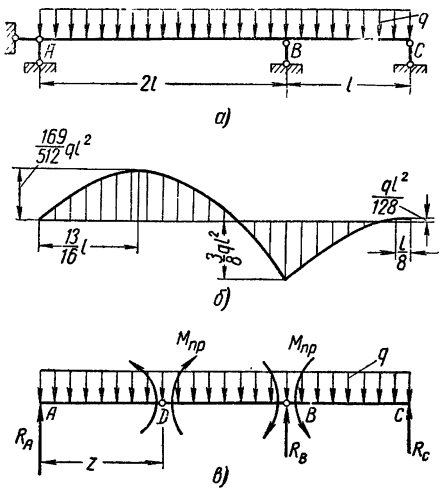
$$q_{пр} = \frac{M_{пр}}{l} \cdot \frac{2l + z}{2lz - z^2}. \qquad (130)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае предельная интенсивность нагрузки зависит от координаты пластического шарнира z. Действительной предельной нагрузкой будет минимальная из всех нагрузок, определяемых формулой (130).. Для

определение ее приравняем первую производную выражения (130) нулю, тогда получим

$$z = 2\left(\sqrt{2} - 1\right) l = 0{,}828l.$$

Легко проверить, что при этом значении z вторая производная выражения (130) положительна и, следовательно, действительно, функция (130) имеет минимум при z=0,828.



Фиг. 510. Статически неопределимая балка (*а*); эпюра изгибающих моментов в пределах упругости (*б*); балка в предельном состоянии (*в*).

Подставляя полученное значение z в формулу (130), устанавливаем величину предельной нагрузки:

$$q_{пр} = 2{,}92\,\frac{M_{пр}}{l^2}. \qquad (131)$$

Отметим, что полученное значение z=0,828 очень близко к расстоянию от заделанного конца балки до сечения, в котором изгибающий момент в пределах упругости максимален. Это расстояние (фиг. 510,*б*) равно $\frac{13}{16}l$=0,813l.

Как отмечалось выше в рассматриваемом примере, очевидно, что второй пластический шарнир возникает на участке AB. Если бы это не было очевидно, то необходимо было бы также определить предельную нагрузку, предполагая, что второй пластический шарнир возникает на участке BC. Из полученных двух предельных нагрузок действительной является меньшая.

В рассматриваемом примере предельная нагрузка, установленная в предположении возникновения второго пластического шарнира на участке BC, равна

$$q_{пр} = 11{,}7\,\frac{M_{пр}}{l^2},$$

т. е. больше подсчитанной ранее, что говорит о том, что действительная предельная нагрузка определяется соотношением (131).

§ 8. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим упруго-пластическое кручение бруса круглого поперечного сечения. При сравнительно малых относительных углах закручивания во всех точках бруса напряженное состояние является чистым сдвигом. Поэтому для решения задачи нужно располагать диаграммой сдвига.

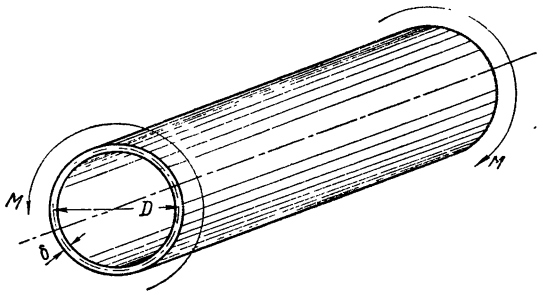
Диаграмма сдвига может быть построена по результатам испытаний на кручение тонкостенных трубок (фиг. 511), тогда касательное напряжение τ и угловая деформация γ могут быть определены по крутящему моменту M и углу закручивания φ при помощи формул (см. гл. V т. I)

$$\tau = \frac{2M}{\pi D^2 \delta}; \qquad (132)$$

$$\gamma = \varphi\frac{D}{2l}, \qquad (133)$$

где D — средний диаметр;
δ — толщина стенки;
l — длина трубки.

Формулы (132) и (133) справедливы как в пределах, так и за пределами упругости. Последнее объясняется тем, что формула (132) получена из условия равновесия (задача статически определима), а формула (133) установлена из геометрических соображений.



Фиг. 511. Скрученная тонкостенная трубка

При напряжениях, не превышающих предела текучести при сдвиге τ_s, зависимость касательного напряжения от угловой деформации является линейной (закон Гука):

$$\tau = G\gamma, \tag{134}$$

где G — модуль упругости второго рода (модуль сдвига).

Величину предела текучести при сдвиге τ_s можно установить, например, на основе теории малых упруго-пластических деформаций. Пластические деформации в материале возникают тогда, когда интенсивность напряжений достигает величины σ_s:

$$\sigma_i = \sigma_s. \tag{135}$$

Подставляя главные нормальные напряжения для чистого сдвига по формулам (53) гл. VIII т. II в выражение (23) гл. VIII т. II, имеем

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,\tau. \tag{136}$$

На основании формул (135) и (136) получаем

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}. \tag{137}$$

Угловая деформация, соответствующая касательному напряжению, равному пределу текучести при сдвиге τ_s по формуле (134), равна

$$\gamma_s = \frac{\tau_s}{G}. \tag{138}$$

В случае касательного напряжения, большего предела текучести при сдвиге τ_s, зависимость касательного напряжения от угла сдвига определяется при помощи формул (57) и (60) гл. VIII т. II.

Подставляя величины главных линейных деформаций для чистого сдвига по формулам (54) гл. VIII т. II в выражение (24) гл. VIII т. II, устанавливаем

$$\varepsilon_i = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}. \tag{139}$$

Рассмотрим два напряженных состояния: одноосное растяжение и чистый сдвиг. Если для этих двух напряженных состояний интенсивности напряжений равны, то согласно третьей гипотезе теории малых упруго-пластических деформаций (см. гл. VIII т. II) интенсивности деформаций для них также равны. Поэтому сопоставляя формулы (57), (59) и (60) гл. VIII т. II и соотношения (136) и (139), получаем параметрические уравнения, связывающие диаграммы растяжения и сдвига:

$$\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}; \tag{140}$$

$$\gamma = \sqrt{3}\,\varepsilon - \frac{1-2\mu}{\sqrt{3}E}\,\sigma, \tag{141}$$

или

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}E}\left[2(1+\mu) + 3\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e}\right]\sigma. \tag{142}$$

Для построения диаграммы сдвига по диаграмме растяжения могут быть использованы графоаналитический или графический методы, изложенные в § 6 гл. VIII т. II применительно к построению диаграммы деформирования по диаграмме растяжения. В первом случае используются формулы (140) и (142) и графическое построение, изображенное на фиг. 458. Во втором случае построение производится на основании соотношений (140) и (141) так, как изображено на фиг. 459. При этом по оси абсцисс получаем $\frac{\gamma}{\sqrt{3}}$, а по оси ординат $\sqrt{3}\tau$.

Рассмотрим вид диаграммы сдвига в том случае, когда диаграмма растяжения имеет площадку текучести и линейное упрочнение (см. фиг. 444).

При $\gamma \leqslant \gamma_s$, $\tau \leqslant \tau_s$ справедлив закон Гука, и зависимость касательного напряжения от угла сдвига определяется выражением (134).

Обозначим величину угловой деформации, при которой на диаграмме сдвига прекращается площадка текучести и начинается область упрочнения, через $\gamma_s{}^*$. По формуле (66) гл. VIII т. II, а также формулам (139) и (137) получаем

$$\gamma_s^* = \sqrt{3}\,\varepsilon_s^* - \frac{1-2\mu}{E}\,\tau_s. \tag{143}$$

При $\gamma_s \leqslant \gamma \leqslant \gamma_s^*$ по формуле (67) гл. VIII т. II, а также формулам (136) и (137) имеем

$$\tau = \tau_s. \tag{144}$$

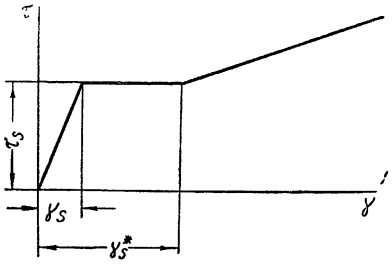
При $\gamma > \gamma_s^*$ по формулам (68), (69) и (66) гл. VIII т. II, а также формулам (136), (137), (139) и (143) устанавливаем, что

$$\tau = \tau_s + G_1(\gamma - \gamma_s^*), \tag{145}$$

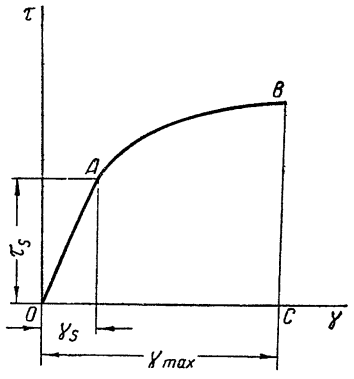
где

$$G_1 = \frac{E_1}{3\left[1 - \frac{E_1}{3E}(1-2\mu)\right]}. \tag{146}$$

Формулы (134), (137), (138), (143)—(146) определяют диаграмму сдвига для материала, у которого диаграмма растяжения имеет площадку текучести и линейное упрочнение. На фиг. 512 представлена диаграмма сдвига для такого рода материала.



Фиг. 512. Диаграмма сдвига с площадкой текучести и линейным упрочнением



Фиг. 513. Диаграмма сдвига

Перейдем к исследованию упруго-пластического кручения бруса круглого поперечного сечения на основе известной диаграммы сдвига (фиг. 513).

Обозначим крутящий момент через M, а диаметр поперечного сечения бруса d.

При чистом кручении круглого бруса поперечное сечение его за пределами упругости, так же как и в пределах упругости, остается плоским, а радиусы прямолинейными. Поэтому, так же как и в пределах упругости, угловая деформация γ в точках поперечного сечения на расстоянии r от центра определяется формулой

$$\gamma = r\theta, \tag{147}$$

где $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ — относительный угол закручивания бруса (отношение угла закручивания $d\varphi$ элемента бруса длиной dz к его длине dz).

Как следует из соотношения (147), наибольшая угловая деформация γ_{max} имеет место в точках, наиболее удаленных от центра при $r = \frac{d}{2}$:

$$\gamma_{max} = \frac{d}{2}\theta. \tag{148}$$

Пластические деформации в поперечном сечении бруса возникают в том случае, когда наибольшая угловая деформация γ_{max} достигнет величины γ_s или, что то же, когда наибольшее касательное

напряжение τ_{max} сравняется с пределом текучести при сдвиге τ_s. При этом крутящий момент равен

$$M_s = \tau_s W_p, \tag{149}$$

где $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ — полярный момент сопротивления сечения в $см^3$.

При $M < M_s$ зависимость относительного угла закручивания от крутящего момента линейная:

$$\theta = \frac{M}{GJ_p}, \tag{150}$$

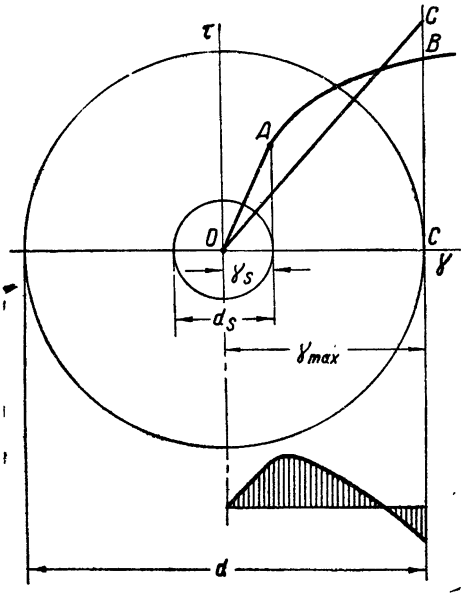
где $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ — полярный момент инерции поперечного сечения в $см^4$.

Относительный угол закручивания, при котором начинается образование пластических деформаций, обозначим через θ_s.

Из формул (148) и (150) следует, что

$$\theta_s = \frac{2\gamma_s}{d} = \frac{M_s}{GJ_p}. \tag{151}$$

Очевидно, что, зная относительный угол закручивания бруса, можно построить эпюру касательных напряжений в поперечном сечении и определить крутящий момент.



Фиг. 514. К определению напряжений при кручении круглого бруса за пределами упругости

Как уже отмечалось выше, угловая деформация на расстоянии r от центра связана с величиной текущего радиуса r линейной зависимостью (147). Зависимость касательных напряжений от угловых деформаций определяется диаграммой сдвига, поэтому эпюра касательных напряжений в поперечном сечении — это диаграмма сдвига, взятая до величины γ_{max}. Нужно только перестроить масштаб оси абсцисс, откладывая по ней не величины γ, а величины r, вычисляемые из выражения (147). Величина γ_{max} определяется по формуле (148).

Если на диаграмме сдвига нанести поперечное сечение бруса так, чтобы половина его диаметра $\frac{d}{2}$ в масштабе равнялась отрезку OD (фиг. 514), то тогда часть диаграммы сдвига $OABD$ и будет являться эпюрой касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении бруса.

Если $\gamma_{max} > \gamma_s$ в части поперечного сечения, близкой к центру, деформации являются упругими, а напряжения меньше предела текучести материала (упругая область), в другой части деформации слагаются из упругих и пластических, а напряжения больше предела текучести материала (упруго-пластическая область). Упругая область представляет собой круг диаметром d_s, а упруго-пластическая — кольцо с внутренним диаметром d_s и наружным d.

На границе упругой и пластической областей угловая деформация достигает величины γ_s, а касательное напряжение τ_s. Следовательно, на основании выражения (147) имеем

$$\gamma_s = \frac{d_s}{2}\theta. \tag{152}$$

Из соотношений (152), (148) и (151) устанавливаем, что

$$\frac{d_s}{d} = \frac{\gamma_s}{\gamma_{max}} = \frac{\tau_s}{G\gamma_{max}} = \frac{\theta_s}{\theta}. \tag{153}$$

По формуле (153) определяется диаметр упругой области.

Перейдем к вычислению крутящего момента. Последний выражается зависимостью

$$M = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \tau r^2 dr. \tag{154}$$

На основании соотношений (147) и (148) имеем

$$r = \frac{d}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_{max}} \tag{155}$$

и

$$dr = \frac{d}{2} \cdot \frac{d\gamma}{\gamma_{max}}. \tag{156}$$

Подставляя выражения (155) и (156) в формулу (154) и соответственно изменяя пределы интегрирования, получим

$$M = \frac{\pi d^3}{4\gamma_{max}^3} \int_0^{\gamma_{max}\gamma} \tau \gamma^2 d\gamma. \tag{157}$$

Интеграл в выражении (157) представляет собой момент инерции площади $OABC$ относительно оси ординат (см. фиг. 510).

По формулам (157) и (148), используя диаграмму сдвига материала, можно подсчитать крутящий момент, соответствующий выбранному относительному углу закручивания θ.

Если брус выполнен из ограниченно пластичного материала, имеющего сравнительно небольшую величину угловой деформации при разрушении $\gamma_{разр}$, то для определения разрушающего момента необходимо в формуле (157) положить $\gamma_{max} = \gamma_{разр}$.

Выше было рассмотрено определение напряжений в поперечном сечении и крутящего момента по заданному относительному углу закручивания. Для решения обратной задачи вычисления напряжений и относительного угла закручивания по заданному крутящему моменту $M > M_s$ удобно располагать графиком зависимости крутящего момента от относительного угла закручивания, который называется диаграммой кручения.

При $M < M_s$, $\theta < \theta_s$ диаграмма кручения (фиг. 515) является прямой, представленной уравнением (150). Для построения диаграммы кручения при $M > M_s$ необходимо, задаваясь различными значениями относительного угла закручивания $\theta > \theta_s$, определить для каждого из них указанным выше способом крутящие моменты, после чего по точкам построить диаграмму кручения (фиг. 515).

Если диаграмма кручения известна, то для подсчета напряжений по заданному крутящему моменту вначале из диаграммы кручения определяется относительный угол закручивания, после чего (так, как изложено выше) вычисляются напряжения и строится эпюра напряжений.

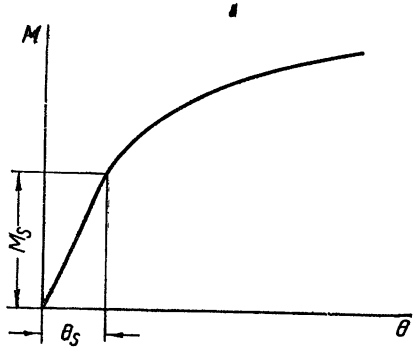
Предположим, что после нагружения бруса при $M>M_s$ брус разгружается. В таком случае в поперечном сечении возникают остаточные напряжения. Их можно определить путем вычитания из напряжений, возникающих при нагружении ($OABD$ на фиг. 514), так называемых разгрузочных напряжений

$$\tau_{ост} = \tau - \tau_{разг}. \tag{158}$$

Уменьшение напряжений при разгрузке или разгрузочные напряжения на основании теоремы о разгрузке определяются по формуле

$$\tau_{разг} = \frac{Mr}{J_p}. \tag{159}$$

Следовательно, эпюра разгрузочных напряжений является линейной (OCD на фиг. 514). Разгрузку можно представить себе как нагружение бруса в пределах упругости крутящим моментом, имеющим знак, обратный моменту при нагружении. Заметим, что построение эпюры разгрузочных напряжений является удобным расчетным приемом для определения остаточных напряжений. В действительности при разгрузке в поперечном сечении бруса остаточные напряжения не возникают.



Фиг. 515. Диаграмма кручения

Эпюра остаточных напряжений получается вычитанием из эпюры напряжений, возникающих при нагружении эпюры разгрузочных напряжений, так, как это изображено на фиг. 514.

Как отмечалось в гл. VIII т. II, теорема о разгрузке доказана в предположении, что в процессе разгрузки материал вновь не выходит за пределы упругости. Поэтому изложенное выше определение остаточных напряжений справедливо только при этом условии.

Определение напряжений при вторичном нагружении производится так же, как и в случае изгиба (см. § 2 этой главы).

Остаточный относительный угол закручивания $\theta_{ост}$ может быть определен как разность относительного угла закручивания, возникшего при нагружении θ, и относительного угла раскручивания при разгрузке $\theta_{разг}$:

$$\theta_{ост} = \theta - \theta_{разг}. \tag{160}$$

Уменьшение относительного угла раскручивания при разгрузке $\theta_{разг}$ на основании теоремы о разгрузке может быть определено по общеизвестной формуле теории сопротивления материалов

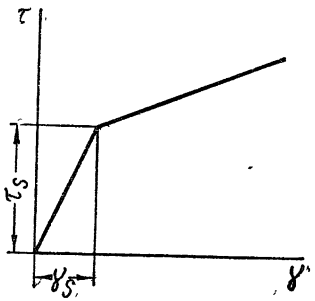
$$\theta_{разг} = \frac{M}{GJ_p}. \tag{161}$$

Теоретическому и экспериментальному исследованию кручения бруса круглого поперечного сечения за пределами упругости посвя-

щена работа Г. А. Смирнова-Аляева [58]. В ней теоретические диаграммы кручения, построенные так, как выше изложено по диаграмме сдвига, полученной в свою очередь на основе диаграммы растяжения, сопоставлены с экспериментальными данными. Сравнение показало хорошее согласование результатов теории и опыта.

Теоретическое и экспериментальное исследование кручения круглого бруса при больших деформациях и перемещениях рассмотрено в работе Л. Г. Афендика и В. Г. Бессонова [1].

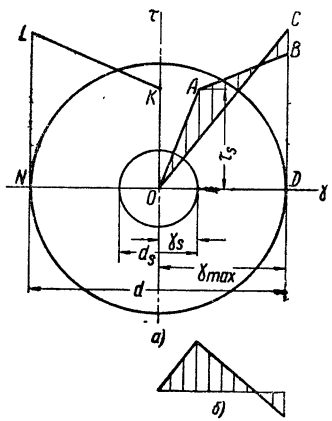
Изложенную теорию упруго-пластического кручения бруса круглого поперечного сечения можно значительно упростить, если в основу расчета положить схематизированную диаграмму. В качестве примера рассмотрим упруго-пластическое кручение бруса круглого поперечного сечения, выполненного из материала, диаграмма сдвига которого имеет линейное упрочнение и не имеет площадки текучести (фиг. 516).



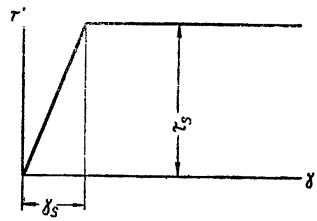
Фиг. 516. Диаграмма сдвига с линейным упрочнением

В этом случае на основании формул (157), (134) и (145) для $\gamma \geqslant \gamma_s$

$$M = \frac{\pi d^3}{4\gamma_{\max}^3}\left\{\int_0^{\gamma_s} G\gamma^3 d\gamma + \int_{\gamma_s}^{\gamma_{\max}} [\tau_s + G_1(\gamma - \gamma_s)]\gamma^2 d\gamma\right\}. \qquad (162)$$



Фиг. 517. Эпюры напряжений, возникающих при нагружении (*OABD*), разгрузочных (*OCD*), остаточных (*OABCO*) и возникающих при нагружении после исчезновения упругой зоны (*OKLN*). Схематизированная диаграмма сдвига с линейным упрочнением без площади текучести



Фиг. 518. Диаграмма сдвига без упрочнения

Используя выражения (148), (149) и (151), из уравнения (162) после преобразований получим

$$\frac{M}{M_s} = \frac{1}{3}\left\{3\frac{G_1}{G}\cdot\frac{\theta}{\theta_s} + \left(1 - \frac{G_1}{G}\right)\left[4 - \left(\frac{\theta_s}{\theta}\right)^3\right]\right\}. \qquad (163)$$

Уравнение (163) дает зависимость крутящего момента от относительного угла закручивания при $M \geqslant M_s$.

При $M \leqslant M_s$ эта зависимость линейная [см. формулу (150)].

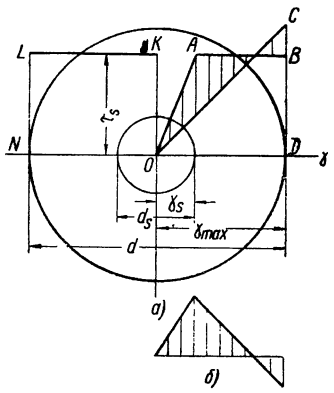
На фиг. 517 представлены эпюры напряжений, возникающих в поперечном сечении бруса при $M \geqslant M_s$ (линия *OAB* на фиг. 517,*а*), линейная эпюра разгрузки (линия *OC* на фиг. 517,*а*) и эпюра остаточных

напряжений (фиг. 517,*б*) в случае, если диаграмма сдвига имеет линейное упрочнение и не имеет площадки текучести.

Если диаграмма сдвига не имеет упрочнения (фиг. 518), зависимость крутящего момента от относительного угла закручивания при $M>M_s$ можно определить из формулы (163), полагая в ней $G_1=0$, тогда получим

$$\frac{M}{M_s}=\frac{1}{3}\left[4-\left(\frac{\theta_s}{\theta}\right)^3\right]. \qquad (164)$$

На фиг. 519 представлены эпюры напряжений, возникающих в поперечном сечении бруса при $M>M_s$ (*OABD* на фиг. 519,*а*), линейная эпюра разгрузки (*OCD* на фиг. 519,*а*) и эпюра остаточных напряжений (фиг. 519,*б*) для этого случая.



Фиг. 519. Эпюры напряжений, возникающих при нагружении (*OABD*), разгрузочных (*OCD*), остаточных (*OABCO*) и в предельном состоянии (*OKLN*). Схематизированная диаграмма сдвига без упрочнения

Преобразуем соотношение (163), предполагая, что относительный угол закручивания бруса очень велик ($\theta\gg\theta_s$). Из выражения (153) заключаем, что в этом случае $d_s\ll d$, т. е. диаметр упругой области практически равен нулю — во всех точках сечения напряжения выше предела текучести.

Пренебрежем в уравнении (163) величиной $\frac{\theta_s}{\theta}$ по сравнению с единицей, тогда, используя соотношение (151), получим

$$M=\frac{4}{3}M_s+G_1J_p\theta. \qquad (165)$$

Таким образом, после исчезновения упругой зоны зависимость крутящего момента от кривизны линейная. На фиг. 517 представлена эпюра напряжений в поперечном сечении (*OKLN*) для этого случая.

Если диаграмма растяжения материала бруса схематизирована в виде диаграммы без упрочнения (фиг. 518), то, полагая в соотношении (165) $G_1=0$, получаем величину предельного момента для бруса круглого поперечного сечения:

$$M_{пр}=\frac{4}{3}M_s=\tau_s\frac{\pi d^3}{12}. \qquad (166)$$

На фиг. 519 изображена эпюра напряжений в предельном состоянии (*OKLN*), тогда брус становится геометрически изменяемым и несущая способность его исчерпывается полностью.

Изложенные выше методы расчета скрученного бруса круглого поперечного сечения за пределами упругости по заданной диаграмме сдвига могут быть использованы также и в случае материалов, диаграммы растяжения и сжатия которых не совпадают, если диаграмма сдвига для них получена экспериментально. Вопрос о построении диаграммы сдвига по диаграммам растяжения и сжатия для таких материалов может быть решен после создания теории пластичности, учитывающей различие диаграмм растяжения и сжатия.

В работе Я. М. Пархомовского [40] изучено упруго-пластическое кручение круглого бруса в предположении, что предел текучести при сдвиге изменяется по радиусу.

Пластическое кручение брусьев переменного диаметра рассмотрено В. В. Соколовским [60] и Л. М. Качановым [22].

Задача об упруго-пластическом кручении круглого вала с фланцем решена численным методом Эдди и Шоу [64].

§ 9. ЗАНЕВОЛИВАНИЕ ВИНТОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН РАСТЯЖЕНИЯ — СЖАТИЯ ИЗ ПРОВОЛОКИ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Ввиду того что проволока пружин растяжения — сжатия с малым углом подъема в основном работает на кручение (см. гл. XIII т. I), расчет заневоленных пружин основан на теории упруго-пластического кручения бруса.

Как известно, крутящий момент в поперечном сечении проволоки пружины растяжения — сжатия с малым углом подъема равен

$$M = \frac{PD}{2}, \tag{167}$$

где P — сила, сжимающая или растягивающая пружину;

D — средний диаметр пружины.

Осадка пружины с малым углом подъема λ связана с изменением кривизны второго рода Δk следующей зависимостью (см. гл. XIII т. I):

$$\lambda = \frac{\pi D^2 i}{2} \Delta k, \tag{168}$$

где i — число рабочих витков.

На основании формул (157) и (167) имеем

$$P = \frac{\pi d^3}{2D} : \frac{1}{\gamma_{\max}^3} \int_0^{\gamma_{\max}} \tau \gamma^2 \, d\gamma, \tag{169}$$

где $\gamma_{\max}$ — максимальная угловая деформация в точках, наиболее удаленных от центра поперечного сечения проволоки;

$$\gamma_{\max} = \Delta k \frac{d}{2}. \tag{170}$$

Согласно формулам (168) и (170) получаем

$$\lambda = \frac{\pi D^2 i}{d} \gamma_{\max}. \tag{171}$$

При помощи формул (169) и (171), подобно тому как в § 8 строилась диаграмма кручения бруса, может быть построен график зависимости сжимающей силы P от осадки λ — диаграмма обжатия пружины.

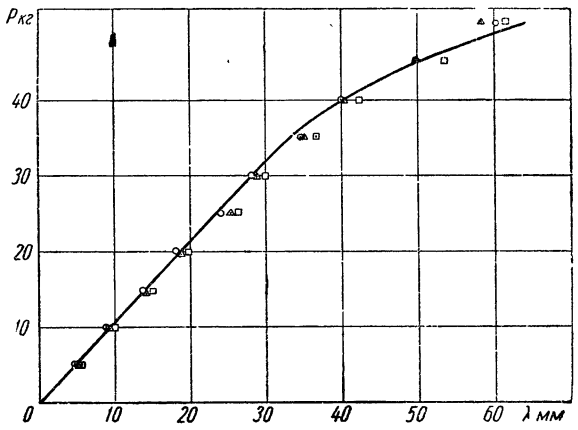
При помощи этого графика по заданной силе устанавливается осадка и наоборот.

В гл. V т. I было изложено построение диаграммы сдвига по диаграмме кручения. Таким же методом может быть построена диаграмма сдвига пружинной проволоки по диаграмме обжатия пружины.

Для проверки гипотез, положенных в основу расчета заневоленных пружин, было проведено сопоставление результатов экспериментов с теоретической диаграммой обжатия пружины, построенной по диа-

грамме сдвига, которая в свою очередь получена на основе диаграммы растяжения пружинной проволоки [29].

На фиг. 520 изображена [29] теоретическая диаграмма обжатия пружины со средним диаметром $D=29$ *мм*, числом рабочих витков $i=3{,}25$, длиной в свободном состоянии $H=89$ *мм*, свитой из проволоки диаметром $d=3{,}2$ *мм* (сталь 60С2А).



Фиг. 520. Сопоставление теоретических и экспериментальных результатов сжатия пружин. Сплошная линия — теоретическая диаграмма сжатия, точки — результаты испытаний трех пружин [29]

Диаграмма растяжения этой проволоки представлена на фиг. 521, а диаграмма сдвига, построенная по диаграмме растяжения, — на фиг. 522.

На фиг. 520 точками изображены результаты испытаний трех пружин. Сопоставление теоретической диаграммы обжатия с экспериментально полученными точками показывает хорошее совпадение теории и эксперимента.

Напряжения, возникающие при заневоливании, а также остаточные напряжения и остаточная осадка определяются так, как это было изложено в § 8.

Рассмотрим порядок проектирования заневоленных пружин сжатия на заданные максимальную силу $P_{\max}$ и максимальную осадку $\lambda_{\max}$. Вначале обычно задаются отношением диаметра упругого ядра к диаметру поперечного сечения проволоки при сжатии пружины до соприкосновения витков:

$$\beta = \frac{d_s}{d} \geqslant 0{,}5.$$

По величине β на основании формулы (153) определяется максимальная угловая деформация в точках, наиболее удаленных от центра поперечного сечения проволоки при сжатии до соприкосновения витков $\gamma_{пр}$:

$$\gamma_{пр} = \frac{\tau_s}{G\beta}. \qquad (172)$$

Эта величина характеризует степень приближения проволоки к состоянию разрушения. О запасе прочности заневоленных пружин следует судить по отношению $\frac{\gamma_{разр}}{\gamma_{пр}}$, где $\gamma_{разр}$ — наибольший сдвиг, соответствующий моменту разрушения.

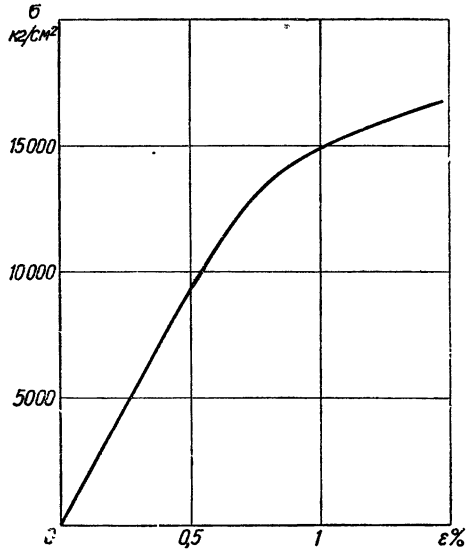
Сила $P_{пр}$, сжимающая пружину до соприкосновения витков, определяется из соотношения

$$P_{пр} = \frac{P_{\max}}{\alpha}. \qquad (173)$$

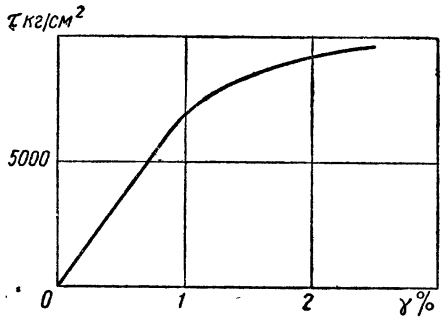
Коэффициент α вводится для того, чтобы в эксплуатации пружина не сжималась до соприкосновения витков. Величину его рекомендуется принимать равной $\alpha = 0{,}8 \div 0{,}9$.

Формула для определения диаметра проволоки на основании выражений (169) и (173) принимает вид

$$d = \sqrt{\frac{2P_{\max} c}{\pi \alpha \Phi}}, \qquad (174)$$



Фиг. 521. Диаграмма растяжения проволоки диаметром 3,2 *мм*, сталь [29]



Фиг. 522. Диаграмма сдвига проволоки диаметром 3,2 *мм*, сталь 60С2А [29]

где $c = \frac{D}{d}$ — индекс пружины, который рекомендуется выбирать равным $c = 4 \div 10$, а

$$\Phi = \frac{1}{\gamma_{np}^3} \int_0^{\gamma_{np}} \tau \gamma^2 \, d\gamma. \qquad (175)$$

Величина Φ определяется по диаграмме сдвига пружинной проволоки так, как было изложено в § 8. По найденному значению d находится диаметр пружины D:

$$D = cd. \qquad (176)$$

Необходимое число витков определяется из формулы (62) гл. XIII т. I:

$$i = \frac{Gd^4 \lambda_{\max}}{8D^3 P_{\max}}. \qquad (177)$$

Свободная длина пружины заготовки

$$H_{заг} = H_d + \lambda_{np}, \qquad (178)$$

где H_d — длина пружины в сжатом до соприкосновения витков состоянии;

λ_{np} — осадка пружины при заневоливании.

Последняя величина определяется на основании формулы (171):

$$\lambda_{np} = \frac{\pi D^2 i}{d} \gamma_{np}. \qquad (179)$$

Длина ненагруженной готовой пружины

$$H_0 = H_d + \frac{\lambda_{max}}{\alpha}. \qquad (180)$$

Расчет заневоленных пружин растяжения производится аналогично.

Заневоливание конических пружин рассмотрено в работе [27].

Теория заневоливания многожильных пружин изложена в работе [43].

Рассмотрим пример расчета заневоленной цилиндрической винтовой пружины сжатия по заданной рабочей характеристике.

При нагрузке $P_{max} = 20$ *кг* осевое перемещение пружины должно равняться $\lambda_{max} = 40$ *мм*.

Руководствуясь табл. 72 т. I, устанавливаем, что для заневоленных пружин (пружин второй группы), свитых из проволоки марок П и В, допускаемое напряжение $[\tau] = \chi\sigma_{bz} = 0{,}6\sigma_{bz}$.

По формуле (67) гл. XIII т. I, задаваясь индексом пружины $c = 8$ и пренебрегая влиянием кривизны витка ($k \approx 1$), имеем

$$d^2\sigma_{bz} = \frac{8kP_{max}c}{\pi\chi} = \frac{8 \cdot 20 \cdot 8}{3{,}14 \cdot 0{,}6} = 680 \text{ кг}.$$

По табл. 68, т. I выбираем проволоку марки П диаметром $d = 2$ *мм*, для которой $d^2\sigma_{bz} = 700$ *кг*.

Диаграмма сдвига этой проволоки, заимствованная из работы [27], представлена на фиг. 523,*а*. Эта диаграмма и положена в основу дальнейшего расчета.

1. Задаемся отношением диаметра упругого ядра к диаметру проволоки:

$$\beta = \frac{d_s}{d} = 0{,}5.$$

2. Определяем по формуле (172) максимальную угловую деформацию проволоки $\gamma_{пр}$, допускаемую при заневоливании. Модуль сдвига проволоки $G = 8 \cdot 10^5$ *кг/см*^{2}. Предел текучести устанавливаем по фиг. 523, *а* и принимаем его равным $\tau_s = 8000$ *кг/см*^{2}, тогда

$$\gamma_{пр} = \frac{\tau_s}{G\beta} = \frac{8000}{8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}5} = 0{,}02,$$

что соответствует коэффициенту запаса по разрушению

$$n = \frac{\gamma_{разр}}{\gamma_{пр}} = \frac{0{,}032}{0{,}02} = 1{,}6.$$

(Величину $\gamma_{разр} = 0{,}032$ устанавливаем по фиг. 523, *а*).

3. Используя диаграмму сдвига (γ, τ), вычисляем графически по формуле (175) величину Ф:

$$\Phi = \frac{1}{\gamma_{пр}^3}\int_0^{\gamma_{пр}} \tau\gamma^2\, d\gamma = 3180 \text{ кг/см}^2.$$

4. Задавшись индексом пружины $c = 8$ (см. выше), определяем по формуле (174) диаметр проволоки:

$$d = \sqrt{\frac{2P_{max}c}{\pi\alpha\Phi}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 8}{3{,}14 \cdot 0{,}8 \cdot 3180}} = 0{,}2 \text{ см},$$

где $\alpha = \frac{P_{max}}{P_{пр}}$ [см. формулу (173)] принято равным 0,8.

Средний диаметр D пружины по формуле (176) равен

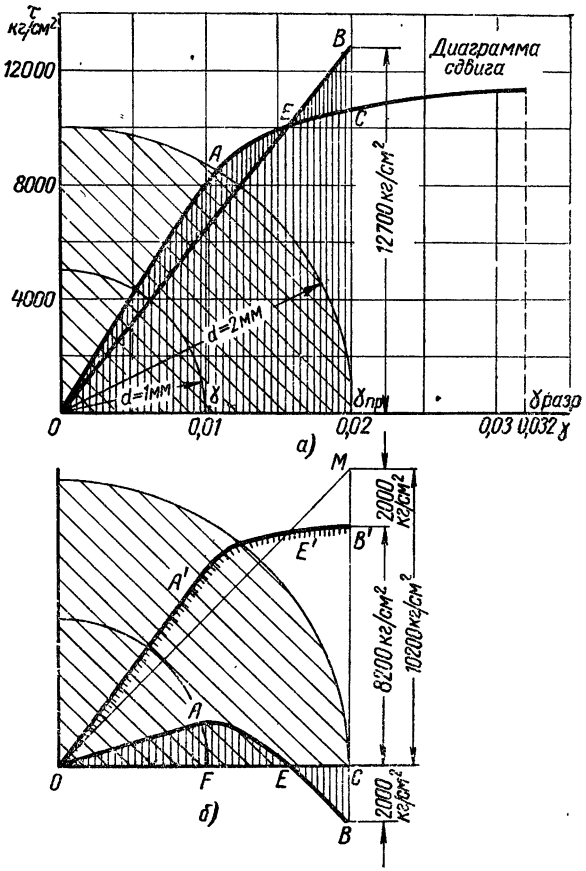
$$D = cd = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6 \text{ см}.$$

5. Предельная сила, необходимая для заневоливания и приводящая витки в соприкосновение, по формуле (173)

$$P_{пр} = \frac{P_{max}}{\alpha} = \frac{20}{0{,}8} = 25 \text{ кг}.$$

Пластические деформации начнут возникать при первичном обжатии, уже при нагрузке

$$P_s = \tau_s \frac{\pi d^3}{8D} = \frac{8000 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2^3}{8 \cdot 1{,}6} = 15{,}7 \text{ кг}.$$



Фиг. 523. Эпюры напряжений, возникающих в поперечных сечениях витков спроектированной заневоленной пружины сжатия

6. Необходимое число рабочих витков по формуле (177)

$$i = \frac{Gd^4\lambda_{max}}{8D^3P_{max}} = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}2^4 \cdot 4}{8 \cdot 1{,}6^3 \cdot 20} = 7{,}8 \approx 8.$$

В связи с этим округлением числа витков при нагрузке $P_{max} = 20$ *кг* $\lambda^*_{max} = 41$ *мм*.

Полное число витков с учетом опорных витков

$$i_n = i + 1{,}5 = 8 + 1{,}5 = 9{,}5.$$

7. Осевое перемещение торцов пружины $\lambda_{пр}$ при заневоливании, необходимое для получения в сечениях витков избранного наибольшего сдвига $\gamma_{пр}$ по формуле (179), равно:

$$\lambda_{пр} = \frac{\pi D^2 i}{d}\gamma_{пр} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}6^2 \cdot 8}{0{,}2} 0{,}02 = 6{,}42 \text{ см}.$$

8. Остаточная осадка $\lambda_{ост}$ вследствие заневоливания

$$\lambda_{ост} = \lambda_{пр} - \frac{8P_{пр}D^3 i}{Gd^4} = 6{,}42 - \frac{8 \cdot 25 \cdot 1{,}6^3 \cdot 8}{8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}2^4} = 6{,}42 - 5{,}12 = 1{,}3 \text{ см}.$$

9. Свободная длина пружины заготовки по формуле (178)

$$H_{заг} = H_d + \lambda_{пр} - (i_n - 0{,}5)\, d + \lambda_{пр} = (9{,}5 - 0{,}5)\, 0{,}2 + 6{,}42 = 8{,}22 \text{ см}.$$

10. Длина ненагруженной готовой пружины по формуле (180)

$$H_0 = H_d + \frac{\lambda^*_{\max}}{\alpha} = 1{,}8 + \frac{4{,}1}{0{,}8} = 6{,}92 \text{ см} \qquad (H_0 = H_{заг} - \lambda_{ост} = 8{,}22 - 1{,}3 = 6{,}92 \text{ см}).$$

Поскольку спроектированная пружина имеет относительно большую длину $\frac{H_0}{D} = \frac{6{,}92}{1{,}6} = 4{,}32$), ее необходимо в эксплуатации монтировать на оправке.

Спроектированная пружина и ее характеристика представлены на фиг. 524.

11. Для выяснения напряжений, возникающих в поперечных сечениях витков при заневоливании, построим на диаграмме сдвига (фиг. 523, *а*) сечение проволоки, вычерченное в некотором масштабе так, чтобы его центр разместился в начале координат, а в периферийных точках сечения угол сдвига достигал величины $\gamma_{пр} = 0{,}02$ (см. фиг. 523, *а*), тогда при полном сжатии заневоленной пружины касательные напряжения в поперечных сечениях витков будут достигать величины, определяемой на фиг. 523, *а* кривой *OAEC*.

12. Руководствуясь формулой (159), вычислим разгрузочные напряжения, позволяющие установить величину остаточных напряжений:

$$\tau^{разг}_{\max} = \frac{8P_{пр}D}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 25 \cdot 1{,}6}{3{,}14 \cdot 0{,}4^3} = 12\,700 \text{ кг/см}^2.$$

Из графических построений на фиг. 523, *а* выясняется эпюра остаточных напряжений (кривая *OAEB* на фиг. 523, *б*). Остаточные напряжения в периферийных точках поперечного сечения $\tau_{ост} = 2000$ *кг/см*^{2}.

13 Наибольшие номинальные касательные напряжения в поперечных сеченичх витков пружины без учета кривизны витков при рабочей нагрузке $P_{\max} = 20$ *кг*

$$\tau^{ном}_{\max} = \frac{8P_{\max}D}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 20 \cdot 1{,}6}{3{,}14 \cdot 0{,}2^3} = 10\,200 \text{ кг/см}^2.$$

Эпюра номинальных касательных напряжений представлена на фиг. 523, *б* прямой *OM*.

Наибольшие действительные напряжения, возникающие в пружине в эксплуатационных условиях,

$$\tau_{\max} = \tau^{ном}_{\max} - \tau_{ост} = 10\,200 - 2000 = 8200 \text{ кг/см}^2.$$

Эпюра напряжений при рабочей нагрузке $P_{\max} = 20$ *кг* с учетом остаточных напряжений представлена на фиг. 523, *б* кривой *OA'E'B'*.

§ 10. КРУЧЕНИЕ НЕКРУГЛЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Рассмотрим вначале пластическое чистое кручение стержней некругкого поперечного сечения. В основу положим диаграмму сдвига материала стержня без упрочнения (фиг. 518).

В случае чистого кручения бруса (фиг. 525) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$. Компоненты τ_{zx} и τ_{zy} касательного напряжения τ в поперечном сечении бруса должны удовлетворять дифференциальному уравнению равновесия (см. гл. VIII т. 1)

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0. \qquad (181)$$

При пластическом кручении бруса упругое ядро отсутствует, и если схематизированная диаграмма сдвига не имеет упрочнения, то компоненты τ_{zx} и τ_{zy} касательного напряжения τ должны удовлетворять условию пластичности

$$\tau^2 = \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = \tau_s^2, \tag{182}$$

где τ_s — предел текучести материала бруса при чистом сдвиге.

Так же как и в упругом кручении стержней, введем функцию напряжений Ф, положив

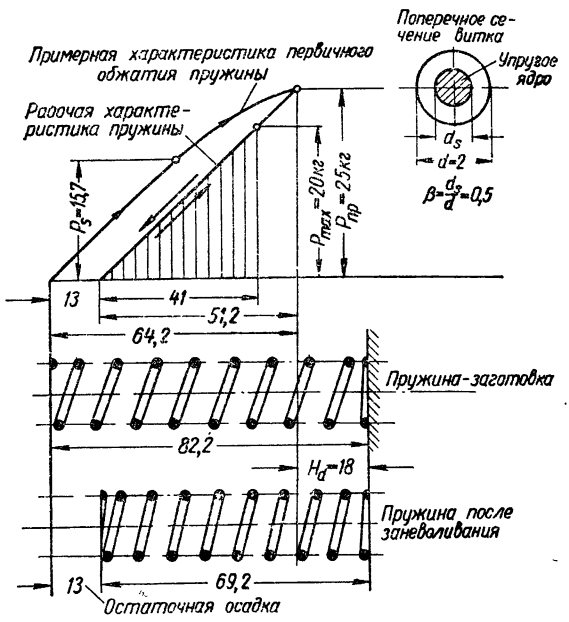
$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{183}$$

В таком случае дифференциальное уравнение равновесия (181) удовлетворяется тождественно, а условие (182) принимает вид

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 = \tau_s^2. \tag{184}$$

На контуре поперечного сечения полное касательное напряжение должно быть направлено по касательной к контуру, и, следовательно (см. гл. VIII т. I), в точках контура

$$\frac{\tau_{zx}}{\tau_{zy}} = \frac{dx}{dy}. \tag{185}$$



Фиг. 524. Общий вид спроектированной заневоленной пружины сжатия и ее характеристика

Из соотношения (185) и (183) следует, что на контуре поперечного сечения

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy\right)_{конт} = 0$$

или

$$d\Phi_{конт} = 0.$$

Таким образом, так же как и при упругом кручении, на контуре поперечного сечения функция Ф постоянна. Для односвязного контура величина этой постоянной несущественна, поскольку, как следует из соотношений (183), напряжения равны частным производным функции напряжений и изменение ее на постоянную величину не влияет на значения напряжений. Поэтому, так же как и при упругом кручении стержней, можно принять, что на контуре

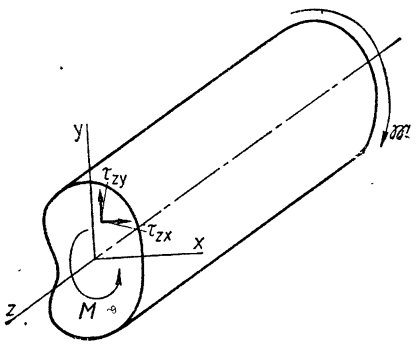
$$\Phi_{конт} = 0. \tag{186}$$

Далее, так же как и в пределах упругости, крутящий момент связан с функцией напряжений соотношением (см. гл. VIII т. I)

$$M = 2\iint \Phi\, dx dy, \tag{187}$$

где интегрирование распространяется на всю площадь поперечного сечения.

Из изложенного выше следует, что для решения задачи пластического кручения бруса некруглого поперечного сечения необходимо определить функцию напряжений Φ, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (184). После этого связь напряжений с крутящим моментом устанавливается через функцию напряжений Φ формулами (183) и и (187).



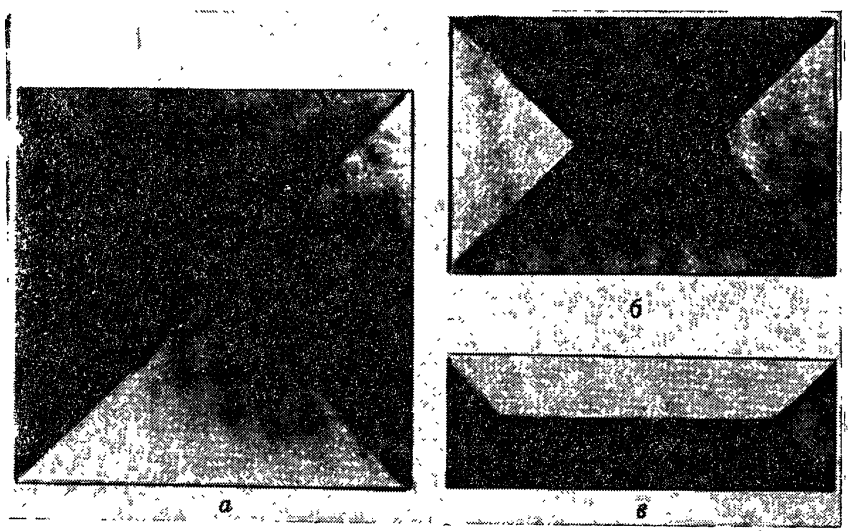
Фиг. 525. Скрученный брус некруглого поперечного сечения

Левая часть дифференциального уравнения (184) представляет собой квадрат модуля градиента функции напряжений Φ, характеризующего наибольший уклон поверхности функции напряжений.

На основании соотношения (184) заключаем, что градиент функции напряжений является постоянной величиной, равной пределу текучести материала бруса при чистом сдвиге:

$$\operatorname{grad}\Phi = \tau_s, \qquad (188)$$

поэтому поверхность функции напряжений представляет собой поверхность постоянного наибольшего возможного уклона или поверхность естественного откоса. Такую поверхность называют также поверх-

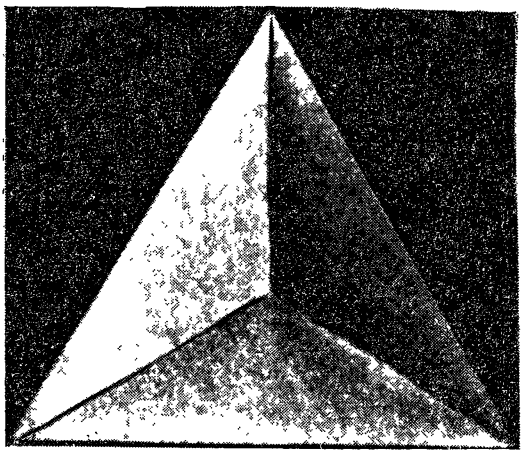


Фиг. 526. Песчаные насыпи на прямоугольных пластинках с различным отношением сторон

ностью постоянного ската. Заметим также, что на основании соотношения (188) тангенс угла наклона этой поверхности в определенном масштабе равен пределу текучести материала бруса при чистом сдвиге.

Представим себе, что на пластинку, имеющую форму поперечного сечения скрученного бруса, находящуюся в горизонтальном положении, насыпан сухой мелкий песок. Образуется холм, естественный откос которого дает представление о функции напряжений Φ. Аналогия

с песчаной насыпью при пластическом кручении стержней была установлена А. Надаи [38]. На случай многосвязных областей эта аналогия распространена М. А. Садовским [65]. На фиг. 526—528 представлены фотографии песчаных насыпей на прямоугольных пластинках с различными отношениями сторон, на пластинке в форме равностороннего треугольника и на эллиптической пластинке.



Фиг. 527. Песчаная насыпь на пластинке в форме равностороннего треугольника

Аналогия с песчаной насыпью дает возможность экспериментально исследовать пластическое кручение бруса некруглого поперечного сечения и определять величину предельного крутящего момента. Последний на основании соотношения (187) пропорционален объему песчаной насыпи на горизонтально расположенной пластинке, имеющей форму поперечного сечения скрученного бруса.

Подсчитаем предельный крутящий момент для некоторых поперечных сечений.

Круглое сечение. Для круглого сечения величина предельного момента была подсчитана в § 8. Теперь определим его величину, используя свойство функции напряжений.



Фиг. 528. Песчаная насыпь на эллиптической пластинке

В рассматриваемом случае поверхностью функции напряжений является конус, построенный на поперечном сечении (фиг. 529). Высота этого конуса

$$H = \tau_s \frac{d}{2},$$

где d — диаметр поперечного сечения.

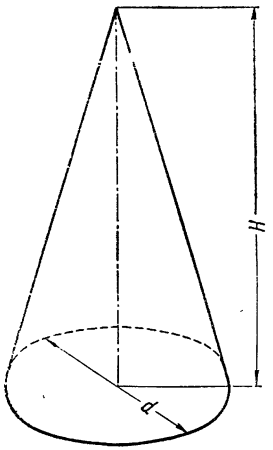
Согласно выражению (187) предельный крутящий момент равен удвоенному объему этого конуса:

$$M_{пр} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi d^2}{4} H = \tau_s \frac{\pi d^3}{12},$$

что согласуется с формулой (166).

Прямоугольное сечение. В рассматриваемом случае поверхностью постоянного ската является «крыша», построенная на прямоугольнике (фиг. 530).

Объем, ограниченный этой «крышей», включает объем треугольной призмы $STLKVU$ с основанием $\frac{bH}{2}$ и высотой $h-b$ и объем правильной четырехугольной пирамиды, сложенной из двух одинаковых половин $ADSKV$ и $BCTLU$; площадь квадрата основания этой пирамиды b^2, а высота H.



Фиг. 529. Поверхность функции напряжений для круглого сечения

Заметим, что отрезок $DS=PR=\frac{b}{2}$, поскольку

$$\frac{KP}{PR}=\frac{KP}{PS}$$

и, следовательно,

$$PR=PS=\frac{b}{2}.$$

Таким образом, предельный крутящий момент $M_{пр}$, равный удвоенному объему, ограниченному «крышей» [см. формулу (187)], равен

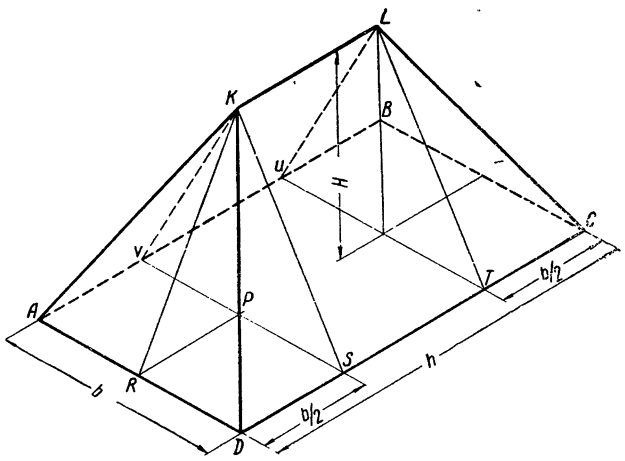
$$M_{пр}=2\left[\frac{Hb}{2}(h-b)+\frac{1}{3}b^2H\right].$$

Учитывая, что

$$H=\tau_s\frac{b}{2},$$

получим

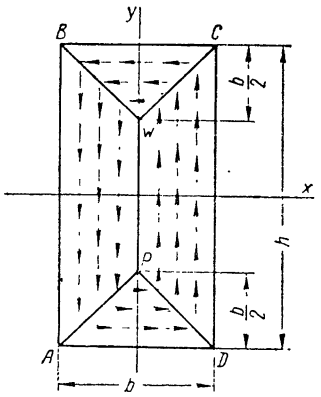
$$M_{пр}=\tau_s\frac{b^2}{6}(3h-b). \qquad (189)$$



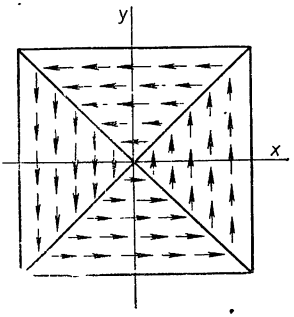
Фиг. 530. Поверхность функции напряжений для прямоугольного сечения

На основании соотношений (183) и вида поверхности функции напряжений заключаем, что в предельном состоянии в областях APD и BWC (фиг. 531) касательные напряжения параллельны оси x, а

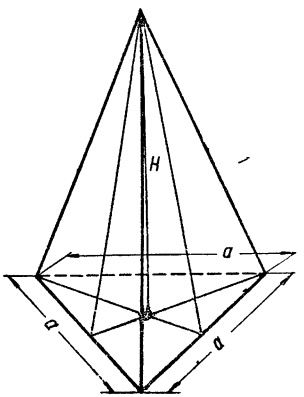
в областях $APWB$ и $DPWC$ параллельны оси y. Величины касательных напряжений равны пределу текучести материала при чистом сдвиге. Линии AP, DP, PW, WB и WC, вдоль которых направления касательных напряжений терпят разрыв, называются линиями разрыва.



Фиг. 531. Направление касательных напряжений и линии разрыва (AP, PD, PW, WB, WC) при пластическом кручении бруса прямоугольного поперечного сечения



Фиг. 532. Направление касательных напряжений и линии разрыва (AC и BD) при пластическом кручении бруса квадратного поперечного сечения



Фиг. 533. Поверхность функции напряжений для сечения в виде равностороннего треугольника

Для квадратного сечения (фиг. 532) линиями разрыва являются диагонали квадрата.

Для частного случая тонкой полосы $b \ll h$, пренебрегая в формуле (189) величиной b по сравнению с $3h$, получаем

$$M_{пр} = \tau_s \frac{b^2 h}{2}. \tag{190}$$

Сечение в виде равностороннего треугольника. Поверхностью постоянного ската является поверхность трехгранной пирамиды (фиг. 533) высотой

$$H = \tau_s \frac{\sqrt{3}}{6} a,$$

где a — сторона треугольника.

Площадь F основания этой пирамиды равна площади равностороннего треугольника:

$$F = \frac{1}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

Таким образом, на основании соотношения (187) предельный крутящий момент равен

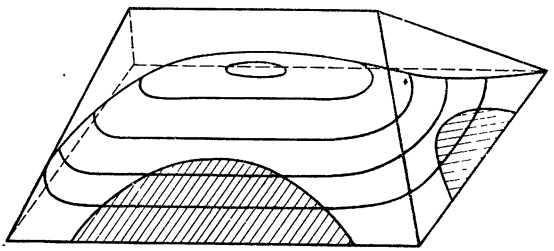
$$M_{пр} = 2 \frac{1}{3} FH = \tau_s \frac{a^3}{12}. \tag{191}$$

В работе М. Э. Липской [24] на основе работ А. Надаи и В. В. Соколовского рассматривается пластическое кручение бруса постоянного поперечного сечения, как сплошного, так и полого. В этой работе изложен графический метод построения линий разрыва для любой

области, что дает возможность вычисления предельного крутящего момента.

Перейдем к рассмотрению упруго-пластического кручения брусьев некруглого поперечного сечения. Теоретическое решение этой задачи даже в случае диаграммы сдвига без упрочнения представляет значительные математические трудности.

В настоящее время известно несколько теоретических исследований упруго-пластического кручения брусьев некруглых сечений, диаграмма сдвига материала которых не имеет упрочнения.



Фиг. 534. Деформированная мембрана и поверхность постоянного ската

Для бруса овального сечения при условии, что граница между упругой и пластической областями представляет собой эллипс, решение дано В. В. Соколовским [60].

Для брусьев полигонального сечения решение дано Л. А. Галиным [9]. Им же развит обратный метод решения задачи, при помощи которого исследовано упруго-пластическое кручение бруса прямоугольного поперечного сечения и бруса с поперечным сечением в виде равностороннего треугольника [10].

В статье В. Я. Булыгина [8] также рассматривается задача упруго-пластического кручения бруса некруглого сечения в полуобратной постановке, т. е. определяется контур поперечного сечения бруса, соответствующий заданной форме упругого ядра.

Если диаграмма сдвига материала бруса не имеет упрочнения, то упруго-пластическое кручение бруса может быть экспериментально исследовано при помощи аналогии с песчаной насыпью в сочетании с мембранной аналогией.

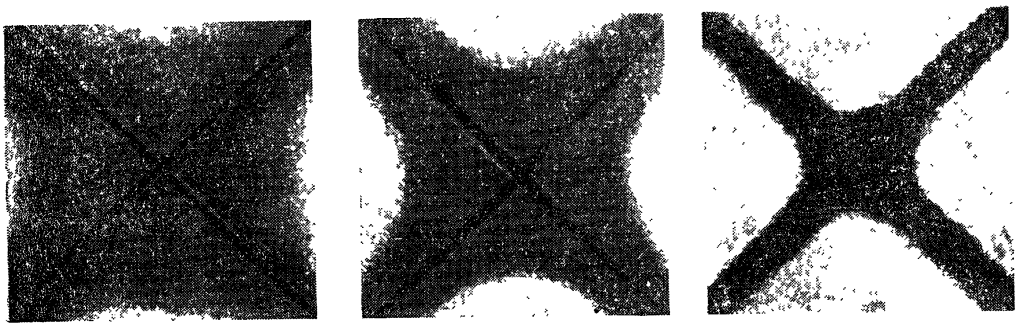
Мембранная аналогия для экспериментального изучения упругого кручения брусьев была описана в гл. VIII т. I.

Для экспериментального изучения упруго-пластического кручения бруса некруглого поперечного сечения вначале изготовляется жесткая поверхность постоянного ската. Она может быть получена по форме песчаной насыпи. Основание этой поверхности затягивается мембраной. Последняя нагружается равномерно распределенным давлением. При некоторой величине давления части мембраны придут в соприкосновение с жесткой поверхностью постоянного ската (фиг. 534). Под частями мембраны, касающимися жесткой поверхности постоянного ската, расположена пластическая область сечения, а под поверхностью свободно деформированной мембраны — упругая.

Поверхность мембраны, прогибы которой ограничены жесткой поверхностью постоянного ската, является поверхностью функции напряжений при упруго-пластическом кручении бруса. Объем, ограниченный ею, пропорционален крутящему моменту, а уклон поверхности мембраны — касательному напряжению. На этом принципе основаны специальные приборы для экспериментального изучения упруго-пластического кручения бруса.

На фиг. 535 представлено полученное экспериментально развитие пластической области при кручении бруса квадратного поперечного сечения. Упругая область — темная, пластическая — светлая.

Как следует из фиг. 535, пластическая область возникает сперва в середине сторон квадрата, где в пределах упругости касательные напряжения являются наибольшими (фиг. 535,*а*). С увеличением крутящего момента пластические области увеличиваются (фиг. 535,*б*). При достаточно большом крутящем моменте упругая область практически вырождается в линии разрыва (фиг. 535,*в*).



Фиг. 535. Развитие пластических областей при кручении бруса квадратного поперечного сечения. Упругая область — темная, пластические — светлые.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афендик Л. Г. и Бессонов В. Г., О пластическом кручении цилиндрических стержней, «Заводская лаборатория», т. XVI, № 2, 1950.
2. Баловнев Г. Г., Графоаналитический способ определения напряжений и деформаций при пластическом изгибе «Вестник машиностроения» № 7, 1952.
3. Баловнев Г. Г., Графоаналитический способ расчета на поперечный пластический изгиб, «Вестник машиностроения» № 7, 1954.
4. Безухов Н. И., Теория упругости и пластичности, ГИТТЛ, 1953.
5. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, ГИТТЛ, 1958.
6. Бернштейн С. А. и Туркин В. С., Экспериментально-теоретические исследования упруго-пластической работы стальных неразрезных балок, «Труды конференции по пластическим деформациям», изд. АН СССР, 1938.
7. Блинник С. И., Расчет пружин в связи с их заневоливанием, «Новые методы расчета пружин», Машгиз, 1946.
8. Булыгин В. Я., Об упруго-пластическом кручении призматических стержней, «Прикладная математика и механика», т. XVI, вып. 1, изд. АН СССР, 1952.
9. Галин Л. А., Упруго-пластическое кручение призматических стержней полигонального сечения, «Прикладная математика и механика», т. VIII, вып. 4, изд. АН СССР, 1944.
10. Галин Л. А., Упруго-пластическое кручение призматических стержней, «Прикладная математика и механика», т. XIII, вып. 3, изд. АН СССР, 1949.
11. Гвоздев А. А., Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации, «Труды конференции по пластическим деформациям», изд. АН СССР, 1938.
12. Гвоздев А. А., Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия, Стройиздат, 1949.
13. Жданов С. М., Расчет конструкций с учетом пластических свойств материала, изд. Московского энергетического института, 1952.
14. Жудин Н. Д., Пластичні деформації в стальних конструкціях, изд. АН УРСР, ч. I, 1936, ч. II, 1938.
15. Заседателев С. М., О навивке пружин с межвитковым давлением, МВТУ имени Н. Э. Баумана, «Расчеты упругих элементов машин и приборов», сб. 16, Машгиз, 1952.
16. Заседателев С. М., Графический метод решения некоторых задач упруго-пластического изгиба стержней в больших перемещениях, МВТУ имени Н. Э. Баумана. «Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций», сб. 26, Машгиз ,1953.
17. Заседателев С. М., Навивка пружин с начальным натяжением, МВТУ имени Н. Э. Баумана, «Расчета на прочность элементов машиностроительных конструкций», сб. 31, Машгиз, 1955.

18. Заседателев С. М., Винтовые пружины с начальным натяжением и их расчет, МВТУ имени Н. Э. Баумана, «Расчеты на прочность в машиностроении», сб. 46, Машгиз, 1955.

19. Заседателев С. М., Расчет пружин растяжения, навитых с начальным натяжением (межвитковым давлением), «Вопросы проектирования, изготовления и службы пружин», Машгиз, 1956.

20. Ильюшин А. А., Пластичность, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.

21. Ильюшин А. А., Нормальные и касательные напряжения при чистом изгибе балок за пределом упругости и аналогия с задачей об изгибе плит, «Инженерный сборник», т. XIX, изд. АН СССР, 1954.

22. Качанов Л. М., Пластическое кручение круглых стержней переменного диаметра, «Прикладная математика и механика», т. XII, вып. 4, изд. АН СССР, 1948.

23. Качанов Л. М., Основы теории пластичности, ГИТТЛ, 1956.

24. Липская М. Э., Пластическое кручение бруса, МАП, «Труды» № 665, изд. БНТ, 1948.

25. Лихарев К. К., Пономарев С. Д., Феодосьев В. И., Расчет плоских спиральных пружин с учетом упрочнения при их заневоливании, МВТУ имени Н. Э. Баумана, «Труды кафедры «Сопротивление материалов», раздел I. Теоретические и экспериментальные исследования пружин», изд. МВТУ имени Н. Э. Баумана, 1947.

26. Малинин Н. Н., Холодная навивка цилиндрических пружин, «Новые методы расчета пружин», Машгиз, 1946.

27. Малинин Н. Н., Заневоливание цилиндрических и конических пружин, «Новые методы расчета пружин», Машгиз, 1946.

28. Малинин Н. Н., Метод повышения несущей способности пружин, «Повышение прочности деталей машин», изд. АН СССР, 1949.

29. Малинин Н. Н., Влияние остаточных напряжений, возникающих при заневоливании, на усталостную прочность винтовых цилиндрических пружин сжатия, «Динамика и прочность пружин», сб. ст., изд. АН СССР, 1950.

30. Малинин Н. Н., Расчеты за пределами упругости, «Справочник машиностроителя», т. III, Машгиз, 1955.

31. Малов А. Н., Гибка листового материала, «Вестник машиностроения», № 4, 1948.

32. Марковец М. П., Диаграммы истинных напряжений и расчет на прочность, Оборонгиз, 1947.

33. Москвитин В. В., К вопросу об упруго-пластическом изгибе бруса, «Вестник Московского университета» № 5, 1954.

34. Москвитин В. В., Упруго-пластическое кручение стержня с начальными напряжениями, «Вестник Московского университета» № 6, 1954.

35. Москвитин В. В., Упруго-пластические деформации тел при повторных нагружениях, «Прикладная математика и механика», т. XIX, вып. 6, изд. АН СССР, 1955.

36. Мошнин Е. Н., Определение основных параметров холодной гибки, «Вестник машиностроения» № 4, 1953.

37. Мошнин Е. Н., Способ расчета технологических процессов гибки, «Прогрессивная технология холодноштамповочного производства», Машгиз, 1956.

38. Надаи А., Пластичность и разрушение твердых тел, Издательство иностранной литературы, 1954.

39. Новожилов В. В., Основы нелинейной теории упругости, ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

40. Пархомовский Я. М., Об упруго-пластических деформациях тел однородных в упругой и неоднородных в пластической области, МАП, «Труды» № 665, изд. БНТ, 1948.

41. Пономарев С. Д., Графический способ вычисления интеграла Мора, «Вестник инженеров и техников» № 4, 1935.

42. Пономарев С. Д., Упруго-пластические расчеты в связи с холодной навивкой цилиндрических пружин, «Труды МАИ имени Серго Орджоникидзе», вып. 17, Оборонгиз, 1952.

43. Пономарев С. Д., Расчет заневоленных многожильных пружин, свитых из тросов с центральной жилой, МВТУ имени Н. Э. Баумана, «Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций», вып. 26, Машгиз, 1953.

44. Пономарев С. Д., Пружины, их расчет и конструирование, ВНИТОМАШ, Заочные курсы усовершенствования инженеров-конструкторов, Машгиз, 1954.

45. Пономарев С. Д., Графический способ определения прогибов при упруго-пластическом изгибе, Московский станкоинструментальный институт имени И. В. Сталина, «Расчеты на прочность, жесткость, устойчивость и колебания», сб. ст., Машгиз, 1955.

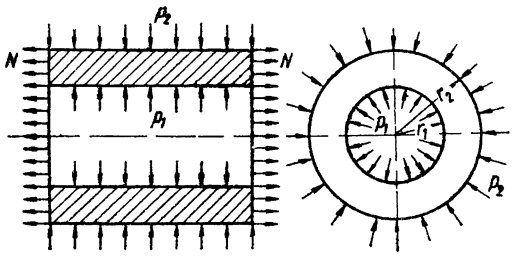
46. Прагер В .и Ходж Ф. Г., Теория идеально пластических тел, Издательство иностранной литературы, 1956.
47. Рабинович И. М., Курс строительной механики, ч. II, Госстройиздат, 1954.
48. Работнов Ю. Н., Сопротивление материалов, изд. МГУ, 1950.
49. Раковщик Ю. А., Определение несущей способности деталей при пластическом изгибе, «Вестник машиностроения» № 2, 1953.
50. Ренне И. П., Деформация при пластическом изгибе, «Заводская лаборатория» № 11, 1949.
51. Ренне И. П., Выбор радиуса закругления пуансона при свободной гибке, «Вестник машиностроения» № 5, 1953.
52. Ржаницын А. Р., Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов, Госстройиздат, 1954.
53. Романовский В. П., О пластическом изгибе, «Заводская лаборатория», т. XIV, № 12, 1948.
54. Романовский В. П., Справочник по холодной штамповке, Машгиз, 1954.
55. Сахненко В. Л., Холодная гибка и правка деталей, Машгиз, 1951.
56. Серенсен С. В., Когаев В. П., Козлов Л. А. и Шнейдерович Р. М, Несущая способность и расчет деталей машин на прочность, Машгиз, 1954.
57. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, ГИТТЛ, 1956.
58. Смирнов-Аляев Г. А., Процессы пластического растяжения и кручения металлов в их взаимном сопоставлении, «Экспериментальные методы определения напряжений и деформаций в упругой и пластической зонах», ОНТИ НКТП СССР, 1935.
59. СмирновАляев Г. А., Сопротивления материалов пластическим деформациям, Машгиз, 1949.
60. Соколовский В. В., Теория пластичности, ГИТТЛ, 1950.
61. Филоненко-Бородич М. М., Изюмов С. М., Олисов Б. А., Кудрявцев И. Н., Мальгинов Л. И., Курс сопротивления материалов, ч. I и II, ГИТТЛ, 1955, 1956.
62. Чернышев Н. А., Пономарев С. Д., Лихарев К. К., Лопухин А. Г., К расчету спиральных пружин, «Новые методы расчета пружин», Машгиз, 1946.
63. Шофман Л. А. и Локотош П. И., Пластический изгиб, «Заводская лаборатория», т. XIV, № 11, 1948.
64. Eddy R. P. and Shaw F. S., Numerical solution of elastoplastic torsion of a shaft of rotational symmetry, «Journal of applied mechanics», v. 16, № 2, 1949
65. Sadowsky M. A., An extension of the send heap analogy in plastic torsion applicable to cross sections having one or more holes, «Journal of applied mechanics», v. 8, № 2, 1941.

РАСЧЕТЫ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБ И ШАЙБ, НАГРУЖЕННЫХ ВНУТРЕННИМ И ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЯМИ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАСЧЕТА ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Рассмотрим толстостенную трубу, внутренний радиус которой r_1, а наружный r_2, нагруженную внутренним давлением p_1, наружным давлением p_2 и осевой силой N (фиг. 536).

Как показано А. А. Ильюшиным [7], решение упруго-пластической задачи для толстостенной трубы при произвольном упрочнении может быть получено в замкнутой форме, если допустить, что материал трубы несжимаем. Ниже будет приведено сопоставление этого решения с точным, выполненным с учетом сжимаемости материала, из которого следует, что приближенное решение имеет достаточную для практических расчетов степень точности.



Фиг. 536. Схема нагружения толстостенной трубы

Исследования упруго-пластического состояния толстостенных труб с учетом сжимаемости материала выполнены Н. М. Беляевым и А. К. Синицким [2], Г. А. Смирновым-Аляевым [18] и В. В. Соколовским [20]. Задача в этих исследованиях ставилась одинаково. Отличие заключается в форме полученных уравнений и методах их численого интегрирования.

Упруго-пластическое состояние толстостенной трубы при неравномерном нагреве ее по радиусу рассмотрено Л. М. Качановым [8].

Расчет составных труб за пределами упругости изложен в работах Н. Д. Тарабасова [21], [22].

Конечные деформации толстостенной трубы за пределами упругости рассмотрены в работах Надаи [14], а также в статье Мак-Грегора, Коффина и Фишера [26]. Заметим, что решение задачи об упруго-пластическом состоянии толстостенной сферы, нагруженной внутренним и внешним давлениями, изложено в книгах [20] и [7]. Обобщение этой задачи на случай конечных перемещений рассмотрено Ф. А. Бахшияном [1].

Предположим, что осевая деформация трубы постоянна:

$$\varepsilon_z = \text{const}. \tag{1}$$

Это положение очевидно для бесконечно длинной трубы. В случае трубы конечной длины постоянство осевой деформации может быть обеспечено приложением на торцах нормальных сил, распределенных по определенному закону симметрично относительно центра трубы. Равнодействующая этих сил определяется величиной осевой деформации. В сечениях, достаточно удаленных от торцов, закон распределения по сечению внутренних нормальных к сечению сил не зависит от того, как внешние нормальные силы распределены по торцам. Последнее обстоятельство дает возможность и в случае трубы конечной длины для сечений, достаточно удаленных от торцов, считать условие (1) справедливым.

По формулам (1) и (2) гл. V т. II имеем выражения окружной ε_t и радиальной ε_r деформаций через радиальное перемещение:

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \tag{2}$$

Условие несжимаемости материала имеет вид

$$\varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_z = 0. \tag{3}$$

На основании соотношений (3) и (2) устанавливаем

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = -\varepsilon_z.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$u = -\frac{1}{2}\varepsilon_z r + \frac{C}{r}, \tag{4}$$

где C — постоянная интегрирования.

Подставляя найденное выражение для u по формуле (4) в зависимости (2), устанавливаем

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_t &= -\frac{1}{2}\varepsilon_z + \frac{C}{r^2}; \\ \varepsilon_r &= -\frac{1}{2}\varepsilon_z - \frac{C}{r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Интенсивность деформаций в рассматриваемой задаче согласно формуле (23) гл. VIII т. II имеет следующее выражение:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_t - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_t)^2}.$$

Подставляя в это соотношение зависимости (5), имеем

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3}{4}\varepsilon_z^2 + \frac{C^2}{r^4}},$$

откуда

$$\frac{C}{r^2} = \operatorname{sign} C \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2}, \tag{6}$$

где символ $\operatorname{sign} C$ выражает знак постоянной C.

Обозначим интенсивность деформаций при $r = r_1$ через ε_{i1}, а при $r = r_2$ через ε_{i2}.

Заметим, что на границе упругой и пластической областей $r = r_s$; $\varepsilon_i = \varepsilon_{is} = \varepsilon_s$, где ε_{is} — интенсивность деформаций, соответствующая началу возникновения пластических деформаций, равная согласно формуле (62), гл. VIII т. II для несжимаемого материала ($\mu = 0{,}5$) $\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}$.

Из формулы (6) следует, что

$$\frac{4}{3} C^2 = r_1^4 (\varepsilon_{i1}^2 - \varepsilon_z^2) = r_2^4 (\varepsilon_{i2}^2 - \varepsilon_z^2) = r_s^4 (\varepsilon_s^2 - \varepsilon_z^2) = r^4 (\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2). \tag{7}$$

На основании зависимостей (7) можно заключить, что

$$\varepsilon_{i1} > \varepsilon_i > \varepsilon_{i2},$$

таким образом, образование пластических деформаций в трубе при любых соотношениях между внутренним и наружным давлением и осевым напряжением начинается с внутренней поверхности ($r = r_1$). Следовательно, пластическая область примыкает к внутреннему контуру трубы.

Уравнение равновесия элемента трубы имеет вид (см. гл. V т. II)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0. \tag{8}$$

Из уравнения (8) следует, что

$$\sigma_r = C_1 - \int \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} dr. \tag{9}$$

Зависимость компонентов напряжений от компонентов деформаций для рассматриваемой задачи согласно формулам (46) гл. VIII т. II имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_t; \\ \sigma_r - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_r; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_z, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_t + \sigma_r + \sigma_z}{3}$$

среднее нормальное напряжение.

Из формул (10) получаем

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t - \sigma_r &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_t - \varepsilon_r); \\ \sigma_z - \sigma_r &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_r). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Учитывая выражения (5) и (6), преобразуем формулы (11) к виду

$$\sigma_t - \sigma_r = \operatorname{sign} C \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2}; \tag{12}$$

$$\sigma_z - \sigma_r = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \left[\frac{\operatorname{sign} C}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2} + \varepsilon_z \right]. \tag{13}$$

Дифференцируя выражение (6), имеем

$$-\frac{2C dr}{r^3} = \operatorname{sign} C \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i d\varepsilon_i}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2}}. \tag{14}$$

На основании формул (6) и (14) можно получить

$$\frac{dr}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i d\varepsilon_i}{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2}. \tag{15}$$

Подставляя выражения (12) и (15) в формулу (9), устанавливаем, что

$$\sigma_r = C_1 - \operatorname{sign} C \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sigma_i d\varepsilon_i}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2}}. \tag{16}$$

Используя краевые условия:

при $r = r_1$

$$\sigma_r = -p_1;$$

при $r = r_2$

$$\sigma_r = -p_2,$$

из формулы (16) имеем

$$\sigma_r = -p_1 + \operatorname{sign} C \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i1}} \frac{\sigma_i d\varepsilon_i}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2}}; \tag{17}$$

$$p_1 - p_2 = \operatorname{sign} C \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\varepsilon_{i2}}^{\varepsilon_{i1}} \frac{\sigma_i d\varepsilon_i}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2}}. \tag{18}$$

Согласно зависимости (18) заключаем, что знак постоянной C совпадает со знаком разности $p_1 - p_2$:

$$\operatorname{sign} C = \operatorname{sign} (p_1 - p_2). \tag{19}$$

Запишем выражение продольной силы:

$$N = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr, \tag{20}$$

Из формулы (7) следует:

$$r^2 = r_1^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_{i1}^2 - \varepsilon_z^2}{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2}}.$$

Дифференцируя это выражение, получим

$$rdr = -\frac{r_1^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_{i1}^2 - \varepsilon_z^2}}{(\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2)^{\frac{3}{2}}} \varepsilon_i d\varepsilon_i. \tag{21}$$

Используя формулы (13), (17) и (21), можно привести соотношение (20) к следующему виду:

$$\frac{N - \pi(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)}{\pi r_1^2} = \varepsilon_z \sqrt{\varepsilon_{i1}^2 - \varepsilon_z^2} \int_{\varepsilon_{i2}}^{\varepsilon_{i1}} \frac{\sigma_i d\varepsilon_i}{(\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{22}$$

Формулы (7), (18), (19) и (22) определяют величины ε_{i1}, ε_{i2}, ε_z и C.

Для числовых расчетов необходимо, используя график зависимости σ_i от ε_i, который для несжимаемого материала совпадает с диаграммой растяжения, построить графики функций, представленные в формулах (18) и (22) интегралами. Далее, задаваясь различными значениями ε_{i1} и ε_z, при помощи формул (18), (22) и (7) определяются $p_1 - p_2$ и

$$\frac{N - \pi(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)}{\pi r_1^2},$$

после чего можно построить серию графиков зависимостей ε_{i1} и ε_z от $p_1 - p_2$ и

$$\frac{N - \pi(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)}{\pi r_1^2}.$$

Величины ε_{i1} и ε_z определяются из этих графиков по заданным p_1, p_2 и N. Величина ε_{i2} и постоянная C находятся из равенств (7). Знак постоянной C определяется формулой (19).

Радиальное напряжение в зависимости от интенсивности деформаций находится по формуле (17). Построение эпюры радиального напряжения производится после этого с использованием формулы (7), которая дает зависимость интенсивности деформаций от радиуса.

Окружное и осевое напряжения определяются по формулам (12) и (13) соответственно. Радиальное смещение устанавливается из зависимости (4).

Радиус границы упругой и пластической областей r_s может быть определен по формуле (7).

Отметим, что для трубы с днищами, нагруженной только внутренним и внешним давлениями, осевая сила возникает за счет давлений на днища:

$$N = \pi(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2),$$

и, следовательно, в соответствии с выражением (22)

$$\varepsilon_z = 0. \tag{23}$$

В таком случае труба из несжимаемого материала в осевом направлении не деформируется. Тогда основные уравнения задачи (17), (12), (13) и (18) при помощи соотношений (23) и (19) преобразуются к виду

$$\sigma_r = -p_1 + \operatorname{sign}(p_1 - p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i1}} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\, d\varepsilon_i; \tag{24}$$

$$\sigma_t = \sigma_r + \operatorname{sign}(p_1 - p_2)\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_i; \tag{25}$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2}; \tag{26}$$

$$p_1 - p_2 = \operatorname{sign}(p_1 - p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\varepsilon_{i2}}^{\varepsilon_{i1}} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\, d\varepsilon_i. \tag{27}$$

Из изложенного выше следует, что расчет толстостенной трубы, нагруженной внутренним и наружным давлениями при произвольной несхематизированной диаграмме деформирования, является весьма громоздким. В § 2 изложен графический метод расчета, позволяющий достаточно просто и с большой степенью точности производить расчеты. В § 3 и 4 рассмотрены расчеты труб при использовании схематизированных диаграмм деформирования материала.

§ 2. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РАСЧЕТА ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Рассмотрим разработанный Т. М. Махониной [12] графический способ расчета толстостенных труб за пределами упругости. В этом способе предполагается, что осевая деформация трубы равна нулю. Никаких ограничений на вид зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций не накладывается.

Основой графического способа являются формулы (24)—(27).

Рассматривая последние, можем заключить, что для выполнения расчета нужно иметь интегральную кривую функции $\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$, при помощи которой можно определить для конкретных условий задачи значения интенсивностей деформаций на внутреннем и внешнем радиусах трубы r_1 и r_2.

Ниже будет показано, как графическим путем определить эти величины, построить эпюры напряжений и установить радиус r_s границы упругой и пластической областей, а также подсчитать давления, вызывающие появление пластических деформаций как на внутреннем радиусе, так и в любой другой точке поперечного сечения.

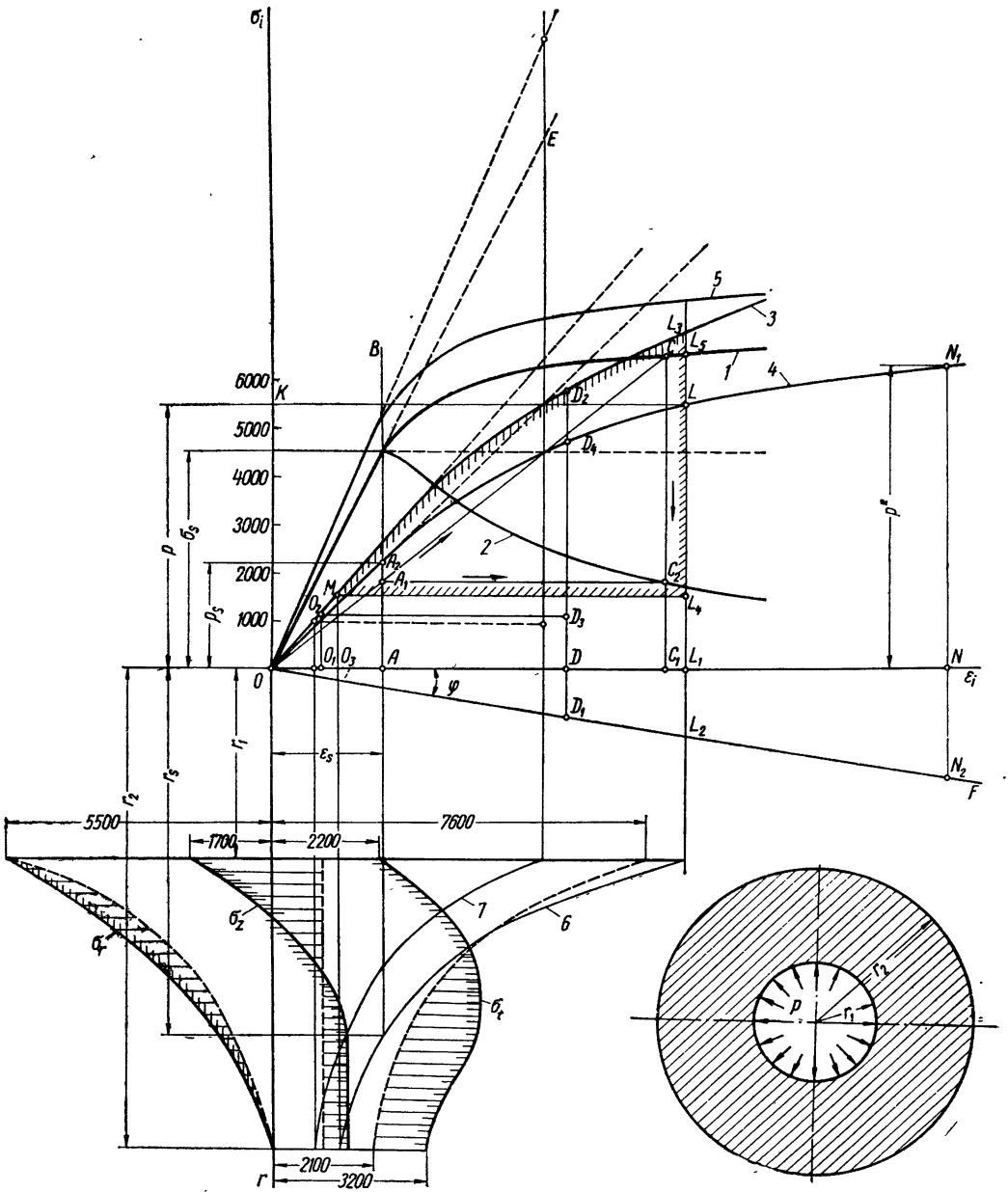
Изложим графический способ на численном примере, заимствованном из работы [12].

Все графические построения выполнены в двух масштабах — масштабе напряжений β $\frac{кг/см^2}{мм}$ и масштабе деформаций δ $1/мм$.

Предположим, что труба имеет внутренний радиус $r_1 = 80$ *мм*, наружный радиус $r_2 = 200$ *мм* и нагружена внутренним давлением $p_1 = p = 5500$ *ат*. Материал трубы — легированная сталь, диаграмма растяже-

ния которой в координатах ε, σ представлена на фиг. 537 (кривая *1*).

Вначале построим график подинтегральной функции в формуле (24). Для этого из начала координат (фиг. 537) проведем луч *OC*



Фиг. 537. К графическому методу расчета толстостенной трубы

до пересечения с диаграммой растяжения (кривая *1*) в точке *C*, из которой опустим перпендикуляр CC_1 на ось абсцисс. На расстоянии *OA*, равном в масштабе деформаций δ величине ε, проведем вертикальную линию *AB*, которая пересечет луч *OC* в точке A_1.

Как следует из подобия треугольников OA_1A и OCC_1, отрезок A_1A в масштабе напряжений β представляет собой величину $\sigma_i \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}$. Перенесем его на вертикаль CC_1 и получим отрезок C_1C_2, равный величине $\sigma_i \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}$ для выбранных значений ε_i и σ_i.

Чтобы построить график функции $\sigma_i \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}$, необходимо из начала координат провести несколько лучей до пересечения с диаграммой растяжения. Из точек пересечения следует опустить перпендикуляры на ось абсцисс, а потом точки пересечения этих лучей с прямой AB перенести на соответствующие вертикали. Полученный таким образом график изображен на фиг. 537 линией *2*. Очевидно, что в пределах упругости ($0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_s$) он имеет вид горизонтальной прямой, расстояние от которой до оси абсцисс равно пределу текучести материала σ_s.

На основании графика *2* строим интегральную кривую

$$\Phi(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\varepsilon_i} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} d\varepsilon_i . \tag{28}$$

Отметим, что функция $\sigma_i \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}$, представленная графиком *2*, отличается от подинтегральной функции в интеграле (24) множителем ε_s. Поэтому при вычислении функции $\Phi(\varepsilon_i)$ результаты, полученные из графика *2*, делятся на величину $\sqrt{3}\,\varepsilon_s$. График функции $\Phi(\varepsilon_i)$ изображен на фиг. 537 кривой *3*.

Теперь изобразим графически зависимость между интенсивностями напряжений на внешнем и внутреннем радиусах. Как следует из выражений (7) и (23),

$$\varepsilon_{i2} = \frac{\varepsilon_{i1}}{\alpha^2}, \tag{29}$$

где

$$\alpha = \frac{r_2}{r_1}. \tag{30}$$

Проведем прямую OF под таким углом φ к оси абсцисс, чтобы тангенс этого угла был равен $\frac{1}{\alpha^2}$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Выбрав некоторое произвольное значение интенсивности деформаций ε_{i1} на внутреннем радиусе (отрезок OD в масштабе δ), с помощью прямой OF можно получить величину интенсивности деформаций ε_{i2} на наружном радиусе (отрезок DD_1). Отложим от начала координат по оси абсцисс отрезок $OO_1 = DD_1$. Очевидно, что ордината O_1O_2 равна в масштабе β — $\Phi\left(\frac{\varepsilon_{i1}}{\alpha^2}\right)$, а ордината DD_2 равна $\Phi(\varepsilon_{i1})$. Разность этих отрезков $D_3D_2 = DD_4$ определяет величину $\Phi(\varepsilon_{i1}) - \Phi\left(\frac{\varepsilon_{i1}}{\alpha^2}\right)$.

Чтобы построить график функции $\Phi(\varepsilon_{i1}) - \Phi\left(\frac{\varepsilon_{i1}}{\alpha^2}\right)$, задаемся произвольными значениями ε_{i1} и с помощью прямой OF определяем соответствующие им значения ε_{i2}. Затем для каждой выбранной интенсивности деформации ε_{i1} по графику 3 определяем значения функций $\Phi(\varepsilon_{i1})$ и $\Phi\left(\frac{\varepsilon_{i1}}{\alpha^2}\right)$. Их разность является искомой величиной функции $\Phi(\varepsilon_{i1}) - \Phi\left(\frac{\varepsilon_{i1}}{\alpha^2}\right)$. График последней изображен на фиг. 537 кривой *4*.

В рассматриваемой задаче интенсивности деформаций на внутреннем и внешнем радиусах ε_{i1} и ε_{i2} неизвестны. Их следует определить, используя уравнение (27).

Для этого проводим горизонтальную прямую, отсекающую на оси ординат отрезок OK, равный в масштабе β внутреннему давлению p. Абсцисса точки L пересечения этой прямой с кривой *4*, т. е. отрезок OL_1, представляет в масштабе δ интенсивность деформаций на внутреннем радиусе ε_{i1}. Зная величину ε_i, с помощью прямой OF определяем значение ε_{i2}, которое выразится отрезком L_1L_2 в масштабе δ.

Отложим эту величину по оси абсцисс и получим отрезок OO_3.

Для вычисления внутреннего давления p_s ($p_2=0$), при котором появляются пластические деформации в опасных точках на внутреннем радиусе, необходимо положить $\varepsilon_i=\varepsilon_s$. Величина p_s определяется отрезком AA_2 в выбранном масштабе. Давление p^*, соответствующее появлению пластических деформаций во всех точках поперечного сечения трубы, определяется из условия, что $\varepsilon_{i2}=\varepsilon_s$.

Этой величине ε_{i2} (отрезок OA в масштабе δ) согласно уравнению (29) соответствует значение ε_{i1}, представленное в масштабе δ отрезком ON. Тогда давление p^* выразится в масштабе β отрезком NN_1 (фиг. 537).

Отметим, что в случае нагружения трубы внутренним и внешним давлениями p_1 и p_2 на фиг. 537 давление p следует заменить разностью давлений p_1-p_2.

Иногда при расчете трубы на прочность ограничиваются определением интенсивности напряжений в опасной точке. На фиг. 537 эта величина интенсивности выражается в масштабе β отрезком L_1L_5.

Для исследования напряженного состояния трубы и определения остаточных напряжений необходимо располагать эпюрами напряжений.

Перейдем к рассмотрению этих вопросов. Вначале построим эпюру радиальных напряжений σ, которые определяются по зависимости (24).

Как следует из формул (24) и (28), величина радиального напряжения может быть представлена в виде

$$\sigma_r = -p + \Phi(\varepsilon_{i1}) - \Phi(\varepsilon_i). \qquad (31)$$

Поэтому для построения эпюры радиальных напряжений от точки L_3 по вертикали откладываем отрезок L_3L_4, соответствующий внутреннему давлению p, тогда прямая L_4L_1 в масштабе β будет равна первым двум слагаемым в выражении (31). Проведем теперь горизонтальную линию L_4M. Ординаты точек кривой *3*, отсчитанные от прямой L_4M, и представляют собой в масштабе β величины радиальных напряжений в координатах ε_i, σ_r. Соответствующая эпюра этих напряжений на фиг. 537 отштрихована.

Для построения эпюры σ_r в координатах r, σ_r продолжим ось ординат вниз и отложим на ней в масштабе длины *v см/мм* величины радиусов.

Как следует из формул (7) и (23),

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i1} \frac{r_1^2}{r^2}. \tag{32}$$

Изобразим зависимость (32) графически. Этот график (кривая *6*) является переходным звеном от координат ε_i, σ_r к координатам r, σ_r.

Окружные напряжения определяются по формуле (25). Для получения этих напряжений необходимо к радиальному напряжению добавить величину интенсивности напряжений σ_i, умноженную на коэффициент $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (т. е. $\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_i$). Умножая ординаты диаграммы растяжения на величину $\frac{2}{\sqrt{3}}$, строим график *5*.

Добавляя ординаты точек кривой *5*, взятые в масштабе β, к радиальным напряжениям, строим эпюру окружных напряжений σ_t. Осевое напряжение легко получить по формуле (26).

Эпюры радиальных σ_r, окружных σ_t и осевых σ_z напряжений, построенные по радиусу, представлены в нижней части фиг. 537.

Располагая значением величины ε_s, можно определить радиус r_s на границе упругой и пластической областей.

Для определения остаточных напряжений необходимо построить эпюры так называемых разгрузочных напряжений. На основании теоремы о разгрузке последние определяются по формулам, установленным в пределах упругости, поэтому они могут быть получены графическим методом, изложенным в работе [15]. В настоящем примере в целях использования ранее выполненного чертежа разгрузочные напряжения определяются тем же способом, что и напряжения, возникающие при нагружении. Отличие заключается лишь в том, что в основу определения разгрузочных напряжений должна быть положена не вся диаграмма растяжения (кривая *1*), а прямая *OE*, которая является продолжением линейного участка диаграммы растяжения.

В случае линейной диаграммы растяжения кривые *2—5* также являются прямыми, которые на фиг. 537 изображены штриховыми линиями. Эпюры разгрузочных напряжений также изображены штриховыми линиями. Переход от координат ε_i, σ к координатам r, σ ведется через кривую *7*, уравнение которой такое же, как и кривой *6*, но значение ε_i установлено при линейной зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций. Эпюры остаточных напряжений на фиг. 537 заштрихованы.

Как следует из изложенного, графический метод позволяет сравнительно просто произвести расчет на прочность толстостенной трубы за пределами упругости при произвольной зависимости напряжений от деформаций.

§ 3. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПРИ ЛИНЕЙНОМ УПРОЧНЕНИИ

В случае схематизации диаграмм растяжения расчет толстостенных труб значительно упрощается. Допустим, что диаграмма растяжения материала имеет линейное упрочнение (см. фиг. 447).

Напомним, что для несжимаемого материала диаграммы растяжения и деформирования совпадают. Поэтому на основании формул (10) и (11) гл. VIII т. II:

при $0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}$

$$\sigma_i = E\varepsilon_i; \tag{33}$$

при $\varepsilon_i \geqslant \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}$

$$\sigma_i = \sigma_s + E_1(\varepsilon_i - \varepsilon_s). \tag{34}$$

Заметим, что для несжимаемого материала $\mu = 0{,}5$ и по формуле (4) гл. III т. I $E = 3G$.

Подставляя в формулу (18) интенсивность напряжений по формулам (33) и (34), получим

$$|p_1 - p_2| = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\int_{\varepsilon_{i2}}^{\varepsilon_s} \frac{E\varepsilon_i\, d\varepsilon_i}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2}} + \int_{\varepsilon_s}^{\varepsilon_{i1}} \frac{[\sigma_s + E_1(\varepsilon_i - \varepsilon_s)]\, d\varepsilon_i}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2}}\right\};$$

после преобразований устанавливаем, что

$$\left(1 - \lambda - \frac{1}{\alpha^2}\right)\sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2} + \lambda\sqrt{1 - \zeta_z^2} + \lambda \ln \frac{\zeta_{i1} + \sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2}}{1 + \sqrt{1 - \zeta_z^2}} = q. \tag{35}$$

В формуле (35)

$$\lambda = 1 - \frac{E_1}{E}; \tag{36}$$

$$\alpha = \frac{r_2}{r_1}; \tag{37}$$

$$\zeta_{i1} = \frac{\varepsilon_{i1}}{\varepsilon_s}; \tag{38}$$

$$\zeta_z = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_s}; \tag{39}$$

$$q = \sqrt{3}\,\frac{|p_1 - p_2|}{\sigma_s}. \tag{40}$$

Подставляя в зависимость (22) интенсивность напряжений по формулам (33) и (34), получим

$$\frac{N - \pi(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)}{\pi r_1^2} = \varepsilon_z \sqrt{\varepsilon_{i1}^2 - \varepsilon_z^2}\left\{\int_{\varepsilon_{i2}}^{\varepsilon_s} \frac{E\varepsilon_i\, d\varepsilon_i}{(\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_{\varepsilon_s}^{\varepsilon_{i1}} \frac{[\sigma_s + E_1(\varepsilon_i - \varepsilon_s)]\, d\varepsilon_i}{(\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

После преобразований имеем

$$(\alpha^2 + \lambda - 1)\zeta_z - \lambda\frac{\zeta_{i1}}{\zeta_z} + \frac{\lambda}{\zeta_z}\sqrt{(1 - \zeta_z^2)(\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2)} = \nu, \tag{41}$$

где

$$\nu = \frac{N - \pi (p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)}{\sigma_s \pi r_1^2}. \tag{42}$$

По формулам (35) и (41) можно, задаваясь различными значениями ζ_{i1} и ζ_z, определить q и ν. После этого целесообразно построить серию графиков зависимостей ζ_{i1} и ζ_z от q и ν. При помощи этих графиков и формул (40) и (42) определяются величины ζ_{i1} и ζ_z по заданным давлениям p_1, p_2 и силе N.

Обозначим

$$\frac{\varepsilon_{i2}}{\varepsilon_s} = \zeta_{i2}; \tag{43}$$

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_s} = \zeta_i; \tag{44}$$

$$\frac{r}{r_1} = \rho; \tag{45}$$

$$\frac{r_s}{r_1} = \beta. \tag{46}$$

Используя формулы (37)—(39) и (43)—(46), преобразуем равенства (7) к следующему виду:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{C^2}{r_1^4 \varepsilon_s^2} = \zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2 = \alpha^4 (\zeta_{i2}^2 - \zeta_z^2) = \beta^4 (1 - \zeta_z^2) = \rho^4 (\zeta_i^2 - \zeta_z^2). \tag{47}$$

Из равенств (47) по найденным значениям ζ_{i1} и ζ_z определяются отношения ζ_{i2} и β. Зная β, можно по формуле (46) определить радиус границы упругой и пластической областей r_s.

Перейдем к выводу формул, при помощи которых подсчитываются напряжения.

Радиальное напряжение в упругой области можно получить по формуле (17), имея в виду выражения (19), (33) и (34):

$$\sigma_r = -p_1 + \operatorname{sign}(p_1 - p_2) \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_s} \frac{E \varepsilon_i \, d\varepsilon_i}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2}} + \right.$$

$$\left. + \int_{\varepsilon_s}^{\varepsilon_{i1}} \frac{[\sigma_s + E_1 (\varepsilon_i - \varepsilon_s)]}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2}} \, d\varepsilon_i \right\}.$$

После преобразований с использованием выражений (36), (38), (39) и (44) устанавливаем

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s} = -\frac{p_1}{\sigma_s} + \operatorname{sign}(p_1 - p_2) \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\zeta_i^2 - \zeta_z^2} - \lambda \left(\sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2} - \sqrt{1 - \zeta_z^2} \right) + \lambda \ln \frac{\zeta_{i1} + \sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2}}{1 + \sqrt{1 - \zeta_z^2}} \right]. \tag{48}$$

Окружное напряжение в упругой области может быть получено при помощи формул (12) и (48). При этом используются выражения (19), (33), (39) и (44):

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_s} = -\frac{p_1}{\sigma_s} + \operatorname{sign}(p_1 - p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\zeta_i^2 - \zeta_z^2} - \lambda\left(\sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2} - \sqrt{1 - \zeta_z^2}\right) + \lambda \ln \frac{\zeta_{i1} + \sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2}}{1 + \sqrt{1 - \zeta_z^2}}\right]. \quad (49)$$

Осевое напряжение в упругой области определяется при помощи формул (13) и (48) с использованием выражений (19), (33), (39) и (44):

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_s} = -\frac{p_1}{\sigma_s} + \operatorname{sign}(p_1 - p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2} - \lambda\left(\sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{1 - \zeta_z^2}\right) + \lambda \ln \frac{\zeta_{i1} + \sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2}}{1 + \sqrt{1 - \zeta_z^2}}\right] + \zeta_z. \quad (50)$$

Радиальное напряжение в пластической области получим по формуле (17), учитывая выражения (19) и (34):

$$\sigma_r = -p_1 + \operatorname{sign}(p_1 - p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i1}} \frac{\sigma_s + E_1(\varepsilon_i - \varepsilon_s)}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_z^2}}\, d\varepsilon_i.$$

После преобразований с использованием выражений (36), (38), (39) и (44) имеем

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s} = -\frac{p}{\sigma_s} + \operatorname{sign}(p_1 - p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}\left[(1 - \lambda)\left(\sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2} - \sqrt{\zeta_i^2 - \zeta_z^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda \ln \frac{\zeta_{i1} + \sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2}}{\zeta_i + \sqrt{\zeta_i^2 - \zeta_z^2}}\right]. \quad (51)$$

Окружное напряжение в пластической области устанавливается при помощи формул (12) и (51) с использованием выражений (19), (34), (39) и (44):

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_s} = -\frac{p_1}{\sigma_s} + \operatorname{sign}(p_1 - p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}\left[(1 - \lambda)\sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2} + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \lambda + 2\frac{\lambda}{\zeta_i}\right)\sqrt{\zeta_i^2 - \zeta_z^2} + \lambda \ln \frac{\zeta_{i1} + \sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2}}{\zeta_i + \sqrt{\zeta_i^2 - \zeta_z^2}}\right]. \quad (52)$$

Осевое напряжение в пластической области может быть определено при помощи формул (13) и (51). При этом должны быть использованы выражения (19), (34), (39) и (44):

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_s} = -\frac{p_1}{\sigma_s} + \operatorname{sign}(p_1 - p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}\left[(1-\lambda)\sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2} + \frac{\lambda}{\zeta_i}\sqrt{\zeta_i^2 - \zeta_z^2} + \right.$$

$$\left. + \lambda \ln \frac{\zeta_{i1} + \sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2}}{\zeta_i + \sqrt{\zeta_i^2 - \zeta_z^2}}\right] + \left(1 - \lambda + \frac{\lambda}{\zeta_i}\right)\zeta_z. \qquad (53)$$

Формулы (48)—(53) определяют величины радиальных окружных и осевых напряжений в упругой и пластической областях в зависимости от ζ_i. Однако, учитывая, что величина ζ_i связана с безразмерным радиусом ρ соотношением (47), легко построить эпюры напряжений по радиусу.

Выведем формулу для определения радиальных перемещений. Преобразуя формулу (4) при помощи выражений (45), (47), (39) и (19), получим

$$\frac{u}{r_1 \varepsilon_s} = -\frac{1}{2}\zeta_z \rho + \operatorname{sign}(p_1 - p_2)\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\rho}\sqrt{\zeta_{i1}^2 - \zeta_z^2}. \qquad (54)$$

Рассмотрим упруго-пластическое деформирование толстостенной трубы, у которой осевая деформация равна нулю:

$$\varepsilon_z = 0 \qquad (55)$$

и, следовательно, по формуле (39)

$$\zeta_z = 0. \qquad (56)$$

Расчетные формулы для этого случая легко получить из выведенных выше зависимостей, используя условие (56).

Равенства (47) в рассматриваемом случае принимают вид

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{C^2}{r_1^4 \varepsilon_s^2} = \zeta_{i1}^2 = \alpha^4 \zeta_{i2}^2 = \beta^4 = \rho^4 \zeta_i^2. \qquad (57)$$

Из соотношений (57) получаем

$$\zeta_{i1} = \beta^2; \qquad (58)$$

$$\zeta_i = \frac{\beta^2}{\rho^2}. \qquad (59)$$

Формула (35) с использованием выражений (56), (58) и (59) преобразуется к следующему виду:

$$q = \left(1 - \lambda - \frac{1}{\alpha^2}\right)\beta^2 + \lambda + 2\lambda \ln \beta. \qquad (60)$$

Теперь по формуле (60) может быть определен безразмерный радиус β границы упругой и пластической областей в зависимости от внутреннего и внешнего давлений.

Значение q, при котором в трубе начинают возникать пластические деформации, можно получить, полагая в формуле (60) $\beta=1$:

$$q_s=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2},$$

и, следовательно, согласно формуле (40)

$$|p_1-p_2|_s=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}. \tag{61}$$

Величина q, при которой упругая область исчезает, устанавливается по формуле (60), полагая в ней $\beta=\alpha$:

$$q^*=(1-\lambda)(\alpha^2-1)+2\lambda\ln\alpha.$$

Согласно формуле (40) предельная разница давлений

$$|p_1-p_2|^*=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}[(1-\lambda)(\alpha^2-1)+2\lambda\ln\alpha]. \tag{62}$$

Формула (22) при помощи выражения (55) приводится к виду

$$N=\pi(p_1r_1^2-p_2r_2^2). \tag{63}$$

Эта формула дает величину осевой силы, развивающейся в трубе, торцы которой не смещаются в осевом направлении.

Радиальное, окружное и осевое напряжения в упругой области устанавливаем по формулам (48)—(50), используя выражения (56), (58) и (59):

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s}=-\frac{p_1}{\sigma_s}+\operatorname{sign}(p_1-p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\beta^2-\frac{\beta^2}{\rho^2}-\lambda(\beta^2-1)+2\lambda\ln\beta\right]; \tag{64}$$

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_s}=-\frac{p_1}{\sigma_s}+\operatorname{sign}(p_1-p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\beta^2+\frac{\beta^2}{\rho^2}-\lambda(\beta^2-1)+2\lambda\ln\beta\right]; \tag{65}$$

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_s}=-\frac{p_1}{\sigma_s}+\operatorname{sign}(p_1-p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}[\beta^2-\lambda(\beta^2-1)+2\lambda\ln\beta]. \tag{66}$$

Радиальное, окружное и осевое напряжения в пластической области могут быть получены по формулам (51)—(53) при использовании выражений (56), (58) и (59):

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s}=-\frac{p_1}{\sigma_s}+\operatorname{sign}(p_1-p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}\left[(1-\lambda)\left(\beta^2-\frac{\beta^2}{\rho^2}\right)+2\lambda\ln\rho\right]; \tag{67}$$

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_s}=-\frac{p_1}{\sigma_s}+\operatorname{sign}(p_1-p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}\left[2\lambda+(1-\lambda)\left(\beta^2+\frac{\beta^2}{\rho^2}\right)+2\lambda\ln\rho\right]; \tag{68}$$

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_s}=-\frac{p_1}{\sigma_s}+\operatorname{sign}(p_1-p_2)\frac{1}{\sqrt{3}}[\lambda+(1-\lambda)\beta^2+2\lambda\ln\rho]. \tag{69}$$

Радиальное перемещение подсчитывается по формуле (54) с учетом выражений (56) и (58):

$$\frac{u}{r_1\varepsilon_s}=\operatorname{sign}(p_1-p_2)\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\beta^2}{\rho}. \tag{70}$$

§ 4. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ БЕЗ УПРОЧНЕНИЯ

Если диаграмма растяжения материала трубы не имеет упрочнения (см. фиг. 449), то тогда модуль упрочнения $E_1=0$ и согласно формуле (6) гл. VIII т. II параметр упрочнения $\lambda=1$. Подстановка этой величины параметра упрочнения в формулы предыдущего параграфа приводит к расчетным соотношениям, имеющим место в этом частном случае.

Если $\varepsilon_z=0$, то из формулы (62) предельная разность давлений, при которой исчерпывается несущая способность трубы, равна

$$|p_1-p_2|_{пр}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\ln\alpha. \tag{71}$$

Рассмотрим более подробно расчетные формулы для толстостенной трубы, нагруженной только внутренним давлением. При этом допустим, что осевая деформация трубы равна нулю.

Полагая в выражениях (40) и (60) $p_1=p$, $p_2=0$, $\lambda=1$, имеем

$$\frac{p}{\sigma_s}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}+2\ln\beta\right). \tag{72}$$

Формула (72) устанавливает зависимость безразмерного радиуса границы упругой и пластической областей β от величины приложенного внутреннего давления p.

Величины радиальных, окружных и осевых напряжений в упругой области могут быть получены по формулам (64)—(66), если положить в них $\lambda=1$. Используя при этом выражение (72) и учитывая, что

$$\operatorname{sign}(p_1-p_2)=\operatorname{sign}p=+1, \tag{73}$$

имеем

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s}=\frac{\beta^2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\rho^2}\right); \tag{74}$$

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_s}=\frac{\beta^2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\rho^2}\right); \tag{75}$$

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_s}=\frac{\beta^2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\alpha^2}. \tag{76}$$

Величины радиальных, окружных и осевых напряжений в пластической области определяем по формулам (67)—(69), полагая в них $\lambda=1$ и используя выражения (72) и (73), тогда

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}-1+2\ln\frac{\rho}{\beta}\right); \tag{77}$$

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_s}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}+2\ln\frac{\rho}{\beta}\right); \tag{78}$$

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_s}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}+2\ln\frac{\rho}{\beta}\right). \tag{79}$$

Таблица 24

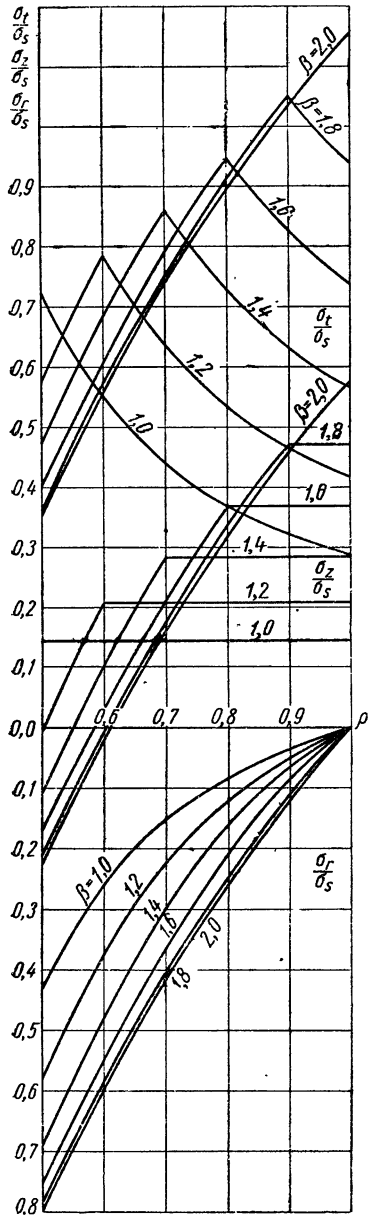
Сопоставление точного и приближенного решений для толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением

		Приближенное решение						Точное решение					
ρ \ β		1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$-\frac{\sigma_r}{\sigma_s}$	1,0	0 433	0,580	0,683	0,751	0,788	0,800	0,433	0,595	0,722	0,797	0,843	0,866
	1,2	0,257	0,370	0,473	0,540	0,578	0,590	0,254	0,370	0,479	0 560	0,606	0,635
	1,4	0,150	0,216	0,294	0,362	0,400	0,412	0,150	0,213	0,289	0,369	0,416	0,439
	1,6	0,0812	0,117	0,159	0,208	0,246	0,258	0,0808	0,115	0,156	0.202	0,248	0,271
	1,8	0,0339	0,0488	0,0664	0,0867	0,110	0,122	0,0346	0,0462	0,0635	0,0866	0,104	0,133
	2,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0,000
$\frac{\sigma_t}{\sigma_s}$	1,0	0,722	0,575	0,472	0,404	0,366	0,354	0,722	0,560	0,433	0,358	0,312	0,289
	1,2	0,545	0,785	0,682	0,615	0,577	0,565	0,543	0,779	0,675	0,595	0,548	0,520
	1,4	0,439	0,632	0.860	0,793	0,756	0,743	0,439	0,629	0,854	0,785	0,739	0,716
	1,6	0,370	0,533	0,725	0,947	0,909	0,897	0,369	0,531	0,722	0,929	0,894	0,877
	1,8	0,323	0,464	0,632	0,826	1,05	1,03	0,323	0,462	0,629	0,808	1,02	1,01
	2,0	0,289	0,416	0,566	0,739	0,935	1,15	0,289	0,416	0,560	0,727	0,912	1,11
$\frac{\sigma_z}{\sigma_s}$	1,0	0 144	−0,00268	−0,106	−0,173	−0,211	−0,223	0,0693	−0,0115	−0,110	−0,185	−0,231	−0,254
	1,2	0,144	0,208	0,105	0,0373	−0,000618	−0,0125	0,0693	0,104	0,0635	0,0115	−0,0346	−0,0693
	1,4	0,144	0,208	0,283	0,215	0,177	0,165	0,0693	0,104	0.139	0,133	0,115	0,0969
	1,6	0,144	0,208	0,283	0,370	0,332	0,320	0,0693	0,104	0,139	0.185	0,196	0,208
	1,8	0,144	0,208	0,283	0,370	0,468	0,456	0,0693	0,104	0,139	0,185	0,231	0,260
	2,0	0,144	0,208	0,283	0,370	0,468	0,577	0,0693	0,104	0,139	0,185	0,231	0.277

В табл. 24 приведены величины $\frac{\sigma_r}{\sigma_s}$, $\frac{\sigma_t}{\sigma_s}$ и $\frac{\sigma_z}{\sigma_s}$ для толстостенной трубы ($\alpha=2$), подсчитанные по формулам (67)—(79) для различных значений $\rho(1\leqslant\rho\leqslant\alpha)$ и разных величин $\beta(1\leqslant\beta\leqslant\alpha)$, т. е. при постепенном развитии пластической зоны. В той же таблице приведены отношения напряжений к пределу текучести, вычисленные по формулам точного решения задачи, данного В. В. Соколовским [20], в предположении, что материал сжимаем как в упругом, так и в пластическом состоянии. Сопоставление результатов точного и приближенного решений убеждает нас в том, что приближенное решение дает достаточную для практики степень точности (см. табл. 24).

На фиг. 538 представлены в безразмерных координатах эпюры радиальных, окружных и осевых напряжений для различных значений β (при $\alpha=2$).

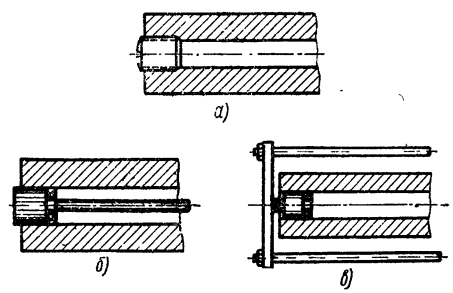
Как следует из эпюр напряжений в предельном состоянии ($\beta=\alpha=2$), наибольшие окружные напряжения возникают на наружной поверхности трубы. Это согласуется с опытами Бриджмена [3], который установил, что разрушение стальных толстостенных труб начинается с наружной поверхности.



Фиг. 538. Эпюры напряжений в толстостенной трубе, нагруженной внутренним давлением. Схематизированная диаграмма растяжения материала трубы не имеет упрочнения

§ 5. АВТОСКРЕПЛЕНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБ

В практике производства толстостенных труб принято повышать их несущую способность в пределах упругости путем нагружения труб внутренним давлением, при котором в трубе возникают пластические деформации (автоскрепление или автофретирование) [6], [18]. Авто-



Фиг. 539. Схемы двух способов автоскрепления: с продольным растяжением (*а*); без продольного растяжения (*б* и *в*)

скрепление производится либо при полуупругом режиме, когда в трубе имеют место и упругая, и пластическая области, либо при режиме полной перегрузки, когда упругая область исчезает и интенсивность напряжений σ_i во всех точках трубы выше предела текучести σ_s.

Существуют два способа автоскрепления.

Первый способ — автоскрепление с продольным растяжением. В этом случае труба закрывается с каждого конца пробками (фиг. 539,*а*). За счет давления на пробки возникает растягивающая сила

$$N = p\pi r_1^2.$$

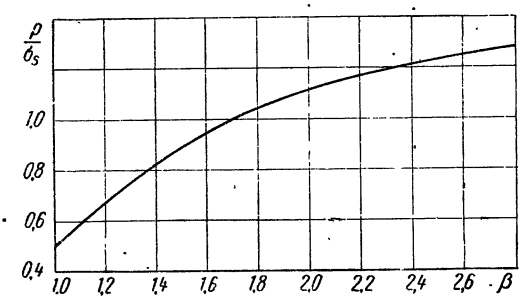
Второй способ — автоскрепление без продольного растяжения. В этом случае пробки, несущие обтюрирующие замки, не ввинчиваются в трубу, а соединяются посредством центрального стержня (фиг. 539,*б*) или рамной конструкции (фиг. 539,*в*). При таком способе автоскрепления сила, растягивающая трубу, равна нулю.

Рассмотрим пример расчета автоскрепленной трубы. Предположим, что труба имеет внутренний диаметр $2r_1 = 67$ *мм*, наружный диаметр $2r_2 = 187$ *мм*. Диаграмма растяжения материала трубы может быть схематизирована в виде диаграммы растяжения с линейным упрочнением без площадки текучести (см. фиг. 447). Основные параметры диаграммы растяжения: $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см²*; $E_1 = 68\,500$ *кг/см²*; $\sigma_s = 4760$ *кг/см²*. Автоскрепление производится с продольным растяжением, при полуупругом режиме. В рассматриваемом случае согласно формулам (37) и (36) $\alpha = 2{,}791$; $\lambda = 0{,}966$.

Зависимость давления автоскрепления от безразмерного радиуса границы упругой и пластической областей устанавливаем формулами (40) и (60):

$$\frac{p}{\sigma_s} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(1 - \lambda - \frac{1}{\alpha^2}\right)\beta^2 + \lambda + 2\lambda \ln \beta\right]. \qquad (80)$$

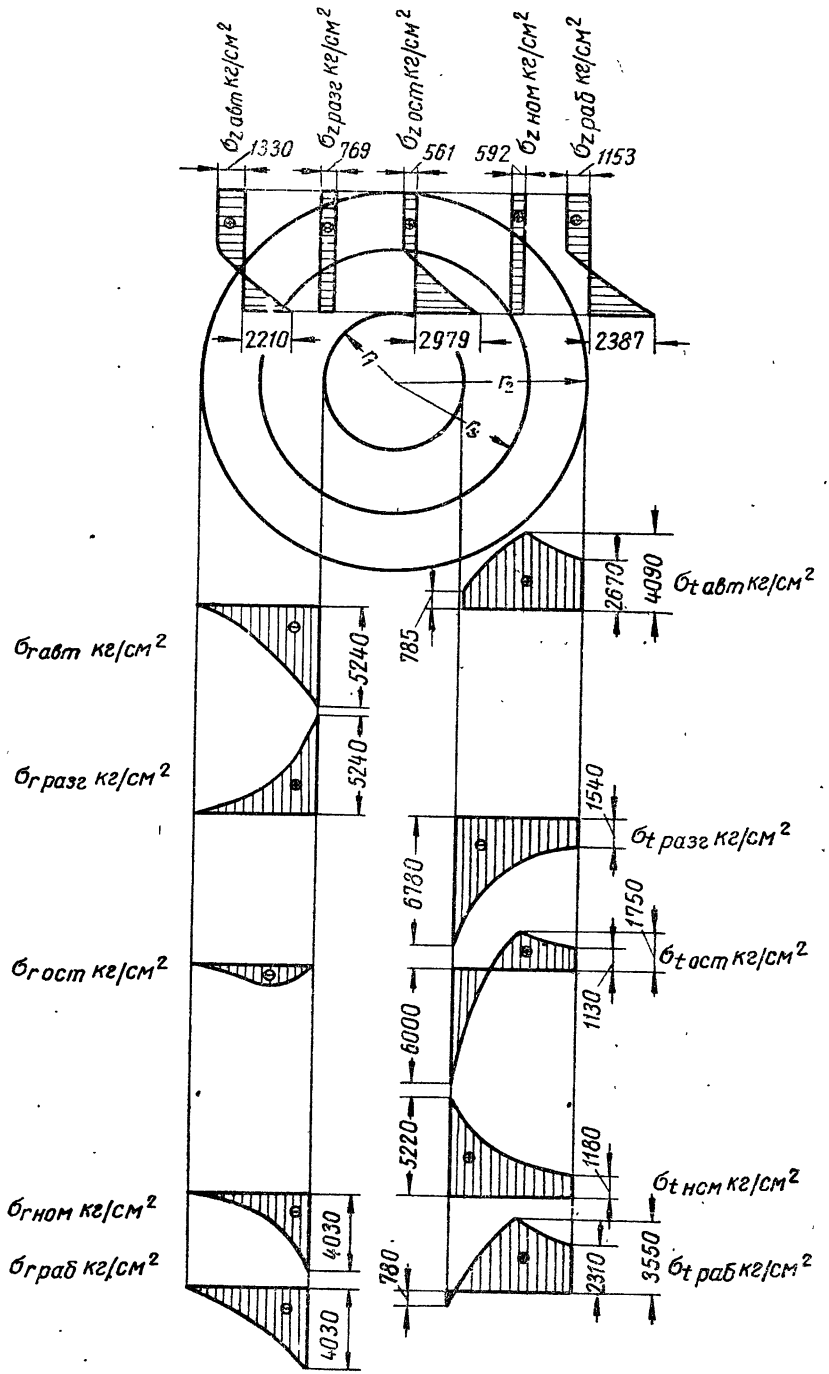
На фиг. 540 представлен график этой зависимости. Пластические деформации в трубе возникают при $\beta = 1 : p = p_s = 0{,}503\sigma_s = 2400$ *кг/см²*. Упругая область исчезает при $\beta = \alpha$: $p = p_s' = 1{,}28\sigma_s = 6100$ *кг/см²*. При этой величине давления заканчивается полуупругий режим автоскрепления и начинается процесс автоскрепления при режиме полной перегрузки.



Фиг. 540. К примеру расчета автоскрепления трубы. График зависимости давления автоскрепления от безразмерного радиуса упругой и пластической областей

Если труба не была предварительно автоскреплена, то для нее предельным давлением, при котором в трубе возникают пластические деформации, является давление p_s. Рабочее давление для нее не должно превышать этой величины. Если труба предварительно подверглась автоскреплению, то предельное давление для нее повышается. Оно равно давлению автоскрепления. Последнее для трубы заданных размеров из определенного материала зависит от выбора безразмерного радиуса границы упругой и пластической областей. Эта величина должна быть установлена из наблюдений за эксплуатацией автоскрепленных труб. Так, например, полагая $\frac{r_s}{r_2} = 0{,}7$, $\beta = 1{,}954$, по формуле (80) получаем $p = 1{,}1\sigma_s = 5240$ *кг/см²*. Следовательно, путем автоскрепления удалось повысить предельное давление с $p = 2400$ *кг/см²* до $p = 5240$ *кг/см²*.

На фиг. 541 представлены эпюры радиальных, окружных и осевых напряжений, возникающих при автоскреплении ($\beta = 1{,}954$), снимающихся при разгрузке остаточ-



Фиг. 541. К примеру расчета автоскрепления трубы. Эпюры напряжений, возникающих при автоскреплении, снимающихся при разгрузке, остаточных, номинальных и рабочих

ных, номинальных (принимая $p_{раб} = 4030$ *кг/см*^{2}) и истинных напряжений, являющихся суммой остаточных напряжений, возникающих в результате автоскрепления, и номинальных.

Увеличение внутреннего и наружного радиусов трубы при автоскреплении может быть определено по формуле (70).

§ 6. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ШАЙБЫ, НАГРУЖЕННОЙ ВНУТРЕННИМ И НАРУЖНЫМ ДАВЛЕНИЯМИ

Рассмотрим шайбу внутреннего радиуса r_1 и наружного радиуса r_2, нагруженную внутренним p_1 и наружным p_2 давлениями.

Как показано Надаи [14], задача расчета такой шайбы за пределами упругости имеет замкнутое решение, если диаграмма растяжения материала шайбы не имеет упрочнения. Надаи было изучено пластическое состояние шайбы. Неточность, допущенная в первом издании книги [14], исправлена Г. Ю. Джанелидзе [5].

В случае линейного упрочнения Г. С. Шапиро [24] показано, что задача решается в замкнутом виде, если используются приближенные представления для интенсивностей напряжений и деформаций (см. § 10, гл. VIII, т. II).

Исследование Г. С. Шапиро и положено в основу расчета развальцовки концов котельных труб в работе Н. И. Глаголева [4].

А. Г. Костюком [11] рассмотрено пластическое состояние шайбы, нагруженной внутренним и внешним давлениями при степенной зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций.

Ниже будет изложен упруго-пластический расчет шайбы, выполненной из материала, схематизированная диаграмма растяжения которого не имеет упрочнения (см. фиг. 449). Этот расчет основан на упомянутом выше решении Надаи и заимствован нами из работы Т. М. Махониной [13], где он изложен применительно к расчету прессовых посадок шайб за пределами упругости.

Если наружный радиус шайбы более чем в 2 раза превышает ее толщину, то можно считать, что напряжения по толщине шайбы распределяются равномерно, а в плоскостях, параллельных срединной плоскости напряжения, отсутствуют [13]. На основании второго допущения заключаем, что напряженное состояние всех точек шайбы двухосное. Из симметрии нагружения следует, что напряжения, деформации и перемещения зависят только от радиуса, а окружное σ_t и радиальное σ_r напряжения являются главными напряжениями.

В пределах упругости эти напряжения определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}; \\ \sigma_r &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Подставляя величины напряжений в формулу для эквивалентного напряжения по энергетической гипотезе возникновения пластических деформаций (см. гл. VI т. I) и учитывая, что напряженное состояние всех точек шайбы является плоским, получим

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\left(\frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)^2 + 3\left[\frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}\right]^2}. \tag{82}$$

Из этой формулы следует, что наиболее опасными точками являются точки внутреннего контура шайбы при $r=r_1$, в которых величина эквивалентного напряжения равна

$$\sigma_{экв\ max}=\frac{1}{r_2^2-r_1^2}\sqrt{p_1^2(r_1^4+3r_2^4)-2p_1p_2r_2^2(r_1^2+r_2^2)+4p_2^2r_2^4}.$$

Приравнивая эту величину пределу текучести материала, получаем соотношение между давлениями, при которых в шайбе возникают пластические деформации:

$$p_1^2(1+3\alpha^4)-2p_1p_2\alpha^2(1+\alpha^2)+4p_2^2\alpha^4=\sigma_s^2(\alpha^2-1)^2, \tag{83}$$

где

$$\alpha=\frac{r_2}{r_1}. \tag{84}$$

Если шайба нагружена только внутренним давлением p, то в уравнении (83) следует положить $p_1=p$, $p_2=0$, тогда величина давления, при котором в шайбе начинается образование пластических деформаций, равна

$$p_s=\sigma_s\frac{\alpha^2-1}{\sqrt{1+3\alpha^4}}. \tag{85}$$

Допустим, что шайба нагружена такими давлениями p_1 и p_2, при которых в ней возникает пластическая область. Поскольку образование пластических деформаций начинается с точек внутреннего контура, пластическая область примыкает к этому контуру.

Радиус границы пластической и упругой областей обозначим через r_s. Отношение $\beta=\frac{r_s}{r_1}$ назовем безразмерным радиусом границы пластической и упругой областей.

В пластической области напряжения помимо уравнения равновесия (8) должны удовлетворять условию пластичности без упрочнения $\sigma_i=\sigma_s$.

Последнее условие для плоского напряженного состояния на основании формулы (23) гл. VIII т. II принимает вид

$$\sqrt{\sigma_t^2-\sigma_t\sigma_r+\sigma_r^2}=\sigma_s. \tag{86}$$

Таким образом, в пластической области напряжения определяются из уравнений (8) и (86).

В упругой области, как известно, (см. гл. VI т. II), формулы для определения напряжений могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\left(C_1+\frac{C_2}{\rho^2}\right);\\ \sigma_r&=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\left(C_1-\frac{C_2}{\rho^2}\right),\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

где

$$\rho = \frac{r}{r_1} \tag{88}$$

безразмерный радиус.

Заметим, что в формулах (87) коэффициент $\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$ введен перед скобками для удобства последующих выкладок. Он влияет только на величины постоянных интегрирования.

Введем функцию φ, через которую окружное и радиальное напряжения в пластической области выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right); \\ \sigma_r &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

В таком случае условие (86) удовлетворяется тождественно.

Подстановка соотношений (89) в выражение (8) с использованием зависимости (88) приводит к дифференциальному уравнению для функции φ:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\varphi.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{C^2}{\rho^2} = e^{\sqrt{3}\varphi} \sin\varphi, \tag{90}$$

где C — постоянная интегрирования.

Уравнения (89) и (90) устанавливают связь напряжений с безразмерным радиусом через функцию φ.

Перейдем к определению постоянных интегрирования C, C_1 и C_2.

Краевые условия имеют вид:

$$\begin{aligned} &\text{при } r = r_1,\ \rho = 1 && \sigma_r = -p_1; \\ &\text{при } r = r_2,\ \rho = \alpha && \sigma_r = -p_2. \end{aligned} \tag{91}$$

Из первого краевого условия, используя соотношение (89), имеем

$$-\frac{p_1}{\sigma_s} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{6}\right). \tag{92}$$

Полученное выражение позволяет определить значение функции φ_1 на внутреннем контуре.

По формуле (90) учитывая, что при $\rho = 1$ $\varphi = \varphi_1$, устанавливаем:

$$C^2 = e^{\sqrt{3}\varphi_1} \sin\varphi_1,$$

тогда согласно формуле (90)

$$\rho = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}(\varphi_1 - \varphi)} \sqrt{\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}}. \tag{93}$$

Величину функции φ на границе упругой и пластической областей при $\rho=\beta$ обозначим φ_s. Из формулы (93) имеем

$$\beta = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}(\varphi_1-\varphi_s)}\sqrt{\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_s}}. \tag{94}$$

Из второго краевого условия (91), используя соотношения (87), получаем

$$-\frac{p_2}{\sigma_s} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(C_1 - \frac{C_2}{\alpha^2}\right). \tag{95}$$

Используем теперь условия непрерывности окружного и радиального напряжений на границе упругой и пластической областей. Полагая в формулах (87) и (89) $\varphi=\varphi_s$, $\rho=\beta$ и приравнивая на границе пластической и упругой областей вначале окружные, а затем радиальные напряжения, устанавливаем, что

$$C_1 + \frac{C_2}{\beta^2} = \cos\left(\varphi_s - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$C_1 - \frac{C_2}{\beta^2} = \cos\left(\varphi_s + \frac{\pi}{6}\right).$$

Решим теперь эти уравнения относительно C_1 и C_2, тогда получим

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi_s; \\ C_2 &= \frac{\beta^2}{2}\sin\varphi_s. \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Подставляя выражения (96) в соотношения (87), выводим уравнения напряжений в упругой области:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \sigma_s\left(\cos\varphi_s + \frac{\beta^2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin\varphi_s}{\rho^2}\right); \\ \sigma_r &= \sigma_s\left(\cos\varphi_s - \frac{\beta^2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin\varphi_s}{\rho^2}\right); \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Подставим наконец соотношения (96) в выражение (95), тогда, используя формулу (94), получаем

$$-\frac{p_2}{\sigma_s} = \cos\varphi_s - \frac{e^{\sqrt{3}(\varphi_1-\varphi_s)}}{\sqrt{3}\,\alpha^2}\sin\varphi_1. \tag{98}$$

По формуле (98) определяется значение функции φ на границе пластической и упругой областей, затем безразмерный радиус границы пластической и упругой областей подсчитывается по формуле (94).

Перейдем к определению радиального перемещения. При этом допустим, что материал шайбы несжимам как за пределами, так и в пределах упругости.

Вначале получим уравнение радиальных перемещений в пластической области. Согласно формулам (46) гл. VIII т. II зависимости окружной ε_t и радиальной ε_r деформаций от напряжений имеет вид

$$\varepsilon_t = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_t - \sigma_0); \qquad \varepsilon_r = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}\left(\sigma_r - \sigma_0\right),$$

где σ_0 — среднее нормальное напряжение.

В рассматриваемом случае

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_t + \sigma_r}{3},$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i}(2\sigma_t - \sigma_r);$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i}(2\sigma_r - \sigma_t).$$

Поделив второе уравнение на первое, имеем

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_t} = \frac{2\sigma_r - \sigma_t}{2\sigma_t - \sigma_r}.$$

Используя выражения (2) и (88), преобразуем это соотношение к виду

$$\frac{du}{u} = \frac{2\sigma_r - \sigma_t}{2\sigma_t - \sigma_r} \cdot \frac{d\rho}{\rho}. \tag{99}$$

На основании формулы (93) имеем

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \operatorname{ctg}\varphi\right) d\varphi. \tag{100}$$

Если подставить выражения (89) и (100) в соотношение (99), то получим

$$\frac{du}{u} = \frac{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\varphi} d\varphi.$$

Проинтегрируем это уравнение, тогда получим формулу для радиального перемещения в пластической области

$$\frac{u}{r_1} = \frac{\sigma_s}{2E} C_3 \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi}}{\sqrt{\sin\varphi}}. \tag{101}$$

Множитель $\frac{\sigma_s}{2E}$ введем для удобства выкладок. Он влияет только на величину постоянной C_3.

Выведем теперь формулу для радиального перемещения в упругой области. По зависимости (2), учитывая, что коэффициент поперечной деформации для несжимаемого материала $\mu = 0{,}5$, имеем

$$u = \varepsilon_t r = \frac{r_1}{2E}(2\sigma_t - \sigma_r)\rho.$$

Подставим в это соотношение напряжения по формулам (97), тогда получим уравнение радиальных перемещений в упругой области:

$$\frac{u}{r_1} = \frac{\sigma_s}{2E}\left(\rho\cos\varphi_s + \sqrt{3}\,\beta^2\,\frac{\sin\varphi_s}{\rho}\right). \qquad (102)$$

Определим теперь постоянную интегрирования C_3 из условия равенства радиальных перемещений на границе пластической и упругой областей. Приравнивая радиальные перемещения по формулам (101) и (102) при $\rho=\beta$, $\varphi=\varphi_s$, получим

$$C_3 = \frac{2\beta\sin\left(\varphi_s+\frac{\pi}{6}\right)\sqrt{\sin\varphi_s}}{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_s}}.$$

Подставим эту величину в формулу (101), тогда уравнение радиальных перемещений в пластической области примет вид

$$\frac{u}{r_1} = \frac{\sigma_s}{E}\,\beta\sin\left(\varphi_s+\frac{\pi}{6}\right)e^{\frac{\sqrt{3}}{2}(\varphi-\varphi_s)}\sqrt{\frac{\sin\varphi_s}{\sin\varphi}}. \qquad (103)$$

Рассмотрим порядок расчета шайбы. По заданному внутреннему давлению p_1 из формулы (92) определяется величина φ_1, а по внешнему давлению p_2 из формулы (98) φ_s. После этого при помощи соотношения (94) может быть установлен безразмерный радиус границы пластической и упругой областей β. Напряжения в пластической области подсчитываются по формулам (89), а в упругой — по формулам (97). Переход от переменной φ к безразмерному радиусу ρ осуществляется при помощи соотношения (93). Радиальные перемещения в пластической и упругой областях подсчитываются по уравнениям (103) и (102) соответственно.

Для упрощения изложенных выше расчетов в табл. 25 приведены значения функций $\sin\varphi$; $\cos\varphi$; $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$; $\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$; $\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$; $e^{\sqrt{3}\varphi}$; $e^{\sqrt{3}\varphi}\sin\varphi$; $e^{\sqrt{3}\varphi}\cos\varphi$; $\sqrt{e^{\sqrt{3}\varphi}\sin\varphi}$.

Установим предельное соотношение между давлениями p_1 и p_2, при которых во всех точках шайбы интенсивность напряжений достигает предела текучести, т. е. упругая область исчезает. В этом случае $\beta=\alpha$ и по формуле (94)

$$\alpha^2 = e^{\sqrt{3}(\varphi_1-\varphi_s)}\,\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_s}. \qquad (104)$$

Подставляя эту величину в формулу (98), имеем

$$-\frac{p_2}{\sigma_s} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi_s+\frac{\pi}{6}\right). \qquad (105)$$

Формулы (92), (104) и (105) устанавливают связь между давлениями p_1 и p_2, при которых исчерпывается несущая способность шайбы. Параметрами в этих формулах являются две величины φ_1 и φ_s.

Если задана величина внутреннего давления p_1, то соответствующее ему давление p_2, при котором исчерпывается несущая способность

Таблица 25

Значения вспомогательных функций в расчетах шайб за пределами упругости

φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$	$e^{\sqrt{3}\varphi}$	$e^{\sqrt{3}\varphi}\sin\varphi$	$e^{\sqrt{3}\varphi}\cos\varphi$	$\sqrt{e^{\sqrt{3}\varphi}\sin\varphi}$
0,0	0,00000	1,0000	0,5000	1,0000	1,0000	1,000	0,0000	1,0000	0,0000
0,1	0,09983	0,9950	0,5840	0,9376	1,053	1,189	0,1187	1,183	0,3445
0,2	0,1987	0,9801	0,6621	0,8656	1,095	1,414	0,2810	1,386	0,5301
0,3	0,2955	0,9553	0,7236	0,8080	1,126	1,681	0 4967	1,606	0,7048
0,4	0,3894	0,9211	0,7977	0,6963	1,146	2.000	0,7788	1,842	0,8825
0,5	0,4794	0,8776	0,8542	0,6006	1,155	2,377	1,140	2,086	1,068
$\frac{\pi}{6}$	0,5000	0,8660	0,8660	0,5773	1,155	2,476	1,238	2,144	1,113
0,6	0,5646	0,8253	0,9018	0,4991	1,152	2,826	1,596	2,332	1,263
0,7	0,6442	0,7648	0,9405	0,3926	1,138	3,360	2,165	2,570	1,471
0,8	0,7174	0,6967	0,9697	0,2822	1,111	3,999	2.869	2,783	1.694
0,9	0,7833	0,6216	0,9892	0,1690	1,074	4,754	3,724	2,955	1,930
1,0	0,8415	0,5403	0,9989	0,05403	1,026	5,652	4,756	3,054	2,181
$\frac{\pi}{3}$	0,8660	0,5000	1,0000	0,00000	1,000	6,129	5,307	3,066	2,304
1,1	0,8912	0,4536	0,9986	—0,06145	0,9685	6,719	5,988	3.048	2,447
1,2	0,9320	0,3624	0,9883	—0,1763	0,9008	7,989	7,446	2,895	2,729
1,3	0,9636	0,2675	0,9681	—0,2893	0,8241	9,507	9,161	2,543	3,027
1,4	0,9855	0,1700	0,9383	—0,3995	0,7392	11,30	11,14	1,921	3,338
1,5	0,9975	0,07070	0,8991	—0,5058	0,6469	13,44	13,41	0,9502	3,662
$\frac{\pi}{2}$	1,0000	0,00000	0,8660	—0,5773	0,5773	15;20	15,20	0,0000	3,899
1,6	0,9996	—0,02920	0,8509	—0,6068	0,5485	15,98	15,98	— 0,4666	3,996
1,7	0,9917	—0,1288	0,7941	—0,7014	0,4442	18,99	18.83	- 2,446	4,339
1,8	0,9739	—0,2272	0,7295	—0,7900	0,3355	22,60	22,01	— 5,135	4,691
1,9	0,9463	—0,3233	0,6576	—0,8702	0,2236	26.87	25,43	— 8,687	5,043
2,0	0,9093	—0,4162	0,5191	—0,9417	0,1093	31.94	29,04	—13,29	5,389
2,1	0,8632	—0,5049	0,4948	—1,004	—0,006006	37,98	32,78	—19,18	5,725

φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$	$e^{\sqrt{3}\varphi}$	$e^{\sqrt{3}\varphi}\sin\varphi$	$e^{\sqrt{3}\varphi}\cos\varphi$	$\sqrt{e^{\sqrt{3}\varphi}\sin\varphi}$
2,2	0,8085	—0,5885	0,4056	—1,056	—0,1213	45,15	36,50	— 26,57	6,042
2,3	0,7457	—0,6663	0,3123	—1,097	—0,2354	53,73	40,07	— 35,80	6,330
2,4	0,6755	—0,7374	0,2159	—1,128	—0,3471	63,88	43,15	— 47,11	6,569
2,5	0,5985	—0,8011	0,1173	—1,147	—0,4553	75,94	45,45	— 60,84	6,742
2,6	0,5155	—0,8569	0,01759	—1,155	—0,5590	90,29	46,54	— 77,37	6,822
$\frac{5}{6}\pi$	0,5000	—0,8660	0,00000	—1,155	—0,5772	93,13	46,57	— 80,65	6,824
2,7	0,4274	—0,9041	—0,08231	—1,151	—0,6571	107,3	45,86	— 97,01	6,772
2,8	0,3350	—0,9422	—0,1814	—1,136	—0,7487	127,7	42,78	—120,3	6,541
2,9	0,2393	—0,9710	—0,2787	—1,109	—0,8328	151,9	36,35	—147,5	6,029
3,0	0,1411	—0,9900	—0,3732	—1,072	—0,9085	180,6	25,48	—178,8	5,048
3,1	0,04158	—0,9991	—0,4639	—1,023	—0,9752	214,7	8,927	—214,5	2,988
π	0,0000	—1,0000	—0,5000	—1,000	—1,000	230,9	0,000	—230,9	0,000
3,2	—0,05837	—0,9983	—0,5500	—0,9645	—1,032	255,2	— 14,90	—254,8	3,860*i*
3,3	—0,1578	—0,9875	—0,6307	—0,8964	—1,077	303 7	— 47,92	—299,9	6,922 *i*
3,4	—0,2555	—0,9668	—0,7050	—0,8191	—1,114	361,0	— 92,24	—349,0	9.604 *i*
3,5	—0,3508	—0 9365	—0,7723	—0,7338	—1,139	429,2	—150,6	—401,9	12,27 *i*
3,6	—0,4425	—0,8968	—0,8318	—0,6410	—1,153	510,3	—225,8	—457,6	15,03 *i*
$\frac{7}{6}\pi$	0,5000	—0,8660	—0,8660	—0,5775	—1,155	572,5	—286,3	—495,8	16,92 *i*
3,7	—0,5298	—0,8481	—0,8831	—0,5419	—1,154	606,7	—321,4	—514,5	17,93 *i*
3,8	—0,6119	—0,7910	—0,9255	—0,4374	—1,145	722,0	—441,8	—571,1	21,02 *i*
3,9	—0,6878	—0,7259	—0,9587	—0,3285	—1,123	858,3	—590,3	—623,0	24,30 *i*
4,0	—0,7568	—0,6536	—0,9823	—0,2163	—1,091	1 020	—771,9	—666,7	27,78 *i*
4,1	—0,8183	—0,5748	—0,9961	—0,1020	—1,043	1 213	—992,6	—697,2	31,51 *i*
$\frac{4}{3}\pi$	—0,8660	—0,5000	—1,0000	0,0000	—1,000	1 415	—1225	—707,5	35,00 *i*
4,2	—0,8716	—0,4903	—0,9999	0,01341	—0,9940	1 442	—1257	—707,0	35,45 *i*

Продолжение табл. 25

φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$	$e^{\sqrt{3}\varphi}$	$e^{\sqrt{3}\varphi}\sin\varphi$	$e^{\sqrt{3}\varphi}\cos\varphi$	$\sqrt{e^{\sqrt{3}\varphi}\sin\varphi}$
4,3	−0,9162	−0,4008	−0.9938	0,1287	−0,9302	1 716	— 1 572	−687,8	39,65 i
4,4	−0,9516	−0,3073	−0,9777	0,2426	−0,8572	2 041	— 1 942	−627,2	44,07 i
4,5	−0.9775	−0,2108	−0,9518	0,3541	−0,7757	2 426	— 2 371	−511,4	48,69 i
4,6	−0,9937	−0,1122	−0.9165	0,4621	−0,6864	2 884	— 2 866	−323.6	53,54 i
4,7	−0,9999	−0,01239	−0,8720	0,5655	−0,5902	3 429	— 3 429	— 42,49	58,56 i
$\frac{3}{2}\pi$	−1,0000	0,00000	−0,8660	0,5775	−0,5775	3 502	— 3 502	0,0000	59,18 i
4,8	−0,9962	0,08750	−0,8187	0,6632	−0,4882	4 081	— 4 065	357,1	63,76 i
4,9	−0,9825	0,1865	−0,7573	0,7543	−0.3813	4 851	— 4 766	9 4,7	69,04 i
5,0	−0,9589	0,2837	−0,6883	0,8378	−0,2705	5 768	— 5 531	1636	74,37 i
5,1	−0,9258	0,3780	−0,6125	0,9130	−0,1571	6 857	— 6-348	2592	79,67 i
5,2	−0,8835	0,4685	−0,5305	0,9791	−0,04202	8152	— 7 202	3819	84,86 i
5,3	−0,8323	0 5544	−0,04432	1,035	0,07342	9 701	— 8 074	5378	89,86 i
5,4	−0,7728	0,6347	−0,3515	1.081	0,1881	11 530	— 8 910	7318	94,39 i
5,5	−0,7055	0,7087	−0.2563	1,116	0,3010	13 710	— 9 672	9716	98 35 i
5,6	−0,6313	0,7756	−0,1585	1,140	0,4108	16 300	—10 290	12640	101,4 i
5,7	−0,5507	0,8347	−0,05920	1,153	0,5165	19 380	—10 670	16180	103,3 i
$\frac{11}{6}\pi$	−0,5000	0,8660	0,00000	1,155	0,5775	21 160	—10 580	18320	102,9 i
5,8	−0,4646	0,8855	0,04080	1,154	0,6170	23 180	—10 770	20520	103,8 i
5,9	−0,3739	0,9275	0,1404	1,144	0,7115	27 480	—10 270	25490	101,3 i
6,0	−0,2794	0,9602	0.2385	1,122	0,7987	32 510	— 9 083	31220	95,30 i
6,1	−0.1822	0,9833	0.3343	1,089	0,8780	39 000	— 7 105	38340	84,29 i
6,2	−0,08309	0,9965	0,4267	1,045	0,9486	46 130	— 3 833	45970	61,91 i
2π	−0,00000	1,0000	0,5000	1,0000	1,0000	53 090	0	53090	0

* $i=\sqrt{-1}$.

шайбы, определяется следующим образом. По формуле (92) подсчитывается величина φ_1. Далее из соотношения (104) устанавливается значение φ_s. После этого по формуле (105) подсчитывается давление p_2.

Если задана величина наружного давления p_2, то из соотношения (105) определяется φ_s, затем по формуле (104) φ_1, после чего из выражения (92) устанавливается внутреннее давление p_1, при котором в случае заданного наружного давления p_2 исчерпывается несущая способность шайбы.

Рассмотрим более подробно частный случай расчета по предельному состоянию шайбы, нагруженной только внутренним давлением, тогда $p_2=0$ и согласно формуле (105) $\varphi_s=\frac{\pi}{3}$. Поэтому выражение (104) принимает вид

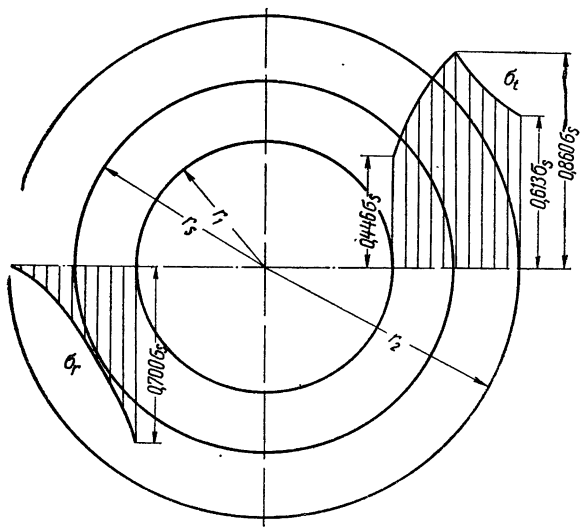
$$\alpha^2=e^{\sqrt{3}\left(\varphi_1-\frac{\pi}{3}\right)}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi_1, \qquad (106)$$

тогда при заданном значении α из формулы (106) подсчитывается величина φ_1, после чего по формуле (92) определяется предельное давление.

Формула (92) дает возможность заключить, что величина наибольшего давления имеет место при $\varphi_1=\frac{5}{6}\pi$. Это давление равно

$$p_{1\,\max}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s.$$

Величине $\varphi_1=\frac{5}{6}\pi$ согласно формуле (106) соответствует $\alpha=2{,}963$.



Фиг. 542. К примеру расчета шайбы, нагруженной внутренним давлением. Эпюры окружных и радиальных напряжений.

Таким образом, если отношение наружного радиуса к внутреннему превышает эту величину, никакое внутреннее давление не в состоянии привести к исчерпыванию несущей способности шайбы. В этом случае часть ее всегда остается упругой.

Рассмотрим пример определения напряжений в шайбе, нагруженной внутренним давлением. Допустим, что шайба, у которой $r_2=2r_1$, нагружена внутренним давлением $p_1=p=0{,}7\sigma_s$.

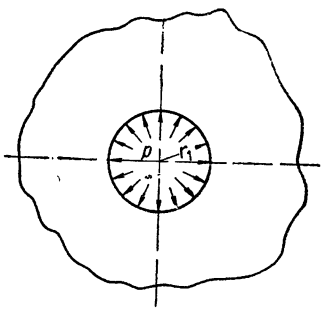
По табл. 25 в соответствии с формулой (92) устанавливаем, что $\varphi_1=1{,}698$, затем из уравнения (98), учитывая, что $p_2=0$, $\alpha=\frac{r_2}{r_1}=2$, и используя данные табл. 25, получаем $\varphi_s=1{,}253$. После этого по формуле (94) определяем $\beta=1{,}48$. Далее, задаваясь различными значениями φ от φ_1 до φ_s, по формулам (89) подсчитываем напряжения в пластической области. При помощи соотношения (93) устанавливаем величины безразмерных радиусов для выбранных значений φ. Таким образом определяется зависимость напряжений от безразмерного радиуса. Напряжения в упругой области подсчитываются по формулам (97).

На фиг. 542 изображены эпюры напряжений.

§ 7. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Полученные в предыдущем параграфе формулы могут быть использованы и для расчета бесконечной пластины, ослабленной круговым отверстием при нагружении ее осесимметрично центру отверстия. Этот случай был исследован Г. Ю. Джанелидзе [5].

Рассмотрим два варианта нагружения пластины: 1) давлением по контуру отверстия и 2) растягивающими осесимметричными силами на контуре пластины (на бесконечности).



Фиг. 543. Схема нагружения пластины давлением по контуру отверстия

Бесконечная пластина с отверстием, нагруженная давлением по контуру отверстия (фиг. 543). В этом частном случае $p_2=0$; $\alpha=\infty$ и поэтому согласно формуле (98) $\varphi_s=\frac{\pi}{2}$, тогда безразмерный радиус границы пластической и упругой областей может быть получен из выражения (94):

$$\beta=e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\varphi_1-\frac{\pi}{2}\right)}\sqrt{\sin\varphi_1}. \qquad (107)$$

Величина φ_1 по-прежнему определяется из уравнения (92), а напряжения в пластической области — по формулам (89).

Уравнения для напряжений в упругой области в рассматриваемом случае согласно формулам (97) принимают вид

$$\sigma_t=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\beta^2}{\rho^2};\quad \sigma_r=-\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\beta^2}{\rho^2}. \qquad (108)$$

По формулам (103) и (102) можно получить уравнения радиальных перемещений в пластической области

$$\frac{u}{r_1}=\frac{\sigma_s}{E}\beta\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\sin\varphi}}. \qquad (109)$$

и в упругой области

$$\frac{u}{r_1}=\frac{\sigma_s}{E}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\beta^2}{\rho}. \qquad (110)$$

Бесконечная пластина с отверстием, нагруженная растягивающими силами (фиг. 544). В этом частном случае $p_1=0$, $p_2=-p$, $\alpha=\infty$. Согласно формуле (92) $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$. По формуле (98)

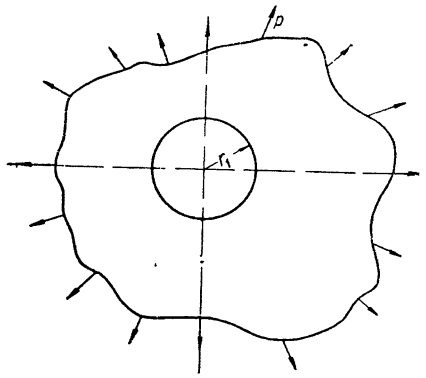
$$\cos\varphi_s=\frac{p}{\sigma_s}. \qquad (111)$$

Поскольку косинус не может быть больше единицы, из формулы (111) заключаем, что несущая способность пластины исчерпывается при $p=p_{пр}=\sigma_s$.

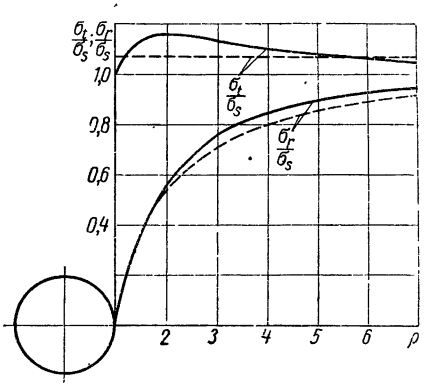
Безразмерный радиус границы пластической и упругой областей может быть установлен из выражения (94):

$$\beta = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\varphi_s\right)} \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}\sqrt{\sin\varphi_s}}. \qquad (112)$$

Напряжения в пластической области подсчитываются по формулам (89), а в упругой — согласно уравнениям (97).



Фиг. 544. Схема нагружения пластины с отверстием растягивающими силами



Фиг. 545. Эпюры окружных и радиальных напряжений в предельном состоянии для пластины с отверстием при осесимметричном растяжении ее

Радиальные перемещения в пластической и упругой областях определяются из выражений (103) и (102) соответственно.

Рассмотрим пример определения напряжений в предельном состоянии, т. е. при $p = p_{пр} = \sigma_s$. В этом случае $\cos\varphi_s = 1$ и, следовательно, $\varphi_s = 0$. Задаваясь различными значениями φ в пределах $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$, по формулам (89) подсчитываем напряжения. При помощи соотношения (93), учитывая, что $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, определяем величины безразмерных радиусов для выбранных значений φ. Таким образом, устанавливается зависимость напряжения от безразмерного радиуса.

На фиг. 545 изображены эпюры напряжений (сплошные линии).

Как известно, в пределах упругости окружное напряжение в точках контура отверстия в 2 раза больше интенсивности растягивающей нагрузки, и, следовательно, теоретический коэффициент концентрации напряжений равен 2.

Из фиг. 545 следует, что в предельном состоянии величина окружного напряжения в точках контура отверстия равна пределу текучести материала, которому, как указывалось выше, равна интенсивность нагрузки, растягивающей пластину. Таким образом, в предельном состоянии теоретический коэффициент концентрации напряжений равен 1. Следовательно, в рассматриваемом примере за пределами упругости теоретический коэффициент концентрации напряжений снижается с 2 до 1.

Дадим решение этого примера, основываясь на приближенном представлении интенсивности напряжений (см. § 10, гл. VIII, т. II). В рассматриваемом случае наибольшее главное напряжение равно окружному, промежуточное радиальному и наименьшее равно нулю:

$$\sigma_1 = \sigma_t; \quad \sigma_2 = \sigma_r; \quad \sigma_3 = 0.$$

Следовательно, согласно формуле (101) гл. VIII т. II

$$\sigma_i = \nu\sigma_t, \qquad (113)$$

где $\nu = 0{,}9330$.

Учитывая, что при отсутствии упрочнения $\sigma_i = \sigma_s$, имеем согласно формуле (113)

$$\sigma_t = \frac{\sigma_s}{\nu}. \tag{114}$$

Подставляя это выражение в уравнение равновесия (8), устанавливаем, что

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r) = \frac{\sigma_s}{\nu}.$$

Проинтегрируем это уравнение, тогда получим

$$\sigma_r = \frac{\sigma_s}{\nu} + \frac{C}{r}. \tag{115}$$

Для определения постоянной интегрирования C используем краевое условие при $r = r_1$, $\sigma_r = 0$, тогда получим

$$C = -\frac{\sigma_s}{\nu} r_1,$$

и, следовательно, уравнение радиальных напряжений (115) принимает вид

$$\sigma_r = \frac{\sigma_s}{\nu}\left(1 - \frac{r_1}{r}\right)$$

или на основании соотношения (88)

$$\sigma_r = \frac{\sigma_s}{\nu}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right). \tag{116}$$

На фиг. 545 эпюры напряжений, построенные по формулам (114) и (116), изображены штриховыми линиями.

Как следует из сопоставления соответствующих эпюр, результаты приближенного решения не сильно отличаются от точного.

К. Н. Шевченко [25] рассмотрено упруго-пластическое состояние бесконечной пластины с круговым отверстием, нагруженной по контуру отверстия осесимметричной нагрузкой для диаграммы растяжения с линейным упрочнением. В этом исследовании используется упомянутое выше решение Г. С. Шапиро [24].

Пластическое состояние пластин с отверстием при условии, что схематизированная диаграмма растяжения материала не имеет упрочнения, рассмотрено В. В. Соколовским [20].

Приближенное решение задачи об упруго-пластическом состоянии бесконечной пластины с круговым отверстием при растяжении ее на бесконечности в двух взаимно-перпендикулярных направлениях дано А. П. Соколовым [19].

И. И. Фаерберг [23], основываясь на теории упруго-пластического изгиба кривого бруса, рассмотрел упруго-пластическое состояние бесконечной пластины с круговым отверстием при растяжении ее в одном направлении. Теоретическое решение было сопоставлено с экспериментальным исследованием дюралевых пластин. Последнее подтвердило теоретическое решение.

Экспериментальное исследование напряженного состояния в пластине с отверстием и в пластине с боковыми вырезами при растяжении их в одном направлении произведено А. И. Коданевым [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахшиян Ф. А., Конечные соотношения в полом шаре, подверженном внутреннему давлению, «Прикладная математика и механика», т. XII, вып. 2, АН СССР, 1948.

2. Беляев Н. М. и Синицкий А. К., Напряжения и деформации в толстостенных цилиндрах при упруго-пластическом состоянии материалов, «Известия АН СССР. Отд. техн. наук» № 2, 4 и 6, 1938.

3. Бриджмен П .В., Физика высоких давлений ,ОНТИ, 1935.

4. Глаголев Н. И., О приближенном расчете развальцовки концов котельных труб, «Инженерный сборник», т. XXIII, АН СССР, 1956.

5. Джанелидзе Г. Ю., Концентрация напряжений на краю кругового отверстия в равномерно напряженном поле при пластической деформации, «Труды Ленинградского политехнического института» № 3, 1947.

6. Дроздов Н. Ф., Сопротивление артиллерийских орудий и их устройство, ч. III. Автоскрепление, изд-во Артиллерийской академии СА имени Дзержинского, 1935.

7. Ильюшин А. А., Пластичность, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.

8. Качанов Л. М., Упруго-пластическое равновесие неравномерно нагретых толстостенных цилиндров, находящихся под действием внутреннего давления, «Журнал технической физики», т. X, вып. 14, 1940.

9. Качанов Л. М., Основы теории пластичности, ГИТТЛ, 1956.

10. Коданев А. И., Концентрация напряжений в пластической области, «Труды Академии», вып. 316, изд-во ВВИА имени проф. Н. Е. Жуковского, 1949.

11. Костюк А. Г., О равновесии кольцевой пластинки при степенном законе упрочнения, «Прикладная математика и механика», т. XIV, вып. 3, АН СССР, 1950.

12. Махонина Т. М., Графический способ расчета толстостенных труб за пределами упругости, «Расчеты на прочность», сб. ст., вып. 2, Машгиз, 1958

13. Махонина Т. М., Расчет прессовых посадок дисков за пределами упругости, «Расчеты на прочность», сб. ст., вып. 3, Машгиз, 1958.

14. Надаи А., Пластичность и разрушение твердых тел, Издательство иностранной литературы, 1954.

15. Пономарев С. Д., Расчет толстостенных труб на прочность графическим способом, «Инженерный сборник», т. IX, АН СССР, 1951.

16. Прагер В. и Ходж Ф. Г., Теория идеально-пластических тел, Издательство иностранной литературы, 1956.

17. Савин Г. Н., Концентрация напряжений около отверстий, ГИТТЛ, 1951.

18. Смирнов-Аляев Г. А., Теория автоскрепления цилиндров, Оборонгиз, 1940.

19. Соколов А. П., Об упруго-пластическом состоянии пластинки, «Доклады АН СССР», т. LX, № 1, 1948.

20. Соколовский В. В. ,Теория пластичности, ГИТТЛ, 1950.

21. Тарабасов Н. Д., Расчет составных труб за пределами упругости, «Труды МАТИ», вып. 9, Оборонгиз, 1950.

22. Тарабасов Н. Д., Расчет составных дисков и труб из разных материалов с учетом пластических деформаций, «Труды МАИ имени Серго Орджоникидзе», вып. 17, Оборонгиз, 1952.

23. Фаерберг И. И., Растяжение пластинки с круговым отверстием за пределом упругости, МАП СССР, ЦАГИ имени проф. Н. Е. Жуковского, «Труды ЦАГИ» № 615, изд. БНТ, 1947.

24. Шапиро Г. С., Об интегрировании в квадратурах уравнений плоской одномерной задачи теории пластичности с учетом упрочнения материала, «Прикладная математика и механика» т. XIII, вып. 6, АН СССР, 1949.

25. Шевченко К. Н., Осесимметричная упруго-пластическая задача для пластинки, ослабленной круговым вырезом, «Прикладная математика и механика», т. XV, т. XV, вып. 4, АН СССР, 1951.

26. Mac. Gregor C. W., Coffin L. F. and Fisher J. C., The plastic flaw of thick-walled tubes with large strains, «Journal of applied physics», v. 9, N 3, 1947.

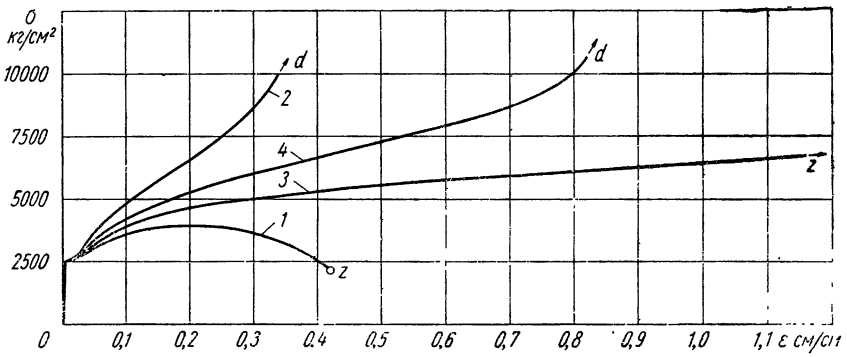
ГЛАВА XI

РАСЧЕТЫ ДЕТАЛЕЙ, ВЫПОЛНЕННЫХ ИЗ МАТЕРИАЛОВ, НЕОДИНАКОВО СОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Основные материалы, применяющиеся в машиностроении, принято условно разделять на три группы: пластичные, хрупко-пластичные и хрупкие (см. гл. V т. I).

Указанная классификация строится на принципе сопоставления механических свойств машиностроительных материалов с аналогичными свойствами характерных весьма распространенных и хорошо изучен-



Фиг. 546. Характеристики пластического материала (малоуглеродистой стали) при растяжении (z) и сжатии (d):
1 и *2* — условные характеристики; *3* и *4* — действительные характеристики

ных металлов — малоуглеродистой стали и серого литейного чугуна.

Механические свойства указанных материалов, как известно, достаточно полно определяются характеристиками материала при одноосных растяжении и сжатии.

На фиг. 546 и 547 представлены условные и действительные характеристики малоуглеродистой стали и серого литейного чугуна.

У так называемых пластичных материалов (фиг. 546) начальная часть характеристики (от начала нагружения до появления пластических деформаций порядка 5%) весьма близка к соответствующей части характеристики при сжатии.

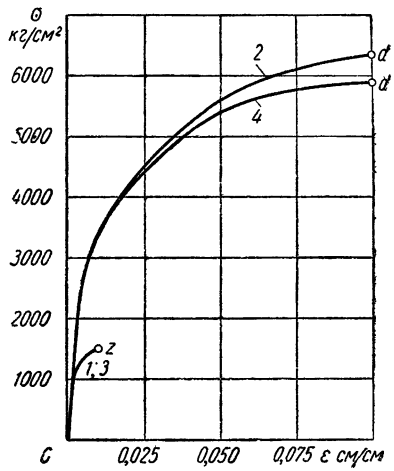
Линейная часть характеристики хрупких материалов (фиг. 547) при растяжении весьма незначительна или отсутствует вовсе.

Напряжения, при которых начинает проявляться нелинейность характеристики при сжатии хрупких материалов, значительно (в 2—3 раза и более) выше таковых при растяжении. Нелинейные части характеристик при растяжении и сжатии хрупких материалов не совпадают.

Указанные факты дают повод общепринятым утверждениям, что «пластичные материалы одинаково, а хрупкие неодинаково сопротивляются растяжению и сжатию».

Расчету пластичных материалов за пределами упругости посвящены гл. VIII—X т. II. Как показано в этих главах, основные гипотезы теории пластичности сформулированы и проверены экспериментально для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию [3], [9], [12].

Однако в машиностроительной практике весьма часто можно встретить детали, выполненные из материалов, не совсем одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Таковы, например, некоторые пластичные материалы, к которым относятся многие конструкционные стали, бронзы, силумин, титан, стальное литье; хрупко-пластичные материалы (закаленные конструкционные стали, специальные чугуны, твердый дюраль), а также хрупкие материалы (чугуны, твердозакаленные конструкционные и инструментальные стали).



Фиг. 547. Характеристики хрупкого материала (ерого литейного чугуна) при растяжении (z) и сжатии (d):
1 и *2* — условные характеристики; *3* и *4* — действительные характеристики

Теория упруго-пластических деформаций хрупко-пластичных и хрупких материалов в настоящее время находится еще в стадии разработки. Решены лишь отдельные задачи.

В настоящей главе сделана попытка систематизировать и уточнить накопленный в литературе материал по расчету деталей, выполненных из материалов, не одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Все рассмотренные задачи относятся к случаям, когда напряженное состояние материала деталей *одноосное*, т. е. когда детали находятся в условиях растяжения, сжатия, изгиба, а также совместного изгиба и растяжения или сжатия.

Задача о кручении бруса (двухосное напряженное состояние) выходит из рамок настоящей главы (она рассмотрена в гл. IX т. II).

Затронуты также вопросы определения предельных нагрузок. Под предельными здесь понимаются нагрузки, при которых либо происходит разрушение конструкции, либо она превращается в геометрически изменяемую систему.

В основе теории лежат перечисленные ниже допущения и ограничения.

Считается, что справедлив закон разгрузки и вторичного нагружения (см. гл. V т. I и гл. VII т. II, а также [3] и [9]).

Принимается, что при растяжении и сжатии поперечные сечения бруса остаются плоскими.

Полагается, что поперечные сечения бруса при изгибе и изгибе с растяжением или сжатием остаются плоскими и нормальными к оси бруса.

Напряженное состояние бруса при растяжении, сжатии, изгибе и при изгибе с растяжением (сжатием) считается одноосным. Рассматриваются лишь случаи простого нагружения (см. гл. V т. I и гл. VIII т. II).

Считается, что детали машин достаточно жестки, т. е. работают при относительно малых перемещениях и деформациях.

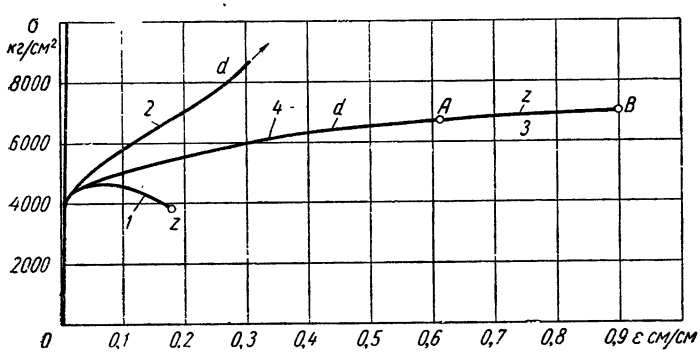
Так как линейные деформации при растяжении и сжатии в большинстве практических случаев не превышают 0,20, приведенные в приложении характеристики материалов при растяжении и сжатии построены при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}20$. Однако конструктора может интересовать также вопрос о предельных нагрузках и коэффициентах запаса рассчитываемых деталей (см. гл. V т. I и гл. IX т. II). Поэтому в приложении приведены также и полные характеристики (вплоть до разрушения или полного расплющивания образца).

Полагается, что характеристики материала при растяжении и сжатии имеют общую касательную в начале координат (подробнее об этом см. § 2 настоящей главы и гл. III т. I).

§ 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ОДНООСНЫХ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Сопоставление характеристик основных машиностроительных материалов при одноосных растяжении и сжатии показывает, что материалы могут быть разделены на три основные группы.

К первой относятся материалы, у которых характеристики при растяжении и сжатии близки друг к другу или совпадают. Сюда отно-



Фиг. 548. Характеристики материала одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию (латунь) при растяжении (z) и сжатии (d):

1 и *2* — условные характеристики; *3* и *4* — действительные характеристики; *A* — точка, соответствующая разрушению при сжатии; *B* — при растяжении

сятся такие материалы, как латунь, некоторые сорта дюраля, медь, малоуглеродистые стали (например, сталь 10), углеродистые и легированные незакаленные стали и другие материалы.

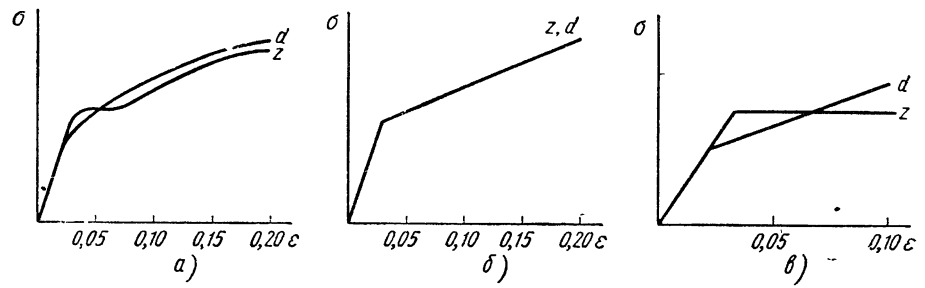
На фиг. 548 представлены условные (*1* и *2*) и действительные (*3* и *4*) характеристики одного из таких материалов (латунь).

Из рассмотрения приведенных действительных характеристик при растяжении и сжатии видно, что данный материал может быть в пол-

ной мере отнесен к числу одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, хотя разрушение при сжатии (точка A) происходит при несколько меньших напряжениях и деформациях, нежели при растяжении (точка B).

Однако далеко не у всех пластичных материалов рассматриваемой группы характеристики при растяжении и сжатии совпадают на всем их протяжении (см., например, характеристики малоуглеродистой стали, представленные на фиг. 546). Чаще всего при $\varepsilon > 0{,}40$ действительные характеристики при растяжении и сжатии резко расходятся.

Последнее обстоятельство не отражается на методике расчетов при относительно малых деформациях ($\varepsilon < 0{,}20$).



Фиг. 549. Схематизация действительных характеристик пластичного материала при растяжении (z) и при сжатии (d):
а — действительные характеристики; *б* — схематизированные характеристики при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}20$; *в* — схематизированные характеристики при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}10$

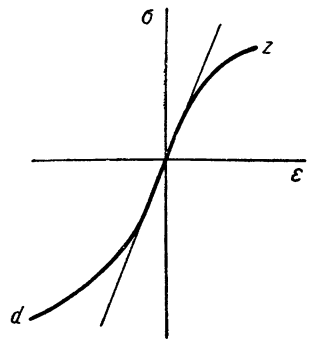
Если в основу расчетов положены не действительные, а условные характеристики, то даже материалы, подобные латуни (см. фиг. 548), могут быть отнесены к числу одинаково сопротивляющихся при растяжении и сжатии лишь при весьма малых деформациях ($\varepsilon < 0{,}05$).

В особую подгруппу должны быть выделены материалы, на характеристике которых имеется площадка текучести. Как показали опыты, некоторые пластичные материалы (например, малоуглеродистые стали, титан), имеющие при растяжении ярко выраженную площадку текучести, при сжатии текучести не обнаруживают (линейный участок характеристики плавно переходит в зону упрочнения). Поэтому если при нагружении конструкции ожидаются малые пластические деформации (например, до 0,05), то данный материал может быть отнесен к группе неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию (фиг. 549). Если же в рассматриваемом случае деформации могут оказаться равными 0,15—0,20, то при схематизации характеристики наличие площадки текучести при растяжении можно во внимание не принимать. На фиг. 549,*а* представлены действительные характеристики при растяжении z и сжатии d малоуглеродистой стали. На фиг. 549,*б* изображены схематизированные характеристики для случаев, когда расчет ведется при $0 < \varepsilon < 0{,}20$, на фиг. 549,*в* — характеристики для расчета при $0 < \varepsilon < 0{,}10$.

Ко второй группе относятся материалы, у которых характеристики при растяжении и сжатии несколько отличны. Эти материалы обычно называют хрупко-пластичными. Сюда относятся углеродистые и легированные стали, закаленные до твердости $R_C = 50 \div 55$, некоторые сорта силумина и бронзы, сплавы титана, ковкие и модифицированные чугуны и др.

Если расчеты ведутся при малых деформациях ($\varepsilon<0{,}05$), то многие из перечисленных материалов могут быть условно отнесены к группе одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Среди хрупко-пластичных материалов следует выделить материалы, на характеристике которых при растяжении имеется ярко выраженная площадка текучести (например, некоторые углеродистые и легированные стали). Замечание, сделанное выше по поводу схематизации характеристик пластичных материалов, имеющих на характеристике площадку текучести, в полной мере относится и к хрупко-пластичным материалам.



Фиг. 550. Характеристика при растяжении (z) и сжатии (d) материала, неодинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию

Наконец, к третьей группе — группе хрупких материалов могут быть отнесены материалы, характеристики которых при растяжении и сжатии различны (см., например, характеристики серого литейного чугуна, представленные на фиг. 547).

К этой группе относятся некоторые конструкционные стали, инструментальные стали, закаленные до твердости свыше $R_C=55$, бронзовое литье, литье на алюминиевой основе, чугун разных марок и т. д.

Перечисленные материалы даже при весьма малых деформациях должны быть отнесены к группе неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

К числу хрупких материалов могут быть также отнесены некоторые неметаллические материалы, например текстолит, плексиглас, фибра, эбонит.

Отметим, что при построении теории расчета деталей, выполненных из материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, принято, что характеристики материала при растяжении и сжатии имеют общую касательную в начале координат (фиг. 550), иными словами, что модули упругости при растяжении и сжатии равны.

$$E_z=E_d=E. \tag{1}$$

Это положение проверено путем испытания образцов, которым придана специальная форма, позволяющая нагружать их на растяжение и на сжатие. Один образец хрупкого материала испытывался сначала при растяжении, а затем при сжатии, а другой сначала при сжатии, а затем при растяжении. Напряжения при испытании не превышали 80% предела пропорциональности. Испытывались образцы закаленной легированной стали и серого литейного чугуна.

В приложении к т. II даны характеристики ряда машиностроительных материалов конструкционных, инструментальных сталей, чугунов, цветных металлов, некоторых сплавов и технического титана.

§ 3. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ, ЭЛЕМЕНТЫ КОТОРЫХ НАХОДЯТСЯ В УСЛОВИЯХ ОДНООСНОГО ОДНОРОДНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ (РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ)

Расчет конструкций, элементы которых находятся в одноосном однородном напряженном состоянии (растяжение или сжатие), обычно строится на основе экспериментально полученных характеристик мате-

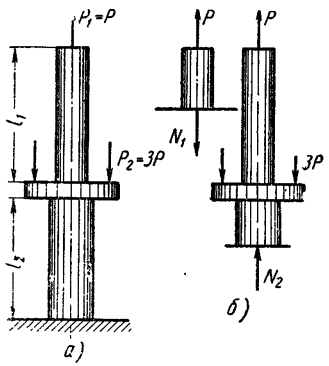
риала. Возможно также создание приближенного решения задач на базе схематизированных характеристик.

В первом случае расчет выполняется графически, во втором может быть построено аналитическое решение.

Стержневые системы называются статически определимыми, когда внутренние суммарные силовые факторы могут быть вычислены при помощи метода сечений из уравнений равновесия.

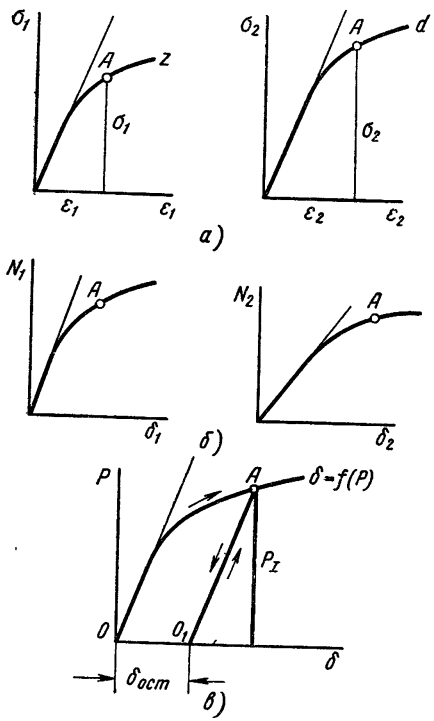
Если для определения внутренних суммарных силовых факторов помимо условий равновесия приходится составлять уравнения перемещений, то системы называют статически неопределимыми.

Рассмотрим, например, представленную на фиг. 551,*а* простейшую статически определи-



Фиг. 551. Простейшая статически определимая система:

а — схема нагружения; *б* — определение внутренних суммарных силовых факторов методом сечений



Фиг. 552. Построение характеристики конструкции, представленной на фиг. 551, на основе характеристик ее материала:

а — характеристики материала при растяжении (z) и сжатии (d); *б* — характеристики верхней и нижней частей конструкции; *в* — характеристика конструкции

мую систему. Применяя метод сечений и рассматривая условия равновесия частей системы (фиг. 551,*б*), определяем внутренние усилия в сечениях верхней (первой) и нижней (второй) частей:

$$N_1 = P; \quad N_2 = 2P. \tag{2}$$

Изменение длины бруса δ может быть определено из геометрического соотношения

$$\delta = \varepsilon_1 l_1 - \varepsilon_2 l_2, \tag{3}$$

где $\varepsilon_1 l_1$ и $\varepsilon_2 l_2$ — изменения длин l_1 и l_2, соответствующие внутренним усилиям N_1 и N_2.

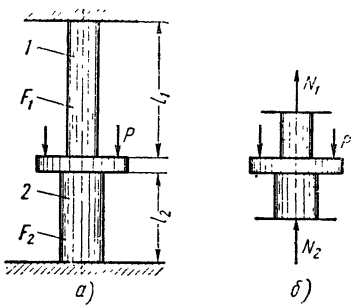
Зависимость между нагрузкой P и смещением δ [характеристика конструкции $\delta = f(P)$] может быть легко получена, если заданы характеристики материала (фиг. 552,*а*) конструкции.

Задаваясь значениями деформаций ε_1 и ε_2, находим по характеристикам материала (точки A на фиг. 552,*а*) соответствующие напряже-

ния σ_1 и σ_2. Умножая деформации ε_1 и ε_2 на длины, а напряжения — на площади поперечного сечения элементов конструкции, определим координаты точек A характеристик верхней и нижней частей бруса (фиг. 552,*б*). Затем, используя зависимости (2) и (3), находим положение точки A на характеристике конструкции (фиг. 552,*в*).

При разгрузке конструкции (фиг. 552,*в*) внутренние силы исчезают, однако первоначальная длина бруса не восстанавливается.

На основании закона разгрузки (см. гл. VIII, т. II) по характеристике конструкции может быть определено остаточное смещение $\delta_{ост}$ (линия разгрузки AO_1 на фиг. 552,*в* параллельна касательной к линии первичного нагружения OA).



Фиг. 553. Простейшая статически неопределимая система:
а — схема нагружения; *б* — применение метода сечений для установления зависимости между внутренними силами и внешней нагрузкой

При изменении температуры элементов статически определимой конструкции при сборке конструкции в случае, если длина элементов несколько отличается от запроектированной длины, никаких дополнительных усилий в системе не возникнет. Указанные факторы окажут влияние только на положение торцового сечения (изменят длину бруса).

В качестве примера статически неопределимой конструкции рассмотрим колонну, изображенную на фиг. 553,*а*.

В отличие от бруса, изображенного на фиг. 551,*а*, брус, представленный на фиг. 553, *а*, закреплен с двух сторон.

Применяя метод сечений (фиг. 553,*б*), связываем внутренние силы с внешней нагрузкой уравнением равновесия:

$$N_1 + N_2 = P. \tag{4}$$

Изменения длины элементов *1* и *2*, возникающие под действием нагрузки, равны между собой:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \delta. \tag{5}$$

При разгрузке данной конструкции прежние размеры отдельных ее частей не восстанавливаются, а поскольку общая длина бруса остается неизменной, то в ее элементах возникают остаточные усилия.

[Подробное решение задачи об определении внутренних сил и перемещений рассмотренной колонны дано ниже (см. пример 2)].

При нагреве элементов данной конструкции или при сборке ее, в случае если размеры элементов *1* и *2* не выдержаны, также возникнут внутренние силы. Если, например, нагреть одну из частей или выполнить ее несколько более длинной и вставить с усилием на рабочее место, то оба элемента окажутся сжатыми.

Приступим к изучению нескольких примеров расчета статически неопределимых конструкций, выполненных из материалов, имеющих произвольные характеристики при растяжении и сжатии.

Пример 1. Рассмотрим характеристику конструкции, изображенной на фиг. 554, *а*, состоящей из двух скрепленных друг с другом трубок, находящихся под воздействием внутреннего радиального давления p.

Трубки тонкостенные. Средний диаметр D, толщина стенок трубок s_1 и s_2 (будем считать, что диаметры трубок практически одинаковы: $D_1 = D_2 = D$). Характеристики материала трубок представлены на фиг. 554, *б* и *в*.

Зависимость между изменением диаметра трубки и окружной деформацией ε может быть получена из выражения

$$\varepsilon = \frac{\pi(D+u)-\pi D}{\pi D} = \frac{u}{D},$$

следовательно, $u = \varepsilon D$.

Соотношение между радиальным давлением, действующим на трубку, и окружными нормальными напряжениями определяется известным выражением [1]

$$\sigma_t = \frac{pD}{2s}.$$

Основными уравнениями, используемыми при решении данной задачи, являются уравнение равновесия

$$p_1 + p_2 = p, \qquad (6)$$

где p_1 давление, воспринимаемое наружной, а $p_2 = p - p_1$ внутренней трубкой, и уравнение совместности перемещений

$$u_1 = u_2. \qquad (7)$$

На базе характеристик материала трубок построим графики зависимости изменения диаметра трубки u от действующего на трубку радиального давления p (фиг. 554, *г* и *д*).

Прежде чем рассматривать работу конструкции, находящейся под воздействием внутреннего давления p (фиг. 554, *а*), разберем различные случаи скрепления трубок.

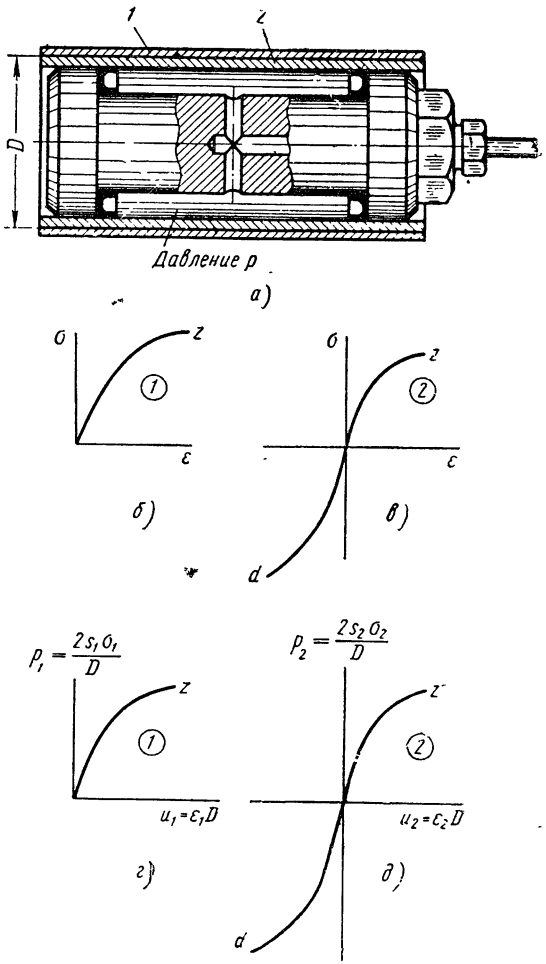
1. В целях достижения плотной посадки внешний диаметр внутренней трубки выполнен несколько большим внутреннего диаметра внешней трубки.

Натяг, т. е. разность между внутренним диаметром наружной трубки и наружным диаметром внутренней трубки, равен Δ. При сборке наружная трубка нагревается (или внутренняя охлаждается).

Контактное давление p_0, возникающее после сборки, определяется из графика, изображенного на фиг. 555. График получен путем совмещения характеристик наружной трубки O_1z при растяжении и внутренней трубки O_2d при сжатии.

Характеристики совмещены так, что расстояние O_1O_2 между осями p_1 и p_2, равное сумме изменений диаметров трубок при скреплении, равно натягу Δ:

$$O_1O_2 = |u_1| + |u_2| = \Delta.$$



Фиг. 554. К примеру «Расчет скрепленных трубок, находящихся под воздействием давления p»:

а — конструкция трубок и схема нагружения; *б* — характеристика при растяжении *z*) материала трубки *1*; *в* — характеристика при растяжении (*z*) и сжатии *d* материала трубки *2*; *г* — характеристика трубки *1*; *д* — характеристика трубки *2*

При восстановлении нормальной температуры наружная трубка растягивается (участок O_1A), внутренняя сжимается (участок O_2A).

Стрелками показано направление нагружения при остывании наружной трубки.

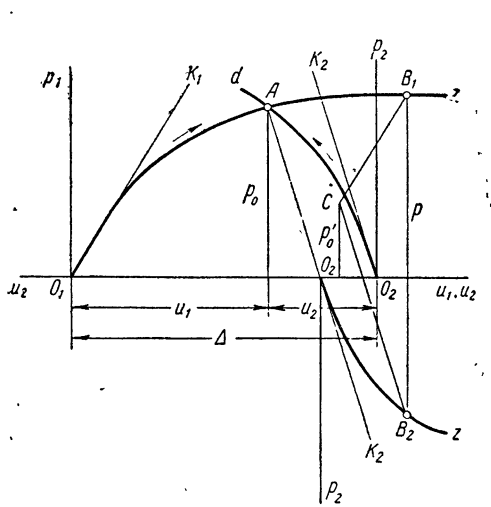
2. При сборке трубки вставляются друг в друга с зазором Δ, а затем в конструкцию подается давление p^*. Давление p^* воспринимается двумя трубками.

Обозначим долю давления, воспринимаемого наружной трубкой, через p_1^*, а долю давления, воспринимаемого внутренней трубкой, p_2^*, причем $p_1^* + p_2^* = p^*$. После снятия давления трубки оказываются скрепленными.

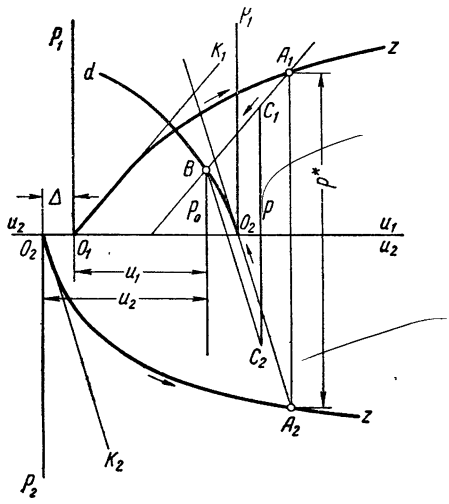
На фиг. 556 дано графическое решение вопроса о скреплении путем опрессовки

При опрессовке давлением p^* обе трубки работают на растяжение. График построен путем совмещения характеристик при растяжении наружной O_1z и внутренней O_2z трубок. Характеристики расположены так, что расстояние между осями p_1 и p_2 равно зазору Δ, т. е. $O_1O_2=\Delta$.

При увеличении давления опрессовки от нуля до значения p^* трубки нагружаются соответственно по линиям O_1A_1 и O_2A_2. При снятии давления опрессовки трубки



Фиг. 555 К примеру «Расчет скрепленных трубок, находящихся под давлением p». Скрепление путем посадки с натягом



Фиг. 556. К примеру «Расчет скрепленных трубок, находящихся под давлением p». Скрепление путем опрессовки давлением.

разгружаются. Наружная трубка остается растянутой (линия разгрузки A_1B параллельна касательной O_1K_1, проведенной в начале координат, т. е. $A_1B \parallel O_1K_1$). Внутренняя трубка разгружается от растяжения (линия A_2O_2), а затем сжимается внешней трубкой (линия O_2B).

Для определения контактного давления из точки O_2, как из начала координат, проведена характеристика внутренней трубки при сжатии O_2d. Точка B, в которой эта характеристика внутренней трубки при сжатии пересекает линию разгрузки наружной трубки A_1B, определяет контактное давление p_0.

Из того же графика могут быть получены изменения диаметров трубок u_1 и u_2, причем

$$u_2 - u_1 = \Delta.$$

Заметим, что не всегда две трубки могут быть скреплены путем опрессования давлением. Такой случай неудачного соединения показан на фиг. 557.

При опрессовке давлением p^* трубки деформируются (линии O_1A_1 и O_2A_2). После снятия давления (линии разгрузки A_1a_1 и A_2a_2) между трубками образуется зазор Δ^*.

Рассмотренные приемы скрепления показывают, что величина контактного давления и изменения диаметров трубок при сборке зависят от метода скрепления (посадка в нагретом или охлажденном состоянии, скрепление при помощи опрессовки давлением p^*).

Перейдем теперь к рассмотрению работы конструкции, составленной из двух скрепленных описанными способами трубок, под действием внутреннего (рабочего) давления p (см. фиг. 554, a).

Для построения характеристики конструкции воспользуемся уже выполненными графиками.

Так, в первом случае (скрепление в нагретом состоянии, фиг. 555) при нагружении рабочим давлением наружная трубка дополнительно растягивается. Зависимость между давлениями и изменениями диаметра трубки иллюстрируется линией AB_1. Внутренняя трубка сначала разгружается от сжатия, причем линия разгрузки

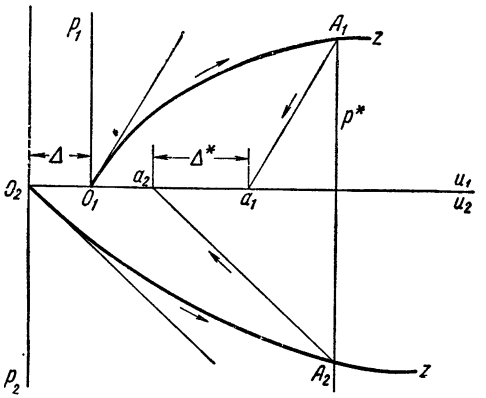
(прямая AO_2) параллельна касательной O_2K_2. Затем она нагружается на растяжение. Для получения линии нагрузки при растяжении внутренней трубки внизу построена характеристика этой трубки при растяжении (линия O_2z). Рабочему давлению p соответствуют на характеристиках O_1z и O_2z точки B_1 и B_2.

Известно, что нагружение на сжатие за предел текучести изменяет характеристику при растяжении (эффект Баушингера, см. гл. VIII, т. II).

Однако, учитывая, что при нагружении конструкции рабочим давлением напряжения растяжения внутренней трубки невелики, используем начальную часть ее характеристики в первоначальном виде.

При снятии рабочего давления линиями разгрузки являются прямые B_1C и B_2C, соответственно параллельные касательным O_1K_1 и O_2K_2. Из рассмотрения графика на фиг. 555 следует, что после разгрузки контактное давление становится значительно меньшим ($p_0' < p_c$).

Во втором случае (скрепление опрессовкой) используем график, изображенный на фиг. 556. При нагружении рабочим давлением $p < p^*$ наружная трубка растягивается, а внутренняя сначала разгружается от сжатия, а затем нагружается на растяжение (эффект Баушингера в этом случае также не принимаем во внимание). Линиями нагружения трубок являются прямые BC_1 и BC_2, соответственно параллельные касательным O_1K_1 и O_2K_2. В случае, если давление p больше давления опрессовки p^*, то после разгрузки контактное давление изменится.



Фиг. 557. К примеру «Расчет скрепленных трубок, находящихся под давлением p». Случай, когда скрепление путем опрессовки давлением невозможно

В этом случае рабочее давление можно рассматривать как новое, более сильное давление опрессовки. Контактное давление p_0 после снятия давления опрессовки увеличится.

Пример 2. Проведем расчет колонны, защемленной по краям и нагруженной осевой силой, приложенной к выступу между опорами (фиг. 553). Характеристики материала бруса при растяжении z и сжатии d изображены на фиг. 558. Площади поперечных сечений бруса $F_1 = 2$ *см*^{2} и $F_2 = 1{,}5$ *см*^{2}; длины частей бруса $l_1 = 10$ *см* и $l_2 = 14$ *см*.

Установим зависимости между нагрузкой P, действующей на брус, внутренними силами N_1 и N_2, возникающими в сечениях верхней и нижней частей бруса, и смещением δ выступа, к которому приложена нагрузка.

Для получения графического решения поставленной задачи достаточно построить характеристики верхней Oz и нижней Od частей в координатах

$$N_1 = \sigma F_1; \quad \delta = \varepsilon l_1 \quad \text{и} \quad N_2 = \sigma F_2; \quad \delta = \varepsilon l_2.$$

Это построение выполнено на фиг. 559.

Как было сказано ранее, основными уравнениями, используемыми при решении данной задачи, являются уравнение равновесия (4) и уравнение перемещений (5).

Если расположить характеристики верхней и нижней частей бруса так, как показано на фиг. 559, то полученный график может служить решением задачи.

Действительно, если отрезок P' соответствует приложенной нагрузке, то отрезки N_1' и N_2' представляют доли силы P', воспринимаемые верхней и нижней частями.

Согласно уравнению (4) сумма N_1' и N_2' равна нагрузке P'.

Из чертежа видно, что отрезок δ' представляет равные друг другу удлинение верхней и укорочение нижней частей [см. уравнение перемещений (5)].

Рассмотрим, по какому закону изменяются усилия и перемещения при разгрузке колонны, нагруженной усилием P', и при вторичном ее нагружении. (см. гл. V, т. I и гл. VIII, т. II).

Согласно закону разгрузки и вторичного нагружения линия разгрузки и вторичного нагружения представляет собой прямую, параллельную касательной, проведенной в начале координат к характеристике части конструкции.

Линия разгрузки верхней части бруса AO_1 параллельна касательной OK_1; линия разгрузки нижней части BR параллельна касательной OK_2.

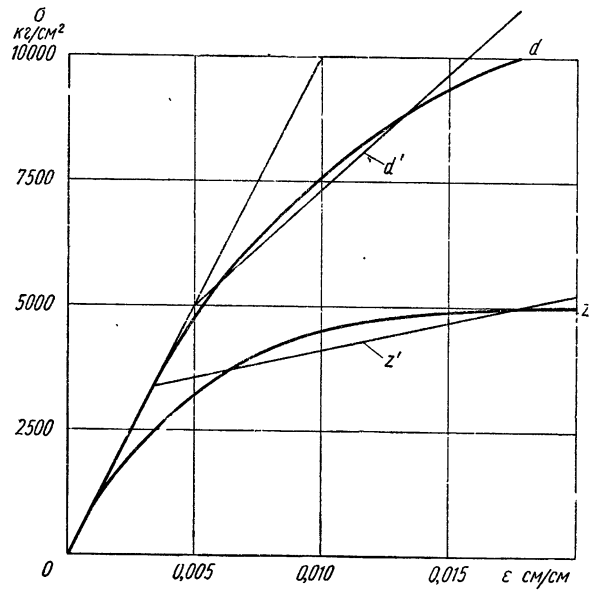
Из рассмотрения чертежа видно, что при разгрузке верхняя часть разгружается от растяжения, а затем сжимается нижней частью. Происходит это потому, что в

процессе нагрузки верхняя часть деформируется сильнее нижней. При разгрузке она препятствует нижней восстанавливать свои первоначальные размеры, поэтому верхняя часть в процессе разгрузки и начинает сжиматься нижней частью.

Для получения линии сжатия верхней части из точки O_1 проведена характеристика верхней части при сжатии.

Кривая O_1d представляет собой характеристику верхней части бруса при сжатии.

Точка R диаграммы соответствует полной разгрузке конструкции. Отрезок aR представляет в масштабе остаточную силу (в данном случае элементы разгруженной колонны сжаты). Отрезок aO выражает остаточное перемещение $\delta_{ост}$ выступа, к которому приложена нагрузка.



Фиг. 558. К примеру «Расчет колонны, закрепленной по краям». Характеристики материала колонны при растяжении (z) и сжатии (d). Схематизированные характеристики при растяжении (z') и сжатии (d')

Известно, что нагружение на растяжение за предел текучести изменяет характеристику при сжатии (эффект Баушингера, см. гл. VIII т. II). Однако учитывая, что при разгрузке рассматриваемой конструкции напряжения сжатия в верхней ее части невелики, используем начальную часть характеристики при сжатии в ее первоначальном виде.

При вторичном нагружении колонны верхняя ее часть сначала разгружается от сжатия, а затем нагружается на растяжение. Нижняя часть по-прежнему сжимается.

На графике (фиг. 559) показаны два случая, когда обжатая и необжатая конструкции нагружены одной и той же силой P'', меньшей нагрузки P'. Из рассмотрения чертежа (фиг. 559) видно, что усилие, воспринимаемое верхней частью в обжатой колонне, меньше, чем в необжатой, нагруженной тем же усилием:

$$N_1'' < N_1.$$

Усилие, воспринимаемое нижней частью в обжатой конструкции, больше, чем в необжатой:

$$|N_2''| > |N_2|.$$

Таким образом, выбирая усилие обжатия, можно влиять на распределение усилий при последующих нагружениях.

Определим предельную для данной конструкции нагрузку. Из рассмотрения графика видно, что в случае, когда нагрузка достигает величины P_{III} (отрезок CD), внутренние силы в сечениях верхней части становятся равными

$$(N_1)_b = \sigma_{bz} F.$$

Следовательно, предельной нагрузке соответствует начало разрушения верхней части конструкции.

Отношение предельной и рабочей нагрузок обычно называется коэффициентом запаса по предельной нагрузке.

Принимая в рассматриваемом примере нагрузку P'' за рабочую, можем вычислить коэффициент запаса по предельной нагрузке:

$$n_{пред} = \frac{P_{III}}{P''}. \qquad (8)$$

Схематизируем характеристики материала так, как это показано на фиг. 558, и построим аналитическое решение на базе схематизированных диаграмм.

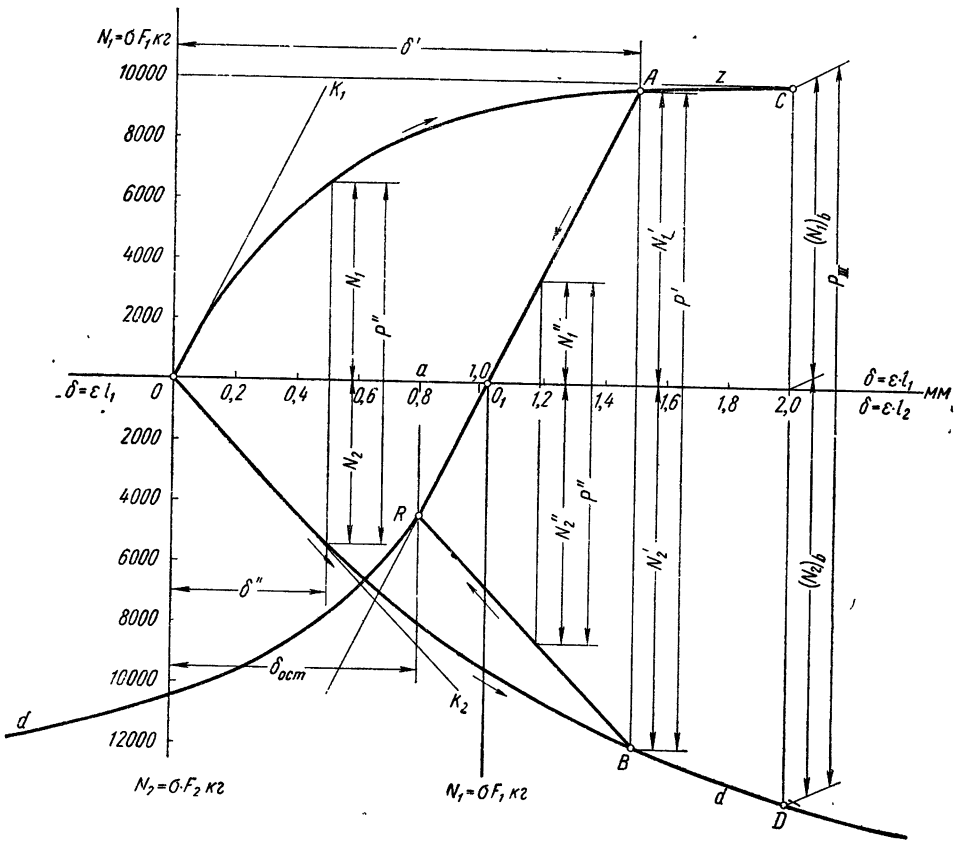
Аналитическое решение иллюстрировано графиком, построенным на фиг. 560. Порядок построения расчетных графиков, изображенных на фиг. 560, ничем не отличается от построений, основанных на действительных характеристиках (фиг. 559).

Из рассмотрения фиг. 560 видно, что при первичном нагружении конструкции можно различить три этапа нагружения:

1) все элементы колонны работают в пределах упругости ($0 \leqslant P \leqslant P_{\text{I}}$);

2) верхняя часть конструкции пластически деформируется, нижняя часть работает в пределах упругости ($P_{\text{I}} \leqslant P \leqslant P_{\text{II}}$);

3) обе части колонны работают за пределом упругости ($P_{\text{II}} \leqslant P \leqslant P_{\text{III}}$).



Фиг. 559. К примеру «Расчет колонны, закрепленной по краям». Графическое решение, основанное на действительных характеристиках материала

Выпишем все механические характеристики материала рассматриваемой конструкции на основе схематизированных диаграмм, представленных на фиг. 558, а именно: пределы текучести $\sigma_{sz} = 3400$ *кг/см*^{2} и $\sigma_{sd} = 5000$ *кг/см*^{2}; пределы прочности $\sigma_{bz} = 5250$ *кг/см*^{2}; и $\sigma_{bd} = 11\,000$ *кг/см*^{2}; деформации, соответствующие пределам текучести, $\varepsilon_{sz} = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$ *см/см* и $\varepsilon_{sd} = 5 \cdot 10^{-3}$ *см/см*; деформации, соответствующие пределам прочности, $\varepsilon_{bz} = 0{,}0200$ *см/см* и $\varepsilon_{bd} = 0{,}0179$ *см/см*; модуль упругости $E = 10^6$ *кг/см*^{2}; модули упрочнения $E_1 = 1{,}11 \cdot 10^5$ *кг/см*^{2} и $E_2 = 4{,}65 \cdot 10^5$ *кг/см*^{2}.

Перечислим основные параметры, характеризующие верхнюю часть конструкции при растяжении, а нижнюю при сжатии.

Усилия, соответствующие пределам текучести, равны

$$(N_1)_s = 3400 \cdot 2 = 6800 \text{ кг}$$

и

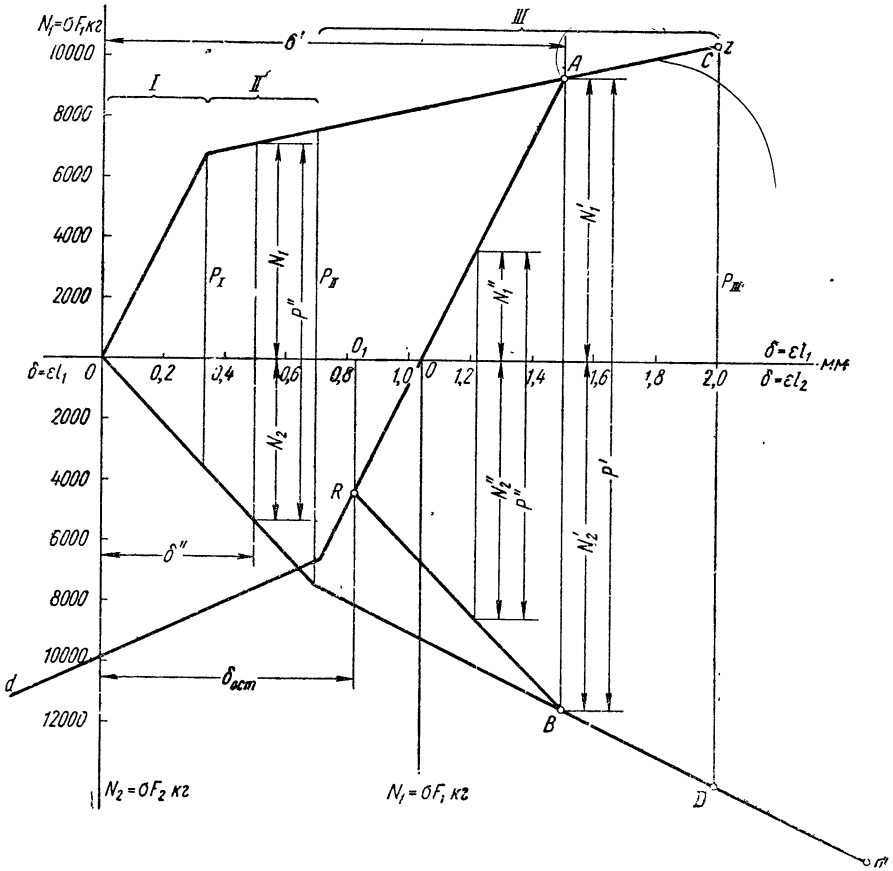
$$(N_2)_s = 5000 \cdot 1{,}5 = 7500 \text{ кг}.$$

Изменения длин, соответствующие пределам текучести,

$$(\Delta l_1)_s = 3{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 3{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ см}$$

и

$$(\Delta l_2)_s = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 14 = 7 \cdot 10^{-2} \text{ см}.$$



Фиг. 560. К примеру «Расчет колонны, закрепленной по краям» Графическое решение, основанное на схематизированных характеристиках материала

Усилия, соответствующие пределам прочности,

$$(N_1)_b = 5250 \cdot 2 = 10\,500 \text{ кг}$$

и

$$(N_2)_b = 11\,000 \cdot 1{,}5 = 16\,500 \text{ кг}.$$

Изменения длин, соответствующие пределу прочности,

$$(\Delta l_1)_b = 0{,}02 \cdot 10 = 0{,}2 \text{ см}$$

и

$$(\Delta l_2)_b = 0{,}0179 \cdot 14 = 0{,}250 \text{ см}.$$

Выведем соотношения между нагрузкой P и усилиями, воспринимаемыми верхней и нижней частями на первом этапе нагружения (обе части работают в пределах упругости).

Согласно уравнению перемещений (5), используя закон Гука, получим зависимость между усилиями N_1 и N_2, воспринимаемыми верхней и нижней частями:

$$\frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{N_2 l_2}{EF_2},$$

или иначе

$$N_1 = N_2 \frac{l_2 F_1}{l_1 F_2} = N_2 \frac{14 \cdot 2}{10 \cdot 1{,}5} = 1{,}87\, N_2.$$

следовательно,

$$N_1 = 0{,}652P; \quad N_2 = 0{,}348P. \tag{9}$$

Усилие в конце первого этапа нагружения

$$P_I = (N_1)_s + \frac{1}{1{,}87}(N_1)_s = 6800\left(1 + \frac{1}{1{,}87}\right) = 10\,400 \text{ кг}.$$

Перемещение выступа, к которому приложена нагрузка, соответствующее нагрузке P_I, равно

$$\delta_I = (\Delta l_1)_s = 3{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ см}.$$

Рассмотрим теперь работу конструкции в конце второго этапа нагружения. Усилие, воспринимаемое нижней частью, равно $(N_2)_s = 7500$ кг.

Соответствующее перемещение выступа, к которому приложена нагрузка,

$$\delta_{II} = (\Delta l_2)_s = 7 \cdot 10^{-2} \text{ см}.$$

Линейная деформация верхней части в конце второго этапа

$$\varepsilon = \frac{\delta_{II}}{l_1} = \frac{7 \cdot 10^{-2}}{10} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ см/см}.$$

Напряжение в верхней части, соответствующее вычисленной деформации ε (фиг. 561), равно

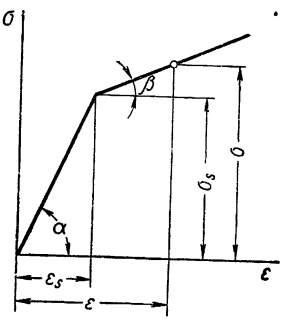
$$\sigma = \sigma_s + (\varepsilon - \varepsilon_s) E_1 =$$
$$= 3400 + (7 \cdot 10^{-3} - 3{,}4 \cdot 10^{-3})\, 1{,}11 \cdot 10^5 = 3800 \text{ кг/см}^2.$$

Усилие, воспринимаемое верхней частью в конце второго этапа,

$$N_1 = \sigma F_1 = 3800 \cdot 2 = 7600 \text{ кг}.$$

Нагрузка в конце второго этапа нагружения

$$P_{II} = 7600 + 7500 = 15100 \text{ кг}.$$



Фиг. 561. К задаче «Расчет колонны, закрепленной по краям». Схематизированная характеристика материала с линейным упрочнением. Зависимость между напряжениями и деформациями
$\sigma = \sigma_s + (\varepsilon - \varepsilon_s) \operatorname{tg} \beta$.

Конец третьего этапа нагружения характеризуется возникновением в верхнем стержне разрушающих напряжений.

Усилие, воспринимаемое верхней частью, и перемещение места приложения нагрузки равны в этом случае $(N_1)_b = 10\,500$ кг и $\delta_{III} = 0{,}2$ см. Соответствующая линейная деформация нижней части

$$\varepsilon = \frac{\delta_{III}}{l_2} = \frac{0{,}2}{14} = 1{,}43 \cdot 10^{-2} \text{ см/см}.$$

Напряжение в поперечном сечении нижней части в конце третьего этапа (фиг. 561)

$$\sigma = \sigma_s + (\varepsilon - \varepsilon_s) E_2 = 5000 + (14{,}3 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3}) \cdot 4{,}65 \cdot 10^5 = 9320 \text{ кг/см}^2.$$

Усилие, воспринимаемое нижней частью,

$$N_2 = \sigma F_2 = 9320 \cdot 1{,}5 = 14\,000 \text{ кг}.$$

Таким образом, нагрузка, соответствующая концу третьего этапа нагружения, является предельной.

Предельная нагрузка равна

$$P_{III} = 10\,500 + 14\,000 = 24\,500 \text{ кг}.$$

Нагрузим рассматриваемую конструкцию, например, так, чтобы перемещение выступа, к которому приложена нагрузка, было равно $\delta' = 0{,}15$ *см*.

Деформированное и напряженное состояние верхней части характеризуют следующие параметры:

линейная деформация

$$\varepsilon = \frac{\delta'}{l_1} = \frac{0{,}15}{10} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ см/см};$$

напряжение в поперечном сечении (фиг. 561)

$$\sigma = \sigma_s + (\varepsilon - \varepsilon_s) E_1 = 3400 + (15 \cdot 10^{-3} - 3{,}4 \cdot 10^{-3}) 1{,}11 \cdot 10^5 = 4690 \text{ кг/см}^2.$$

Усилие, воспринимаемое верхней частью,

$$N_1' = \sigma F_1 = 4690 \cdot 2 = 9380 \text{ кг}.$$

Линейная деформация нижней части

$$\varepsilon = \frac{\delta'}{l_2} = \frac{0{,}15}{14} = 10{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ см/см}.$$

Напряжения в поперечном сечении

$$\sigma = \sigma_s + (\varepsilon - \varepsilon_s) E_2 = 5000 + (10{,}7 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3}) \cdot 4{,}65 \cdot 10^5 = 7650 \text{ кг/см}^2.$$

Усилие, воспринимаемое нижней частью

$$N_2' = \sigma F_2 = 7650 \cdot 1{,}5 = 11\,500 \text{ кг}.$$

Нагрузка, соответствующая заданному перемещению,

$$P' = 9380 + 11\,500 = 20\,900 \text{ кг}.$$

Данная нагрузка будет далее рассматриваться как первичная нагрузка. На чертеже фиг. 560 она обозначена P'.

Определим остаточные внутренние силы, возникающие при разгрузке.

Разгрузку можно представить себе как результат дополнительного нагружения усилием, равным, но противоположным первичному усилию.

Учитывая, что при вторичном нагружении материал подчиняется закону Гука, применив соотношения (9), найдем остаточные усилия:

$$(N_1)_{ост} = 0{,}652P' - N_1' = 0{,}652 \cdot 20\,900 - 9380 = 4230 \text{ кг (сжатие)};$$

$$(N_2)_{ост} = N_2' - 0{,}348P' = 11\,500 - 0{,}348 \cdot 20\,900 = 4230 \text{ кг (сжатие)}.$$

Сопоставим состояние конструкции при первичном нагружении ее усилием P'', при котором перемещение $\delta'' = 0{,}05$ *см*, с состоянием конструкции, предварительно обжатой усилием $P' = 20\,900$ *кг* и нагруженной тем же усилием P''. Во втором случае нагрузку P'' будем называть вторичной нагрузкой.

Деформация и напряжение в верхней части, соответствующие перемещению $\delta'' = 0{,}05$ *см*, определяются следующими выражениями:

$$\varepsilon = \frac{\delta''}{l_1} = \frac{0{,}05}{10} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см/см};$$

согласно фиг. 561 напряжение равно

$$\sigma = \sigma_s + (\varepsilon - \varepsilon_s) E_1 = 3400 + (5 \cdot 10^{-3} - 3{,}4 \cdot 10^{-3}) 1{,}11 \cdot 10^5 = 3580 \text{ кг/см}^2.$$

Усилие, воспринимаемое верхней частью,

$$N_1 = \sigma F_1 = 3580 \cdot 2 = 7160 \text{ кг}.$$

Деформация и напряжение в нижней части равны

$$\varepsilon = \frac{\delta''}{l_2} = \frac{0{,}05}{14} = 3{,}57 \cdot 10^{-3} \text{ см/см}.$$

и

$$\sigma = E\varepsilon = 10^3 \cdot 3{,}57 \cdot 10^{-3} = 3570 \text{ кг/см}^2.$$

Усилие в нижней части

$$N_2 = \sigma F_2 = 3570 \cdot 1{,}5 = 5360 \text{ кг}.$$

Нагрузка P'' равна

$$P'' = 7160 + 5360 = 12\,500 \text{ кг}.$$

Рассмотрим теперь нагружение предварительно обжатой стойки вторичной силой P'', меньшей первичной P'.

Усилия, воспринимаемые верхней частью, при вторичном нагружении силой P'' равны

$$N_1'' = 0{,}652P'' - (N_1)_{ост} = 0{,}652 \cdot 12\,500 - 4230 = 3920 \text{ кг (растяжение)};$$

усилие в нижней части

$$N_2'' = 0{,}348P'' + (N_2)_{ост} = 0{,}348 \cdot 12\,500 + 4230 = 8580 \text{ кг (сжатие)}.$$

В табл. 26 сопоставлены результаты расчетов, основанных на использовании действительных и схематизированных характеристик материала.

Таблица 26

К примеру „Расчет колонны, закрепленной по торцам". Сопоставление результатов расчетов колонны по действительным и схематизированным характеристикам материала

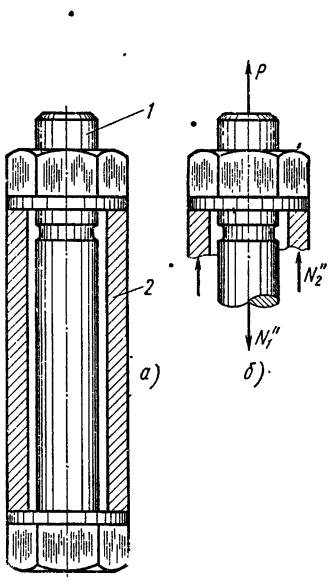
Параметры		Расчет, основанный на действительных характеристиках	Расчет, основанный на схематизированных характеристиках	Размерность
Первичная нагрузка (обжатие)	δ'	0,15	0,15	см
	N_1'	9800 (растяжение)	9380 (растяжение)	кг
	N_2'	12 000 (сжатие)	11 500 (сжатие)	кг
	P'	21 800	20 900	кг
Разгруженная конструкция	$\delta_{ост}$	0,080	0,082	см
	$(N_1)_{ост}$	4400 (сжатие)	4230 (сжатие)	кг
	$(N_2)_{ост}$	4400 (сжатие)	4230 (сжатие)	кг
	P	0	0	кг
Вторичная (рабочая) нагрузка	N_1''	3400 (растяжение)	3920 (растяжение)	кг
	N_1''	8600 (сжатие)	8580 (сжатие)	кг
	P''	12 000	12 500	кг
	$n_{пред}$	1,96	1,94	
Первичное нагружение силой P''	δ	0,05	0,05	см
	N_1	6500 (растяжение)	7160 (растяжение)	кг
	N_2	5500 (сжатие)	5360 (сжатие)	кг
	P	12 000	12 500	кг
Предельная нагрузка	δ	0.20	0,20	см
	$P_{пред}$	23 500	24 500	кг

Из рассмотрения таблицы видно, что точное (графическое) решение и решение, основанное на схематизированных характеристиках, дают практически совпадающие результаты.

В табл. 26 приведены значения коэффициента запаса по предельной нагрузке.

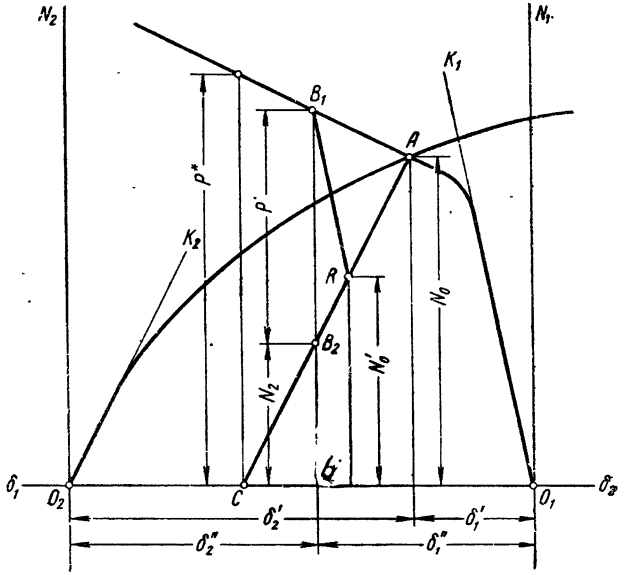
Как уже было сказано ранее, коэффициент запаса по предельной нагрузке равен отношению предельной (в данном случае разрушающей) нагрузки к фактической (рабочей) нагрузке.

Пример 3. Проанализируем работу соединения, изображенного на фиг. 562, *а*. Конструкция символизирует работу напряженного болтового соединения деталей, которые после сборки нагружаются усилиями, дополнительно растягивающими болты и уменьшающими плотность соединения деталей.



Фиг. 562. К задаче «Расчет напряженного соединения — болт, стягивающий трубку»

а — конструкция соединения; *б* — усилия, действующие в конструкции, нагруженной усилием *P*



Фиг. 563. К задаче «Расчет напряженного соединения — болт, стягивающий трубку». Графическое определение усилий, возникающих в деталях конструкции при сборке, нагружении и разгрузке

В таких условиях работают, например, сквозные болты, соединяющие крышку цилиндра и картер двигателя внутреннего сгорания, болты фланцевого соединения труб и т. п.

Характеристики материала болта *1* и трубки *2* известны.

Как и в рассмотренных ранее случаях, строим характеристики частей конструкции — болта и трубки (фиг. 563). Для этого строим диаграммы в координатах $N_1=\sigma F_1$; $\delta_1=\varepsilon l_1$ и $N_2=\sigma F_2$; $\delta_2=\varepsilon l_2$.

Располагаем характеристики болта O_1A и трубки O_2A так, чтобы у них была общая ордината N_0, соответствующая усилию предварительной затяжки болта:

$$N_0 = N_1' = N_2'. \tag{10}$$

Применим метод сечений и рассмотрим условие равновесия части конструкции, изображенной на фиг. 562, *б*.

Из рассмотрения чертежа следует, что

$$N_2'' + P = N_1''. \tag{11}$$

Этого уравнения недостаточно для определения внутренних усилий в сечении болта и трубки. Второе уравнение, необходимое для решения задачи, можно составить из рассмотрения перемещений в системе. При нагружении силой *P* болт дополнительно растягивается, а трубка разгружается. Насколько увеличится удлинение

болта, настолько уменьшится сжатие трубки. Это условие может быть записано следующим образом:

$$\delta_1'' - \delta_1' = \delta_2' - \delta_2''. \tag{12}$$

На графике (фиг. 563) нагружению болта усилием P соответствует часть кривой AB_1. Согласно закону разгрузки разгружение трубки происходит по прямой $AC \| O_2K_2$, где O_2K_2 — касательная, проведенная из точки O_2 к характеристике трубки.

Усилие в сечении болта на чертеже выражается в масштабе отрезком bB_1; усилие в сечении трубки — отрезком bB_2.

При снятии нагрузки P болт несколько разгружается (линия разгрузки $B_1R \| O_1K_1$), а трубка нагружается (линия нагрузки $B_2R \| O_2K_2$). Точка R соответствует разгруженной конструкции. Из рассмотрения графика видно, что усилие затяжки N_0' уменьшилось по сравнению с усилием затяжки N_0.

Из графика следует, что при нагружении силой P^* трубка разгружается совершенно. При дальнейшем увеличении нагрузки P между болтом и трубкой возникает зазор.

§ 4. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ, ЭЛЕМЕНТЫ КОТОРЫХ НАХОДЯТСЯ В УСЛОВИЯХ ОДНООСНОГО НЕОДНОРОДНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ (изгиб и изгиб с растяжением или сжатием)

А. Основные положения расчета

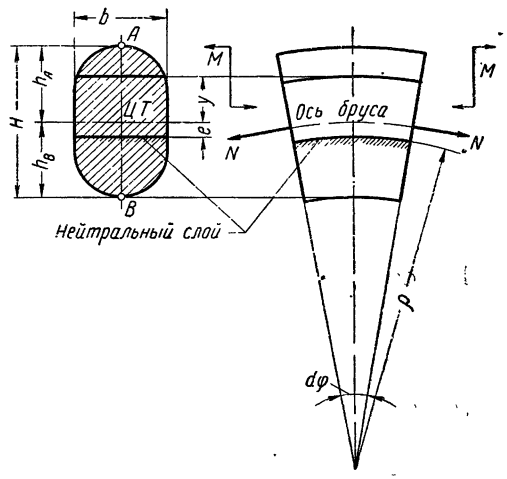
Рассмотрим общую теорию расчета прямого бруса при чистом изгибе совместно с растяжением или сжатием.

Примем следующие ограничения и допущения. Изгиб происходит в одной из главных плоскостей бруса. Сечения бруса симметричны относительно плоскости изгиба.

Как было указано в § 1 настоящей главы, теория изгиба опирается на гипотезу плоских сечений и на допущение об одноосности напряженного состояния при изгибе.

Несмотря на то что теория выводится для чистого изгиба прямого бруса, все выводы, полученные для чистого изгиба прямого бруса, могут быть использованы также для случая поперечного изгиба прямого бруса, а также и для чистого и поперечного изгиба бруса малой кривизны.

Рассмотрим элемент бруса, деформированного при чистом изгибе и растяжении (фиг. 564).



Фиг 564. Элемент прямого бруса при чистом изгибе и растяжении. Плоскость изгиба является плоскостью симметрии бруса.

Используя гипотезу плоских сечений, можем написать закон изменения осевых деформаций по высоте сечения бруса:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + e + y)\,d\varphi - \rho\,d\varphi}{\rho\,d\varphi} = \frac{e + y}{\rho},$$

или

$$\varepsilon = \varkappa (y + e), \tag{13}$$

где $\varkappa = \frac{1}{\rho}$ — кривизна бруса в рассматриваемом сечении;

e — расстояние нейтрального слоя от центра тяжести поперечного сечения бруса (фиг. 564).

Пользуясь соотношением (13), можно определить осевые деформации в точках A и B, наиболее удаленных от нейтрального слоя (фиг. 564):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_A &= \varkappa (h_A + e); \\ \varepsilon_B &= \varkappa (-h_B + e). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Складывая и вычитая выражения (14), получим формулы, определяющие кривизну бруса

$$\varkappa = \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_B}{H} \tag{15}$$

и положение нейтрального слоя

$$e = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2\varkappa} - \frac{h_A - h_B}{2}. \tag{16}$$

В поперечных сечениях бруса возникают нормальные напряжения.

Сумма проекций нормальных сил на ось бруса называется нормальной силой в сечении бруса.

Нормальная сила равна

$$N = \int_F \sigma dF. \tag{17}$$

Сумма моментов нормальных сил относительно оси поперечного сечения, параллельной нейтральному слою, называется изгибающим моментом в сечении бруса.

Изгибающий момент равен

$$M = \int_F \sigma dF y. \tag{18}$$

Из соотношения (13) следует, что

$$y = \frac{\varepsilon}{\varkappa} - e \quad \text{и} \quad dy = \frac{d\varepsilon}{\varkappa}.$$

Учитывая, что $dF = bdy$, перепишем выражения (17) и (18) в виде

$$N = \frac{1}{\varkappa} \int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma b d\varepsilon \tag{19}$$

и

$$M = \frac{1}{\varkappa^2} \int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma b \varepsilon d\varepsilon - \frac{e}{\varkappa} \int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma b d\varepsilon. \tag{20}$$

Выведенные соотношения (15), (16), (19) и (20) позволяют на базе характеристик материала при растяжении и сжатии построить

зависимость $\varkappa = \psi(M, N)$ и установить величину напряжений в поперечном сечении бруса, т. е. они по сути дела разрешают задачу расчета бруса на прочность и жесткость.

Как было указано в гл. XI т. II настоящей книги, интегралы (19) и (20) могут быть вычислены графически.

Так,

$$\int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma b d\varepsilon = |\Omega_z| - |\Omega_d| \tag{21}$$

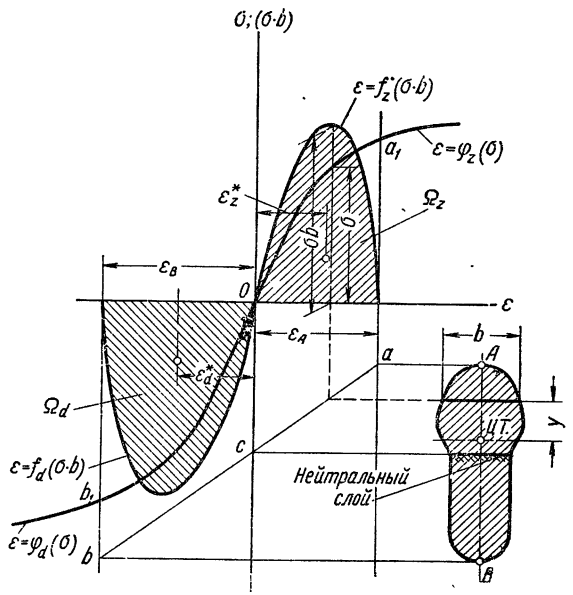
и

$$\int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma b \varepsilon d\varepsilon = |\Omega_z\, \varepsilon_z^*| + |\Omega_d\, \varepsilon_d^*|, \tag{22}$$

где Ω_z в *кг/см* и Ω_d в *кг/см* — площади, ограниченные кривыми $\varepsilon = f_z(\sigma b)$ и $\varepsilon = f_d(\sigma b)$, осью абсцисс и прямыми, параллельными оси ординат, проведенными на расстоянии ε_A и ε_B от нее (фиг. 565).

Кривые $\varepsilon = f_z(\sigma b)$ и $\varepsilon = f_d(\sigma b)$ могут быть построены графически, если известны характеристики материала при растяжении $\varepsilon = \varphi_z(\sigma)$ и сжатии $\varepsilon = \varphi_d(\sigma)$, а также форма поперечного сечения бруса.

ε_z^* в *см/см* и ε_d^* в *см/см* представляют собой абсциссы центров тяжести площадей Ω_z и Ω_d.



Фиг. 565. Графическое решение задачи об изгибе с растяжением прямого бруса. $\varepsilon = \varphi_z(\sigma)$ и $\varepsilon = \varphi_d(\sigma)$ — характеристики материала бруса при растяжении и сжатии. Справа внизу поперечное сечение бруса

Для выполнения указанного графического построения достаточно, как это показано на фиг. 565, рядом с характеристиками материала бруса вычертить сечение бруса, отложить заданные деформации ε_A и ε_B, а затем из крайних точек сечения провести горизонтальные прямые Aa и Bb. Наклонная линия ab, выражающая закон изменения деформаций по высоте сечения, дает возможность построить кривые $\varepsilon = f(\sigma b)$ и определяет положение нейтрального слоя (точка c).

Части характеристик растяжения Oa_1 и сжатия Ob_1 являются эпюрами напряжений, возникающих в поперечном сечении бруса. Так, например, напряжение материала бруса на расстоянии y от центра тяжести его сечения равно σ.

В практике машиностроения часто приходится встречаться с расчетом брусьев прямоугольного поперечного сечения. В этом случае $h_A = h_B = \frac{H}{2}$, $b = B = \text{const}$, и формулы (15), (16), (19) и (20) принимают вид

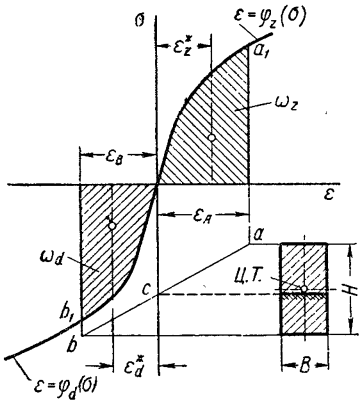
$$\varkappa = \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_B}{H}; \tag{23}$$

$$e = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2\varkappa}; \tag{24}$$

$$N = \frac{B}{\varkappa} \int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma \, d\varepsilon; \tag{25}$$

$$M = \frac{B}{\varkappa^2} \int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma \varepsilon d\varepsilon - \frac{Be}{\varkappa} \int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma d\varepsilon. \tag{26}$$

Для расчета брусьев прямоугольного поперечного сечения необходимость построения кривых $\varepsilon = f(\sigma b)$ отпадает, поскольку интегралы, входящие в формулы (25) и (26), могут быть определены графически непосредственно на базе характеристик материала бруса при растяжении и сжатии. Подобно предыдущему (фиг. 566)



Фиг.566. Графическое решение задачи об изгибе с растяжением прямого бруса прямоугольного поперечного сечения. $\varepsilon = \varphi_z(\sigma)$ и $\varepsilon = \psi_d(\sigma)$ характеристики материала бруса при растяжении и сжатии. Справа внизу поперечное сечение бруса

$$\int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma d\varepsilon = |\omega_z| - |\omega_d| \tag{27}$$

и

$$\int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma \varepsilon d\varepsilon = |\omega_z \varepsilon_z^*| + |\omega_d \varepsilon_d^*|, \tag{28}$$

где ω_z в *кг/см*^{2} и ω_d в *кг/см*^{2} — площади, ограниченные частями Oa_1 и Oa_2 характеристик при растяжении и сжатии, осью абсцисс и прямыми, параллельными оси ординат на расстоянии ε_A и ε_B от нее.

Величины ε_z^* в *см/см* и ε_d^* в *см/см* — абсциссы центров тяжестей соответствующих площадей.

Как частный случай рассмотренной теории могут быть получены соотношения для расчета прямого бруса на изгиб при отсутствии растяжения (сжатия).

Если положить в формулах (19) и (20) $N = 0$, то получим выражения

$$\int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma b d\varepsilon = 0, \tag{29}$$

и

$$M = \frac{1}{\varkappa^2} \int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma b \varepsilon \, d\varepsilon. \tag{30}$$

Формула (29) указывает, что на фиг. 565 площади кривых $\varepsilon = f_z(\sigma b)$ и $\varepsilon = f_d(\sigma b)$ в данном частном случае равны друг другу:

$$|\Omega_z| = |\Omega_d|. \tag{31}$$

Пользуясь соотношением (31), можно по заданному значению наибольшей деформации ε_A определить подбором деформацию ε_B.

Наконец, если $b = B = \text{const}$ (брус прямоугольного сечения), то формулы (29) и (30) еще более упрощаются. В этом случае справедливы соотношения

$$\int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma d\varepsilon = 0 \tag{32}$$

и

$$M = \frac{B}{\varkappa^2} \int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma\varepsilon \, d\varepsilon. \tag{33}$$

Формулам (32) и (33) при выполнении графического расчета соответствуют весьма простые и удобные для практического использования выражения

$$|\omega_z| = |\omega_d| \tag{34}$$

и

$$M = \frac{B}{\varkappa^2} \left[|\omega_z \varepsilon_z^*| + |\omega_d \varepsilon_d^*| \right]. \tag{35}$$

Б. Расчетные формулы в безразмерных параметрах

При решении ряда задач целесообразно применять преобразованные формулы, в которых расчетные величины заменены безразмерными параметрами.

Преимущества решения с использованием безразмерных параметров будут раскрыты далее.

В основу расчета в безразмерных величинах положим характеристики материала при растяжении и сжатии, построенные в безразмерных координатах ξ, η, где

$$\xi = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bz}}; \tag{36}$$

$$\eta = \frac{\sigma}{\sigma_{bz}}. \tag{37}$$

Предположим, что характеристики материала в безразмерных координатах построены (фиг. 567).

Введем следующие безразмерные величины:

$$\xi_z = \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_{bz}}; \tag{38}$$

$$\xi_d = \frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_{bz}}; \tag{39}$$

$$\zeta = \frac{e}{H}; \tag{40}$$

$$\lambda = \frac{b}{B}; \tag{41}$$

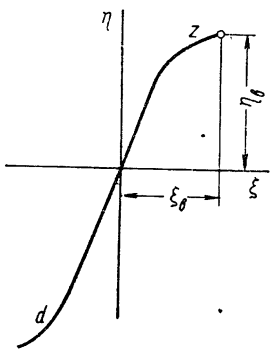
$$\chi = \frac{\varkappa H}{\varepsilon_{bz}}; \tag{42}$$

$$\nu = \frac{M}{BH^2\sigma_{bz}}; \tag{43}$$

$$\vartheta = \frac{N}{BH\sigma_{bz}}. \tag{44}$$

В формулах (41), (43) и (44) величина B представляет собой наибольшую ширину поперечного сечения бруса, а b — ширину сечения на расстоянии y от центра тяжести сечения (см. фиг. 564).

Основные расчетные формулы (15), (16), (19) и (20), выраженные в безразмерных параметрах, принимают вид



Фиг. 567. Характеристика бруса при растяжении (z) и сжатии (d) в безразмерных координатах

$$\chi = \xi_z - \xi_d; \tag{45}$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi_z + \xi_d}{\xi_z - \xi_d} - \frac{h_A - h_B}{2H}; \tag{46}$$

$$\vartheta = \frac{1}{\chi} \int_{\xi_d}^{\xi_z} \eta \lambda \, d\xi; \tag{47}$$

$$\nu = \frac{1}{\chi^2} \cdot \int_{\xi_d}^{\xi_z} \eta\lambda\xi d\xi - \frac{\zeta}{\chi} \int_{\xi_d}^{\xi_z} \eta\lambda d\xi. \tag{48}$$

Интегралы в формулах (47) и (48) могут быть вычислены графически.

Так,

$$\int_{\xi_d}^{\xi_z} \eta\lambda d\xi = |\Phi_z| - |\Phi_d| \tag{49}$$

и

$$\int_{\xi_d}^{\xi_z} \eta\lambda\xi d\xi = |\Phi_z \xi_z^*| + |\Phi_d \xi_d^*|, \tag{50}$$

где Φ_z и Φ_d — площади, ограниченные кривыми $\xi = f_z(\eta\lambda)$ и $\xi = f_d(\eta\lambda)$, осью абсцисс и прямыми, параллельными оси ординат, проведенными на расстоянии ξ_z и ξ_d от нее.

Кривые $\xi = f_z(\eta\lambda)$ и $\xi = f_d(\eta\lambda)$ могут быть построены, если известны характеристики материала при растяжении $\xi = \varphi_z(\eta)$, сжатии $\xi = \varphi_d(\eta)$ и форма поперечного сечения бруса.

Величины ξ_z^* и ξ_d^* представляют собой абсциссы центров тяжести площадей Φ_z и Φ_d.

Для бруса прямоугольного сечения $b = B$, следовательно, параметр $\lambda = 1$. Величина Φ в этом случае представляет собой площадь, ограниченную характеристикой материала в безразмерных координатах при растяжении или сжатии (в зависимости от того, положительна или отрицательна величина ξ), осью абсцисс и прямой, параллельной оси ординат, проведенной на расстоянии ξ от нее.

Расчетные формулы в этом случае принимают вид

$$\chi = \xi_z - \xi_d; \tag{51}$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\,\frac{\xi_z + \xi_d}{\xi_z - \xi_d}; \tag{52}$$

$$\vartheta = \frac{1}{\chi}\int_{\xi_d}^{\xi_z} \eta\, d\xi; \tag{53}$$

$$\nu = \frac{1}{\chi^2}\int_{\xi_a}^{\xi_z} \eta\xi\, d\xi - \frac{\zeta}{\chi}\int_{\xi_d}^{\xi_z} \eta\, d\xi. \tag{54}$$

В случае, если брус прямоугольного сечения работает только на изгиб, расчет следует производить по формулам (51) и (52), а формулы (53) и (54), поскольку $\vartheta = 0$, принимают вид

$$\int_{\xi_d}^{\xi_z} \eta d\xi = 0 \tag{55}$$

и

$$\nu = \frac{1}{\chi^2}\int_{\xi_d}^{\xi_z} \eta\xi d\xi. \tag{56}$$

Формулам (55) и (56) при выполнении графического расчета соответствуют весьма простые и удобные для практической работы выражения

$$|\Phi_z| = |\Phi_d| \tag{57}$$

и

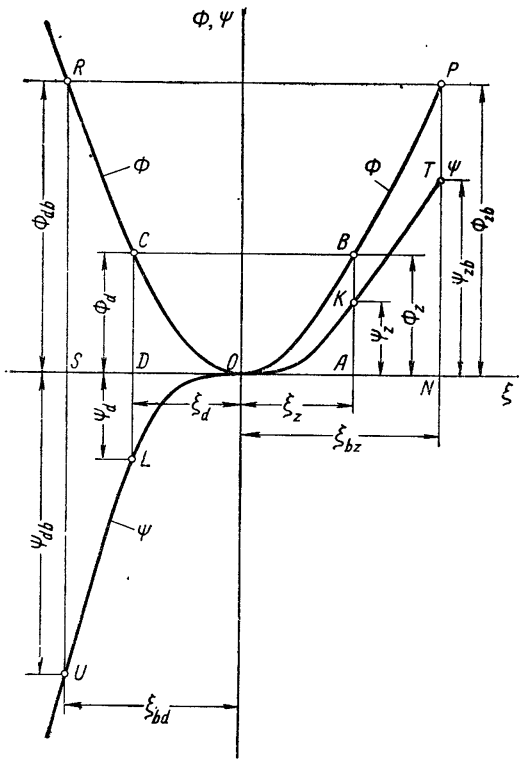
$$\nu = \frac{1}{\chi^2}\left[|\Phi_z\,\xi_z^*| + |\Phi_d\,\xi_d^*|\right]. \tag{58}$$

Для расчетов целесообразно по характеристикам при растяжении и сжатии в безразмерных координатах построить интегральные кривые — графики зависимостей Φ и $\Psi = \Phi\xi^*$ от величины ξ. Последние

представлены на фиг. 568. При помощи графика функции Ф легко решается уравнение (57). Для этого следует по оси абсцисс отложить отрезок OA, соответствующий величине ξ_z, затем из точки A провести вертикальную линию до пересечения в точке B с графиком функции Ф и горизонтальную прямую BC. Абсцисса точки C (отрезок OD) равна величине ξ_d.

Таким образом по параметру ξ_z определяется ξ_d.

Используя значения ξ_z и ξ_d, по формулам (51) и (52) вычисляем χ и ζ, а по зависимостям (42) и (40) кривизну изогнутого бруса $\varkappa$ и расстояние e между нейтральной осью и центром тяжести поперечного сечения бруса.



Фиг. 568. К расчету прямого бруса на изгиб и растяжение в безразмерных параметрах. Графики функций Ф и Ψ

Ввиду того, что хрупкие материалы всегда лучше сопротивляются сжатию, нежели растяжению, почти всегда $|\xi_z| > |\xi_d|$. Учитывая, что $\xi_d < 0$ заключаем, что, как правило, $e > 0$, т. е. нейтральная линия смещена в сторону сжатой части бруса.

Величина изгибающего момента M для выбранной величины ξ_z после определения ξ_d вычисляется с помощью графика функции Ψ. Для этого сначала следует найти значения Ψ_z и Ψ_d. Точка K (фиг. 568) пересечения линии AB с графиком функции Ψ определяет Ψ_z. Отрезок AK равен значению функции Ψ_z. Точка L пересечения продолжения линии CD с графиком функции Ψ дает величину Ψ_d. Отрезок DL соответствует значению функции Ψ_d.

После определения величин Ψ_z и Ψ_d по формуле (58) находится величина ν, а по формуле (43) — величина изгибающего момента M.

Задаваясь различными значениями ξ_z от 0 до 1, можно последовательно определить, как изложено выше, величины χ и ν соответственно для выбранных значений ξ_z и построить график зависимости χ от ν вплоть до разрушения.

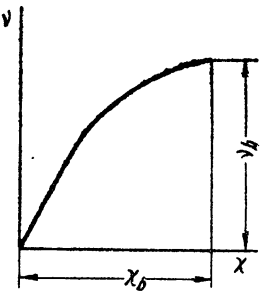
Этот график выражает зависимость изгибающего момента от кривизны (диаграмма изгиба), построенную в безразмерных координатах. Вид диаграммы изгиба представлен на фиг. 569.

Разрушение бруса начинается тогда, когда наибольшая линейная деформация растяжения достигает величины относительного удлинения при разрушении ($\varepsilon_A = \varepsilon_{bz}$). Под M_b в дальнейшем будет пониматься величина момента, при котором начинается разрушение. Эта величина изгибающего момента будет называться разрушающим моментом. Все

расчетные величины, определяющие начало разрушения, будем также отмечать тем же индексом ξ_{zb}, ξ_{db}, χ_b, e_b, $\varkappa_b$, ζ_b, ν_b (см. фиг. 567 и 569). Согласно формуле (38) при $\varepsilon_A = \varepsilon_{bz}$ параметр $\xi_z = 1$.

Для определения M_b вначале следует установить значения Ψ_{zb} и Ψ_{db}. Отрезок TN (фиг. 568) дает величину функции Ψ_{zb}. Точка U пересечения продолжения линии RS с графиком функции Ψ определяет значения Ψ_{db}. Отрезок SU равен Ψ_{tb}. После определения величин Ψ_{zb} и Ψ_{db} по формуле (58) находится ν_b, а по формуле (43) — величина изгибающего момента при разрушении M_b.

С помощью диаграммы изгиба, построенной в безразмерных координатах χ, ν, по формулам (42) и (43) легко может быть построена диаграмма изгиба бруса с определенными размерами поперечного сечения, выполненного из конкретного материала с заданными механическими характеристиками ε_{bz} и $\sigma_{\ldots}$.



Фиг. 569. К расчету прямого бруса на изгиб и растяжение в безразмерных параметрах. Диаграмма изгиба в безразмерных координатах

На основании изложенного выше можно установить преимущества такого решения задачи, в котором используются формулы, связывающие безразмерные параметры. Этот метод решения целесообразно применять для расчета брусьев, выполненных из материалов с различными механическими свойствами, при условии, что их характеристики при растяжении и сжатии в безразмерных координатах одинаковы.

Диаграмма изгиба в безразмерных координатах χ, ν и величины χ_b, ζ_b и ν_b не зависят от величины ε_{bz}, ε_{bd}, σ_{bz}, σ_{bd} и являются функциями только формы диаграмм растяжения и сжатия.

Весьма вероятно, что при использовании безразмерных параметров материалы различных марок можно объединить в несколько групп, так что материалы различных марок одной группы хотя и будут иметь различные свойства, но их характеристики при растяжении и сжатии в безразмерных координатах будут одинаковыми.

В. Определение напряжений, возникающих в поперечном сечении при первичном нагружении, при разгрузке и вторичном нагружении

Как было уже сказано выше, эпюры нормальных напряжений σ_I в поперечном сечении при первичном изгибе и растяжении бруса за пределом упругости могут быть получены при помощи графического построения, представленного на фиг. 565.

Если известны линейные деформации в наиболее растянутой части бруса ε_A и в наиболее сжатой его части ε_B, то участки характеристик материала при растяжении Oa_1 и при сжатии Ob_1 (см. фиг. 565) могут служить эпюрами нормальных напряжений.

Напряжение σ_I на расстоянии y от центра тяжести сечения определяется так, как это показано на графике (фиг. 565) пунктиром.

На фиг. 570 эпюра напряжений σ_I при первичном нагружении моментом M_I и силой N_I вычерчена рядом с сечением бруса.

Для получения эпюры остаточных напряжений $\sigma_{ост}$ разгрузку следует представить себе как дополнительное нагружение бруса нагрузкой, равной, но противоположной нагрузке первичного нагружения.

При этом момент, нормальную силу и соответствующие им напряжения будем называть соответственно разгрузочными.

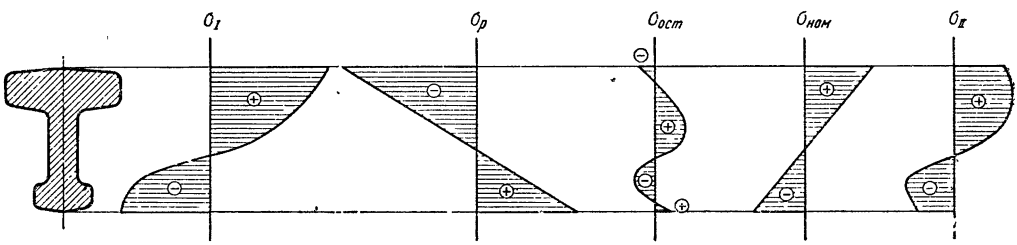
По закону разгрузки материал бруса при снятии нагрузки подчиняется закону Гука (см. гл. VIII т. II). Поэтому разгрузочные напряжения σ_p связаны с разгрузочными моментом и силой обычной зависимостью, выведенной на основании предположения о линейной зависимости между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_p = \frac{M_I y}{J_x} + \frac{N_I}{F}.$$

Эпюра разгрузочных напряжений σ_p представлена на фиг. 570.

Эпюра остаточных напряжений $\sigma_{ост}$ может быть получена путем наложения эпюры первичных напряжений σ_I на эпюру разгрузочных напряжений σ_p.

При вторичном нагружении (имеется в виду простое нагружение) моментом M_{II} и силой N_{II}, меньшими первичных ($M_{II} < M_I$ и $N_{II} < N_I$), материал бруса также подчиняется закону Гука (см. гл. VIII т. II), од-



Фиг. 570. Распределение нормальных напряжений в поперечном сечении прямого бруса при изгибе и растяжении:

σ_I — напряжения первичного нагружения; σ_p — так называемые разгрузочные напряжения; $\sigma_{ост}$ — остаточные напряжения; $\sigma_{ном}$ — напряжения, возникающие при вторичном нагружении; σ_{II} — напряжения вторичного нагружения

нако следует помнить, что в его сечениях существуют остаточные напряжения, которые складываются с напряжениями, возникающими при вторичном нагружении. Последние обычно называются номинальными.

На фиг. 570 изображена линейная эпюра номинальных напряжений $\sigma_{ном}$, возникающих в рассматриваемом случае при вторичном нагружении. Эти напряжения могут быть вычислены по формуле

$$\sigma_{ном} = \frac{M_{II} y}{J_x} + \frac{N_{II}}{F}.$$

Сложение эпюр остаточных напряжений $\sigma_{ост}$ и напряжений $\sigma_{ном}$ дает эпюру напряжений σ_{II} при вторичном нагружении.

Если вторичный момент равен первичному, то в конечном счете возникают напряжения первичного погружения ($\sigma_{II} = \sigma_I$).

Если вторичный момент больше первичного, то такое нагружение следует рассматривать как новое, более интенсивное первичное нагружение и задачу следует решать заново методом, изложенным выше (см. фиг. 565).

Г. Определение перемещений при изгибе

Для определения перемещений при изгибе следует использовать интеграл Мора (см. гл. X т. I и гл. IX т. II).

В случае определения перемещений сечений брусьев малой кривизны этот интеграл может быть записан в следующей форме:

$$\delta = \Sigma \int_s \Delta\varkappa M_1 ds, \tag{59}$$

где M_1 — изгибающий момент от единичного силового фактора (силы или момента) в *кгсм/кг* или *кгсм/кгсм*;

$\Delta\varkappa$ — изменение кривизны бруса в текущем сечении в $1/см$.

В случае если брус прямой и эпюра единичных моментов линейная, можно для вычисления выражения (59) воспользоваться способом «умножения эпюр» Верещагина (см. гл. X т. I). В этом случае

$$\delta = \Sigma S L_1, \tag{60}$$

где S — площадь эпюры кривизны в *см/см*;

L_1 — ордината эпюры единичных моментов, соответствующая центру тяжести площади S, в *кгсм/кг* или *кгсм/кгсм*.

Знак Σ в формулах (59) и (60) указывает на необходимость перед вычислением перемещений разделить систему на участки так, чтобы в пределах одного участка эпюра единичных моментов была линейной.

Рассмотрим брус, изображенный на фиг. 571. Предположим, что характеристика материала, форма и размеры сечения бруса известны, заданы также нагрузки, действующие на брус.

Требуется найти перемещение какого-либо сечения бруса.

Учитывая, что предложенная задача является статически определимой, можно построить эпюры изменения изгибающих моментов по длине бруса.

Основываясь на изложенной выше теории, строим диаграмму изгиба, т. е. график зависимости кривизны $\varkappa$ от величины изгибающего момента M (далее это построение будет иллюстрировано рядом примеров). Вычерчиваем эпюру изгибающих моментов и диаграмму изгиба рядом (фиг. 571).

Определяя, как это показано на фиг. 571 пунктирной линией, по величинам изгибающих моментов значения соответствующих кривизн, строим эпюру изменения кривизны по длине балки.

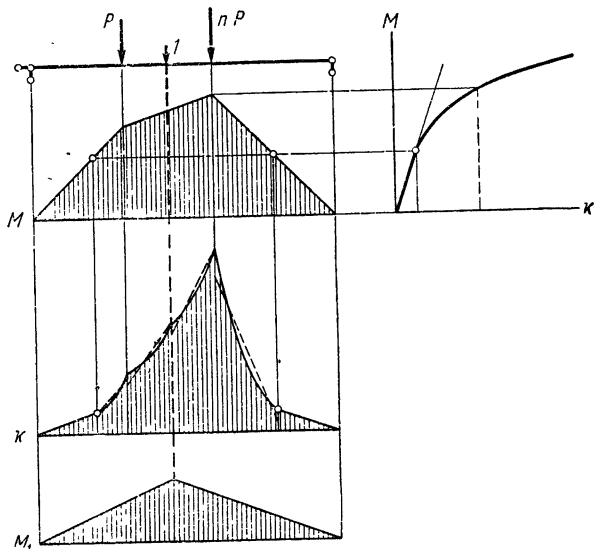
Схематизируя эпюру кривизн так, как это показано на фиг. 571 пунктиром, умножаем ее на эпюру от единичного силового фактора по правилу Верещагина.

Изложенный способ можно применять также и в случае, когда сечение бруса изменяется ступенями.

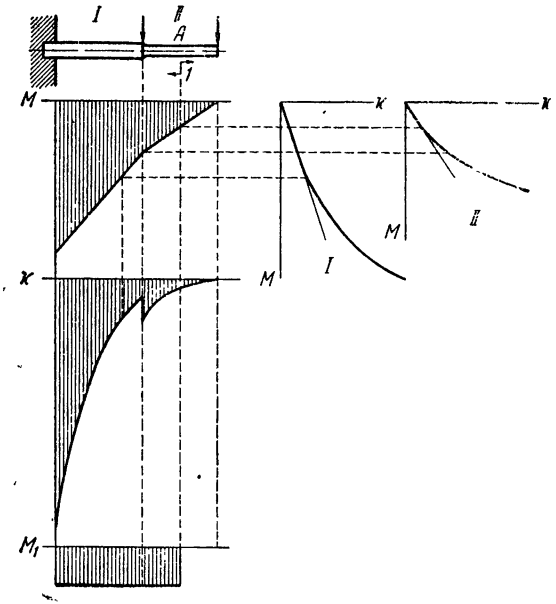
Допустим, например, что необходимо определить угол поворота сечения A бруса, изображенного на фиг. 572.

Предварительно строим диаграммы изгиба для каждого типа сечения бруса. Диаграммы изгиба вычерчиваются рядом с эпюрой изгибающих моментов так, как это показано на фиг. 572, а затем строится эпюра кривизн, на которой в местах резкого изменения сечения бруса ординаты изменяются скачкообразно.

Далее, как обычно, эпюра единичных моментов умножается по участкам на схематизированную эпюру кривизн. Перемещения в рас-



Фиг 571. Определние перемещений при изгибе методом Мора—Верещагина. Сечение бруса постоянно по длине



Фиг. 572. Определение перемещений при изгибе методом Мора—Верещагина. Ступенчатый брус

сматриваемом случае могут быть определены и чисто графическим путем, как это изложено в гл. X т. I и в [10].

Подробное представление о работе конструкции при ее нагружении, разгрузке и вторичном нагружении дает так называемая характеристика конструкции.

Как уже говорилось ранее, характеристикой конструкции называется зависимость между нагрузкой и наиболее типичным перемещением, возникающим при деформации.

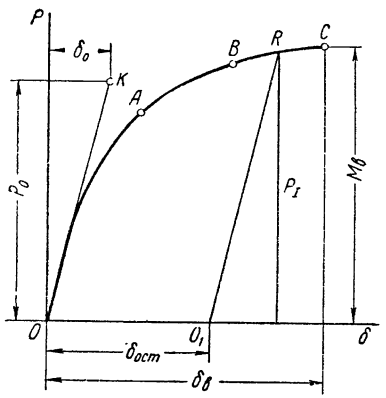
Для случая, представленного фиг. 571, таким перемещением может служить, например, прогиб в середине пролета.

На фиг. 573 построена соответствующая характеристика бруса, изображенного на фиг. 571.

Для выполнения указанного построения необходимо определить значения перемещений при нескольких нагрузках.

Предварительно рекомендуется провести касательную OK к характеристике в начале координат. Направление касательной вполне определяется координатами P_0 и δ_0 любой ее точки K (фиг. 573), где P_0 — любая нагрузка, а δ_0 — соответствующее перемещение, вычисленное в предположении, что материал конструкции подчиняется закону Гука.

При наличии касательной OK для построения характеристики достаточно определить перемещения всего при трех-четырех значениях нагрузки, включая предельную (точки A, B и C).



Фиг. 573. Зависимость между усилиями, действующими на брус, и прогибом (характеристика бруса при изгибе)

Предельной называется нагрузка, при которой конструкция становится геометрически изменяемой или появляются признаки начала ее разрушения.

Для определения остаточного перемещения (прогиба) $\delta_{ост}$, соответствующего некоторой первичной нагрузке P_1) следует из точки R характеристики, ордината которой представляет нагрузку P_1, провести прямую RO_1, параллельную касательной OK (фиг. 573).

При вторичном погружении конструкции нагрузкой, меньшей первичной, характеристика конструкции линейна (прямая O_1R)

Вторичное нагружение усилиями, большими первичных, следует рассматривать как новое первичное погружение.

Если необходимо располагать чертежом изогнутой оси бруса в целом, то можно воспользоваться обычным приемом построения упругой линии при помощи силового и веревочного многоугольников, принимая за нагрузку эпюру кривизн при нагрузке, или эпюру моментов — при разгрузке [10].

Д. Примеры расчета

Перейдем теперь к решению ряда примеров, иллюстрирующих применение изложенной теории

Пример 1. Исследовать работу консольной балки длиной l=200 *мм* прямоугольного поперечного сечения H=20 *мм*, B=10 *мм* (фиг. 574). Характеристики материала балки (сталь Р18, закаленная до твердости K_C=62) приведены на фиг. 575. Как показали опыты [4], характеристика при сжатии твердозакаленных инструмен-

тальных сталей практически линейна. Модуль упругости $E=2\cdot10^6$ *кг/см*^{2}. Предел прочности и предельная деформация при растяжении соответственно равны $\sigma_{bz}=19\,600$ *кг/см*^{2} и $\varepsilon_{bz}=0{,}02$ *см/см*; предел прочности при сжатии $\sigma_{bd}=38\,000$ *кг/см*^{2}.

Задаваясь последовательно значениями наибольшей линейной деформации в области растяжения от $\varepsilon_A=4\cdot10^{-3}$ до значения $\varepsilon_A=\varepsilon_{bz}=20\cdot10^{-3}$ *см/см*, вычисляем площади ω_z, соответствующие выбранным деформациям ε_A. Подбираем деформации на стороне сжатия ε_B так, чтобы удовлетворялось соотношение (34).

Вычисляем статические моменты $\omega_z\varepsilon_z^*$ и $\omega_d\varepsilon_d^*$, а также сумму статических моментов $\Sigma\omega\varepsilon^*=|\omega_z\varepsilon_z^*|+|\omega_d\varepsilon_d^*|$.

Согласно формулам (23) и (35), учитывая масштаб построений, определяем значения кривизн $\varkappa$ и соответствующих изгибающих моментов M. Результаты вычислений сведены в табл. 27.

Таблица 27

К примеру „Исследование работы консольной балки". Графическое построение диаграммы изгиба

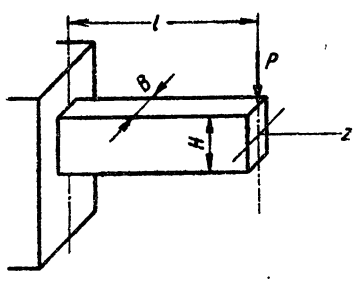
№ точек согласно фиг. 575	Растяжение			Сжатие		$\Sigma\omega\varepsilon^*$ в *мм*^{3}	$\varepsilon_A+\varepsilon_B$ в *мм*	$\varkappa$ в 1/*см*	M в *кг см*
	ε_A в *мм*	ω_z в *мм*^{2}	$\omega_z\varepsilon_z^*$ в *мм*^{3}	ε_B в *мм*	$\omega_d\varepsilon_d^*$ в *мм*^{3}				
1	20,0	400	$5{,}32\cdot10^3$	20,0	$5{,}32\cdot10^3$	$10{,}6\cdot10^3$	40,0	$40{,}0\cdot10^{-4}$	5 330
2	30,0	890	$17{,}7\cdot10^3$	29,8	$17{,}7\cdot10^3$	$35{,}4\cdot10^3$	59,8	$59{,}8\ 10^{-4}$	7 980
3	40,0	1530	$40{,}3\cdot10^3$	39,1	$39{,}9\cdot10^3$	$80{,}2\cdot10^3$	79,1	$79{,}1\cdot10^{-4}$	10 200
4	50,0	2270	$73{,}5\cdot10^3$	47,7	$72{,}2\cdot10^3$	$146\cdot10^3$	97,7	$97{,}7\cdot10^{-4}$	12 200
5	60,0	3080	$118\cdot10^3$	55,5	$114\cdot10^3$	$232\cdot10^3$	116	$116\cdot10^{-4}$	13 700
6	70,0	3940	$174\cdot10^3$	62,8	$165\cdot10^3$	$339\cdot10^3$	133	$133\cdot10^{-4}$	15 300
7	80,0	4840	$242\cdot10^3$	69,6	$225\cdot10^3$	$467\cdot10^3$	150	$150\cdot10^{-4}$	16 600
8	90,0	5780	$322\cdot10^3$	76,0	$293\cdot10^3$	$615\cdot10^3$	166	$166\cdot10^{-4}$	17 800
9	100	6740	$413\cdot10^3$	82,1	$369\cdot10^3$	$782\cdot10^3$	182	$182\cdot10^{-4}$	18 900

Чертеж на фиг. 575 уменьшен в 2,5 раза.

Масштабы линейных деформаций ε: в 1 *мм* $2\cdot10^{-4}$ *см/см*; площадей ω: в 1 *мм*^{2} $4\cdot10^{-2}$ *кг/см*^{2}; статических моментов $\omega\varepsilon^*$: в 1 *мм*^{3} $8\cdot10^{-6}$ *кг/см*^{2}.

Расчет удобно сопровождать графическими построениями.

На фиг. 576 на основе данных табл. 27 построена зависимость площадей ω_z и , а также график суммы статических моментов $\Sigma\omega\varepsilon^*$ от линейной деформации ε.



Фиг. 574. К примеру «Исследование работы консольной балки». Балка прямоугольного сечения $l=200$ *мм*; $H=20$ *мм*; $B=10$ *мм*

Пользуясь полученной диаграммой, по заданному значению деформации ε_z легко найти соответствующие значения ε_d и $\Sigma\omega\varepsilon^*$, что заметно облегчает выполнение расчета.

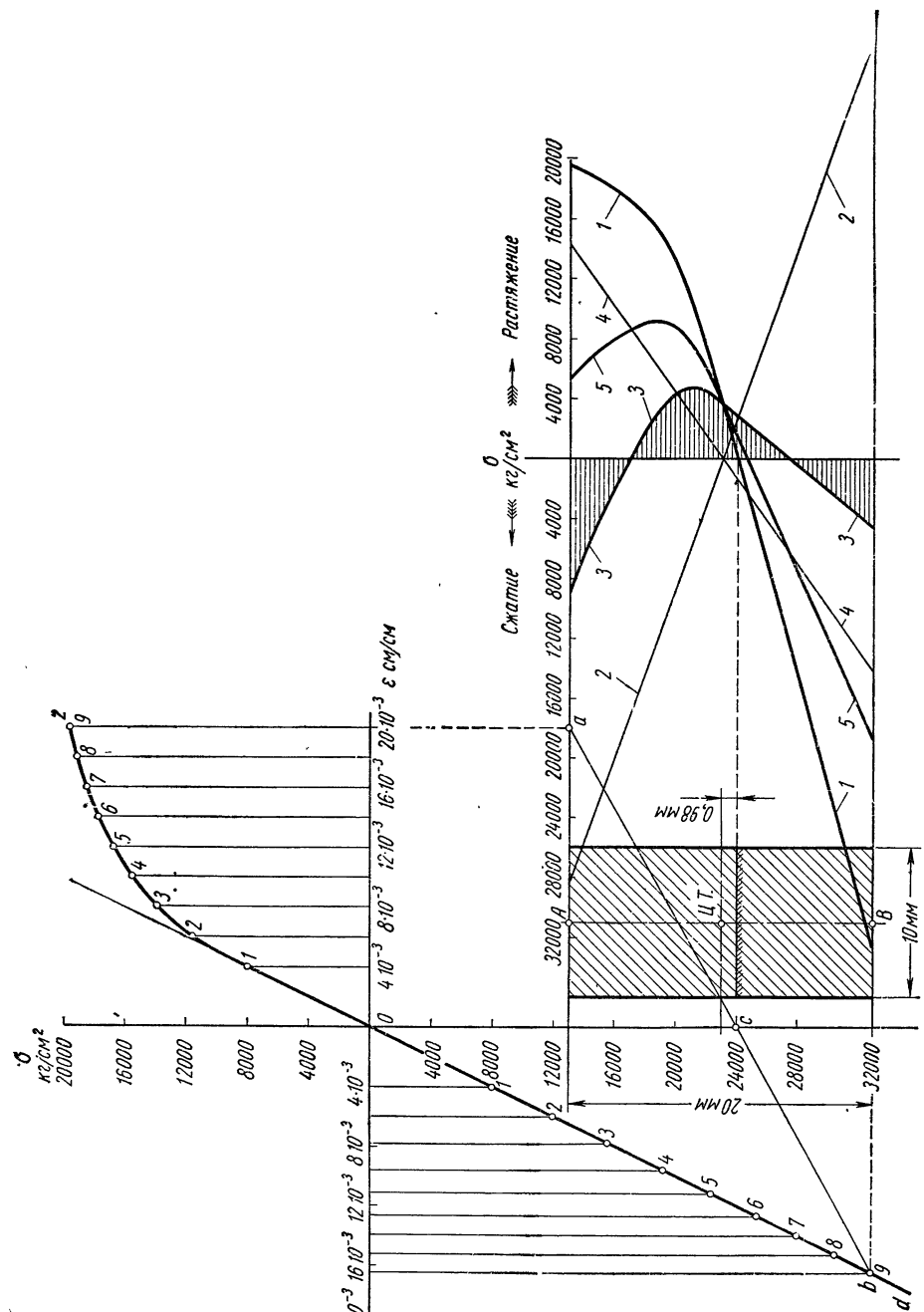
На фиг. 577 в координатах M, $\varkappa$ вычерчена диаграмма изгиба балки. На последней показана линия разгрузки для случая, когда балка нагружена усилием, близким к разрушающему. В этом случае остаточная кривизна в месте закрепления балки оказывается равной $\varkappa_{ост}=4\cdot10^{-3}$ 1/*см*.

Нагрузка, разрушающая балку,

$$P_{пред}=\frac{M_{пред}}{l}=\frac{18\,900}{20}=945\ кг.$$

В нижней части фиг. 575 вычерчена эпюра напряжений при первичном приложении нагрузки, близкой к предельной (эпюра *1*).

Ранее было указано, что чем интенсивнее первичное нагружение, тем бо́льшие остаточные напряжения имеют место после разгрузки системы. Для того чтобы оценить, каких значений могут достигать наибольшие остаточные напряжения в рассматриваемом случае, представим себе, что к балке была приложена нагрузка, близкая к предельной.

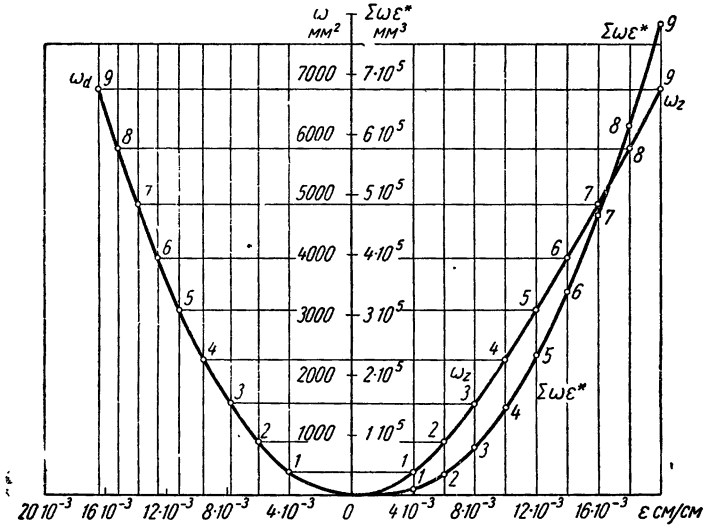


Фиг. 575. К примеру «Исследование работы консольной балки». Графическое решение задачи. Характеристики материала балки при растяжении (z) и сжатии (d). (Чертеж уменьшен в 2,5 раза).

1 — эпюра нормальных напряжений σ_1 в поперечном сечении при первичном нагружении нагрузкой, близкой к предельной; *2* — эпюра так называемых разгрузочных напряжений σ_p; *3* — эпюра остаточных напряжений $\sigma_{ост}$; *4* — эпюра напряжений, возникающих при вторичном нагружении $\sigma_{ном}$; *5* — эпюра напряжений σ_{II}

На сечении балки нанесен нейтральный слой при нагружении силой, близкой к предельной. Как видно, смещение его от центра тяжести сечения равно ~ 1 *мм*, что даже в этом случае составляет всего $^1/_{20}$ высоты сечения.

Для получения эпюры наибольших остаточных напряжений $\sigma_{ост}$ достаточно на эпюру *1* наложить эпюру разгрузочных напряжений *2*, соответствующую нагружению балки силой, равной, но противоположной первичной нагрузке.



Фиг. 576. К примеру «Исследование работы консольной балки». График зависимости величин ω и Σωε* от ε

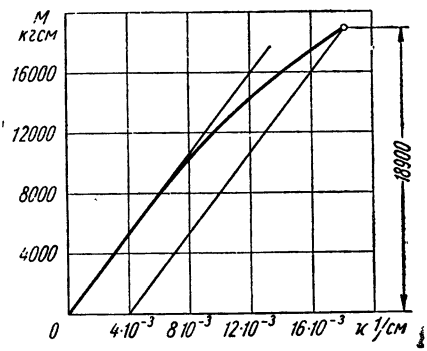
Наибольшее разгрузочное напряжение σ_p может быть подсчитано по известной формуле сопротивления материалов

$$\sigma_p = \frac{M}{W} = \frac{18\,900}{0{,}667} = 28\,400 \text{ кг/см}^2,$$

где

$$W = \frac{BH^2}{6} = \frac{1 \cdot 2^2}{6} = 0{,}667 \text{ см}^3.$$

Остаточные напряжения представлены на фиг. 575 эпюрой *3*.



Фиг. 577. К примеру «Исследование работы консольной балки». Диаграмма изгиба

Для примера там же приведена эпюра *5* напряжений σ_{II} возникающих при вторичном нагружении балки, нагрузкой, равной половине предельной.

Эпюра *5* получена в результате наложения эпюры *4* номинальных напряжений, вычисленных на основании закона Гука (наибольшее напряжение $\sigma_{нсм} = 14\,200$ *кг/см*²), на эпюру *3* остаточных напряжений.

Для определения наибольшего прогиба, соответствующего предельной нагрузке, на фиг. 578 вычерчены эпюры изгибающих моментов *M*, кривизн $\varkappa$ и моментов от единичной нагрузки, приложенной в месте определения прогиба.

Для подсчета прогиба методом Мора—Верещагина эпюра кривизн схематизирована (она апроксимирована ломаной линией). Искомый прогиб согласно формулам (59) и (60) равен

$$\delta_{пред} = \frac{1}{2} 12{,}4 \cdot 9 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}26 + 7{,}6 \cdot 9 \cdot 10^{-3} \cdot 16{,}2 + \frac{1}{2} 7{,}6 \cdot 9{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 17{,}5 =$$

$$= 2{,}18 \text{ см}.$$

Интересно сравнить значения предельной (разрушающей) нагрузки $P_{пред}$=945 *кг* и предельного прогиба $\delta_{пред}$=2,18 *см* со значениями, вычисленными по формулам сопротивления материалов, основанными на линейной зависимости между напряжениями и деформациями, в предположении, что характеристики материала при растяжении и сжатии одинаковы.

В этом случае предельная нагрузка

$$P = \frac{M}{l} = \frac{\sigma_{вг} W}{l} = \frac{19\,600 \cdot 0{,}667}{20} = 653\ кг;$$

наибольший прогиб

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EJ} = \frac{653 \cdot 20^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}667} = 1{,}31\ см,$$

где

$$J = \frac{BH^3}{12} = \frac{1 \cdot 2^3}{12} = 0{,}667\ см^4.$$

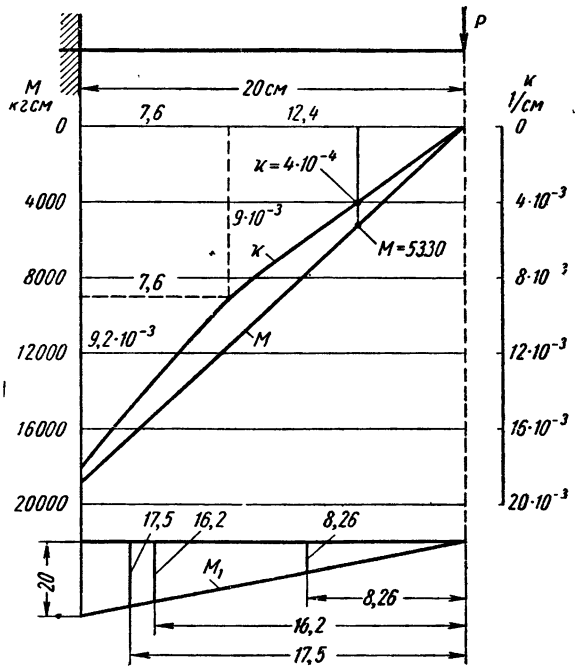
Сопоставление показывает, что применение элементарных формул сопротивления материалов дает неверные (заниженные более чем на 30%) значения предельной нагрузки и наибольшего прогиба.

Пример 2. Для сравнения между собой различных марок чугуна и для контроля над качеством литья в заводской практике широко используется технологическая проба на излом круглых литых чугунных брусьев диаметром d=30 *мм*, длиной L=340 *мм*. Испытание ведется путем нагружения бруса (фиг. 579) сосредоточенной нагрузкой, приложенной в середине пролета l=300 *мм* (ГОСТ 2055-43).

Критерием качества чугуна является величина разрушающей нагрузки и соответствующего прогиба. Так, например, для принятых в СССР марок серого литейного чугуна по ГОСТ 1412-54 были установлены ломающее усилие от 1000 до 1900 *кг* и прогиб f_{300}=2 ÷ 3 *мм* [14].

В лаборатории кафедры «Сопротивление материалов» МВТУ была проведена работа по исследованию прочности и жестокости чугунных литых брусьев, форма и размеры которых соответствовали ГОСТ 2055-43.

Ознакомимся с результатами этих исследований.



Фиг. 578. К примеру «Исследование работы консольной балки». Определение прогиба методом Мора—Верещагина

На фиг. 580 приведены характеристики материала брусьев при растяжении *Oz* и сжатии *Od*.

Анализ этих характеристик показывает, что в качестве объекта исследования был принят серый литейный чугун среднего качества.

Пределы прочности этого чугуна σ_{bz}=1800 *кг/см*² и σ_{bd}=6900 *кг/см*².

Наибольшие линейные деформации при растяжении и сжатии соответственно равны ε_{bz}=0,007 и ε_{bd}=0,07. Модуль упругости E=10⁶ *кг/см*².

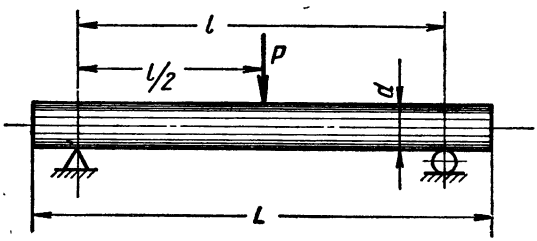
На фиг. 580 характеристика чугуна при сжатии вычерчена не полностью, а только до деформации $\varepsilon_d = 10 \cdot 10^{-3}$ *см/см*.

На той же фиг. 580 проведено построение вспомогательных кривых $\varepsilon = f_z(\sigma b)$ и $\varepsilon = f_d(\sigma b)$ для предельной нагрузки, когда наибольшая линейная деформация растяжения равна $\varepsilon_A = \varepsilon_{bz}$=0,007 *см/см*. Соответствующая деформация ε_B определена из условия равенства площадей Ω_z и Ω_d [см. формулу (31)].

В нижней части фиг. 580 построена эпюра нормальных напряжений (эпюра *1*) в поперечном сечении бруса при предельной нагрузке.

Для примера определим остаточные напряжения, возникающие при первичном нагружении и разгрузке, силой, близкой к предельной.

Эпюра *3* остаточных напряжений может быть построена путем наложения на эпюру *1* напряжений эпюры *2* разгрузочных напряжений, вычисленных по формуле



Фиг. 579. К примеру «Расчет чугунного бруса». Чугунная балка — образец чугуна для испытаний на изгиб согласно ГОСТ 2055-43

$$\sigma_p = \frac{My}{J},$$

где M=8560 — момент, соответствующий разрушающей нагрузке, в *кгсм;*

$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 3^4}{64} = 3{,}98$ — момент инерции поперечного сечения бруса в $см^4$;

y — координата точки, в которой определяется напряжение, отсчитываемая от центральной оси сечения бруса в *см.*

Чтобы иметь в дальнейшем возможность вычертить диаграмму изгиба, на фиг. 581 проведены соответствующие построения при наибольших линейных деформациях растяжения, равных ε_A=0,005 *см/см* и ε_A=0,003 *см/см.*

Результаты вычисления значений статических моментов площадей Ω_z и Ω_d при наибольших деформациях растяжений ε_A =0,0070; 0,0050; 0,0030; 0,0006 сведены в табл. 28. Деформация ε_A =0,0006 соответствует пределу пропорциональности материала σ_{pz} =600 *кг/см*^{2}.

Таблица 28

К примеру „Расчет чугунного бруса". Построение диаграммы изгиба и определение наибольших нормальных напряжений в опасном сечении бруса

ε_A	0,00700	0,00500	0,00300	0,000600	*см/см*
ε_B	0,00500	0,00400	0,00230	0,000600	*см/см*
$\Omega_z = \Omega_d$	22,7	15,0	6,40	—	*кг/см*^{2}
$\Omega_z \varepsilon_z^*$	$7{,}83 \cdot 10^{-2}$	$3{,}71 \cdot 10^{-2}$	$1{,}04 \cdot 10^{-2}$	—	*кг/см*^{2}
$\Omega_d \varepsilon_d^*$	$5{,}86 \cdot 10^{-2}$	$3{,}10 \cdot 10^{-2}$	$0{,}825 \cdot 10^{-2}$	—	*кг/см*^{2}
$\Sigma\Omega_\varepsilon^*$	$13{,}7 \cdot 10^{-2}$	$6{,}81 \cdot 10^{-2}$	$1{,}87 \cdot 10^{-2}$	—	*кг/см*^{2}
$\varkappa$	0,00400	0,00300	0,00177	0,000400	$1/см$
M	8560	7570	5960	1620	*кгсм*
σ_A	1800	1700	1480	600	*кг/см*^{2}
σ_B	3260	3040	2440	600	*кг/см*^{2}

В той же таблице приведены значения статических моментов $\Omega_z \varepsilon_z^*$, $\Omega_d \varepsilon_d^*$ и $\Sigma\Omega\varepsilon^*$, а также кривизн изгибающих моментов и нормальных напряжений в наиболее удаленных от контрольного слоя точках A и B.

На фиг. 582 изображена построенная на основе табл. 28 диаграмма изгиба (M, $\varkappa$).

Таким образом, в рассмотренном случае предельной нагрузке соответствуют следующие значения параметров, характеризующих состояние балки.

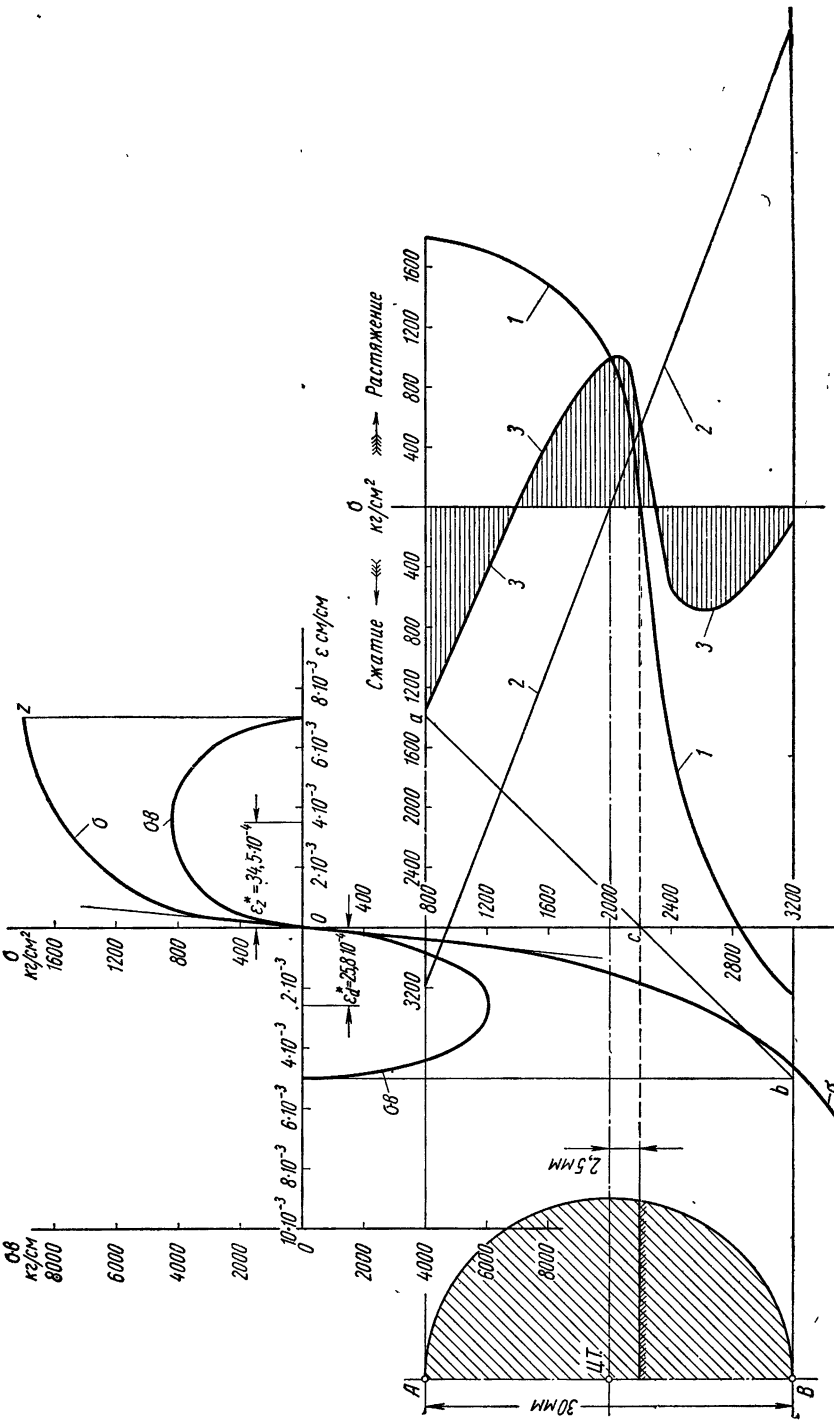
Как упоминалось ранее, предельный изгибающий момент $M_{пред}$ =8560 *кгсм.*

Предельная нагрузка

$$P_{пред} = \frac{4\,M_{пред}}{l} = \frac{4 \cdot 8560}{30} = 1140\ кг.$$

Наибольшие нормальные напряжения на стороне растяжения σ_A =1800 *кг/см*^{2}; на стороне сжатия σ_B =3260 *кг/см*^{2}.

Остаточная кривизна $\varkappa_{ост} = 1{,}89 \cdot 10^{-3}$ $1/см$.



Фиг. 580. К примеру «Расчет чугунного бруса». Графическое решение задачи об изгибе чугунного бруса круглого поперечного сечения. Oz и Od характеристики при растяжении и сжатии. Слева внизу поперечное сечение бруса. Справа внизу эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении балки:

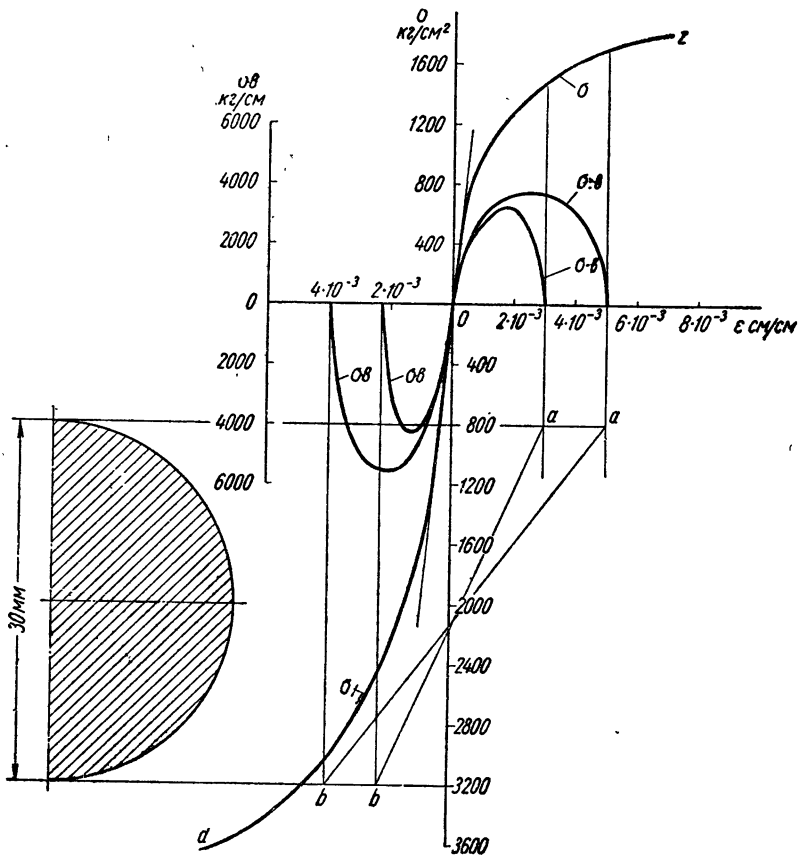
1 — эпюра нормальных напряжений σ_1 при первичном нагружении; *2* — эпюра разгрузочных напряжений σ_p; *3* — эпюра остаточных напряжений $\sigma_{ост}$

На фиг. 583 схематически изображен образец, нагруженный предельным усилием, а также построены эпюры изгибающих моментов и эпюра кривизн. Последняя вычерчена на основе диаграммы изгиба, представленной на фиг. 582.

Для определения наибольшего прогиба методом Мора—Верещагина на фиг. 583 построена также эпюра моментов от единичной силы.

Для удобства вычислений эпюра кривизн схематизирована. Кривая линия аппроксимирована ломаной линией. Искомый прогиб согласно формулам (59) и (60) равен

$$\delta = 2\left[\frac{1}{2}6 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}5 + 6 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 6 + \frac{1}{2}9 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 3\right] = 0{,}234\ см.$$



Фиг. 581. К примеру «Расчет чугунного бруса». Графическое решение задачи об изгибе чугунного бруса круглого поперечного сечения. Вычисление изгибающего момента и кривизн при $\varepsilon_A = 5 \cdot 10^{-3}$ и $\varepsilon_A = 3 \cdot 10^{-3}$ *см/см*.

Проведенные подсчеты показывают, что исследуемая марка чугуна соответствует указанным выше нормам [14].

Сопоставим вычисленную предельную нагрузку с фактической разрушающей нагрузкой, определенной при испытании исследуемых образцов чугуна. Как показали опыты, нагрузка и прогиб, полученные экспериментально, равны $P = 1200$ *кг* и $f_{300} = 2{,}5$ *мм*.

Отметим, что определенные опытным путем разрушающая сила и прогиб всегда несколько больше теоретических. Это объясняется тем, что при проведении опытов фиксируются нагрузка и прогиб, при которых происходит полное разрушение образца, в то время как теоретически вычисляются сила и прогиб, при которых в наиболее напряженных частях бруса появляются лишь *первые признаки* разрушения (первые трещины).

Весьма часто [14] свойства чугуна характеризуют так называемым «временным сопротивлением при изгибе» $(\sigma_b)_{изг}$.

Под «временным сопротивлением при изгибе» обычно понимают условное напряжение, равное частному от деления разрушающего момента на осевой момент сопротивления W поперечного сечения образца.

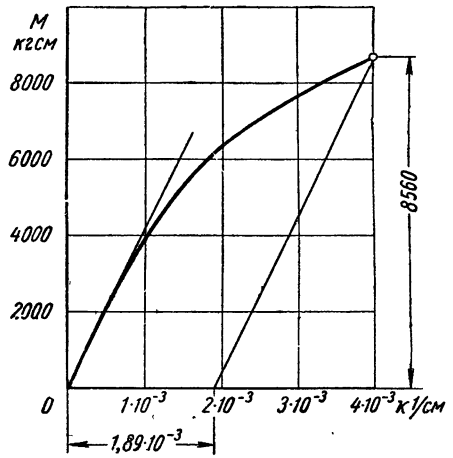
В рассматриваемом случае

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi 3^3}{32} = 2{,}65\ см^3$$

и

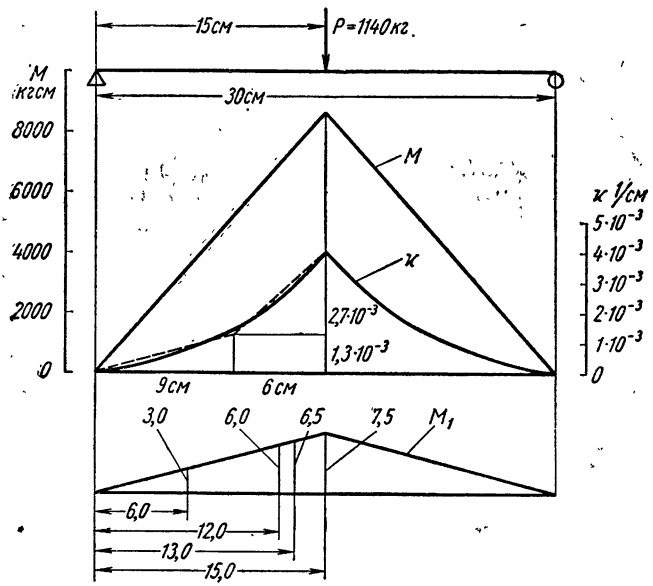
$$(\sigma_в)_{изг} = \frac{M_{пред}}{W} = \frac{8560}{2{,}65} = 3240\ кг/см^2.$$

Сопоставление величины $(\sigma_b)_{изг}$ со значениями приведенных выше пределов прочности при растяжении $\sigma_{bz}=1800\ кг/см^2$ и сжатии $\sigma_{bd}=6900\ кг/см^2$, показывает, что так называемое «временное сопротивление при изгибе» не может быть в рассматриваемом случае отнесено к числу величин, имеющих физический смысл.



Фиг. 582. К примеру «Расчет чугунного бруса». Диаграмма изгиба

Пример 3 Трубчатая стойка $D=80\ мм$, $d=60\ мм$, выполненная из высококачественного чугуна ($\sigma_{bz}=4000\ кг/см^2$; $\sigma_{bd}=7000\ кг/см^2$; $\varepsilon_{bz}=0{,}05\ см/см$; $\varepsilon_{bd}=0{,}3\ см/см$), при нагружении сжимающей силой дает прогиб. Для выяснения причины искривления произведено тензометрирование.



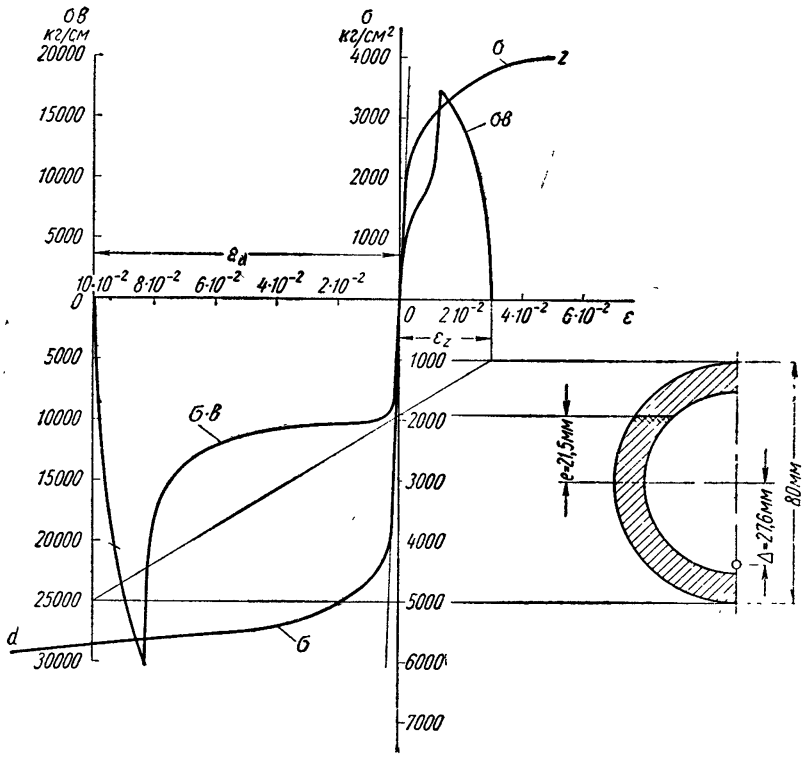
Фиг. 583. К примеру «Расчет чугунного бруса». Определение прогиба методом Мора—Верещагина

Тензометры, установленные диаметрально противоположно в плоскости искривления, показали, что при нагружении конструкции, частью которой является стойка, с одной стороны стойки возникает деформация растяжения, равная $\varepsilon_A = 0{,}03\ см/см$, а с другой — деформация сжатия $\varepsilon_B = 0{,}10\ см/см$.

Требуется установить величину и характер нагрузки, действующей на стойку и вызывающей ее искривление.

На фиг. 584 представлены характеристики материала стойки при растяжении Oz и при сжатии Od.

Откладываем по оси абсцисс значения замеренных деформаций $\varepsilon_A=\varepsilon_z$ и $\varepsilon_B=\varepsilon_d$ строим кривые $\varepsilon=f(\sigma b)$.



Фиг. 584. К примеру «Расчет внецентренно нагруженной стойки». Графическое решение задачи об определении величины и места приложения сжимающей нагрузки. (Чертеж уменьшен в 2,5 раза)

Измеряя площади Ω_z и Ω_d и определяя положение центров тяжести этих площадей, вычисляем величину статических моментов $\Omega_z\varepsilon_z^*$ и $\Omega_d\varepsilon_d^*$. Результаты вычислений сведены в табл. 29.

По формулам (19) и (20), принимая во внимание соотношения (21) и (22), определяем значение нормальной силы N:

$$N=\frac{1}{\varkappa}\int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A}\sigma b d\varepsilon=\frac{1}{0{,}0162}(-3990)\,0{,}25=-61400\ кг\ \text{(сжатие)}$$

и изгибающего момента M:

$$M=\frac{1}{\varkappa^2}\int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A}\sigma b\,\varepsilon\,d\,\varepsilon-Ne=\frac{1}{0{,}0162^2}\cdot 320\,000\cdot 2{,}5\cdot 10^{-4}-61\,400\cdot 2{,}15=170\,000\ кг\,см.$$

Наличие в сечении стойки изгибающего момента показывает, что стойка нагружена внецентренно приложенной сжимающей силой. По величинам изгибающего момента и силы легко определить местоположение равнодействующей сжимающих стойку сил.

Эксцентрицитет (фиг. 584)

$$\Delta=\frac{M}{|N|}=\frac{170\,000}{61\,400}=2{,}76\ см.$$

Таблица 29

К примеру „Расчет внецентренно нагруженной стойки". Результаты расчетов для определения величины, сжимающей стойку силы и ее эксцентрицитета

Ω_z	+1270	*мм*^{2}
$\Omega_z\varepsilon_z^*$	+19700	*мм*^{3}
Ω_d	−5260	*мм*^{2}
$\Omega_d\varepsilon_d^*$	+300 000	*мм*^{3}
$\sum\Omega\varepsilon^*$	+320 000	*мм*^{3}
$\lvert\Omega_z\rvert - \lvert\Omega_d\rvert$	−3990	*мм*^{2}
$\varepsilon_A = \varepsilon_z$	+0,03	*см/см*
$\varepsilon_B = \varepsilon_d$	−0,10	*см/см*
σ_A	+3750	*кг/см*^{2}
σ_B	−5730	*кг/см*^{2}
$\varkappa$	0,0162	1/*см*
e	−21,5	*мм*
N	−61 400	*кг*
M	170 000	*кгсм*
Δ	27,6	*мм*

Чертеж на фиг. 584 уменьшен в 2,5 раза.
Масштабы линейных деформаций ε: в 1 *мм* 10^{-3} *см/см*; площадей Ω: в 1 *мм*^{2} 0,25 *кг/см*^{2}, статических моментов $\Omega\varepsilon^*$: в 1 *мм*^{3} $2{,}5\cdot10^{-4}$ *кг/см*^{2}.

Итак, причиной искривления стойки является смещение равнодействующей сжимающих усилий на 27,6 *мм* от центра поперечного сечения стойки. В случае, если причина, вызывающая смещение нагрузки, будет устранена, то в поперечных сечениях стойки возникнут только напряжения сжатия, равномерно распределенные по поперечному сечению бруса. Эти напряжения будут равны

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{61\,400}{22} = 2790 \text{ кг/см}^2,$$

где

$$F = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi(8^2 - 6^2)}{4} = 22 \text{ см}^2.$$

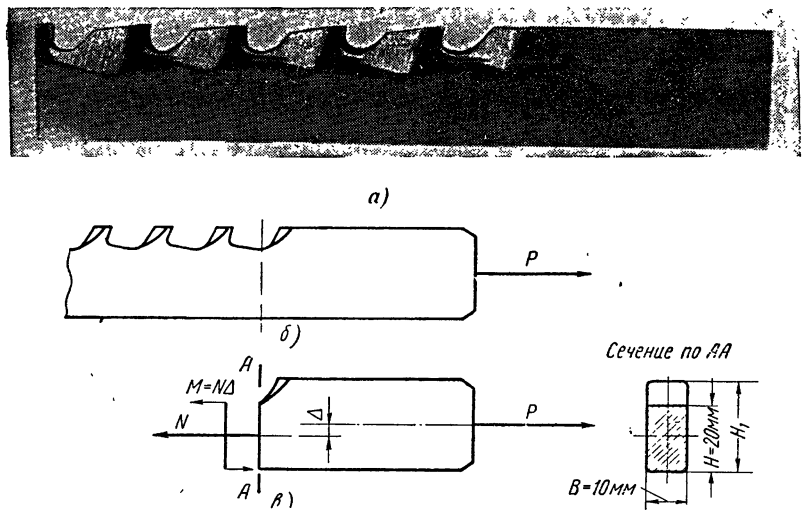
При отсутствии искривления надежность стойки значительно повысится.

В примерах 2 и 3 были рассмотрены задачи, когда линейные деформации (ε_A и ε_B) наиболее напряженных частей бруса либо были известны (пример 3), либо легко определялись (пример 2).

Однако в практике может представиться необходимость расчета конструкций, деформации которых неизвестны, а заданы нагрузки (известны изгибающий момент и нормальная сила).

В последнем случае, как это рекомендуется в работе [10], расчет следует вести методом последовательных приближений.

Задаваясь на глаз значениями линейных деформаций ε_A и ε_B, определяются так, как это было показано в рассмотренных выше примерах, внутренние силовые факторы M или M и N, а затем полученные значения сопоставляются с заданными. На базе сравнения вычисленных и заданных силовых факторов выбираются новые, более близкие к истине значения линейных деформаций и вновь производится определение сило-



Фиг. 585. К примеру «Расчет протяжки». Протяжка с односторонними зубьями:
а — фотография протяжки; *б* — опасное сечение протяжки; *в* — внутренние силовые факторы в опасном сечении протяжки и размеры сечения

вых факторов. При этом следует иметь в виду, что вследствие нелинейности характеристик материала принцип сложения напряжений в этом случае неприменим. Эпюра напряжений в поперечном сечении, соответствующая сжимающей силе N, наложенная на эпюру напряжений от одного изгиба моментом M, не дает эпюру напряжений при одновременном изгибе моментом M и сжатии силой N.

Пример 4. Усилия, действующие на протяжку в процессе резания, обычно вызывают ее растяжение, однако в некоторых случаях, если зубья протяжки расположены несимметрично относительно ее оси (фиг. 585, *а* и *б*), то в процессе работы имеет место внецентренное растяжение, т. е. растяжение, сопровождаемое изгибом (фиг. 585, *в*).

Расчет протяжек с учетом действительных характеристик твердо закаленной стали, из которой обычно выполняется этот инструмент, разработан З. М. Конюшко [5] и [6]. Размеры опасного сечения протяжки показаны на фиг. 585, *в*.

В зависимости от относительной величины размеров протяжки H_1 и H (фиг. 585, *в*) изменяется соотношение между внутренними силовыми факторами N и M. Последние связаны между собой формулой

$$M = N\Delta, \tag{61}$$

где Δ — эксцентрицитет (фиг. 585, *в*).

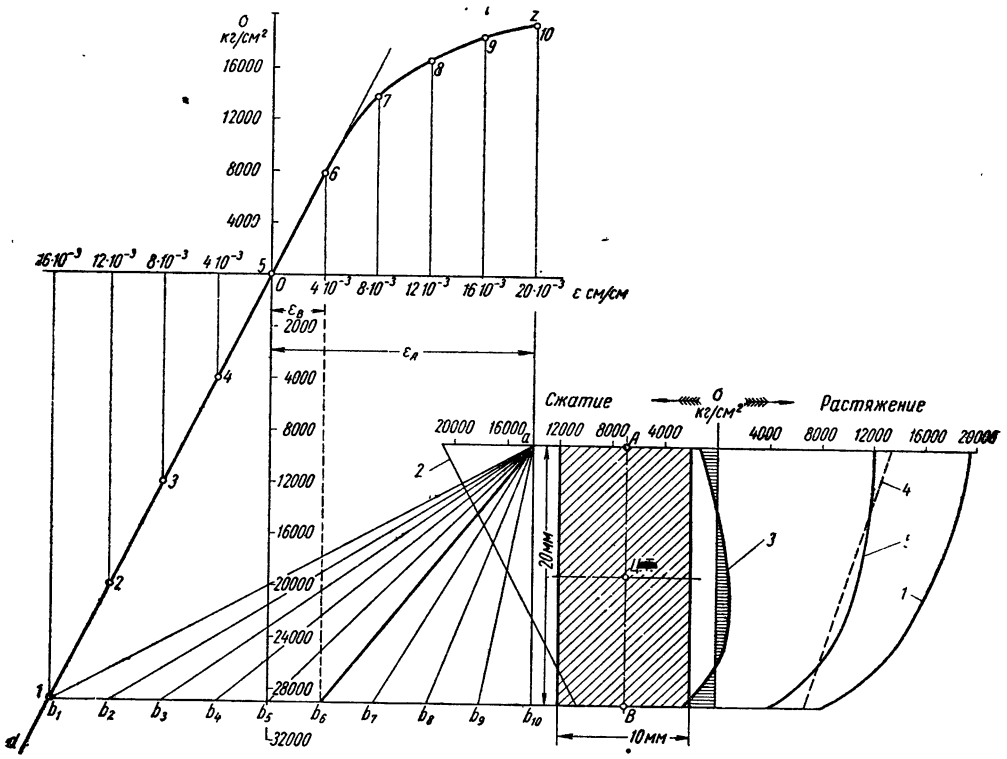
Для расчета протяжек с несимметрично расположенными зубьями удобно использовать график зависимости предельных силовых факторов N и M от эксцентрицитета.

Приведем пример построения такого графика для протяжки, выполненной из инструментальной стали Р18, закаленной до твердости $R_C = 62$. Модуль упругости этой стали $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}. Предел прочности и предельная деформация при растяжении соответственно равны $\sigma_{bz} = 19\,600$ *кг/см*^{2} и $\varepsilon_{bz} = 0{,}02$ *см/см*. Предел прочности при сжатии $\sigma_{bd} = 38\,000$ *кг/см*^{2}. Характеристика этой стали при сжатии до напряжений, достигающих 25 000 *кг/см*^{2}, практически линейна.

На фиг. 586 представлены характеристики при растяжении Oz и сжатии Od материала протяжки и изображено ее опасное сечение.

Лучи, выходящие из точки a, соответствующей предельной деформации растяжения $\varepsilon_A = \varepsilon_{bz}$, дают возможность установить связь между деформациями и напряжениями в различных точках сечения.

Так, например, в случае, если деформации в точках A и B положительны и равны соответственно ε_A и ε_B (растяжение), то эпюра *1* нормальных напряжений может



Фиг. 586. К примеру «Расчет протяжки». Характеристика материала протяжки при растяжении (z) и сжатии (d). Графическое решение задачи об определении напряжений в опасном сечении протяжки.

(Чертеж уменьшен в 2,94 раза):

1 — эпюра нормальных напряжений σ_I в опасном сечении протяжки при нагружении ее предельной нагрузкой; *2* — эпюра так называемых разгрузочных напряжений σ_p; *3* — эпюра остаточных напряжений $\sigma_{ост}$; *4* — эпюра напряжений, возникающих при вторичном нагружении $\sigma_{ном}$; *5* — эпюра напряжений при вторичном нагружении σ_{II}.

быть построена при помощи луча ab_6 (фиг. 586, внизу). Как следует из рассмотрения эпюры напряжения, растяжения в точках A и B в этом случае равны $\sigma_A = 19\,600$ *кг/см²* и $\sigma_B = 8000$ *кг/см²*.

Подобно лучу ab_6 остальные лучи, выходящие из точки a, соответствуют предельной деформации в точке A и различным деформациям в точке B. В частности, луч ab_5 соответствует $\varepsilon_B = 0$; лучи, расположенные левее луча ab_5, относятся к случаям, когда в части сечения имеются напряжения сжатия.

В табл. 30 приведены расчетные данные, необходимые для построения искомой зависимости между изгибающим моментом M, нормальной силой N и эксцентриситетом Δ (фиг. 587).

Нормальная сила по формулам (25) и (27) равна

$$N = \frac{B}{\varkappa} \int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma \, d\varepsilon = \frac{B}{\varkappa} [\, |\omega_z| - |\omega_d| \,].$$

Таблица 30

К примеру „Расчет протяжки". Расчетные данные для построения зависимости между изгибающими моментами, нормальными силами и эксцентрицитетами

№ луча согласно фиг. 586	Растяжение ε_A=100 *мм*			Сжатие			$\Sigma\omega$ в *мм*^{2}	$\Sigma\omega\varepsilon^*$ в *мм*^{3}	$\Delta=\frac{M}{N}$ в *мм*	$\frac{B}{x^2}\Sigma\omega\varepsilon^*$ в *кгсм*	$N\cdot e$ в *кгсм*	e в *см*	$\varepsilon_A-\varepsilon_B$ в *мм*	$\varepsilon_A+\varepsilon_B$ в *мм*	N в *кг*	M в *кгсм*	x в 1/*см*
	ω в *мм*^{2}	ε_B в *мм*	$\omega\varepsilon^*$ в *мм*^{3}	ω в *мм*^{2}	ε_B в *мм*	$\omega\varepsilon^*$ в *мм*^{3}											
10	0	100	0	—	—	—	0	0	0	∞	∞	∞	0	200	39200	0	0
9	1900	80	$171\cdot10^3$	—	—	—	1900	$171\cdot10^3$	0,131	$342\cdot10^3$	$342\cdot10^3$	9,00	20	180	38000	$\sim0,5\cdot10^3$	$2\cdot10^{-3}$
8	3660	60	$295\cdot10^3$	—	—	—	3660	$295\cdot10^3$	0,356	$147\cdot10^3$	$146\cdot10^3$	4,00	40	160	36600	$\sim1,3\cdot10^3$	$4\ 10^{-3}$
7	5210	40	$373\cdot10^3$	—	—	—	5210	$373\cdot10^3$	0,605	$82,9\cdot10^3$	$80,8\cdot10^3$	2,33	60	140	34700	$2,1\cdot10^3$	$6\cdot10^{-3}$
6	6340	20	408.10^3	—	—	—	6340	$408\cdot10^3$	1,10	$51,0\cdot10^3$	$47,5\cdot10^3$	1,50	80	120	31700	$3,5\cdot10^3$	$8\cdot10^{-3}$
5	6740	0	$413\cdot10^3$	0	0	0	6740	$413\cdot10^3$	2,22	$33,0\cdot10^3$	$27,0\cdot10^3$	1,00	100	100	27000	$6,0\cdot10^3$	$10\cdot10^{-3}$
4	6740	—	$413\cdot10^3$	400	20	$5,32\cdot10^3$	6340	$418\cdot10^3$	4,31	$23,2\cdot10^3$	$14,1\cdot10^3$	0,667	120	80	21100	$9,1\cdot10^3$	$12\cdot10^{-3}$
3	6740	—	$413\cdot10^3$	1600	40	$42,7\cdot10^3$	5140	$456\cdot10^3$	7,01	$18,7\cdot10^3$	$6,29\cdot10^3$	0,428	140	60	14700	$12,4\cdot10^3$	$14\cdot10^{-3}$
2	6740	—	$413\cdot10^3$	3600	60	$144\cdot10^3$	3140	$557\cdot10^3$	19,6	$17,4\cdot10^3$	$1,96.10^3$	0,250	160	40	7850	$15,4\cdot10^3$	$16\cdot10^{-3}$
1	6740	—	$413\cdot10^3$	6740	82,1	$369\cdot10^3$	0	$782\cdot10^3$	∞	$18,9.10^3$	0	0,098	182	17,9	0	$18,9\cdot10^3$	$18,2\cdot10^{-3}$

Чертеж на фиг. 586 уменьшен в 2,94 раза.

Масштабы линейных деформаций ε: в 1 *мм* 2.10^{-4} *см/см*; площадей ω: в 1 *мм*^{2} $4\cdot10^{-2}$ *кг/см*^{2}; статических моментов $\omega\varepsilon^*$: в 1 *мм*^{3} $8\cdot10^{-6}$ *кг/см*^{2}.

Изгибающий момент по формулам (26) и (28)

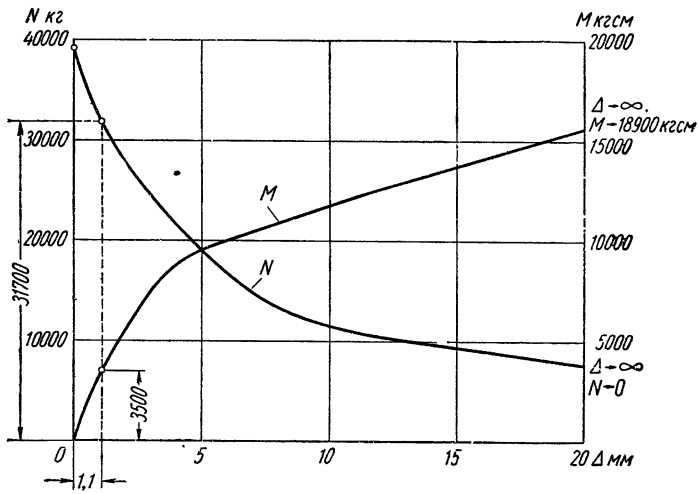
$$M=\frac{B}{\varkappa^2}\int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A}\sigma\varepsilon\,d\varepsilon-\frac{B}{\varkappa}e\int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A}\sigma\,d\varepsilon=\frac{B}{\varkappa^2}\left[\left|\omega_z\varepsilon_z^*\right|+\left|\omega_d\varepsilon_d^*\right|\right]-Ne.$$

Кривизна по зависимости (23)

$$\varkappa=\frac{\varepsilon_A-\varepsilon_B}{H}.$$

Смещение нейтрального слоя по выражению (24)

$$e=\frac{\varepsilon_A+\varepsilon_B}{2\varkappa}$$



Фиг. 587. К примеру «Расчет протяжки». Зависимость изгибающего момента M от нормальной силы N и ее эксцентрицитета Δ

На фиг. 586 внизу изображена эпюра *1* нормальных напряжений в опасном сечении протяжки при $\varepsilon_A=2\cdot10^{-2}$ *см/см* и $\varepsilon_B=0{,}4\cdot10^{-2}$ *см/см*. Этим деформациям соответствуют кривизна $\varkappa=8\cdot10^{-3}$ *1/см*, изгибающий момент $M=3500$ *кгсм*, нормальная сила $N=31\,700$ *кг*.

Из соотношения (61) устанавливаем, что в опасном сечении эксцентрицитет равен $\Delta=1{,}10$ *мм*. Этот результат соответствует размеру $H_1=22{,}2$ *мм*.

На фиг. 586 вычерчена также эпюра *3* остаточных напряжений, полученная путем наложения на эпюру *1* первичных напряжений эпюры *2* разгрузочных напряжений.

Разгрузочные напряжения могут быть вычислены по формулам сопротивления материалов, основанным на линейной зависимости между напряжениями и деформациями.

Так, разгрузочное напряжение (сжатие) в точке A равно

$$\sigma_A=\frac{N}{F}+\frac{M}{W}=\frac{31\,700}{2}+\frac{3500\cdot3}{2}=21\,100\ кг/см^2,$$

в точке B (также сжатие)

$$\sigma_B=\frac{N}{F}-\frac{M}{W}=\frac{31\,700}{2}-\frac{3500\cdot3}{2}=10\,600\ кг/см^2.$$

В приведенных формулах площадь F и момент сопротивления поперечного сечения W равны $F=2$ *см*^{2} и $W=\frac{1\cdot 2^2}{6}=\frac{2}{3}$ *см*^{3}.

При вторичном нагружении любой комбинацией нагрузок N и M конструкция ведет себя, как упругая, при условии, что напряжения ни в одной из точек сечения не превышают первичных напряжений.

Вычислим, например, напряжения при вторичном нагружении протяжки усилием $N=20\,000$ *кг* при $\Delta=1{,}1$ *мм*.

Изгибающий момент, соответствующий заданной нагрузке и эксцентрицитету Δ, согласно соотношению (61) равен 2200 *кгсм*.

Напряжения растяжения в точках A и B при вторичном нагружении равны (фиг. 586):

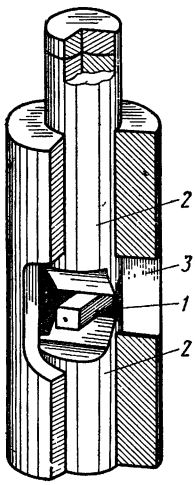
$$\sigma_A=\frac{N}{F}+\frac{M}{W}-\sigma_{ост}=\frac{20\,000}{2}+\frac{2200\cdot 3}{2}-1400=11\,900\ кг/см^2;$$

$$\sigma_B=\frac{N}{F}-\frac{M}{W}-\sigma_{ост}=\frac{20\,000}{2}-\frac{2200\cdot 3}{2}-2600=4100\ кг/см^2.$$

Эпюра нормальных напряжений, возникающих при вторичном нагружении, обозначена на фиг. 586 цифрой *4*. Эпюра нормальных напряжений при вторичном нагружении с учетом остаточных напряжений помечена цифрой *5*.

§ 5. ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ЧУГУННЫХ КОЛЕЦ

Задача о прочности и жесткости чугунных разрезных и неразрезных колец прямоугольного поперечного сечения, нагруженных двумя силами, возникла в связи с новой, рациональной методикой испытания чугуна для деталей в форме тел вращения (чугунных труб и т. п.) [2], [7] и [8].



Фиг. 588. Прибор Людвика для испытания образцов чугуна на перекусывание:
1 — образец; *2* — ножи; *3* — направляющая

Механические свойства чугуна в достаточной степени полно определяются характеристиками материала при растяжении и сжатии и числом твердости по Бринелю.

Однако при систематическом контроле качества чугуна в производственных условиях не представляется возможным снимать характеристики при растяжении и сжатии. Это объясняется сложностью экспериментального их определения, необходимостью тщательного изготовления образцов из каждой плавки и иногда невозможностью получения этих образцов из-за несоответствия габаритных размеров образца размерам и форме изделия. Поэтому обычно при приемке изделий в форме тел вращения технические условия предусматривают:

1) испытание на приборе Людвика (фиг. 588) секторов, полученных распилкой колец, выточенных из изделия (проба перекусыванием);

2) определение предела прочности при сжатии испытанием цилиндриков, выточенных из изделия;

3) определение твердости по Бринелю.

Полученная при испытании по Людвику разрушающая нагрузка перекусыванием используется затем для определения предела прочности при растяжении по эмпирической формуле Людвика

$$\sigma_{вг}=\frac{P}{F}\left(1+0{,}02\frac{P}{F}\right)\ кг/мм^2$$

где P — разрушающая сила в *кг*;

F — площадь поперечного сечения перекусываемого образца в *мм*^{2}.

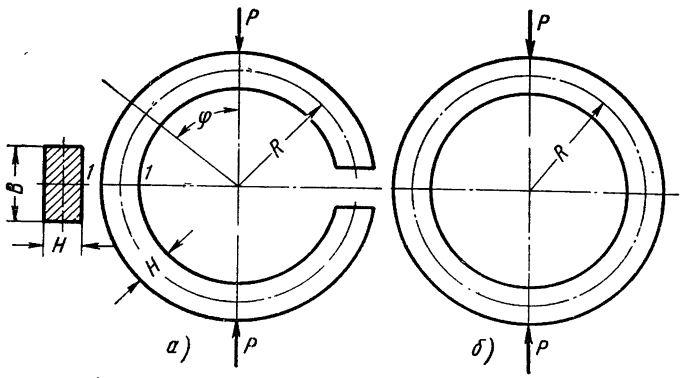
Результаты испытаний по методу Людвика в значительной степени зависят от следующих факторов:

1) от качества прибора Людвика — параллельности ножей, перекоса и сдвига их плоскостей;

2) от заточки (величины радиуса закругления лезвий ножей);

3) от качества поверхностных слоев испытуемого материала в точках соприкосновения образца с лезвием ножей.

Вследствие этого результаты испытаний по методу Людвика отличаются значительной пестротой для образцов одной и той же плавки. В некоторых случаях показания прибора Людвика были причиной бра-



Фиг. 589. Образцы чугуна, вырезанные из деталей в форме тел вращения:
а — разрезное кольцо; *б* — неразрезное кольцо

ковки удовлетворительных партий чугуна. Известны случаи приемки и браковки одной и той же партии чугуна при испытании его в разных лабораториях. Таким образом, методику испытания чугуна по Людвику нельзя признать удовлетворительной.

В новой, рациональной методике испытания чугуна для деталей в форме тел вращения было предложено [7], [8] использовать в качестве объекта для испытания разрезное или неразрезное кольцо прямоугольного поперечного сечения, выточенное из изделия. Кольцо испытывается на прессе небольшой мощности; будучи помещено между двумя его плоскостями, оно нагружается по схеме, изображенной на фиг. 589. При испытании замеряется величина разрушающей нагрузки P_b. В случае если необходимо оценить деформируемость чугуна, то измеряется наибольшее сближение плит пресса в момент, предшествующий разрушению f_b.

Условиями браковки являются следующие неравенства:

$$P_b < P_b^* \text{ и } f_b < f_b^*,$$

где P_b^* и f_b^* — значения разрушающей нагрузки и соответствующего прогиба, установленные расчетом или экспериментально для полноценного чугуна данной марки и колец данного размера.

Для получения величин P_b^* и f_b^* необходимо создать методику расчета чугунных колец.

Рассмотрим вначале расчет разрезных чугунных колец (фиг. 589,*а*). Будем считать, что кольцо является кривым брусом малой кривизны.

В таком случае для определения разрушающей силы можно использовать решение задачи о прочности прямого бруса прямоугольного поперечного сечения.

Опасным сечением кольца является сечение *1—1* (фиг. 589,*а*), где изгибающий момент

$$M = PR,$$

а нормальная сжимающая сила

$$N = P.$$

Разрушение кольца начинается тогда, когда величина изгибающего момента в этом сечении станет равной разрушающему моменту M'_b. Поэтому воспользуемся формулой (43) для получения величины разрушающей силы P_b, тогда

$$P_b = \nu_b \frac{\sigma_{bz} BH^2}{R}. \tag{62}$$

Формула (62) выведена без учета влияния сжатия на прочность кольца. Нормальная сжимающая сила немного уменьшает напряжения растяжения в наиболее напряженной точке опасного сечения, что, однако, незначительно отражается на величине разрушающей нагрузки.

Перейдем к определению уменьшения вертикального диаметра в момент разрушения кольца перемещения f_b. При этом влиянием нормальных и поперечных сил на жесткость кольца будем пренебрегать.

Используем интеграл Мора (59), тогда уменьшение вертикального диаметра в момент разрушения кольца равно:

$$f_b = 2\int_0^{\pi/2} \Delta\varkappa_b M_1 R d\varphi, \tag{63}$$

где $\Delta\varkappa_b$ — изменение кривизны бруса в текущем сечении в предельном состоянии;

M_1 — изгибающий момент в текущем сечении от единичных сил, приложенных в направлении искомого перемещения (в направлении сил P).

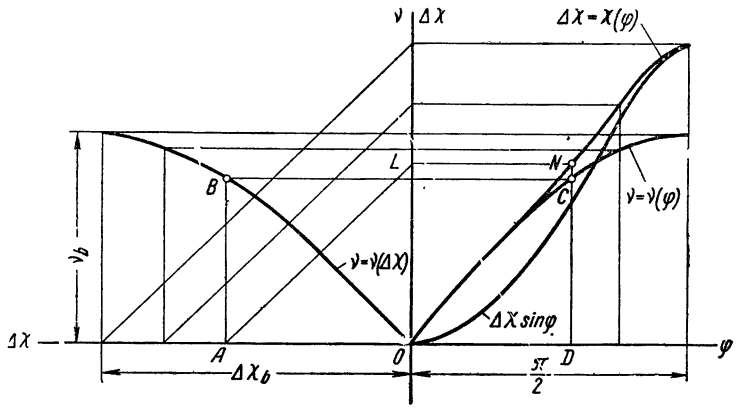
Учитывая, что (фиг. 589,*а*) $M_1 = R\sin\varphi$ и используя формулу (42), получим

$$f_b = \frac{2R^2\varepsilon_{bz}}{H}\int_0^{\pi/2} \Delta\chi_b \sin\varphi\, d\varphi. \tag{64}$$

Чтобы подсчитать интеграл в выражении (64), необходимо построить график зависимости величины $\Delta\chi$, пропорциональной изменению кривизны, от угла φ — график функции $\Delta\chi = \chi(\varphi)$ в декартовой системе координат.

Для этого вначале так, как изложено выше, строим диаграмму изгиба в безразмерных координатах — график функции $\nu = \nu(\Delta\chi)$ и эпюру изгибающих моментов в безразмерных координтаах — график функции $\nu = \nu(\varphi)$ (фиг. 590). Располагая этими двумя графиками, чертим график функции $\Delta\chi = \chi(\varphi)$.

Взяв некоторое значение ν, соответствующее отрезку $AB=CD$, проводим из точки A прямую под углом 45° к оси абсцисс до пересечения в точке L с осью ординат, затем из точки L проводим горизонтальную прямую до пересечения в точке N с продолжением прямой CD. Повторяя эти построения, получаем целый ряд точек, соединяя которые, вычерчиваем график функции $\Delta\chi=\chi(\varphi)$. Умножив ординаты этого графика на $\sin\varphi$, строим график функции $\Delta\chi\sin\varphi$.



Фиг. 590. Графическое вычисление интеграла в выражении (64)

Площадь, ограниченная этим графиком, осью абсцисс и прямой, параллельной оси ординат, отстоящей от нее на расстоянии $\varphi=\frac{\pi}{2}$, дает величину интеграла в формуле (64).

Сопоставление подсчитанных величин разрушающей нагрузки и уменьшение вертикального диаметра с полученными опытным путем приводит к заключению, что отклонение теоретических результатов от экспериментальных не превосходит 8—10%.

Рассмотрим теперь прочность и жесткость чугунных неразрезных колец.

Эта задача является статически неопределимой, и решение ее значительно сложнее, чем предыдущей [2], [7], [8].

При решении рассматриваемой задачи, так же как и раньше, будем предполагать, что кольцо является кривым брусом малой кривизны.

Выберем эквивалентную систему так, как показано на фиг. 591. Из условий геометрической и силовой симметрии можно заключить, что в сечении *1—1* отсутствуют поперечная и нормальная силы и возникают только неизвестный изгибающий момент M_0. Величину этого момента можно определить из условия, что угол поворота сечения *1—1* равен нулю.

Для вычисления искомого перемещения используем интеграл Мора (59). Угол поворота сечения *1—1* равен

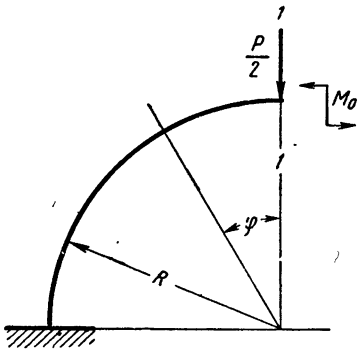
$$\theta=\int_0^{\pi/2}\Delta\varkappa\, M_1\, Rd\varphi,$$

где $\Delta\varkappa$ — изменение кривизны бруса в текущем сечении;
M_1 — изгибающий момент в текущем сечении от единичного момента, приложенного в сечении *1—1* в направлении момента M_0.

Подставляя в составленное уравнение величину изгибающего момента в текущем сечении $M_1=1$, возникшего от единичного момента, приложенного в сечении *1—1*, и учитывая, что $\theta=0$, на основании уравнения (42), получим

$$\int_0^{\pi/2} \Delta\chi\, d\varphi = 0. \tag{65}$$

Из зависимости (65) следует, что площадь, ограниченная графиком изменения величины $\Delta\chi$ в зависимости от угла φ осью абсцисс и вертикальной линией, проведенной на расстоянии $\varphi=\frac{\pi}{2}$ от оси ординат, должна быть равна нулю.



Фиг. 591. Эквивалентная система при раскрытии статической неопределимости неразрезного кольца

В начале разрушения кольца изгибающий момент в опасном сечении равен разрушающему моменту $M_в$. Величина разрушающего момента для заданных характеристик при растяжении и сжатии и размеров поперечного сечения может быть найдена так, как было изложено в § 4. Экспериментально установлено и очевидно, что опасными сечениями кольца являются сечения в тех местах, где приложены силы P. Следовательно, при разрушении

$$M_0 = M_в. \tag{66}$$

Вычислим величину разрушающей силы $P_в$. Для этого используем условие (65). В качестве первого приближения задаемся такой зависимостью [1] между $P_в$ и $M_в$, которая имела бы место в случае, если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию и подчиняется закону Гука:

$$P_{в1} = \pi\frac{M_в}{R}. \tag{67}$$

Используя величину $P_{в1}$, определяем изгибающий момент в текущем сечении:

$$M = \frac{P_{в1}R}{2}\sin\varphi - M_в,$$

тогда на основании формул (66) и (67) получим

$$M = M_в\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi - 1\right)$$

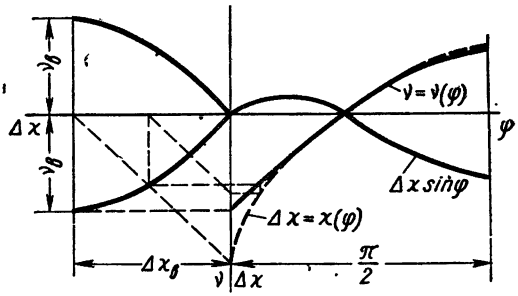
или в безразмерных координатах [формула (43)]

$$\nu = \nu_в\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi - 1\right) \tag{68}$$

По формуле (68) строим эпюру изгибающих моментов в безразмерных координатах $\nu=\nu(\varphi)$ (фиг. 592). На этом же чертеже строим в безразмерных координатах диаграмму изгиба — график зависимости $\nu=\nu(\Delta\chi)$ и так, как изложено выше, по этим двум графикам получаем зависимость $\Delta\chi=\chi(\varphi)$.

Естественно, что за счет неточного выбора разрушающей силы $P_в$ площадь, ограниченная этим графиком, осью абсцисс и прямой, отстоящей от оси ординат на расстоянии $\varphi=\frac{\pi}{2}$, окажется не равной нулю. Обозначим величину этой площади через ω. В качестве второго приближения для силы принимаем

$$P_{в2}=P_{в1}+\Delta P_в.$$



Фиг. 592. Эпюра изгибающих моментов в безразмерных координатах

За счет изменения силы $P_в$ на величину $\Delta P_в$ изменение кривизны бруса получает приращение $\Delta(\Delta\varkappa)$. Примем, что эта величина связана с приращением силы $\Delta P_в$ такой же зависимостью, как и в случае справедливости закона Гука и одинаковых характеристик материала при растяжении и сжатии:

$$\Delta(\Delta\varkappa)=\frac{\Delta P_в R}{EJ}\sin\varphi,$$

где E — модуль упругости первого рода, а

$J=\frac{BH^3}{12}$ — момент инерции поперечного сечения кольца.

Переходя к безразмерным координатам, на основании формулы (42) имеем

$$\Delta\chi=\frac{\Delta P_в RH}{CJ\varepsilon_{вz}}\sin\varphi.$$

Учитывая выражение (65), заключаем, что

$$\int_0^{\pi/2}\Delta\chi\,d\varphi=\omega.$$

Подставляя в последнюю формулу $\Delta\chi$ из предыдущего выражения, после интегрирования, получим

$$\Delta P_в=\frac{EJ\varepsilon_{вz}}{RH}\omega.$$

По новому значению разрушающей нагрузки $P_{в2}=P_{в1}+\Delta P_в$ строим новые эпюры моментов и изменения кривизны. Обычно для второго приближения площадь, ограниченная кривой $\Delta\chi=\chi(\varphi)$, осью абсцисс и прямой, параллельной оси ординат на расстоянии $\varphi=\frac{\pi}{2}$ от нее, оказывается почти точно равной нулю. Таким образом определяется разрушающая сила $P_в=P_{в2}$.

Величину предельного прогиба находим по формуле (64). Для подсчета интеграла в этой формуле необходимо перестроить график

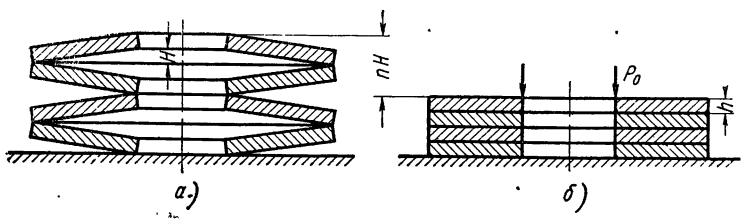
функции $\Delta\chi=\chi(\varphi)$, умножая ординаты этого графика на $\sin\varphi$. Площадь, ограниченная новой кривой, осью абсцисс и вертикальной прямой, отстоящей от оси ординат на расстоянии $\varphi=\frac{\pi}{2}$, дает величину интеграла в формуле (64).

Сопоставление результатов теоретического и экспериментального исследования прочности и жесткости чугунных неразрезных колец показало, что отклонение теоретических результатов от экспериментальных для разрушающей силы не превышает 7%.

Отметим, что разрушающая сила, полученная опытным путем, всегда больше теоретической. Это объясняется тем, что экспериментально определяется сила, при которой происходит полное разрушение кольца, в то время как теоретически находится сила, при которой в наиболее напряженной точке кольца появляется лишь первая трещина.

§ 6. РАСЧЕТ ЗАНЕВОЛЕННЫХ ТАРЕЛЬЧАТЫХ ПРУЖИН

В целях повышения несущей способности тарельчатых пружин большой жесткости (фиг. 593,*а*) последние подвергаются заневоливанию, т. е. длительному обжатию до соприкосновения элементов пружины (фиг. 593,*б*). При первичном обжатии жестких тарельчатых



Фиг. 593. Тарельчатая пружина, состоящая из n дисков:
а — пружина до заневоливания; *б* — пружина, обжатая до полного соприкосновения дисков

пружин в наиболее напряженных зонах появляются пластические деформации, в связи с чем в результате обжатия пружина получает пластическую осадку, а в материале возникают остаточные напряжения. При повторных нагружениях пружины усилиями, не превышающими первичного усилия, возникшие при обжатии остаточные напряжения суммируются с напряжениями, появляющимися при повторном нагружении, причем создается выгодное распределение внутренних сил по сравнению с их распределением при работе пружины в области упругости (наиболее нагруженные части разгружаются, а наименее нагруженные догружаются). Теория расчета обжатия тарельчатых пружин, разработанная С. В. Соколовым [11] (см. также [13] и [15]), дает возможность определить изменение высоты конуса в связи с заневоливанием, а также вычислить величину остаточных напряжений. Это позволяет заранее устанавливать высоту конуса заготовки и дает возможность точно оценивать величину напряжений в эксплуатационных условиях.

В гл. XII т. I, стр. 662 приведен расчет тарельчатой пружины в области упругих деформаций [15]. В основу расчета положена гипотеза о недеформируемости меридионального сечения пружины.

Распространяя гипотезу о неискривляемости меридионального сечения тарелки также и на случай, когда возникают пластические деформации, выполним расчет обжатия тарельчатой пружины с учетом, что у используемой термообработанной пружинной стали характеристики при растяжении и сжатии различны [11].

Пользуясь обозначениями, принятыми на фиг. 594, выпишем основные расчетные формулы (см. гл. XII т. I).

Относительная деформация в окружном направлении равна

$$\varepsilon_t = -\frac{x\varphi\left(\alpha-\frac{\varphi}{2}\right)+y\varphi}{c-x}, \qquad (69)$$

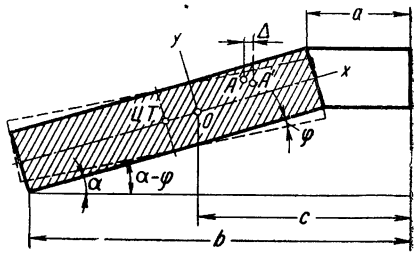
где x и y — координаты произвольной точки A (начало координат O располагается в точке поворота сечения, а оси координат направляются параллельно сторонам сечения);

α — начальный угол конуса пружины;

φ — изменение угла конуса при нагружении;

c — расстояние от оси пружины до центра поворота точки O.

Из формулы (69) следует, что в первой и частично второй и четвертой четвертях происходит сжатие, а в остальной части сечения — растяжение.



Фиг. 594. Основные геометрические параметры Элементы тарельчатой пружины до деформации

Рассматривая тарелку как кольцевой брус, выразим окружное напряжение σ_t в пределах упругости по закону Гука:

$$\sigma_t = -E\frac{x\varphi\left(\alpha-\frac{\varphi}{2}\right)+y\varphi}{c-x}. \qquad (70)$$

Расстояние от оси пружины до центра поворота сечения, определяемое из условия отсутствия нормальной силы в сечении пружины, подсчитывается в пределах упругости по формуле

$$c = \frac{b-a}{\ln\frac{b}{a}}, \qquad (71)$$

где b — наружный;

a — внутренний радиусы пружины.

Разлагая $\ln\frac{b}{a}$ в ряд и учитывая, что $\frac{b}{a}>0$, легко показать, что $c<\frac{a+b}{2}$, т. е. точка поворота сечения смещается от центра тяжести сечения к оси тарелки.

Зависимость между нагрузкой P и осадкой пружины в пределах упругости имеет вид

$$P = \frac{\pi Eh}{6(b-a)^2}w\left[(H-w)\left(H-\frac{w}{2}\right)+h^2\right]\ln\frac{b}{a}, \qquad (72)$$

где h — толщина элемента пружины;

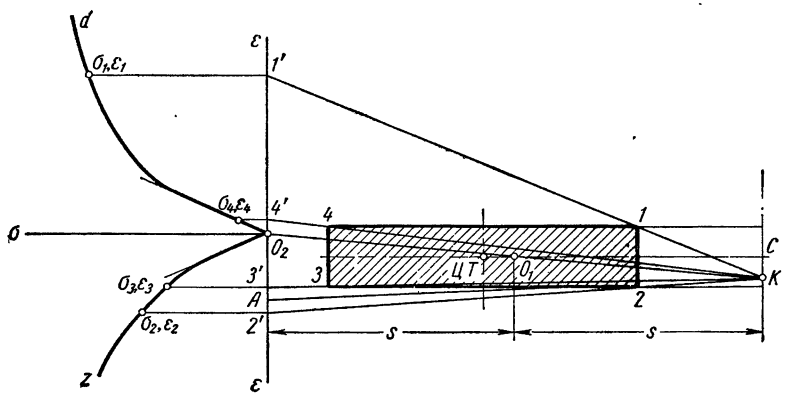
w — осадка одного элемента пружины;

H — высота внутреннего конуса в недеформированном состоянии (фиг. 593).

Формула (69) справедлива и за пределом упругости. Тогда для случая, когда конический элемент пружины при заневоливании доводится до полного сплющивания (фиг. 595), имеет место следующее соотношение:

$$\varepsilon_t = -\frac{\frac{\alpha^2}{2}x + \alpha y}{c - x}, \tag{73}$$

где $c - x = u$ — расстояние рассматриваемой точки от оси тарелки;
c — расстояние от оси пружины до центра поворота меридионального сечения при обжатии; положение этого центра, вообще говоря, неизвестно.



Фиг. 595. Основные геометрические параметры элемента тарельчатой пружины в положении наибольшего обжатия. Графическое определение напряжений в меридиональном сечении элемента пружины. O_{2z} — характеристика материала пружины при растяжении; O_{2d} — при сжатии

Выражение (73) относительно x и y представляет собой уравнение прямой.

При различных значениях деформации ε_t уравнению (73) соответствует пучок прямых, выходящих из некоторой точки K (фиг. 595), координаты которой определяются формулами

$$x_K = c \text{ и } y_K = -c\frac{\alpha}{2}. \tag{74}$$

Уравнение нейтральной линии соответствует значению параметра $\varepsilon_t = 0$.

Угловой коэффициент этой прямой $k = -\frac{\alpha}{2}$.

Лучи, пересекающие меридиональное сечение выше нейтральной линии, соответствуют деформациям сжатия $\varepsilon_t < 0$, а ниже — деформациям растяжения $\varepsilon_t > 0$.

Чтобы оценить величину деформаций в различных точках сечения, воспользуемся следующим графическим способом.

Проведем вспомогательную масштабную ось ε, параллельную оси пружины и удаленную от нее, например, на расстоянии, равном $2s$, где s (см. фиг. 595) — длина отрезка на оси меридионального сечения

от точки C до точки O_1 пересечения этой оси с нейтральной линией, которая предполагается известной. Каждому значению ε_t на оси ε будет соответствовать определенная точка. Точка пересечения этой оси с нейтральной линией ($\varepsilon_t = 0$) обозначена O_2. Координаты этой точки равны: $x_2 = -s$; $y_2 = \frac{\alpha}{2} s$.

(Заметим, что положение начала координат, которое лежит на нейтральной линии, остается неизвестным).

Ордината точки A пересечения с осью ε луча, соответствующего определенной деформации ε_t, по формуле (73) будет

$$x_A = -s; \quad y_A = \frac{\alpha}{2} s - \varepsilon_t \frac{2s}{\alpha}. \tag{75}$$

Таким образом, длина отрезка O_2A равна $\varepsilon_t \frac{2s}{\alpha}$.

Отсюда следует, что отрезок O_2A выражает величину деформации ε_t, соответствующей лучу KA, умноженной на длину $\frac{2s}{\alpha}$.

Полученное соответствие позволяет устанавливать величину деформации ε_t, присущей точкам того или иного луча. Например, деформация в точке 1 равна отрезку $O_2 1'$, разделенному на величину $\frac{2s}{\alpha}$ и т. д.

Для выяснения вопроса о распределении нормальных окружных напряжений необходимо располагать характеристиками материала пружины при растяжении и сжатии. Тарельчатые пружины обычно изготовляются из листовой рессорной стали 60С2, закаленной не ниже $H_{R_C} = 45$.

Характеристики такой стали при растяжении O_2z и сжатии O_2d представлены на фиг. 595.

При построении характеристик за начало координат выбрана точка O_2, а за ось ординат ось ε. Ось абсцисс отложена влево от оси ε.

При построении характеристик по оси ε откладываются деформации, умноженные на $\frac{2s}{\alpha}$. Напряжения откладываются в произвольном масштабе. Учитывая, что каждый луч является геометрическим местом точек равных ε_t, не представляет труда установить величину напряжений в любой точке поперечного сечения *1—2—3—4*. Это позволяет построить эпюры напряжений по контуру меридионального сечения пружины.

Обозначим площади эпюр напряжений на

контуре *1 — 4* (фиг. 596)	Ω_1
участке *4 — q* контура *3 — 4*	Ω_2
участке *1 — l* контура *1 — 2*	Ω_3
участке *q — 3* контура *3 — 4*	Ω_4
контуре *2 — 3*	Ω_5
участке *1 — 2* контура *1 — 2*	Ω_6

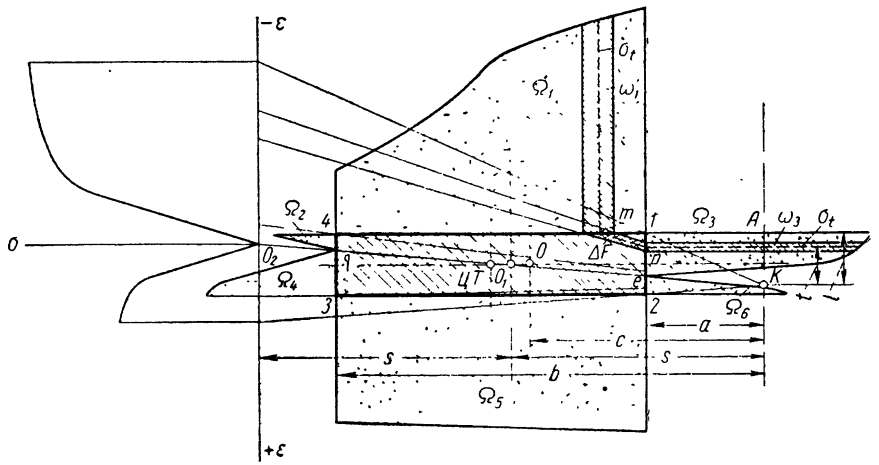
l — расстояние от центра пучка K до точки A пересечения продолжения линии контура *1 — 4* с осью пружины (фиг. 596);

N_d — равнодействующая внутренних нормальных сил сжатия в сечения;

N_z — равнодействующая внутренних нормальных сил растяжения;
F — площадь поперечного сечения;
$N = N_z - |N_d|$ — нормальная сила в осевом сечении, которая по условию должна равняться нулю, т. е.

$$N = \int_F \sigma_t \, dF = 0. \tag{76}$$

Это условие и определяет положение нейтральной линии, однако, поскольку положение начала координат (точки поворота сечения) неизвестно, а также неизвестна аналитическая зависимость $\sigma_t = f(\varepsilon_t)$, то



Фиг 596. Графическое решение задачи об определении изгибающего момента в меридиональном сечении элемента тарельчатой пружины

установить параметры, определяющие нейтральную линию, аналитически оказывается очень сложным. Задачу можно разрешить графоаналитическим методом.

В качестве первого приближения предположим, что точка O_1 пересечения нейтральной линии с осью меридионального сечения находится между точкой O, определяемой формулой (71), и центром тяжести меридионального сечения.

Нейтральную линию проводим через точку O_1 под углом $\frac{\alpha}{2}$ к горизонту.

Для уточнения положения нейтральной линии вычислим величину нормальной силы в сечении. Если она окажется равной нулю ($N_z = |N_d$), то положение нейтральной линии выбрано правильно, в противном случае ее положение надо уточнить.

Рассмотрим элементарную площадку ΔF сечения, ограниченную смежными лучами, выходящими из точек K (фиг. 596). На данной элементарной площадке можно принять в среднем напряжение σ_t постоянным.

Значение элементарной внутренней силы, возникающей на этой площадке, будет

$$\Delta N_d = \sigma_t \Delta F = \sigma_t \left(\frac{1}{2} ml - \frac{1}{2} na \right). \tag{77}$$

В скобках зависимости (77) стоит разность площадей двух элементарных треугольников, основаниями которых являются отрезки m и n (фиг. 596), лежащие на контуре сечения.

Выражение (77) можно записать также в ином виде:

$$\Delta N_d = \frac{1}{2}\sigma_t ml - \frac{1}{2}\sigma_t na = \omega_1 \frac{l}{2} - \omega_3 \frac{a}{2}, \qquad (78)$$

где ω_1 — элементарная площадка эпюры напряжений, соответствующая отрезку m контура *1—4*.

Аналогично ω_3 — элементарная площадка эпюры напряжений, соответствующая отрезку n контура *1—2*.

Следовательно, с помощью выражения (78) и других таким же образом составленных зависимостей для остальных элементарных площадок интегрирование по площади сечения, предусмотренное уравнением (76), можно заменить интегрированием по контуру этого сечения и выразить равнодействующие силы N_d и N_z через площади эпюр напряжений Ω и размеры b, a, l и h, указанные на фиг. 593 и 596.

Равнодействующая N_d внутренних сил сжатия с учетом масштабов может быть вычислена по формуле

$$N_d = \left(\Omega_1 \frac{l}{2} + \Omega_2 \frac{b}{2} - \Omega_3 \frac{a}{2}\right). \qquad (79)$$

Поступив аналогично с площадью $q—3—2—e—q$ растянутой зоны с учетом масштабов, имеем

$$N_z = \left(\Omega_4 \frac{b}{2} + \Omega_5 \frac{h-l}{2} + \Omega_6 \frac{a}{2}\right). \qquad (80)$$

Таким образом, чтобы найти равнодействующие N_d и N_z, достаточно вычислить площади эпюр напряжений, построенных по контуру меридионального сечения тарельчатой пружины.

Так как положение нейтральной линии было принято произвольно, то вычисленные по формулам (79) и (80) значения равнодействующих нормальных сжимающих N_d и растягивающих N_z сил, вообще говоря, не будут равны друг другу.

В случае значительного расхождения их величин следует найти новое положение нейтральной линии, при котором силы N_d и N_z будут примерно равны. При этом нейтральная линия должна быть смещена в новое положение параллельно самой себе, поскольку ее угол наклона к оси пружины должен сохранять значение $\frac{\alpha}{2}$.

При уточнении положения нейтральной линии можно воспользоваться следующим графическим методом.

Примем, приближенно, что

$$\sigma_N = \frac{N_z - N_d}{(b-a)h}.$$

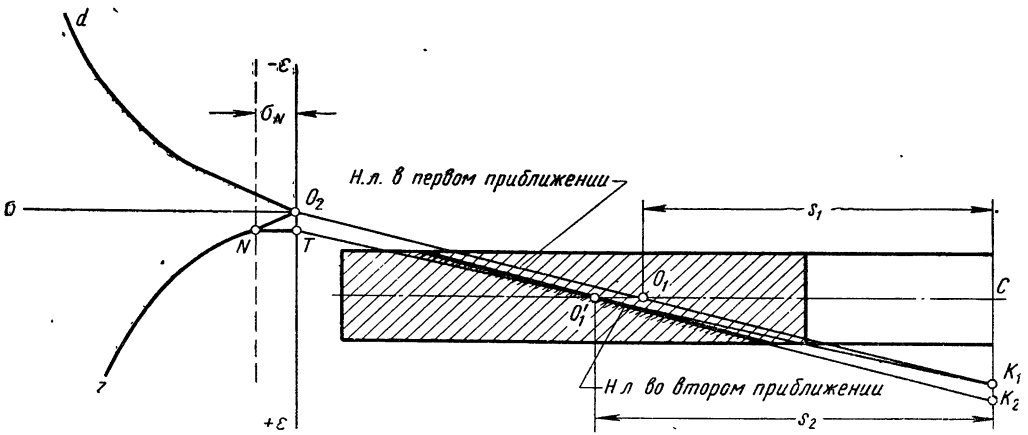
Отложим на диаграмме растяжения — сжатия (фиг. 597) напряжение σ_N и, проектируя точку N на ось ε, найдем точку T, которая определит направление луча K_1T. Точка пересечения O_1' этого луча с осью меридионального сечения тарелки приближенно определит новое положение нейтральной линии O_1K_2, которая будет проходить через точку O_1' параллельно лучу O_1K_1 (фиг. 597).

Из фиг. 597 легко установить, что уточненное расстояние точки O_1' от оси пружины

$$s_2 \approx s_1 + \frac{2 s_1 \sigma_N}{E\alpha^2}.$$

На базе размера s_2 и следует повторить заново все построения, представленные на фиг. 596.

После уточнения положения нейтральной линии следует обратиться к определению возникающего при обжатии момента внутренних сил. Учитывая, что последние приводятся к чистой паре, будем вычислять их момент относительно горизонтальной оси, проходящей через точку K и лежащей в плоскости чертежа (фиг. 596).



Фиг. 597. Уточнение положения нейтральной линии методом последовательных приближений

Для этого найдем вначале значение элементарного момента ΔM, создаваемого внутренней силой, возникающей на площадке ΔF. Он будет равен

$$\Delta M = \left(\frac{1}{2} ml \frac{2}{3} l - \frac{1}{2} na \frac{2}{3} t\right) \sigma_t, \qquad (81)$$

где t — расстояние от точки K до средней линии площадки ω_3;

l — как и прежде, расстояние AK (фиг. 596).

В скобках зависимости (81) стоит разность моментов площадей относительно точки K двух элементарных треугольников, основаниями которых являются отрезки m и n, лежащие на контуре сечения.

Зависимость (81) можно записать в ином виде:

$$\Delta M = \omega_1 \frac{l^2}{3} - \omega_3 \frac{a}{3} t.$$

Поступая аналогичным образом для всех элементарных площадок сечения пружины, окончательно получаем

$$M = \left(-\Omega_1 \frac{l^2}{3} - \Omega_2 \frac{b}{3} t_2 + \Omega_3 \frac{a}{3} t_3 \pm \Omega_4 \frac{b}{3} t_4 - \Omega_5 \frac{(h-l)^2}{3} \pm \right.$$
$$\left. \pm \Omega_6 \frac{a}{3} t_6\right), \qquad (82)$$

где t_2, t_3, t_4, t_6 — расстояние от горизонтальной оси, проходящей через точку K, до центров тяжести соответствующих площадей Ω эпюр напряжений на контуре меридионального сечения.

Таким образом, для определения момента внутренних сил относительно точки K необходимо вычислить площади Ω эпюр напряжений и расстояния, определяющие положение центров тяжести указанных эпюр относительно горизонтальной оси, проходящей через точку K.

С другой стороны изгибающий момент, возникающий в сечении тарелки, связан с усилиями, действующими на пружину соотношением (гл. XII, т. I)

$$M = \frac{P_0(b-a)}{2\pi}, \tag{83}$$

где P_0 — сила в конце обжатия;

M — момент внутренних сил, определяемый по формуле (82).

Таким образом,

$$P_0 = \frac{2\pi M}{b-a}. \tag{84}$$

Остаточная осадка пружины после обжатия равна

$$w_{ост} = H - w_e,$$

где H — высота конуса до обжатия (см. фиг. 593);

w_e — осевое перемещение, определяемое по закону разгрузки.

Осадка w_e может быть подсчитана по формуле (72), исходя из усилия обжатия P_0.

Определим остаточные напряжения, возникающие в материале пружины после заневоливания.

Рассмотрим разгрузку пружины после заневоливания как дополнительное нагружение пружины высотой $H - w_{ост}$ силой, направление которой противоположно нагрузке обжатия. Разгрузочные напряжения в соответствии с законом разгрузки определяются на основании зависимости (70) следующей формулой

$$(\sigma_t)_p = E\frac{H - w_{ост}}{b-a} \cdot \frac{\frac{H - w_{ост}}{2(b-a)}x - y}{c-x}, \tag{85}$$

где c определяется по зависимости (71).

Остаточные напряжения в любой точке сечения равны

$$(\sigma_t)_{ост} = \sigma_t + (\sigma_t)_p, \tag{86}$$

где $(\sigma_t)_{ост}$ — остаточные напряжения;

σ_t — напряжения, возникающие при обжатии.

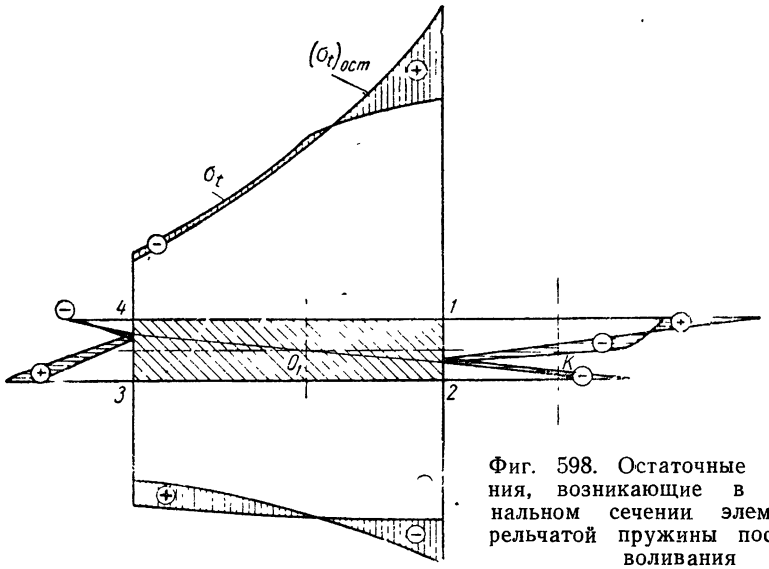
В частности, эпюры остаточных напряжений в точках контура сечения могут быть получены путем наложения эпюр напряжений при обжатии и эпюр разгрузочных напряжений.

Эпюры остаточных напряжений, возникающие при обжатии, на фиг. 598 отмечены штриховкой.

При повторном нагружении пружины нагрузкой меньшей, чем сила обжатия, за счет остаточных напряжений происходит выгодное перераспределение напряжений, возникающих в сечении заневоленной пружины, что приводит к повышению несущей способности пружины в пределах упругости.

Как известно, при расчете обжатых (заневоленных) тарельчатых пружин по номинальным напряжениям часто выбираются допускаемые напряжения, иногда превосходящие даже предел проч-

ности материала. Очевидно, что в этом случае расчет является чисто условным, поскольку поле действительных напряжений у заневоленной



Фиг. 598. Остаточные напряжения, возникающие в меридиональном сечении элемента тарельчатой пружины после заневоливания

пружины является совершенно иным. На самом же деле напряжения распределяются по сечению в сравнении с упругим решением значительно более равномерно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, Гостехиздат, 1954.

2. Бидерман В. Л., Расчет чугунных колец, «Труды кафедры сопротивления материалов МВТУ имени Баумана», разд. II. Теоретические и экспериментальные исследования напряженного и деформированного состояния некоторых элементов конструкций, изд. МВТУ имени Баумана, 1948.

3. Ильюшин А. А., Пластичность, ГИТТЛ, 1948.

4. Конюшко З. М., Исследование прочности термически обработанных инструментальных сталей, сб. «Расчеты на прочность в машиностроении», Труды МВТУ имени Баумана, № 46, Машгиз, 1955.

5. Конюшко З. М., Графо-аналитический способ расчета брусьев по методу предельных нагрузок при внецентренном растяжении—сжатии, сб. «Расчеты на прочность элементов машиностроительных конструкций», Труды МВТУ имени Баумана, № 31, Машгиз, 1955.

6. Конюшко З. М., К расчету протяжек на прочность, «Станки и инструмент» № 10, 1955.

7. Лихарев К. К. и Малинин Н. Н., Рациональная методика испытания чугуна для деталей в форме тел вращения, «Труды кафедры сопротивления материалов МВТУ имени Баумана», разд. IV, Некоторые вопросы экспериментальных исследований в области прочности, изд. МВТУ имени Баумана, М., 1947.

8. Лихарев К. К. и Малинин Н. Н., Рациональная методика испытания чугуна для деталей в форме тел вращения, «Вестник машиностроения» № 9—10, 1944.

9. Надаи А., Пластичность и разрушение твердых тел, ИЛ, 1954.

10. Пономарев С. Д., Графический способ определения прогибов при упругопластическом изгибе, Труды Московского станко-инструментального института, Машгиз, 1954.

11. Соколов С. В., Расчет заневоленных тарельчатых пружин, «Вестник машиностроения» № 7, 1957.

12. Теория пластичности, сб. ст. под ред. Ю. Работнова, ГТТИ, 1948.

13. Феодосьев В. И., Расчет обжатия пружин Бельвилля, «Труды кафедры сопротивления материалов МВТУ имени Баумана», разд. I. Теоретические и экспериментальные исследования пружин, изд. МВТУ имени Баумана, М., 1947.

14. Шапошников Н. А., Механические испытания металлов, Машгиз, 1954.

15. Almen I. O. and Laszlo A., The uniform section disc spring, «Trans. of ASME», v. 58, May 1936.

РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

РАСЧЕТЫ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ

ГЛАВА XII

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие ряда отраслей современного машиностроения, и в первую очередь паро- и газотурбостроения, выдвинуло новую проблему расчета деталей машин на ползучесть.

Обычно ползучестью называют медленное нарастание во времени деформации детали при постоянной нагрузке.

Однако мы будем придерживаться иного, более общего определения ползучести, данного А. А. Ильюшиным [6]. Согласно этому определению *ползучестью называется явление изменения во времени деформаций и напряжений, возникших в результате нагружения детали.*

Одну сторону этого явления — изменение деформаций будем называть *последействием*, а другую — изменение напряжений — *релаксацией.*

Последействие может быть упругим и пластическим. В случае упругого последействия, деформации, возникшие во времени, после разгрузки уменьшаются и с течением времени совсем исчезают. В случае пластического последействия накопленные во времени деформации являются в основном необратимыми и после разгрузки уменьшаются во времени медленно и в незначительной степени.

В дальнейшем мы будем заниматься пластическим последействием, которое для краткости назовем просто последействием.

В целом ряде случаев при наличии внешних связей, ограничивающих деформации деталей, а также при существовании внутренних связей (задачи статически неопределимые с точки зрения определения напряжений) в результате развития пластических деформаций происходит изменение во времени напряжений (релаксация). При этом часто напряжения перераспределяются по объему детали.

Отметим, что ползучесть имеет место как в том случае, когда при нагружении детали возникают пластические (остаточные) деформации, так и в том случае, когда при нагружении деформации упругие.

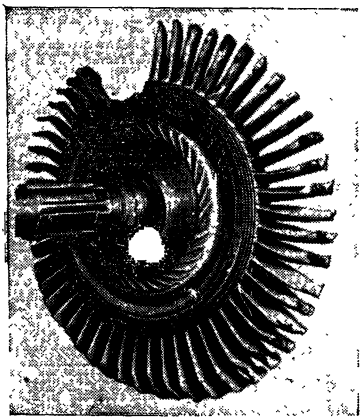
Для деталей, выполненных из сталей и чугунов, явление ползучести существенно при повышенных температурах (ориентировочно при температурах выше 300°). Чем выше температура, тем интенсивнее протекает процесс ползучести. При небольших температурах изменение во времени деформаций и напряжений, возникших в результате нагружения, незначительно, и им можно пренебречь.

Однако для ряда материалов, как, например, для цветных металлов и легких сплавов (свинец, алюминий, дуралюмин и др.), а также для высокополимерных материалов (резина, каучук, пластмассы и др.)

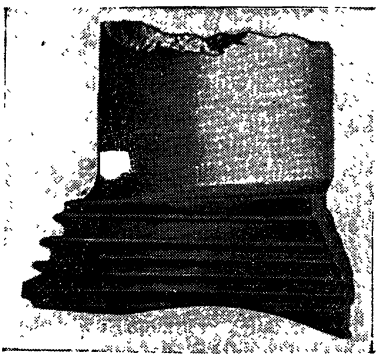
явление ползучести весьма заметно и при комнатной температуре. Так, например, прогибы свинцовой балочки, положенной на две опоры и находящйеся только под действием собственного веса, заметно растут во времени даже при комнатной температуре.

Таким образом, вопрос о необходимости рассмотрения в расчете ползучести детали должен решаться в зависимости от материала детали, температуры нагрева и степени ее напряженности.

Обычно ползучесть учитывается при расчете и конструировании деталей машин, находящихся в процессе эксплуатации длительное время в нагретом состоянии. В таких условиях работают, например,



Фиг. 599. Турбинный диск, разрушенный в результате последействия материала



Фиг. 600. Разрушенная турбинная лопатка со следами последействия материала

элементы конструкций паровых и газовых турбин, реактивных двигателей, паровых котлов, узлы оборудования нефтяной промышленности, детали химических аппаратов и тепловых приборов.

В практике известен целый ряд случаев, когда в результате последействия материала деформации деталей достигали таких величин, при которых нарушались условия нормальной эксплуатации агрегатов. Так, вследствие последействия материала диска и лопаток газовой турбины перекрывались зазоры, предусмотренные между лопатками и корпусом, что и приводило к поломке лопаток.

На фиг. 599 представлен разрушенный в результате последействия материала турбинный диск. На фиг. 600 изображена разрушенная турбинная лопатка со следами последействия материала.

За счет релаксации наступает постепенное ослабление плотности соединения деталей, скрепленных при помощи упругого натяга. Например, плотность болтового соединения фланцев паропровода или фланцев корпуса паровой турбины, работающих при высоких температурах, с течением времени снижается, в результате чего может возникнуть пропаривание фланцев. Плотность посадки диска на вал в условиях его работы при повышенной температуре с течением времени также ослабевает. Уменьшение созданного при посадке контактного давления на поверхности соприкосновения диска с валом приводит к нарушению связи между диском и валом (к так называемому сходу диска).

Из изложенного выше следует, что особенностью расчетов на ползучесть является учет фактора времени, который в обычных расчетах на статическую нагрузку во внимание не принимается. Поэтому расчет деталей, работающих в условиях ползучести нужно производить совершенно на иной основе, чем расчет деталей, для которых явлением ползучести можно пренебречь.

Если для последних при расчете на прочность в качестве предельного состояния принимается наступление текучести или разрушения, то для нагретых деталей предельным состоянием является такое, когда величины деформаций и напряжений достигают определенных предельных значений, при которых нарушаются условия нормальной эксплуатации деталей.

Ползучесть металлов представляет собой весьма сложный процесс, заключающийся в перемещении атомов как внутри зерен, так и по их границам. Этот процесс является одним из видов пластической деформации, которая определяется несколькими формами относительного перемещения атомов металла. К настоящему времени механизм ползучести еще недостаточно изучен.

Явление ползучести известно давно, однако особенное внимание исследователей оно привлекло в 20-х годах нашего столетия в связи с развитием энергетического машиностроения, в котором стремление к высокой экономичности паросиловых установок вызвало необходимость использования пара высокого давления и высокой температуры.

С этого времени в советской и зарубежной литературе появилось значительное количество исследований, посвященных как экспериментальному исследованию ползучести металлов и изучению механизма ползучести, так и расчетам элементов конструкций на ползучесть.

В настоящем разделе излагаются расчеты элементов конструкций, находящихся в условиях ползучести. В нем рассматриваются гипотезы ползучести, предложенные различными исследователями, методы расчета на ползучесть, результаты экспериментальных работ и, где это оказывается возможным, производится сопоставление результатов теории и эксперимента. Некоторые решения задач расчета на ползучесть даны автором. Вопросы методики экспериментального изучения ползучести и механизма явления ползучести затронуты не будут. Интересующихся этими вопросами отсылаем к специальной литературе [2], [4], [12], [14], [15], [16], [18], [23], [24].

§ 2. ПРОСТОЕ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ

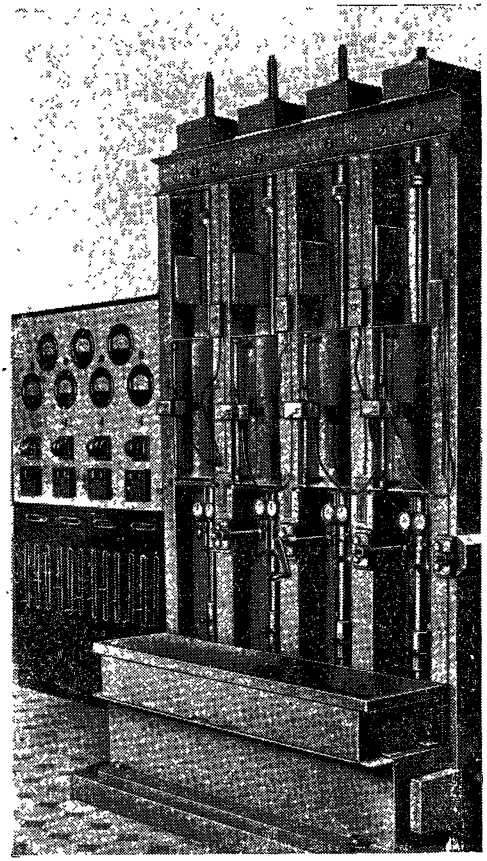
Расчеты деталей на ползучесть основываются на результатах экспериментального изучения ползучести при одноосном однородном напряженном состоянии. Наиболее простым типом испытания является экспериментальное исследование последействия в образце, растянутом нагрузкой, постоянной во времени. Будем называть процесс последействия при постоянных во времени напряжениях простым последействием.

А. Установка для экспериментального изучения простого последействия

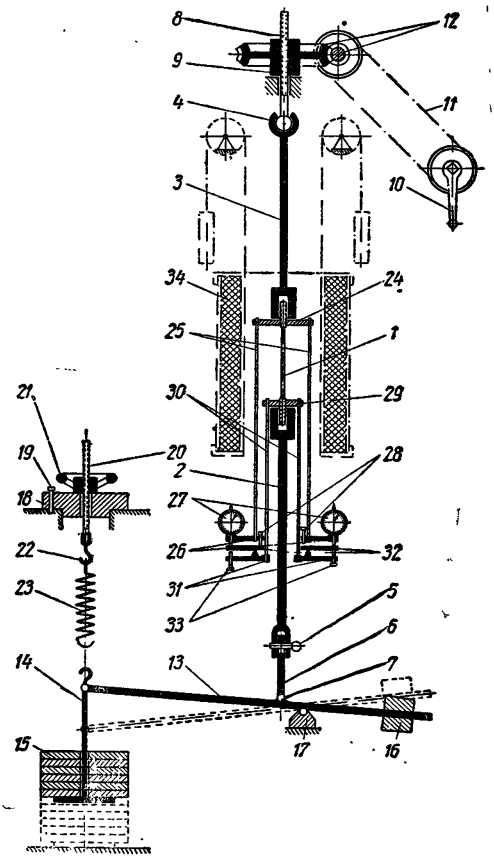
Экспериментальное изучение простого последействия производится на специальных установках. Ознакомимся, например, с установкой ИП-2 конструкции ЦНИИТМАШ.

Установка состоит из четырех независимых секций, оснащенных одинаковыми механическими и электрическими приборами и приспособлениями. Таким образом, в установке ИП-2 можно одновременно производить испытания четырех образцов в различных условиях. На фиг. 601 представлен общий вид установки. На фиг. 602 изображена ее схема.

Образец *1* закрепляется на резьбе в захватах *2* и *3*. Верхний захват *3* посредством шарового шарнира *4* соединен с подъемным меха-



Фиг. 601. Общий вид установки ИП-2 для экспериментального изучения простого последействия



Фиг. 602. Схема одной секции установки ИП-2 для экспериментального изучения простого последействия

низмом, а нижний с помощью чеки *5* и тяги *6* — с механизмом нагружения образца. Шаровой шарнир *4* и радиальные сферические подшипники *7* обеспечивают нагружение образца без перекоса. Подъемный механизм, состоящий из винта *8* и гайки *9*, приводится во вращение рукояткой *10* посредством цепной и червячной передач *11* и *12*. При помощи этого механизма производится подъем или опускание верхнего захвата. Механизм нагружения образца состоит из рычага *13*, подвески для грузов *14*, сменных грузов *15* и противовеса *16*. Рычаг *13* укреплен шарнирно на опоре *17*, отношение плеч рычага равно $\frac{1}{50}$.

На начальной стадии испытания рычаг поднят в верхнее положение, показанное на фиг. 602 сплошными линиями. По мере возрастания деформации рычаг поворачивается. При удлинении образца на 2 *мм* (соответствующем для расчетной длины образца 200 *мм* деформации, равной 1%) рычаг придет в крайнее нижнее положение, вследствие чего грузы коснутся основания машины и усилие, растягивающее образец, изменится, что недопустимо. Во избежание этого необходимо в процессе нарастания деформации периодически поднимать рычаг *13* вместе с образцом и захватами при помощи подъемного механизма *8—12*. Для контроля за положением рычага на последнем имеется стрелка, перемещающаяся между двумя неподвижными указателями, соответствующими крайним положениям рычага.

Первоначальное нагружение образца производится при помощи специального устройства, обеспечивающего плавное нарастание нагрузки. Это устройство состоит из передвижной каретки *18* с фиксатором *19* и винта *20* с маховиком *21*. К винту *20* посредством крюка *22* присоединена винтовая цилиндрическая пружина *23*. При нагружении образца нижний конец пружины соединяют с подвеской грузов *14* и натягивают пружину посредством винта *20* с помощью маховика *21*, затем устанавливают на подвеску нужное количество грузов и, постепенно освобождая пружину, плавно нагружают образец. После полного освобождения пружину отсоединяют от подвески. Величина рабочего усилия может быть установлена в пределах от 50 до 3000 *кг* в соответствии с требуемой величиной напряжения. Изменение усилия в этих пределах достигается за счет сменных грузов.

Для измерения удлинений образца машина снабжена специальным тензометром. Тензометр изготовлен сдвоенным, т. е. имеет два индикатора с двумя одинаковыми системами передаточных рычагов и тяг для того, чтобы исключить ошибки, связанные с возможной нецентральностью приложения нагрузки.

Рассмотрим устройство тензометра. К верхней головке образца *1* крепится траверса *24* с тягами *25*. На нижний конец тяг жестко насажены поперечины *26* с закрепленными в них циферблатными индикаторами *27* и регулировочными винтами *28*. К нижней головке образца крепится аналогичная траверса *29* с тягами *30*. К концам тяг *30* жестко прикреплены поперечины *31*, на которых шарнирно установлены передаточные рычаги *32* с отношением плеч 1 : 5, а также имеются регулировочные винты *33*. Если винты *33* вывернуть, а винты *28* завернуть так, чтобы рычаги *32* касались измерительных шпинделей индикаторов, как это показано в левой части фиг. 602, то при удлинении образца шпиндели индикаторов будут получать смещения в 5 раз большие, чем удлинения. При этом цена деления шкал индикаторов будет равна 0,002 *мм*. Если же, наоборот, вывернуть винты *28*, а винты *33* завернуть, как показано в правой части фиг. 602, то шпиндели индикаторов будут жестко соединены с поперечинами *31* и далее с нижней головкой образца, и, следовательно, индикаторы будут измерять удлинения без увеличения, цена деления шкалы при этом будет равна 0,01 *мм*.

Для нагрева образца служит электрическая печь сопротивления *34*, которая имеет три отдельно регулируемые обмотки, что дает возможность осуществлять постоянство температуры по расчетной длине образца.

Регулировка равномерности температуры по длине образца производится с помощью движковых реостатов на основании показаний термопар, установленных в трех точках по расчетной длине образца.

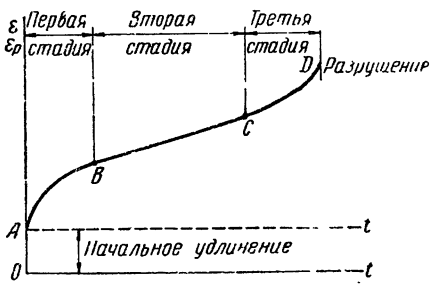
Поддержание заданной температуры производится автоматически с помощью терморегулятора, в котором в качестве первичного элемента, воспринимающего изменения температуры, использован жароупорный муфель печи. Максимальная рабочая температура при нихромовой обмотке 700°. Точность поддержания температуры ±0,5°. Измерение температуры может производиться либо непрерывно с помощью самопишущего гальванометра, либо периодически с помощью потенциометра. Точность измерения температуры ±0,5°.

И. А. Одинг предложил [13] новый метод испытаний металлов на ползучесть. Им рекомендован образец, имеющий форму разрезного кольца равного сопротивления изгибу в пределах упругости. Этот способ нашел применение в промышленных испытаниях в целях сопоставления сопротивления ползучести различных материалов.

Б. Кривые простого последействия

Перейдем к рассмотрению результатов экспериментального изучения простого последействия.

При нагружении образца деформация его возрастает от нуля до некоторой величины. Деформация, возникшая при нагружении, может быть либо упругой, либо упруго-пластической в зависимости от величины напряжения, при котором производится испытание. В течение времени деформация образца увеличивается. Прирост деформации за некоторый промежуток времени, считая от конца нагружения, является пластической деформацией, поскольку при разгрузке образца уменьшение деформации равно лишь упругой составляющей деформации, возникшей при нагружении.



Фиг. 603. Кривая простого последействия

Обычно результаты экспериментального изучения простого последействия обрабатываются в виде графиков, представляющих зависимость от времени полных или пластических деформаций при постоянных напряжениях и температуре. Эти графики назовем *кривыми простого последействия*. Заметим, однако, что в литературе они обычно называются кривыми ползучести.

Вид кривых простого последействия зависит от напряжения и температуры, при которых испытывался образец. Для сравнительно небольших температур и напряжений, например для стали при температуре порядка 400—500° и напряжениях порядка 800—1500 *кг/см*^{2}, кривая простого последействия изображена на фиг. 603.

При нагружении нагретого образца деформация весьма быстро возрастает от нуля до некоторой величины, изображенной на графике отрезком *OA*. Если напряжение не превосходит предела пропорциональности материала образца, то эта часть деформации является упругой, в противном случае эта деформация состоит из упругой и пластической (остаточной) деформации.

В дальнейшем, после прекращения роста нагрузки, полная деформация нагретого образца будет постепенно увеличиваться во времени по закону, изображенному линией *ABCD*. Ординаты этой линии представляют собой величины деформаций ε для определенного значения

времени. Они складываются из деформации, возникшей при нагружении, и пластической деформации, образовавшейся в результате простого последействия.

Иногда на графике изображается зависимость от времени только одной пластической деформации (возникшей за счет простого последействия) ε_p, тогда ось абсцисс графика расположена так, как показано штриховой линией на фиг. 603.

Тангенс угла наклона касательной к линии $ABCD$ с осью абсцисс в масштабе выражает скорость деформации ε, равную скорости пластической деформации ε_p:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_p = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_p}{dt}.$$

Размерность скорости деформации — 1/сутки, 1/час, 1/мин. или 1/сек. в зависимости от того, в каких единицах измеряется время — в сутках, часах, минутах или секундах.

Как следует из фиг. 603, процесс простого последействия можно разделить на три стадии.

В первой стадии (участок AB) скорость пластической деформации постепенно уменьшается.

Во второй стадии (участок BC) процесс простого последействия протекает с минимальной постоянной во времени скоростью $\dot{\varepsilon}_{p\min}$. Минимальная скорость пластической деформации во второй стадии зависит от напряжения и температуры. При определенной температуре минимальная скорость пластической деформации

$$\dot{\varepsilon}_{p\min} = Q(\sigma),$$

где $Q(\sigma)$ — некоторая функция напряжения.

Различные рекомендации относительно аналитического выражения функции $Q(\sigma)$ приведены в табл. 31. Коэффициенты a, b, c, d, g, h, i, j, k, l, n для каждого материала зависят от температуры, коэффициенты α, β, δ, ζ, η, ξ, χ, ν являются постоянными для материала. Температура, выраженная в градусах Цельсия, обозначена через ϑ, а абсолютная температура — через T.

Таблица 31

Зависимости минимальной скорости пластической деформации от напряжения $\dot{\varepsilon}_{p\,\min} = Q(\sigma)$

$Q(\sigma)$	$k\sigma^n$	$c \operatorname{sh} \frac{\sigma}{d}$	$a\left(e^{\frac{\sigma}{b}} - 1\right)$	$ge^{\frac{\sigma}{h}}$
$Q(\sigma)$	$i(\sigma - j)^l$	$\alpha e^{\beta\vartheta}\sigma^{\nu}$	$\delta e^{-\frac{\zeta}{T}}\sigma e^{f(\sigma)}$	$\eta T e^{-\frac{\xi}{T}} \operatorname{sh} \frac{\chi\sigma}{T}$

Наиболее экспериментально проверенной является степенная зависимость минимальной скорости пластической деформации от напряжения

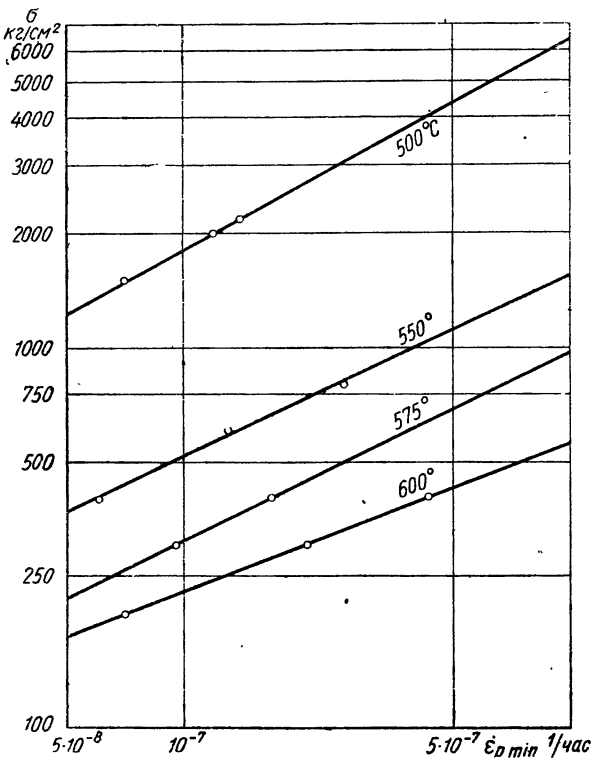
$$\dot{\varepsilon}_{p\min} = Q(\sigma) = k\sigma^n \qquad (1)$$

и закон гиперболического синуса

$$\dot{\varepsilon}_{p\min} = Q(\sigma) = c \operatorname{sh} \frac{\sigma}{d}. \qquad (2)$$

Величины k, n, c и d в формулах (1) и (2), как уже отмечалось, для каждого материала зависят от температуры.

В дальнейшем будет использоваться формула (1), поскольку она, как показано ниже, хорошо согласуется с данными опытов и удобна для использования в расчетах. Правда, зависимость (2) несколько лучше подтверждается экспериментальными данными, чем выражение (1), но ее использование для расчетных целей более сложно и численные значения коэффициентов c и d, входящих в формулу (2), менее изучены, чем значения коэффициентов k и n в зависимости (1). Отметим, что коэффициент k имеет размерность $\frac{(см^2/кг)^n}{час}$, если время измеряется в часах, а n — безразмерная величина, обычно бо́льшая единицы.



Фиг. 604. Графики зависимостей напряжения от минимальной скорости пластической деформации для хромомолибденовой стали марки 60Х16М2А, химический состав которой (в%): 0,60 C; 0,46 Si; 0,28 Mn; 16,9 Cr; 0,22 Ni; 2,00 Mo; 0,013 S; 0,030 P; термическая обработка — закалка на воздухе с температуры 1050°, отпуск при температуре 800—820° [20]

Логарифмируя соотношение (1), получаем

$$\lg \dot{\varepsilon}_{p\min} = \lg k + n \lg \sigma. \quad (3)$$

Таким образом, из выражения (1) следует справедливость линейной зависимости между логарифмами минимальной скорости пластической деформации и напряжения.

На фиг. 604—606 в логарифмических координатах представлены графики зависимости напряжения от минимальной скорости пластической деформации, построенные на основе результатов испытаний трех марок сталей при различных температурах [21], [27]. Точки отражают результаты экспериментов.

Как следует из этих графиков, с достаточной для практики степенью точности можно предположить справедливость линейной зависимости между логарифмами минимальной скорости пластической деформации $\dot{\varepsilon}_{p\min}$ и напряжения σ, которая и приводит к формуле (1).

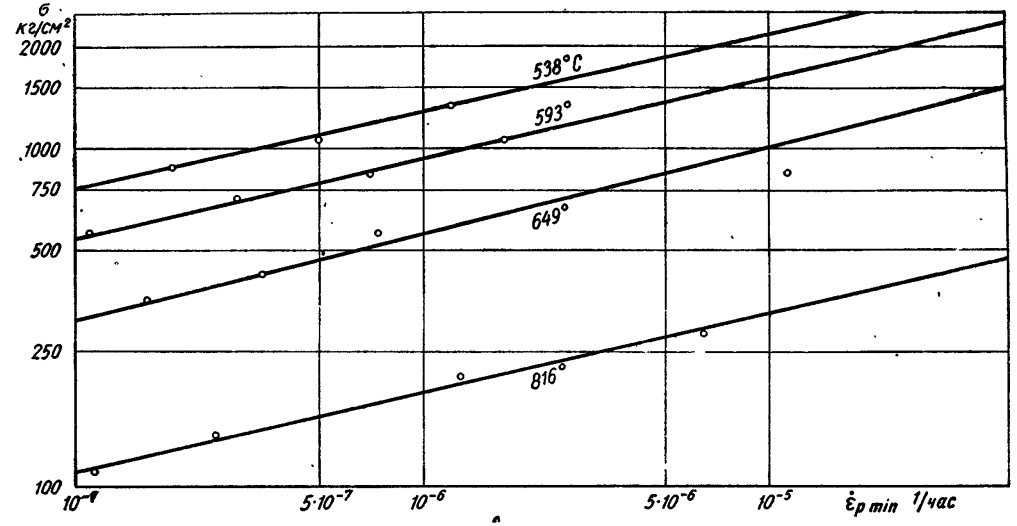
Располагая серией кривых простого последействия при определенной температуре и различных напряжениях, можно установить величины коэффициента k и показателя степени n.

Для этого вначале необходимо подсчитать минимальные скорости пластической деформации при различных напряжениях и полученные результаты изобразить в виде точек в логарифмических координатах

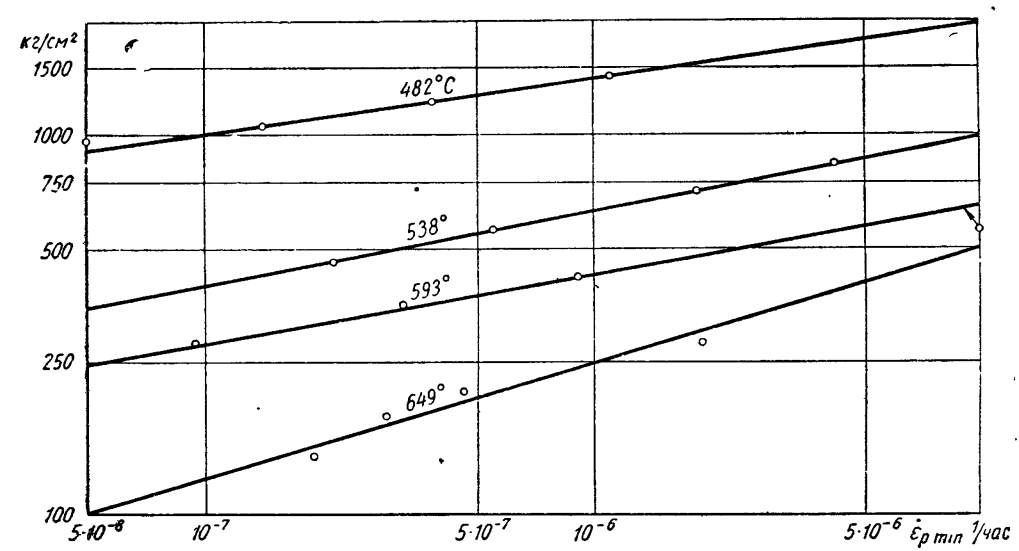
$\lg \dot{\varepsilon}_{p\,\mathrm{m\,n}}$, $\lg \sigma$ (фиг. 607). Затем надо провести прямую, апроксимирующую результаты опытов (фиг. 607), и выбрать на этой прямой две какие-либо точки *1* и *2* с координатами $\lg \dot{\varepsilon}_{p1}$, $\lg \sigma_1$ и $\lg \dot{\varepsilon}_{p2}$, $\lg \sigma_2$ соответственно. Согласно формуле (3) имеем

$$\lg \dot{\varepsilon}_{p\min 1} = \lg k + n \lg \sigma_1,$$

$$\lg \dot{\varepsilon}_{p\min 2} = \lg k + n \lg \sigma_2,$$



Фиг. 605. Графики зависимостей напряжения от минимальной скорости пластической деформации для хромоникелевой стали, химический состав которой (в %): 0,06 C; 0,50 Mn; 0,61 Si; 0,008 S; 0,008 P; 17,75 Cr; 9,25 Ni; термическая обработка—закалка с 1093° [25]



Фиг. 606. Графики зависимостей напряжения от минимальной скорости пластической деформации для хромомолибденовой стали, химический состав которой (в %): 0,11 C; 0,45 Mn; 0,42 Si; 0,015 S; 0,012 P; 0,50 Mo; 2,08 Cr; термическая обработка—отжиг, 844° [25]

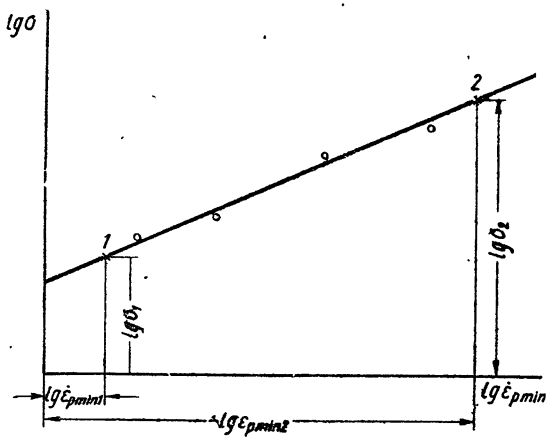
откуда следует

$$n = \frac{\lg \frac{\dot{\varepsilon}_{p2}}{\dot{\varepsilon}_{p1}}}{\lg \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}; \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \lg k &= \lg \dot{\varepsilon}_{p\min 1} - n \lg \sigma_1; \\ \lg k &= \lg \dot{\varepsilon}_{p\min 2} - n \lg \sigma_2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

По формуле (4) определяется показатель степени n, после чего по первой или второй формуле (5) можно установить и логарифм коэффициента k.

В табл. 32 приведены величины k и n для некоторых материалов при определенных температурах, полученные нами путем обработки экспериментальных данных, опубликованных в литературе (соответствующие ссылки приведены в табл. 32).



Фиг. 607. К определению показателя степени * и коэффициента k

В третьей стадии простого последействия (участок CD на фиг. 603) скорость деформации непрерывно нарастает, пока не наступает разрушение образца (точка D на фиг. 603).

Ранее предполагалось, что увеличение скорости пластической деформации в третьей стадии вызвано повышением напряжения, которое, в свою очередь, обусловлено уменьшением площади поперечного сечения образца за счет его растяжения с последующим развитием шейки [18]. Это положение подтверждалось опытами Андраде [18], изучавшим простое последействие образцов из чистых металлов при постоянном напряжении и постоянной нагрузке. На основании таких исследований Андраде установил, что если опыт ведется при строго постоянном напряжении, то третья стадия отсутствует, а при испытаниях при постоянной нагрузке третья стадия имеет место.

Однако позднее было показано, что образование и развитие шейки не всегда сопутствует третьей стадии простого последействия. Незначительное уменьшение площади поперечного сечения образца за счет его растяжения и связанное с ним повышение напряжения недостаточно для заметного увеличения скорости пластической деформации в третьей стадии.

В настоящее время установлено [18], что в случае отсутствия шейки увеличение скорости пластической деформации в третьей стадии объясняется образованием местных трещин внутри образца, которые развиваются в материале в течение времени под влиянием напряжений и температуры и ослабляют образец. По своему эффекту это явление эквивалентно уменьшению площади поперечного сечения

Таблица 32

Основные характеристики ползучести некоторых материалов

Материал	Химический состав в %	Термическая обработка	Температура испытания в °С	k в $\frac{(см^2/кг)^n}{час}$	n
Углеродистая сталь [27]	0,15C; 0,50Mn; 0,23Si; 0,032S; 0,025P	Отжиг при 844°	427	$3{,}63\cdot10^{-27}$	6,24
То же	То же	То же	538	$1{,}30\cdot10^{-14}$	3,04
»	»	»	593	$2{,}04\cdot10^{-13}$	3,18
»	»	»	649	$8{,}45\ 10^{-12}$	3,03
Углеродистая сталь [31]	0,30C	--	400	$1{,}80\cdot10^{-30}$	6,90
Углеродистая сталь [32]	0,35C	—	454	$3{,}10\cdot10^{-16}$	3,44
Углеродистая сталь [31]	0,39C	—	400	$5{,}50\cdot10^{-37}$	8,60
Углеродистая сталь [27]	0,43C; 0,68Mn; 0,20Si; 0,033S; 0,035P	Отжиг при 844°	427	$1{,}77\cdot10^{-25}$	6,01
То же	То же	То же	538	$3{,}63\cdot10^{-17}$	4,07
»	»	»	649	$1{,}39\cdot10^{-9}$	1,66
Молибденовая сталь [27]	0,13C; 0,49Mn; 0,25Si; 0,010S; 0,011P; 0,52Mo	»	482	$3{,}27\cdot10^{-23}$	5,28
То же	То же	»	538	$2{,}82\cdot10^{-20}$	4,71
»	»	»	593	$8{,}44\cdot10^{-16}$	3,77
»	»	»	649	$1{,}44\cdot10^{-13}$	3,19
Хромомолибденовая сталь [27]	0,10C; 0,38Mn; 1,55Si; 0,016S; 0,009P; 0,51Mo; 4,83Cr	»	538	$9{,}21\cdot10^{-23}$	5,80
То же	То же	»	593	$2{,}17\cdot10^{-19}$	5,07
»	»	»	649	$1{,}56\cdot10^{-19}$	5,68
Хромомолибденовая сталь [27]	0,11C; 0,45Mn; 0,42Si; 0,015S; 0,012P; 0,50Mo; 2,08Cr	»	482	$2{,}96\cdot10^{-28}$	6,84
То же	То же	»	538	$8{,}01\cdot10^{-21}$	5,05
»	»	»	593	$3{,}65\cdot10^{-21}$	5,49
»	»	»	649	$1{,}11\cdot10^{-14}$	3,32
Хромомолибденовая сталь 30ХМ [5]	—	Отжиг в течение 1 часа при 600°	500	$1{,}15\cdot10^{-22}$	5,33
Хромомолибденовая сталь [30]	0,37C; 0,16Si; 0,011S; 0,018P; 0,38Mn; 1,05Cr; 0,17Ni; 0,82Mo; 0,08Cu	Закалка в масле с 850°; отпуск при 630°	525	$4{,}29\cdot10^{-12}$	1,85

Продолжение таблицы 32

Материал	Химический состав в %	Термическая обработка	Температура испытания в °С	k в $\frac{(см^2/кг)^n}{час}$	n
Хромомолибденовая сталь [27]	0,48C; 0,49Mn; 0,62Si; 0,015S; 0,016P; 0,52Mo; 1,20Cr	Отжиг при 844°	427	$1,80 \cdot 10^{-27}$	6,33
То же	То же	То же	538	$2,42 \cdot 10^{-16}$	3,50
»	»	»	649	$3,31 \cdot 10^{-13}$	2,97
Хромомолибденовая сталь 60Х16М2А [21]	0,60C; 0,46Si; 0,28Mn; 16,9Cr; 0,22Ni; 2,00Mo; 0,013S; 0,030P	Закалка на воздухе с 1050°; отпуск при 800—820°	500	$1,24 \cdot 10^{-13}$	1,82
То же	То же	То же	550	$1,75 \cdot 10^{-13}$	2,12
»	»	»	575	$9,33 \cdot 10^{-13}$	2,02
»	»	»	600	$7,76 \cdot 10^{-14}$	2,59
Хромомолибденовая сталь ЭИ10 [7]	0,28C; 0,24Si; 0,58Mn; 1,55Cr; 0,38Mo; 0,16Va; 0,12Ni	Закалка с 900° (масло), отпуск при 650°	450	$9,86 \cdot 10^{-18}$	2,99
То же	То же	То же	500	$5,00 \cdot 10^{-13}$	1,83
»	»	»	550	$8,12 \cdot 10^{-13}$	2,06
Хромоникелевая сталь [27]	0,06C; 0,50Mn; 0,61Si; 0,008S; 0,008P; 17,75Cr; 9,25Ni	Закалка с 1093°	538	$1,87 \cdot 10^{-20}$	4,42
То же	То же	То же	593	$4,49 \cdot 10^{-19}$	4,15
»	»	»	649	$3,84 \cdot 10^{-17}$	3,79
»	»	»	816	$1,69 \cdot 10^{-16}$	4,30
Хромоникельмолибденовая сталь [34]	0,31C; 0,45Mo; 0,54Mn; 0,83Cr; 2,05Ni	—	450	$3,94 \cdot 10^{-16}$	2,45
Хромоникельвольфрамовая сталь ХНВМ12 [3]	0,48C; 0,68Si; 0,47Mn; 0,012P; 2,24W; 13,6Cr; 14,5Ni; 0,54Mo	Закалка с 1100°, охлаждающая среда—воздух	500	$1,49 \cdot 10^{-32}$	7,76
То же	То же	То же	600	$1,67 \cdot 10^{-38}$	10,3
»	»	»	700	$1,52 \cdot 10^{-20}$	5,21
Хромоникельвольфрамовая сталь ХНВМ16 [3]	0,13C; 0,67Si; 0,60Mn; 0,023P; 2,40W; 14,5Cr; 14,0Ni; 0,45Mo	Закалка с 1000°, охлаждающая среда—воздух	500	$1,49 \cdot 10^{-32}$	7,76
То же	То же	То же	600	$5,68 \cdot 10^{-41}$	11,3
»	»	»	700	$1,67 \cdot 10^{-21}$	5,68
Хромоникельвольфрамовая сталь ЭИ69 [11]	0,45C; 0,60Si; 0,76Mn; 13,9Cr; 13,8Ni; 1,75W; 0,4Mo; 0,008S; 0,024P	Закалка с 1175°, стабилизация при 750° в течение 5 час.	600	$2,00 \cdot 10^{-13}$	3,00

Продолжение таблицы 32

Материал	Химический состав в %	Термическая обработка	Температура испытания в °С	k в $\frac{(см^2/кг)^n}{час}$	n
Хромоникельвольфрамовая сталь ЭИ69 [11]	0,45C; 0,60Si; 0,76Mn; 13,9Cr; 13,8Ni; 1,75W; 0,4Mo; 0,008S; 0,024P	Закалка с 1175°, стабилизация при 750° в течение 5 час.	650	$20,1 \cdot 10^{-13}$	2,93
То же	То же	То же	700	$1,56 \cdot 10^{-11}$	2,90
Хромоникельвольфрамовая сталь ЭИ69 [9]	0,52C; 0,82Si; 13,51Cr; 15,20Ni; 2,01W; 0,57Mo	Отжиг при 820°	800	$9,52 \cdot 10^{-15}$	4,00
Хромоникельвольфрамовая сталь ЭИ122 [22]	0,52C; 2,05Si; 0,77Mn; 16,4Cr; 13,9Ni; 2,55W; 0,88Ti; 0,012S; 0,04P	—	550	$1,20 \cdot 10^{-15}$	2,63
То же	То же	—	650	$5,86 \cdot 10^{-17}$	3,63
Хромоникельвольфрамовая сталь ЭИ123 [22]	0,15C; 1,66Si; 0,82Mn; 15,4Cr; 13,2Ni; 2,28W; 0,76Ti; 0,028S; 0,018P	—	550	$1,24 \cdot 10^{-28}$	6,81
То же	То же	—	600	$8,58 \cdot 10^{-11}$	1,22
Хромоникельвольфрамовая сталь ЭИ126 [22]	0,50C; 0,71Si; 0,84Mn; 13,8Cr; 40,9Ni; 2,29W; 0,005S; 0,009P	—	600	$7,59 \cdot 10^{-16}$	2,98
То же	То же	—	650	$4,12 \cdot 10^{-13}$	2,23
Хромомарганцововольфрамовая сталь СХМВ18 [3]	0,46C; 1,15Si; 14,9Mn; 2,25W; 0,042P; 13,9Cr	Закалка с 1100°, охлаждающая среда—воздух	600	$1,59 \cdot 10^{-35}$	9,15
То же	То же	То же	700	$3,45 \cdot 10^{-25}$	6,84
Хромомарганцевовольфрамовая сталь СХМВ19 [3]	0,16C; 1,20Si; 15,2Mn; 0,043P; 2,43W; 14,7Cr	»	600	$2,21 \cdot 10^{-34}$	9,15
То же	То же	»	700	$1,67 \cdot 10^{-21}$	5,68
Медь [28]	—	—	165	$9,17 \cdot 10^{-12}$	1,60
То же	—	—	235	$3,88 \cdot 10^{-11}$	2,16

образца. Причины образования указанных трещин и механизм их развития должны быть подвергнуты дальнейшему экспериментальному изучению.

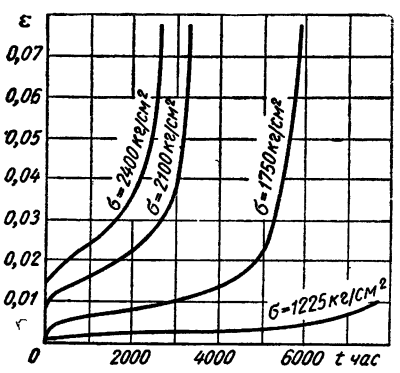
Отметим, что с увеличением напряжения и температуры скорости пластической деформации возрастают, а продолжительность второй стадии уменьшается. На фиг. 608 представлены кривые простого последействия, полученные путем испытания образцов при постоянной температуре и различных напряжениях [35], а на фиг. 609 приведены кривые простого последействия, полученные путем испытания образцов при постоянном напряжении и различных температурах [26]. По этим гра-

фикам можно проследить влияние напряжения и температуры на вид кривых простого последействия.

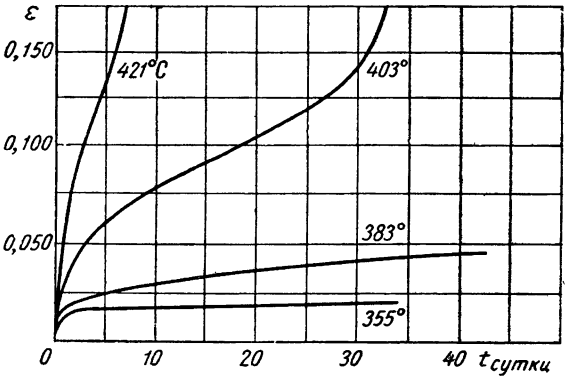
Влияние температуры на процесс простого последействия определяется так называемой сходственной или гомологической температурой θ, равной отношению абсолютной температуры, при которой производилось испытание, к абсолютной температуре плавления металла [23]:

$$\theta = \frac{T}{T_{пл}}.$$

Если взять два металла с различными абсолютными температурами плавления $T_{пл1}$ и $T_{пл2}$, то процесс простого последействия для



Фиг. 608. Кривые простого последействия для хромокремнемолибденовой стали при температуре 540° и различных напряжениях [35]



Фиг. 609. Кривые простого последействия для армко-железа при напряжении 1740 *кг/см²* и различных температурах [26]

них будет во многом сходен, если абсолютные температуры испытаний T_1 и T_2 удовлетворяют следующему отношению:

$$\frac{T_1}{T_{пл1}} = \frac{T_2}{T_{пл2}},$$

т. е. если гомологические температуры в обоих испытаниях одинаковы. Так, например, температура плавления свинца 327°, в то время как температура плавления стали 1500°. Процесс простого последействия свинца при температуре 20° во многом качественно сходен с процессом простого последействия стали при температуре 600°, так как

$$\frac{20+273}{327+273} \approx \frac{600+273}{1500+273}.$$

Учитывая это обстоятельство, многие экспериментаторы для установления основных закономерностей ползучести металлов при повышенных температурах проводили изучение ползучести путем испытания свинцовых образцов при комнатной температуре, что, естественно, практически гораздо проще.

В. Уравнения кривых простого последействия

Для расчетов на ползучесть наибольший интерес представляют первая и особенно вторая стадии кривых простого последействия, поскольку третья стадия уже предшествует разрушению материала.

На основании анализа кривых простого последействия были предложены различные уравнения, отражающие первую и вторую стадии этих кривых.

Различные зависимости пластической деформации от времени и напряжения для данного материала, при определенной температуре можно разбить на две группы.

В основу первой группы формул положена гипотеза о том, что кривые простого последействия в координатах t, ε_p при различных напряжениях и одной и той же температуре геометрически подобны. Это означает, что кривые простого последействия могут быть получены из одной кривой умножением ординат ее на некоторую величину, являющуюся функцией напряжения. Следовательно, зависимость пластической деформации от напряжения и времени записывается в виде произведения двух функций, из которых одна Q является функцией напряжения и температуры, а другая Ω — функцией времени и температуры:

$$\varepsilon_p = Q\,\Omega. \tag{6}$$

Во второй группе формул предполагается, что кривые простого последействия в первой стадии геометрически подобны, а во второй стадии величина пластической деформации линейно зависит от времени. Общий вид второй группы формул:

$$\varepsilon_p = Q_1\,\Psi + Qt. \tag{7}$$

где Q_1 и Q — функции напряжения и температуры;
Ψ — монотонно и быстро убывающая функция времени.

Таким образом, при малых значениях времени вторым слагаемым выражения (7) по сравнению с первым можно пренебречь, и тогда процесс простого последействия описывается первым слагаемым (первая стадия простого последействия). Как следует из структуры первого слагаемого, кривые простого последействия в первой стадии геометрически подобны.

При больших значениях времени первым слагаемым по сравнению со вторым можно пренебречь, и тогда процесс простого последействия описывается вторым слагаемым уравнения (7) (вторая стадия простого последействия).

Как следует из рассмотрения второго слагаемого, зависимость пластической деформации от времени во второй стадии линейная. Функция Q приближенно представляет собой минимальную скорость пластической деформации.

Различные рекомендации относительно вида функции Q были приведены выше. Функция Q_1 выбирается в таком же виде. Аналитические выражения функции Ψ даны в табл. 33.

Очевидно, что зависимость (7) является более гибкой и позволяет точнее описать кривые простого последействия, чем зависимость (6). Однако, как будет показано ниже, и соотношение (6) дает

достаточную для практики степень точности, вместе с тем оно проще, чем выражение (7) и поэтому более удобно в расчетах. В дальнейшем мы будем придерживаться формулы (6), причем будем полагать, что функция Q является степенной функцией напряжения (1).

Таблица 33

Аналитическое представление функции Ψ в уравнении (7)

Ψ	$a(1-e^{-bt})$	$a\ln\left(1+\frac{t}{b}\right)$

Таким образом, мы приходим к следующей зависимости пластической деформации от напряжения и времени:

$$\varepsilon_p = \sigma^n \Omega. \tag{8}$$

Как будет показано ниже, выражение (8) обычно хорошо подтверждается результатами опытов. Отметим, что поскольку при $t=0$ $\varepsilon_p=0$,

$$\text{то при } t=0 \quad \Omega=0. \tag{9}$$

Дифференцируя соотношение (8), получим

$$\dot{\varepsilon}_p = \sigma^n B, \tag{10}$$

где

$$B = \frac{d\Omega}{dt}, \tag{11}$$

и, следовательно, согласно соотношению (9)

$$\Omega = \int_0^t B dt. \tag{12}$$

Величина показателя степени n в уравнении (8) определяется на основе вычисления минимальных скоростей пластической деформации при различных напряжениях так, как было указано выше. Затем по кривой простого последействия можно определить функцию Ω. Для этого согласно формуле (8) необходимо ординаты кривой простого последействия, полученной путем испытания образца при определенном напряжении, разделить на величину этого напряжения в n-й степени.

Если кривые простого последействия подобны и зависимость (8) справедлива, то из всех кривых при различных напряжениях и определенной температуре должен получиться один и тот же график функции Ω. По разбросу точек можно оценить точность предположения о подобии кривых простого последействия и судить о справедливости формулы (8).

Функция B может быть найдена после определений функции Ω графическим или численным дифференцированием. Заметим, что, как будет установлено в дальнейшем, функция B непосредственно в расчетах не используется. На фиг. 610 представлен примерный вид графиков функций Ω и B.

Как отмечалось выше, во второй стадии процесс простого последействия протекает с постоянной скоростью. Поэтому на основании соотношений (1) и (10) заключаем, что во второй стадии простого последействия

$$B = k$$

и, следовательно, согласно формуле (12)

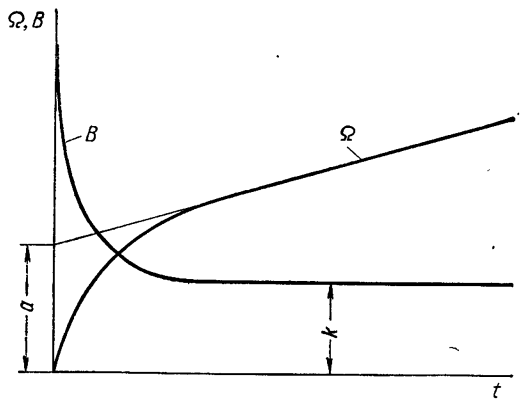
$$\Omega = a + kt,$$

где a — отрезок, отсекаемый продолжением линейного участка графика зависимости Ω от t на оси ординат (фиг. 610).

Рассмотрим экспериментальную проверку зависимости (8). Для этого изложим результаты проведенной нами обработки данных экспериментального изучения простого последействия двух марок сталей, описанного в работах [32] и [9].

На фиг. 611 и 612 изображены кривые простого последействия при различных напряжениях [32], [9]. На этих же фигурах указаны минимальные скорости пластической деформации для каждого напряжения, вычисленные по кривым простого последействия.

На фиг. 613 и 614 в логарифмических координатах представлены графики зависимости напряжения от минимальной скорости пластической деформации. На этих чертежах приведены значения показателя степени n, вычисленные так, как это было изложено выше.

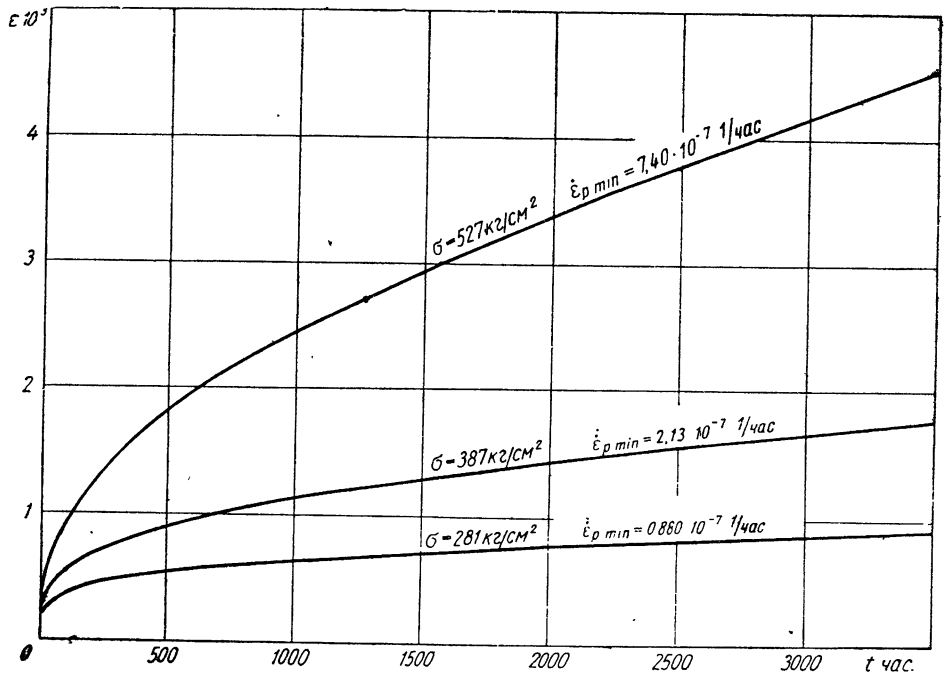


Фиг. 610. Графики функций Ω и B

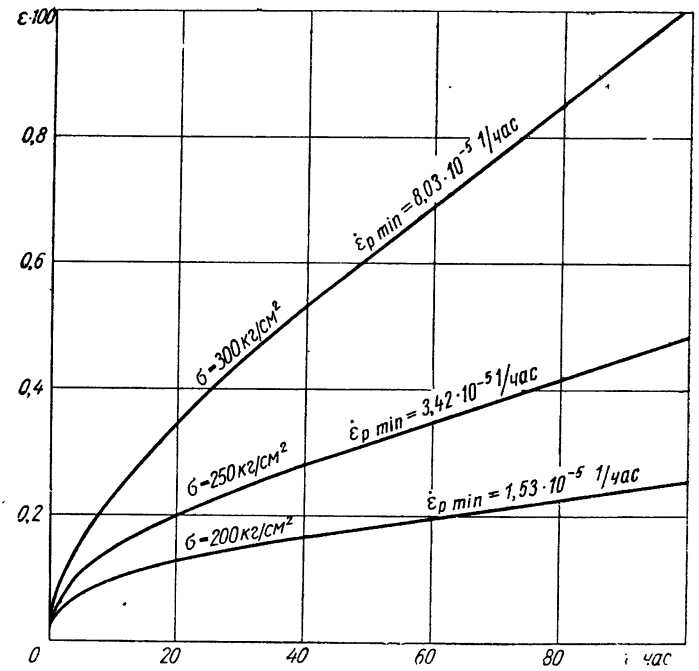
На фиг. 615 и 616 изображены графики функции Ω, полученные путем обработки кривых простого последействия, изображенных на фиг. 611 и 612, с использованием величин показателя степени n, указанных на фиг. 613 и 614. Ординаты точек на фиг. 615 и 616 в выбранном масштабе равны отношению пластической деформации для фиксированного момента времени при определенном напряжении к величине этого напряжения в n-й степени. Отметим, что для определения функций Ω кривые простого последействия, полученные при наименьших напряжениях, как при обработке их, так и при обработке последующих испытаний не использовались. Это объясняется тем, что при небольшом напряжении пластические деформации малы и, следовательно, точность измерения их значительно ниже, чем при замере больших пластических деформаций, что ставит под сомнение достоверность экспериментально полученных в этом случае результатов.

Из рассмотрения фиг. 615 и 616 можно видеть, что разброс точек сравнительно невелик, что позволяет принять предположение о подобии кривых простого последействия и считать зависимость (8) достаточно точной.

Отметим, что для данного материала Ω является функцией не только времени, но и температуры. В настоящее время аналитическая зависимость величины Ω от температуры надежно не установлена, точно так же как не установлена и аналитическая зависимость показателя степени n от температуры. Однако анализ результатов испытаний в условиях простого последействия при различных температу-



Фиг. 611. Кривые простого последействия для стали с содержанием углерода 0,35%, при температуре 454° [32]

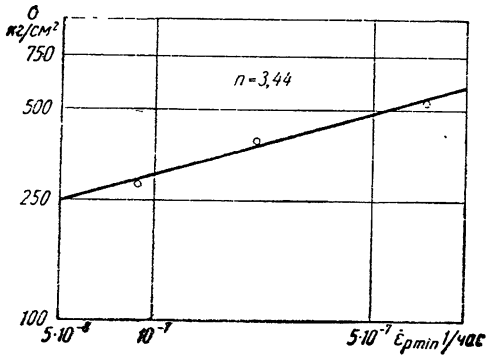


Фиг. 612. Кривые простого последействия для стали ЭИ69 при температуре 800° [9]

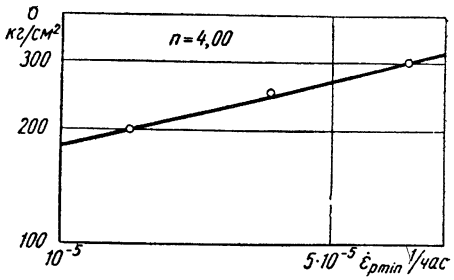
рах [8] позволяет принять, что функция Ω приближенно может быть представлена в виде произведения двух функций:

$$\Omega = T\Omega_1,$$

одна из которых T есть функция только температуры, а другая Ω_1 — функция только времени.



Фиг. 613. График зависимости напряжения от минимальной скорости пластической деформации для стали с содержанием углерода 0,35% при температуре 454°

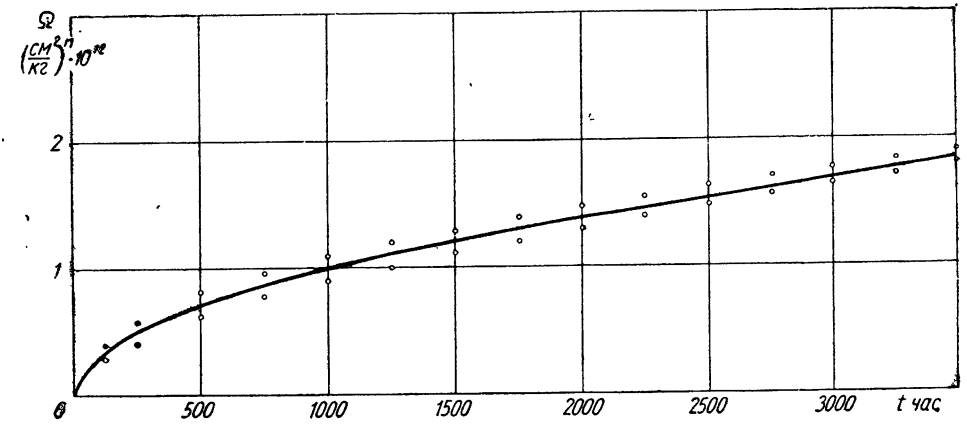


Фиг. 614. График зависимости напряжения от минимальной скорости пластической деформации для стали ЭИ69 при температуре 800°

Г. Обратное последействие

Рассмотрим явление обратного последействия.

Если при исследовании последействия в некоторый момент времени t_1, соответствующий точке B на кривой простого последействия AB (фиг. 617), произвести разгрузку образца, не изменяя температуры,

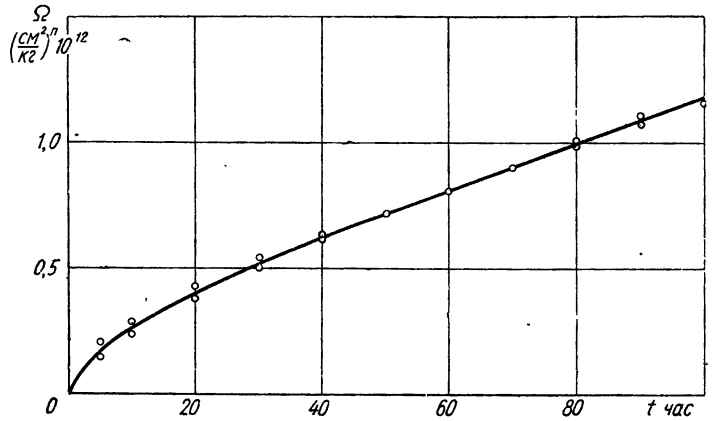


Фиг. 615. График функции Ω для стали с содержанием углерода 0,35% С при температуре 454°

то уменьшение деформации (отрезок BC) окажется равным упругой деформации $\frac{\sigma}{E}$. В дальнейшем с течением времени будет наблюдаться и некоторое уменьшение пластической деформации (кривая CD).

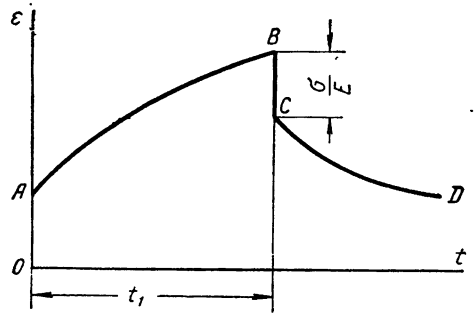
Это явление называется *обратным последействием*. Оно изучено сравнительно мало [29], и поэтому в настоящее время отразить его в расчетах элементов конструкций на ползучесть еще не представляется возможным.

Однако следует отметить, что перерывы в испытаниях с разгружением и охлаждением при экспериментальном исследовании простого

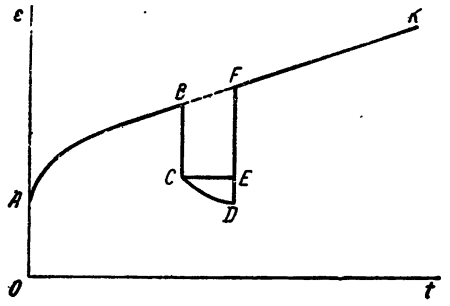


Фиг. 616. График функции Ω для стали ЭИ69 при температуре 800°

последействия не сказываются на ходе процесса в целом. На фиг. 618 изображена кривая простого последействия при испытании с перерывом. Кривая *OABCEFK* иллюстрирует процесс простого последействия в случае перерыва с охлаждением, а кривая *OABCDEFK* в случае



Фиг. 617. Кривые простого последействия (*AB*) и обратного последействия (*CD*)



Фиг 618. Кривая простого последействия при испытании с перерывами

перерыва без охлаждения, когда имеет место обратное последействие (участок *CD*). После разгружения и последующего нагружения новая кривая простого последействия *DEFK* сливается с продолжением начального участка *OAB* (фиг. 618).

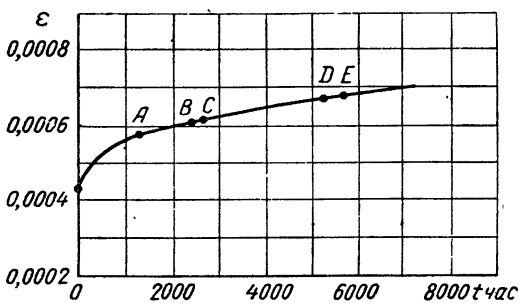
Точно так же не сказываются на ходе процесса простого последействия охлаждение без разгрузки. Это положение подтверждается кривой простого последействия, изображенной на фиг. 619 [25]. В испытании, результаты которого изображены на фиг. 619, имели место перерывы: в точке *A* — 118 час., *B* — 53 часа, *C* — 54 часа, *D* — 93 часа,

E — 120 час. В течение этого времени образец не нагревался, но оставался нагруженным. Как следует из фиг. 619 такие перерывы в испытании не оказали влияния на вид кривой простого последействия.

Д. Длительная прочность

Как отмечалось выше, разрушение образца, находящегося в условиях ползучести, может происходить как с образованием шейки (вязкое разрушение), так и без него (хрупкое разрушение). В первом случае разрушение имеет внутризеренный (транскристаллический) характер. Во втором случае разрушение имеет межзеренный (интеркристаллический) характер. При этом наблюдаются многочисленные трещины внутри материала.

Первый тип разрушения характерен для поликристаллических металлов при относительно низких температурах и относительно больших скоростях деформации, а также для металлических монокристаллов [18]. Второй тип разрушения обычно наблюдается в поликристаллических металлах при относительно высоких температурах и относительно малых скоростях деформации [18]. Иногда встречается разрушение смешанного типа промежуточное между описанными выше, частично транскристаллическое, а частично интеркристаллическое, причем последнее имеет место в области, примыкающей к поверхности образца. Этот тип разрушения встречается в поликристаллических металлах при температурах, промежуточных по отношению к температурам первого и второго типов разрушения. Такой смешанный тип разрушения обычно не сопровождается образованием шейки [18]. Таким образом, с повышением температуры вязкое разрушение сменяется хрупким.



Фиг. 619. Кривая простого последействия хромоникельмолибденовой стали при напряжении 775 *кг/см²* и температуре 400°, полученная при испытании с перерывами [25]. Перерывы в испытании: в точке *A* — 118 час.; *B* — 53 часа, *C* — 54 часа, *D* — 93 часа, *E* — 120 час.

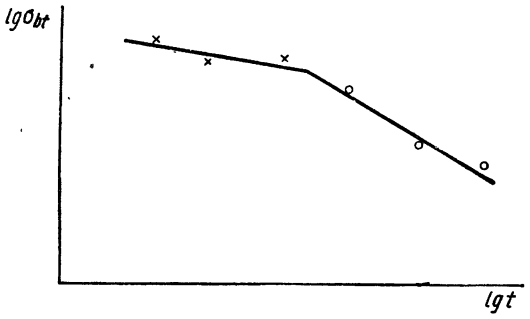
Установлено, что с увеличением длительности пребывания металла в нагретом состоянии за счет постепенного ослабления границ зерен наблюдается переход от вязкого разрушения к хрупкому. Это явление называется охрупчиванием материала.

В свете изложенного становится ясной ошибочность утверждения, что в условиях ползучести на концентрацию напряжений можно не обращать внимания, поскольку пики напряжений в условиях ползучести якобы сглаживаются. В действительности в рассматриваемом случае при хрупком разрушении, оно начинается, как правило, в окрестности концентраторов напряжений. Поэтому изучение концентрации напряжений в условиях ползучести имеет большое практическое значение. К настоящему времени, однако, этот вопрос исследован еще в недостаточной степени.

Прочность материала, находящегося длительное время в напряженном состоянии при высокой температуре, оценивается так называемым пределом длительной прочности. *Пределом длительной проч-*

ности σ_{bt} называется отношение нагрузки, при которой происходит разрушение растянутого образца через заданный промежуток времени, к первоначальной площади поперечного сечения.

Таким образом, предел длительной прочности для рассматриваемого материала зависит от температуры испытания и заданного промежутка времени до момента разрушения. Последний выбирается равным сроку службы детали. В настоящее время в зависимости от условий эксплуатации деталей представляют интерес пределы длительной прочности, определенные на базе от 100 до 100 000 час. Очевидно, что с увеличением температуры и заданного промежутка времени до разрушения величина предела длительной прочности снижается.



Фиг. 620. График зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения

Предел длительной прочности может быть экспериментально определен путем испытания образцов на тех же установках, которые служат для получения кривых простого последействия (например, на установке ИП-2).

В отличие от обычного исследования простого последействия испытание на длительную прочность обязательно доводится до разрушения образца и не требует записи зависимости деформации от времени.

При исследовании длительной прочности материала испытывается несколько образцов при различных напряжениях и устанавливается время, необходимое для разрушения каждого образца. На основании результатов испытаний строится график зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения. По этому графику определяется величина предела длительной прочности для заданного промежутка времени испытания до разрушения.

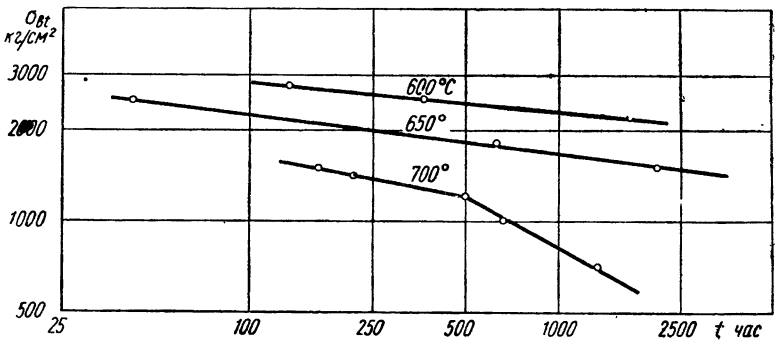
В логарифмических координатах этот график имеет вид ломаной линии, состоящей из двух прямых (фиг. 620). Точка перелома графика обычно соответствует переходу от транскристаллического к интеркристаллическому разрушению. На фиг. 620 крестиками изображены результаты испытаний образцов, разрушившихся транскристаллически, а кружочками — результаты опытов, завершившихся интеркристаллическим разрушением. Очевидно, что в определенных интервалах времени и напряжений точки перегиба на рассматриваемом графике может и не быть.

На фиг. 621 изображены графики зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения при различных температурах для стали ЭИ69.

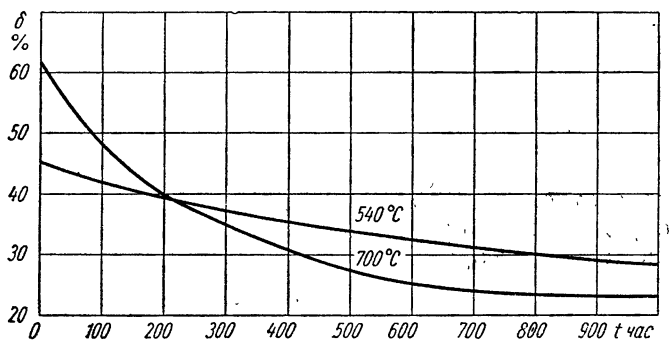
Отметим, что одновременно с экспериментальным определением предела длительной прочности материала иногда устанавливается и величина пластической деформации образца при разрыве. Она определяется как отношение остаточного удлинения при разрыве к первоначальной длине образца и в случае разрушения образца после образования шейки является условной деформацией.

Очевидно, что эта величина является характеристикой пластичности материала, находящегося длительное время в напряженном со-

стоянии при высокой температуре. Как следует из изложенного выше, с уменьшением напряжения, т. е. с увеличением длительности пребывания металла при высокой температуре, пластическая деформация



Фиг. 621. Графики зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения для стали ЭИ69 [11]



Фиг. 622. График зависимости пластической деформации при разрыве от времени испытания до разрушения для малоуглеродистой стали [2]

при разрыве уменьшается (охрупчивание). На фиг. 622 представлены графики зависимости пластической деформации при разрыве от времени испытания до разрушения для малоуглеродистой стали [2].

Е. Предел ползучести

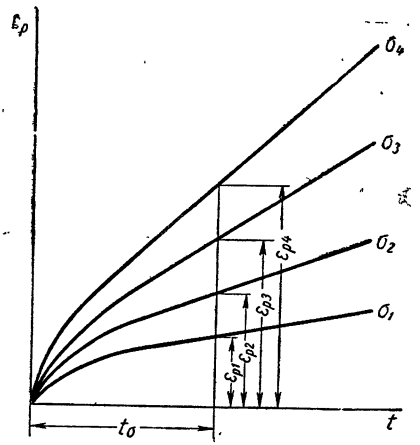
Рассмотренные выше кривые простого последействия являются основой расчетов на ползучесть. Для сопоставления сопротивления ползучести различных материалов введена условная характеристика — так называемый предел ползучести.

Пределом ползучести $\sigma_{\varepsilon t}$ *называется напряжение, при котором пластическая деформация за заданный промежуток времени достигает величины, установленной техническими условиями.*

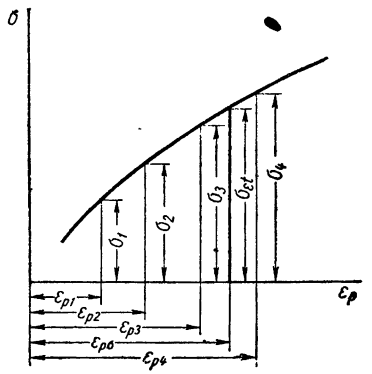
Из этого определения следует, что для данного материала предел ползучести зависит от температуры и времени испытания, а также от принятой величины пластической деформации. Заданный промежуток времени обычно принимается равным сроку службы детали. Пластическая деформация выбирается исходя из условий нормальной эксплуатации детали за срок ее службы.

Если приближенно принять скорость пластической деформации $\dot{\varepsilon}_p$ постоянной, то величина пластической деформации равна

$$\varepsilon_p = \dot{\varepsilon}_p t. \tag{13}$$

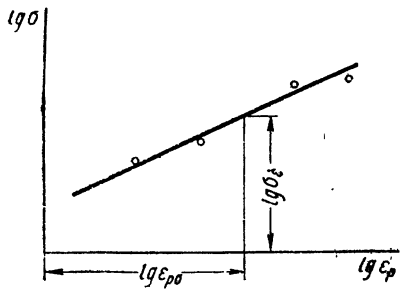


Фиг. 623. Семейство кривых простого последействия

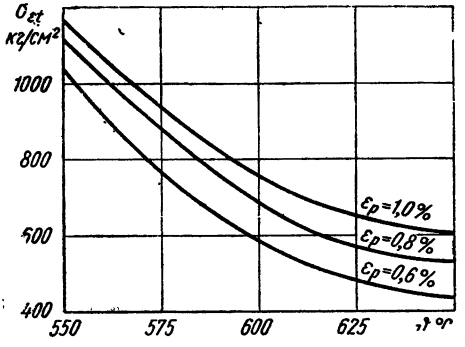


Фиг. 624. График зависимости напряжения от пластической деформации для фиксированного значения времени

Из этого соотношения по принятой величине пластической деформации за определенный промежуток времени можно установить скорость пластической деформации.



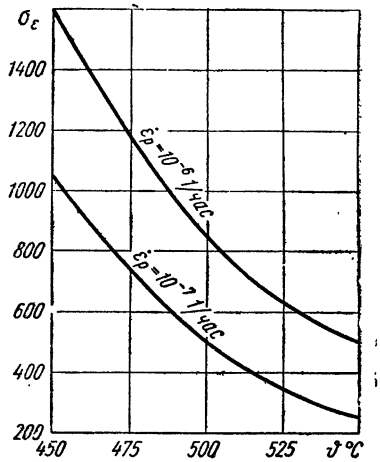
Фиг. 625. График зависимости напряжения от скорости пластической деформации для фиксированного значения времени



Фиг. 626. Графики зависимости от температуры предела ползучести, определенного по величине пластической деформации за 100 000 час для хромоникельвольфрамовой стали ЭИ123 [20]

В таком случае возможно и иное определение предела ползучести $\sigma_{\dot{\varepsilon}}$, которое часто используется в практике как *напряжение, при котором скорость пластической деформации равна определенной величине, установленной техническими условиями.* Величина предела ползучести в таком определении зависит от температуры и принятой величины скорости пластической деформации.

Ввиду того что погрешность формулы (13) тем больше, чем меньше время, второе определение предела ползучести обычно используется для деталей, работающих длительное время. Так, например, для сталей стационарных паровых турбин предел ползучести обычно определяется как напряжение, при котором скорость пластической деформации равна 10^{-7} или 10^{-8} 1/час [20]. Для сталей авиационных газовых турбин при определении предела ползучести часто исходят из величины пластической деформации 0,1% за время 300—500 час. Величина предела ползучести устанавливается путем обработки семейства кривых простого последействия (фиг. 623).



Фиг. 627. Графики зависимости от температуры предела ползучести, определенного по минимальной скорости пластической деформации для хромомолибденовой стали 35ХМ [20]

Рассмотрим вначале определение предела ползучести на основе выбранной величины пластической деформации $\varepsilon_{p\sigma}$ за определенный промежуток времени t_σ. Для этого необходимо на чертеже семейства кривых простого последействия при различных напряжениях провести вертикаль на расстоянии t_σ от оси ординат (фиг. 623). Продвигаясь по этой вертикали, можно установить зависимость напряжения от пластической деформации для выбранного значения времени t_σ и построить график этой зависимости (фиг. 624). По этому графику и определяется величина предела ползучести как ординаты точки, абсцисса которой $\varepsilon_{p\sigma}$. При определении предела ползучести по избранной скорости пластической деформации $\dot{\varepsilon}_{p\sigma}$ при помощи кривых простого последействия (фиг. 623) устанавливаются минимальные скорости пластической деформации при различных напряжениях. Затем в логарифмических координатах строится график зависимости напряжения от минимальной скорости пластической деформации (фиг. 625), который, как отмечалось выше, является линейным. По этому графику и определяется величина предела ползучести (фиг. 625).

На фиг. 626 изображены графики зависимости от температуры предела ползучести, определенного по величинам пластической деформации за 100 000 час. для хромоникельвольфрамовой стали ЭИ123, а на фиг. 627 — графики зависимости от температуры предела ползучести, подсчитанного по величине скорости пластической деформации для стали 35ХМ [20].

§ 3. ПРОСТАЯ РЕЛАКСАЦИЯ

Как уже отмечалось выше, релаксацией называется процесс изменения во времени напряжений, возникших в результате нагружения детали.

Будем называть релаксацию при постоянной деформации простой релаксацией.

Предположим, что образец нагружен растягивающей силой, которая вызвала напряжение, меньшее предела пропорциональности материала при данной температуре, и испытание поставлено таким образом,

что полная деформация образца в течение времени не изменяется. Полная деформация, остающаяся во времени постоянной, является суммой упругой деформации ε_e и пластической деформации, образовавшейся в процессе последействия ε_p, т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p.$$

Пластическая деформация ε_p возрастает во времени, а следовательно, упругая деформация ε_e уменьшается. Таким образом, в течение времени составляющие полной деформации перераспределяются.

На основании закона Гука

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}.$$

Поскольку полная деформация во времени не изменяется и равна начальному значению $\varepsilon(0)$ и, кроме того, в начальный момент времени справедлив закон Гука, имеем

$$\varepsilon = \varepsilon(0) = \frac{\sigma(0)}{E},$$

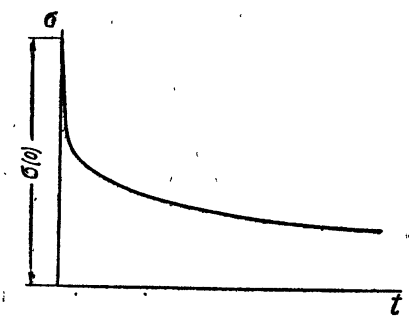
где $\sigma(0)$ — напряжение в начальный момент времени.

Тогда получаем

$$\frac{\sigma(0)}{E} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_p. \qquad (14)$$

Из выражения (14) следует, что за счет увеличения пластической деформации напряжение будет непрерывно уменьшаться.

Отметим, что, как следует из соотношения (14), пластическая деформация при простой релаксации не может увеличиваться беспредельно. Если представить себе, что пластическая деформация достигла величины деформации, возникшей при нагружении $\varepsilon(0)$, то напряжение в стержне становится равным нулю (стержень разгружается).



Фиг. 628. Кривая простой релаксации

В процессе простого последействия пластическая деформация растет до такой величины, при которой образец разрушается. В процессе простой релаксации пластическая деформация не превосходит величины деформации, образовавшейся при нагружении.

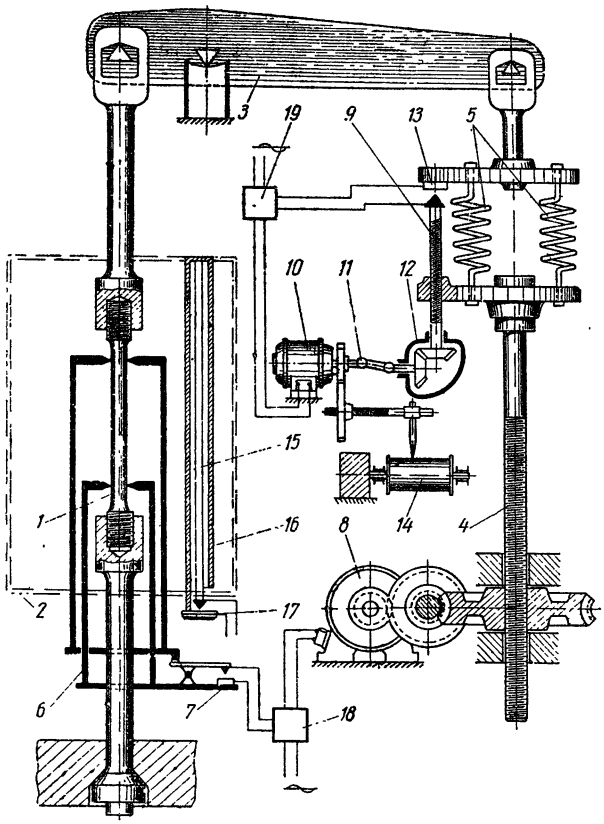
При экспериментальном изучении простой релаксации в случае растяжения начальную растягивающую нагрузку (а следовательно, и напряжение) понижают с течением времени так, чтобы длина образца, определенная начальной нагрузкой, сохранялась постоянной. На основании испытаний строится график зависимости напряжения от времени, который называется *кривой простой релаксации.* Кривая простой релаксации представлена на фиг. 628.

Машины для исследования простой релаксации значительно сложнее, чем установки, используемые для изучения простого последействия. В качестве примера на фиг. 629 приведена одна из схем установок для экспериментального изучения простой релаксации [33].

Образец *1*, помещенный в печь *2*, прикрепляется нижним концом к основанию машины и нагружается при помощи рычага *3*. Для создания усилия служит червячно-винтовой механизм *4*, соединенный с длинным концом рычага *3* при помощи пружин *5*. Наличие пружин обеспечивает возможность очень медленного и плавного изменения усилия. Кроме того, пружины используются и в качестве силоизмерителя, т. е. по их удлинению определяется величина действующего усилия.

Существенным элементом машины является тензометр *6*, управляющий нагружающим механизмом. Тензометр прикрепляется к образцу; стальные стержни тензометра выведены наружу через нижнее отверстие печи.

При изменении длины образца концы стержней тензометра получают относительное перемещение, которое механически увеличивается при помощи рычага и создает замыкание контакта *7*. Это вызывает включение электродвигателя *8*, соединенного с червячно-винтовым механизмом *4*, в результате чего образец разгружается. После того как образец окажется разгруженным настолько, что его длина станет равной первоначальной длине (т. е. упругое укорочение вследствие уменьшения силы компенсирует пластическое удлинение), контакт *7* разомкнется и разгрузка приостановится.



Фиг. 629. Схема установки для экспериментального изучения простой релаксации [33]

Периодическое замыкание контакта *7* вызывает постепенную разгрузку образца; величина полной деформации при этом колеблется в небольших пределах, изменяясь менее чем на $2 \cdot 10^{-6}$ относительной единицы деформации, что позволяет считать ее приблизительно постоянной.

Для автоматической записи величины действующего в образце усилия применено синхронно-следящее устройство, реагирующее на изменение длины пружин. Рассмотрим основные элементы и принцип действия этого устройства. Микрометрический винт *9* приводится во вращение специальным электродвигателем *10* посредством карданного валика *11* и зубчатой конической передачи *12*. Электрические контакты *13* управляют электродвигателем, связанным с микрометрическим винтом *9*. Барабан *14* диаграммной записи приводится во враще-

ние от часового механизма. Когда контакты *13* разомкнуты, направление вращения микрометрического винта таково, что расстояние между контактами *13* уменьшается, и они замыкаются.

При замкнутых контактах направление вращения винта обратное, вследствие чего контакты размыкаются. Таким образом, микрометрический винт все время занимает такое положение, при котором контакты *13* близки к соприкосновению. Вал электродвигателя совершает при этом возвратно-вращательное колебательное движение вокруг некоторого среднего положения, определяемого длиной пружины, соответствующей нагрузке, действующей в данный момент. Вращение ротора электродвигателя, вызывающее вращение микрометрического винта, одновременно создает перемещение пера диаграммного прибора вдоль образующей барабана, в результате чего на бумаге получается кривая зависимости усилия от времени.

Нагревание образца производится электропечью *2*, позволяющей получить любую температуру нагрева в пределах до 750°. Поддержание в процессе испытания постоянства температуры обеспечивается специальным устройством, состоящим из кварцевого стержня *15*, заключенного в никелевую трубу *16*, которая помещена внутри печи. Благодаря различию в коэффициентах температурного расширения кварца и никеля изменение температуры вызывает относительное перемещение концов стержня и трубы, что в свою очередь приводит к замыканию контакта *17*. Последний соединен с реле, управляющим током печи. При размыкании контакта (когда температура печи ниже температуры испытания) шунтируется добавочное сопротивление, соединенное последовательно с печью, вследствие чего ток печи увеличивается и температура повышается. Описанное устройство позволяет поддерживать постоянство температуры с точностью $\pm 0{,}25°$.

Все управляющие контакты работают при напряжении 6 *в*. Такое малое напряжение исключает возможность искрения контактов, благодаря чему повышается точность и уменьшается износ. При замыкании управляющих контактов *7* или *13* напряжение подается на реле *18* или *19* соответственно, срабатывание которых приводит приключенный к ним мотор в действие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, ГИТТЛ, 1958.
2. Борздыка А. М., Методы горячих механических испытаний металлов, Металлургиздат, 1955.
3. Борздыка А. М., Сравнительная характеристика ползучести хромоникелевой и хромомарганцовой стали типа 14-14, «Известия АН СССР. Отд. техн. наук» № 7, 1949.
4. Гинцбург Я. С., Испытания металлов при повышенных температурах, Машгиз, 1954.
5. Даниловская В. И., Иванова Г. М., Работнов Ю. Н., Ползучесть и релаксация хромомолибденовой стали, «Известия АН СССР. Отд. техн. наук» № 5, 1955.
6. Ильюшин А. А., Пластичность, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.
7. Ларичев В., Предварительные результаты испытаний хромомолибденовой стали ЭИ10 в качестве крепежного материала, «Советское котлотурбостроение» № 3, 1940.
8. Малинин Н. Н., Основы расчетов на ползучесть, Машгиз, 1948.
9. Марковец М. П., Расчет деталей на прочность с учетом ползучести, «Техника воздушного флота» № 10, 1944.
10. Надаи А., Пластичность и разрушение твердых тел, Издательство иностранной литературы, 1954.

11. Никитина Л. П., Прочность стали типа ЭИ69 при повышенных температурах «ЦНИИТМАШ», кн. 6, «Исследование жаропрочной стали типа ЭИ69», Машгиз, 1947.

12. Никитина Л. П., О механизме ползучести металлов, «ЦНИИТМАШ», кн. 71, «Вопросы металловедения котлотурбинных материалов», Машгиз, 1955.

13. Одинг И. А., Новый метод испытания металлов на ползучесть, «Вестник машиностроения» № 5, 1944.

14. Одинг И. А., К вопросу о природе релаксации и ползучести металлов, «Вестник машиностроения» № 2, 1949.

15. Одинг И. А., Современные представления о механизмах пластической деформации и разрушения при ползучести металлов, «Известия АН СССР. Отд. техн. наук» № 8, 1954.

16. Одинг И. А., Критический обзор некоторых теорий ползучести металлов «ЦНИИТМАШ», кн. 71, «Вопросы металловедения котлотурбинных материалов», Машгиз, 1955.

17. Работнов Ю. Н., Сопротивление материалов, изд. Московского университета, 1950.

18. Салли А., Ползучесть металлов и жаропрочные сплавы, Оборонгиз, 1953.

19. Серенсен С. В., Прочность металла и расчет деталей машин, ОНТИ, 1937.

20. Сичиков М. Ф., Металлы в турбостроении, Машгиз, 1954.

21. Смирнов В. И. и Никитина Л. П., Прочность при высоких температурах высоколегированной хромомолибденовой стали марки 60Х16М2А, «Советское котлотурбостроение» № 4, 1945.

22. Смирнов В. И., Аустенитные нержавеющие стали как материал для лопаток паровых турбин, «Советское котлотурбостроение» № 6, 1945.

23. Фридман Я. Б., Механические свойства металлов, Оборонгиз, 1952.

24. Шапошников Н. А., Механические испытания металлов, Машгиз, 1951.

25. Bailey R. W., The utilization of creep test data in engineering design, «The Institution of mechanical engineers, Proceedings», v. 131, 1935.

26. Bailey R. W. and Roberts A. M., Testing of materials for service in high-temperature steam-plant, «Tne Institution of mechanical engineers Proceedings», v. 122, 1932.

27. Creep Data, Compilation of available high-temperature creep characteristics of metals and alloys, Published by «ASTM» and «ASME», 1938.

28. Davis E. A., Creep and relaxation of oxygen-free copper, «Journal of applied mechanics», v. 10, N 2, 1943.

29. Johnson A. E., The creep recovery of a 0,17 per cent carbon steel, «The Institution of mechanical engineers. Journal, Proceedings», v. 145, N 5, 1941.

30. Johnson A. E., Creep and relaxation of metals at higt temperatures, «Engineering», v. 168, N 4362, 1949.

31. Marin J., Mechanical properties of materials and design, Mc-Graw-Hill Book Company, 1942.

32. Robinson E. L., A relaxation on 0,35C, steel K20, «Transactions of the ASME», v. 59, RP-59-7, 1937.

33. Trumpler W. E., Relaxation of metals at high-temperature. «Journl of applied physics», v. 12, N 3, 1941.

34. Weaver S. H., The creep curve and stability of steels at constant stress and temperature, «Transactions of the ASME», v. 58, N 8, 1936.

35. White A. E., Clark C. L., and Wilson R. L., Influence of time at 1000F on the characteristics of carbon steel, «American society for testing materials Proceedings», v. 36, Part II, 1936.

ГЛАВА XIII

ГИПОТЕЗЫ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 1. СУЩНОСТЬ ГИПОТЕЗ ПОЛЗУЧЕСТИ

В предыдущей главе были рассмотрены отдельные стороны явления ползучести при одноосном растяжении: процесс изменения во времени деформаций при постоянном напряжении (простое последействие) и процесс изменения во времени напряжений при постоянной деформации (простая релаксация).

В общем случае ползучести изменение деформаций сопровождается изменением напряжений. Для установления зависимости между деформацией, напряжением, скоростями их изменения и временем в простейшем случае одноосного растяжения предварительно необходимо максимально ограничить число переменных и высказать предположение о том, между какими из них существует функциональная зависимость. Это предположение и носит название гипотезы ползучести.

После выбора основных переменных нужно связать их определенной аналитической зависимостью. Очевидно, что можно предложить различные зависимости для связи переменных. Наилучшей будет та, которая наиболее полно согласуется с данными опытов. Поэтому естественно, что в процессе поисков наилучшей аналитической зависимости возможны различные предложения и, следовательно, различные варианты одной и той же гипотезы.

Хотя и нельзя отрицать важность выбора правильной аналитической зависимости между переменными, однако очевидно, что этот вопрос подчинен более принципиальному вопросу о том, какие переменные нужно связывать между собой. Это и решается при помощи той или иной гипотезы ползучести.

В литературе гипотезы ползучести обычно называются теориями ползучести. Нам представляется более правильным первое название, поскольку оно лучше отражает гипотетичность высказанных предположений.

Гипотеза ползучести должна дать возможность на основании простейших испытаний материала, например на основании экспериментального изучения простого последействия, установить поведение материала в общем случае изменяющихся во времени напряжений и деформаций.

Гипотеза ползучести должна обеспечить определение закона изменения деформаций по заданному закону изменения напряжений и наоборот. В частном случае эта гипотеза должна дать возможность построить кривые простой релаксации по серии кривых простого последействия.

Оценка гипотезы ползучести может быть дана только путем экспериментальной ее проверки. Последняя может быть выполнена различными методами. Гипотеза ползучести может быть проверена путем сравнения результатов экспериментального изучения последействия (или релаксации) при переменном напряжении (или деформации) с данными теоретического исследования на основе гипотезы ползучести.

Однако наиболее простым методом проверки гипотезы ползучести является сопоставление результатов экспериментального исследования простой релаксации с данными, получаемыми по гипотезе ползучести. Можно сказать, что опытное изучение простой релаксации является пробным камнем для любой гипотезы ползучести.

В настоящее время существуют четыре гипотезы ползучести:

1) гипотеза упрочнения;
2) гипотеза течения;
3) гипотеза старения;
4) гипотеза пластической наследственности.

Заметим, что названия этих гипотез в значительной мере являются условными.

Наличие нескольких гипотез ползучести говорит о том, что в настоящее время этот вопрос исследован недостаточно, что и не позволило остановиться на какой-либо определенной гипотезе. В следующих параграфах каждая гипотеза будет подробно разобрана. При этом будут приведены результаты ее экспериментальной проверки, что даст возможность сопоставить гипотезы ползучести между собой и установить достоинства и недостатки каждой из них. В расчетах на релаксацию (см. § 9 этой главы) и в исследованиях неустановившейся ползучести (см. гл. XV т. II) использована измененная нами гипотеза старения, предложенная Н. М. Беляевым. Как будет показано ниже, эта гипотеза хорошо подтверждается экспериментально и может быть с успехом использована в расчетной практике.

§ 2. ГИПОТЕЗА УПРОЧНЕНИЯ

Согласно гипотезе упрочнения предполагается, что при определенной температуре между пластической деформацией, скоростью пластической деформации и напряжением существует постоянная зависимость

$$\Phi_1 (\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p, \sigma) = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) является основным уравнением гипотезы упрочнения. В этом уравнении время в явном виде не содержится.

Гипотеза упрочнения была предложена Надаи [21] и Давенпортом [29].

Рассмотрим метод построения кривой простой релаксации по серии кривых простого последействия на основе этой гипотезы. Предположим, что кривые простого последействия для различных величин напряжений известны (фиг. 630). Допустим, что надо исследовать процесс релаксации за время t_0. Проведем на расстоянии $\frac{\sigma(0)}{E}$ от оси абсцисс горизонтальную прямую. Разобьем промежуток времени t_0 на n небольших интервалов Δt, которые могут быть равными или не равными между собой. Полагаем, что за небольшой промежуток времени Δt_1, считая от начального момента, процесс нарастания пластической де-

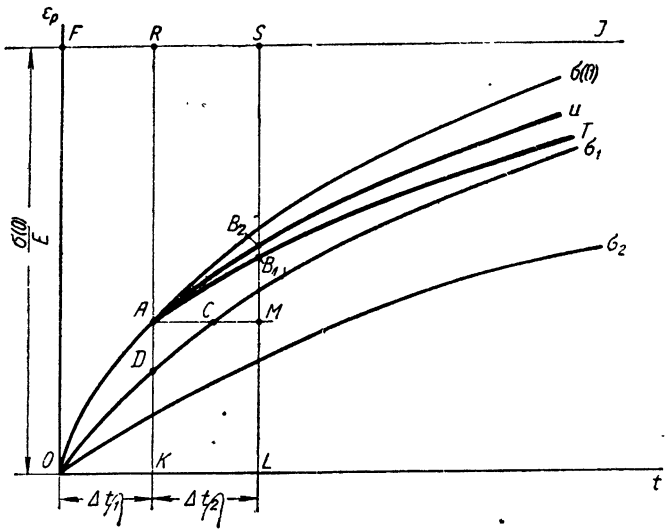
формации протекает при постоянном напряжении $\sigma(0)$, тогда увеличение пластической деформации за промежуток времени Δt_1 выражается отрезком AK (фиг. 630). Эту величину пластической деформации обозначим ε_{p1}.

Учитывая, что полная деформация ε во времени не меняется и равна начальному значению $\varepsilon(0)$, можно из уравнения (14) гл. XII т. II определить величину упругой деформации для значения времени $t_1=\Delta t_1$:

$$\frac{\sigma_1}{E}=\frac{\sigma(0)}{E}-\varepsilon_{p1}.$$

Величина $\frac{\sigma_1}{E}$ в выбранном масштабе выражается отрезком AR.

Во второй промежуток времени Δt_2 можно приближенно считать, что процесс нарастания пластической деформации протекает при по-



Фиг. 630. Построение кривой простой релаксации по кривым простого последействия на основе гипотез упрочнения и течения

стоянном напряжении σ_1. Для определения начальной скорости пластической деформации этого процесса необходимо обратиться к той или иной гипотезе. Как уже отмечалось выше, согласно гипотезе упрочнения скорость пластической деформации является функцией величины пластической деформации и напряжения, а от времени не зависит. Поэтому начальная скорость пластической деформации во втором промежутке времени Δt_2 определяется тангенсом угла наклона касательной в точке C к кривой простого последействия при напряжении σ_1. Через C обозначена точка пересечения горизонтальной линии, проведенной из точки A, с кривой простого последействия при напряжении σ_1.

Следовательно, во втором промежутке времени Δt_2 пластическая деформация нарастает по закону, изображаемому линией AB_1, представляющей часть кривой простого последействия при напряжении σ_1, передвинутой параллельно самой себе из точки C в точку A и взятой до пересечения в точке B_1 с вертикальной линией, отстоящей от оси ординат на расстоянии $\Delta t_1+\Delta t_2$.

Увеличение пластической деформации за время Δt_2 выражается отрезком B_1M, а полная пластическая деформация ε_{p2} для значения времени $t_2=t_1+\Delta t_2$ — отрезком B_1L.

Теперь из уравнения (14) гл. XII т. II находим величину упругой деформации для значения времени $t_2=t_1+\Delta t_2$:

$$\frac{\sigma_2}{E}=\frac{\sigma(0)}{E}-\varepsilon_{p2}.$$

Эта величина выражается отрезком B_1S. Продолжая подобные рассуждения, можно получить кривую OAB_1T. Расстояния от этой кривой до оси абсцисс выражают величины пластической деформации для соответствующего значения времени, а расстояния до линии FJ — величины упругой деформации.

Умножением упругой деформации на модуль упругости первого рода можно получить напряжения для соответствующих значений времени. Таким образом строится кривая простой релаксации.

Неудобство изложенного метода построения кривой простой релаксации заключается в том, что для использования его необходимо располагать большим количеством кривых простого последействия. Чтобы избежать этого, целесообразно предварительно связать пластическую деформацию, скорость пластической деформации и напряжение определенной аналитической зависимостью, на основе которой и вывести уравнение кривой простой релаксации.

Одна из таких зависимостей предложена Дэвисом [31] в следующем виде:

$$\dot{\varepsilon}_p\,\varepsilon_p^{\beta}=\alpha\sigma^{\nu}, \tag{2}$$

где α, β, ν — коэффициенты для рассматриваемого материала, зависящие от температуры.

Получим вначале уравнение семейства кривых простого последействия на основе зависимости (2). Для этого, учитывая, что $\dot{\varepsilon}=\frac{d\varepsilon}{d}$, представим выражение (2) в виде

$$\varepsilon_p^{\beta}\,d\varepsilon_p=\alpha\sigma^{\nu}\,dt.$$

Проинтегрируем полученное уравнение. При этом учтем, что для простого последействия напряжение постоянно и при $t=0$ $\varepsilon_p=0$, тогда получим уравнение кривых простого последействия:

$$\varepsilon_p=[\alpha(\beta+1)]^{\frac{1}{\beta+1}}\sigma^{\frac{\nu}{\beta+1}}t^{\frac{1}{\beta+1}}. \tag{3}$$

Из зависимости (3) следует, что кривые простого последействия в этом случае геометрически подобны.

Теперь, исходя из зависимости (2), получим уравнение кривых простой релаксации. Для этого учтем, что согласно соотношению (14) гл. XII т. II

$$\varepsilon_p=\frac{\sigma(0)}{E}-\frac{\sigma}{E}. \tag{4}$$

Подставляя это выражение в уравнение (2), устанавливаем, что

$$-[\sigma(0)-\sigma]^{\beta}\frac{d\sigma}{\sigma^{\nu}}=\alpha E^{\beta+1}dt.$$

Проинтегрируем полученную зависимость. При этом учтем, что $t=0$ соответствует $\sigma=\sigma(0)$, тогда получим

$$t=\frac{1}{\alpha E^{\beta+1}}\int_{\sigma}^{\sigma(0)}[\sigma(0)-\sigma]^{\beta}\frac{d\sigma}{\sigma^{\nu}}. \tag{5}$$

Уравнение (5) является уравнением семейства кривых простой релаксации в неявном виде. Интеграл (5) выражается через элементарные функции, когда один из трех коэффициентов β, ν или $\beta+\nu$ есть целое число. В противном случае интегрирование выражения (5) следует производить численно или графически.

Использование зависимости (2) в расчетах на ползучесть приводит к большим математическим трудностям. Так, например, даже решение сравнительно простой задачи ползучести балки прямоугольного поперечного сечения на основе этой формулы к настоящему времени не получено. В работе Дэвиса [31] эта задача решена лишь в предположении постоянства напряжений (установившаяся ползучесть).

Ф. С. Чуриковым [27] была предложена следующая аналитическая зависимость напряжения от пластической деформации и скорости пластической деформации:

$$\sigma=b\ln\frac{\dot{\varepsilon}_p\varepsilon_p^c}{a}\quad\text{при}\quad|\dot{\varepsilon}_p\varepsilon_p^c|>a; \tag{6}$$

$$\sigma=0\quad\text{при}\quad|\dot{\varepsilon}_p\varepsilon_p^c|\leqslant a, \tag{7}$$

где a, b и c — коэффициенты для рассматриваемого материала, зависящие от температуры.

Отметим, что выражения (6) и (7) получены путем обобщения показательной зависимости минимальной скорости пластической деформации от напряжения при ограничениях, впервые указанных Ю. Н. Работновым [23]. Эта показательная зависимость имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_p=a\left(e^{\frac{\sigma}{b}}-1\right).$$

Обобщая ее для гипотезы упрочнения, т. е. вводя функцию пластической деформации, устанавливаем

$$\dot{\varepsilon}_p\varepsilon_p^c=a\left(e^{\frac{\sigma}{b}}-1\right),$$

откуда получаем

$$\sigma=b\ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}_p\varepsilon_p^c}{a}+1\right). \tag{8}$$

Отметим, что в рассматриваемом случае в качестве сомножителя при скорости пластической деформации взята степенная функция пластической деформации.

Единицей в формуле (8) по сравнению с первым слагаемым, стоящим в скобках, можно пренебречь. Действительно, например, для меди при температуре 165° $E=0{,}991\cdot10^6$ *кг/см²*; $b=176$ *кг/см²*; $a=4{,}28\cdot10^{-15}$ 1/час; $c=2$ [27]. Поскольку допускаемые скорости пла-

стической деформации колеблются в пределах от 10^{-5} до 10^{-7} 1/час, то, принимая $\varepsilon_p=10^{-7}$ 1/час и допуская сравнительно небольшую величину пластической деформации $\varepsilon_p=10^{-3}$, получим в рассматриваемом случае

$$\sigma = b\ln(23{,}4 + 1).$$

Таким образом, даже при сравнительно небольшой величине пластической деформации погрешность, получаемая от пренебрежения единицей, по сравнению с первым членом, стоящим в скобках формулы (8), составляет только 4,1%. Поэтому формула (8) может быть представлена в виде выражения (6).

Учитывая, что при $\sigma=0$, $\varepsilon_p=0$ и $\dot{\varepsilon}_p=0$, необходимо указать пределы применимости выражения (6) и дополнить его соотношением (7). Такое дополнение равносильно пренебрежению напряжениями в частях детали, где $|\varepsilon_p^c\varepsilon_p| \leqslant a$.

Получим теперь уравнение семейства кривых простого последействия на основе зависимости (6).

Для этого представим соотношение (6) в виде

$$\varepsilon_p^c d\varepsilon_p = \dot{a} e^{\frac{\sigma}{b}} dt. \tag{9}$$

Проинтегрируем полученное уравнение, учитывая, что для простого последействия $\sigma=\text{const}$ и при $t=0$ $\varepsilon_p=0$, тогда получим уравнение семейства кривых простого последействия:

$$\varepsilon_p = [a(c+1)]^{\frac{1}{c+1}} e^{\frac{\sigma}{b(c+1)}} t^{\frac{1}{c+1}}, \tag{10}$$

Из зависимости (10) следует, что, как и в предыдущем случае, при использовании зависимости (6) кривые простого последействия являются геометрически подобными.

Получим теперь, исходя из зависимости (6), уравнение кривых простой релаксации. Подставляя соотношение (4) в выражение (9), устанавливаем, что

$$-[\sigma(0) - \sigma] e^{c-\frac{\sigma}{b}} d\sigma = a E^{c+1} dt.$$

Проинтегрируем полученное уравнение. При этом учтем, что при $t=0$ $\sigma=\sigma(0)$, тогда получим

$$t = \frac{1}{aE^{c+1}} \int_{\sigma}^{\sigma(0)} [\sigma(0) - \sigma] e^{c-\frac{\sigma}{b}} d\sigma. \tag{11}$$

Интеграл (11) выражается через элементарные функции только в том случае, если c является целым и положительным числом. При любых других значениях показателя степени c этот интеграл может быть выражен через неполную γ-функцию. Уравнение (11) является уравнением семейства кривых простой релаксации в неявном виде.

На основе соотношений (6) и (7) Ф. С. Чуриковым было получено рассмотренное выше уравнение кривой простой релаксации и решены задачи о неустановившейся ползучести толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением, релаксации напряжений в толстостенной трубе, посаженной на жесткий вал с натягом, и о ползучести

прямого бруса при чистом изгибе [27]. Последняя задача решена в предположении постоянства напряжений (установившаяся ползучесть).

Несколько особый вариант гипотезы упрочнения изложен в работе Бао Юэ-ханя и Марина [38]. Для одноосного растяжения полная деформация представляется в виде суммы упругой деформации $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ и двух компонентов пластической деформации ε_p' и ε_p''. Первая пластическая деформация ε_p' изменяется во времени с переменной скоростью, а вторая ε_p'' с постоянной. При этом принимаются следующие зависимости скоростей пластической деформации от напряжения и пластической деформации:

$$\dot{\varepsilon}_p' = a\left(k_1 \sigma^n - \varepsilon_p'\right); \quad \dot{\varepsilon}_p'' = k_2 \sigma^n,$$

где a, k_1, k_2, n — коэффициенты для рассматриваемого материала, зависящие от температуры.

В отличие от других вариантов гипотезы упрочнения рассматриваемая гипотеза отражает явление обратного последействия.

Экспериментальная проверка предложенной гипотезы не производилась.

Сложность основных уравнений этой гипотезы и необходимость экспериментального определения четырех характеристик ползучести затрудняют ее использование в расчетах элементов конструкций на ползучесть. Этим, очевидно, и объясняется отсутствие в работе [38] применения предложенной гипотезы к решению конкретных задач расчета на ползучесть.

§ 3. ГИПОТЕЗА ТЕЧЕНИЯ

Согласно гипотезе течения предполагается, что при определенной температуре между скоростью пластической деформации, напряжением и временем существует постоянная зависимость

$$\Phi_2\left(\dot{\varepsilon}_p, \sigma, t\right) = 0. \tag{12}$$

Эта гипотеза была предложена Давенпортом [29].

Метод построения кривой простой релаксации по серии кривых простого последействия аналогичен рассматриваемому выше способу построения кривой простой релаксации на основе гипотезы упрочнения. Различие заключается лишь в том, что согласно гипотезе течения скорость пластической деформации является функцией напряжения и времени и от величины пластической деформации не зависит. Поэтому начальная скорость пластической деформации во втором промежутке времени Δt_2 определяется тангенсом угла наклона касательной в точке D к кривой простого последействия при напряжении σ_1 (фиг. 630). Точка D является точкой пересечения вертикальной линии, проведенной из точки A, с кривой простого последействия при напряжении σ_1.

Следовательно, согласно гипотезе течения во втором промежутке времени Δt_2 пластическая деформация нарастает по закону, изображенному линией AB_2, представляющей участок кривой простого последействия при напряжении σ_1, поднятой параллельно самой себе из точки D в точку A и взятой до пересечения в точке B_2 с вертикальной линией, отстоящей от оси ординат на расстоянии $\Delta t_1 + \Delta t_2$.

Увеличение пластической деформации за время Δt_2 выражается отрезком B_2M, а полная пластическая деформация ε_{p2} для времени $t_2=t_1+\Delta t_2$ представляется отрезком B_2L.

Упругая деформация для времени t_2 выражается отрезком B_2S. Таким образом получаем кривую OAB_2U, расстояния от которой до оси абсцисс выражают величины пластической деформации для соответствующего значения времени, а расстояния до линии FJ — величины упругой деформации. Для получения напряжения в определенный момент времени необходимо соответствующую величину упругой деформации умножить на модуль упругости первого рода.

Ввиду того что скорость пластической деформации для некоторого значения времени по гипотезе течения больше, чем скорость пластической деформации по гипотезе упрочнения, кривая простой релаксации, построенная на основе гипотезы течения, располагается всегда ниже кривой простой релаксации, построенной по гипотезе упрочнения.

Наиболее распространенной аналитической зависимостью скорости пластической деформации от напряжения и времени является зависимость следующего вида:

$$\dot{\varepsilon}_p = \sigma^n B, \tag{13}$$

где n — коэффициент для каждого материала, зависящий от температуры;

B — функция времени и температуры.

Зависимость (13) можно рассматривать как обобщение выражения (10) гл. XII т. II на случай напряжений, постепенно изменяющихся во времени.

Учитывая, что гипотеза течения в формулировке (13) наиболее широко использована в расчетах на ползучесть Л. М. Качановым [11], в дальнейшем будем называть ее гипотезой течения Л. М. Качанова.

Проинтегрируем уравнение (13), полагая $\sigma \approx \text{const}$, используя соотношение (12) гл. XII, т. II и учитывая, что при $t=0$ $\varepsilon_p=0$, тогда получим уравнение семейства кривых простого последействия в виде уравнения (8) гл. XII т. II.

Следовательно, так же как и раньше, по гипотезе течения Л. М. Качанова, как и по гипотезе упрочнения, в формулировках (2) и (6), (7) кривые простого последействия являются геометрически подобными. Выше отмечалось, что зависимость (8) гл. XII т. II хорошо подтверждается данными опытов.

Получим уравнение семейства кривых простой релаксации по гипотезе течения Л. М. Качанова.

Дифференцируя зависимость (14) гл. XII т. II, используя выражение (13), получим

$$\frac{d\sigma}{\sigma^n} = -EBdt.$$

Проинтегрируем это уравнение. Если учесть, что при $t=0$ $\sigma=\sigma(0)$, и использовать соотношение (12) гл. XII т. II, то после преобразований устанавливаем:

$$\sigma = \sigma(0)\left[1 + (n-1)E\sigma^{n-1}(0)\Omega\right]^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{14}$$

Уравнение (14) является уравнением семейства кривых простой релаксации по гипотезе течения Л. М. Качанова.

На основе гипотезы течения в формулировке (13) Л. М. Качановым получено уравнение простой релаксации, обоснованы вариационные принципы теории ползучести, при помощи которых разработаны приближенные методы расчета, основанные на знании предельных состояний: начального упругого и состояния установившейся ползучести. Л. М. Качановым исследованы также изгиб прямых и кривых брусьев, изгиб кривых тонкостенных труб и пластин, кручение круглых и некруглых брусьев постоянного сечения и круглых брусьев переменного сечения, концентрация напряжений при кручении, а также изучено напряженное и деформированное состояния в простейших осесимметричных задачах как при неустановившейся, так и при установившейся ползучести. Все эти вопросы изложены в монографии [11].

Отметим, что ни одна из задач расчета на ползучесть (за исключением задачи о простой релаксации) по гипотезе Л. М. Качанова не решается в замкнутом виде, использование же вариационных методов не всегда позволяет оценить точность полученных результатов.

Методы, развитые Л. М. Качановым, применены в работах В. И. Розенблюма для расчетов на ползучесть цилиндрической оболочки под действием осесимметричной нагрузки и полого цилиндра со средней толщиной стенки [24], а также для расчета турбинных диафрагм [25].

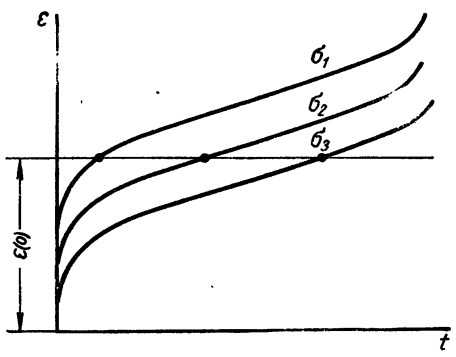
§ 4. ГИПОТЕЗА СТАРЕНИЯ

Согласно гипотезе старения предполагается, что при определенной температуре между пластической деформацией, напряжением и временем существует постоянная зависимость

$$\Phi_3(\varepsilon_p, \sigma, t) = 0. \tag{15}$$

Эта гипотеза была предложена Зодербергом [39].

Рассмотрим метод построения кривой простой релаксации по серии кривых простого последействия на основе этой гипотезы. Предположим, что кривые простого последействия при различных напряжениях известны. Допустим, что необходимо построить кривую простой релаксации при начальном напряжении $\sigma(0)$. В таком случае надо на кривых простого последействия для различных значений напряжения (фиг. 631) провести горизонтальную прямую на расстоянии $\varepsilon(0) = \frac{\sigma(0)}{E}$ от оси абсцисс. Точки пересечения этой прямой с графиками зависимости деформации от времени определяют величины напряжений для определенных значений времени. Полученные результаты легко перенести в координаты t, σ и построить кривую простой релаксации (см. фиг. 628).



Фиг. 631. Построение кривой простой релаксации по кривым простого последействия по гипотезе старения

Различные аналитические зависимости пластической деформации от напряжения и времени можно разбить на две группы, первая из них имеет вид

$$\varepsilon_p = Q\,\Omega, \tag{16}$$

согласно второй

$$\varepsilon_p = Q_1 \Psi + Qt; \tag{17}$$

здесь Q и Q_1 — функции напряжения и температуры;
Ω и Ψ — функции времени и температуры.

Очевидно, что выражения (16) и (17) являются обобщением соотношений (6) и (7) тл. XII, т. II на случай напряжений, постепенно изменяющихся во времени.

Если принять, что Q — степенная функция напряжения [формула (1) гл. XII, т. II], то выражение (16) получит вид

$$\varepsilon_p = \sigma^n \Omega. \tag{18}$$

Зависимость (16) использовалась в работе Зодерберга [39], причем функция Q принималась в виде

$$Q = \frac{\lambda}{E}\left(e^{\frac{\sigma}{\lambda}} - 1\right),$$

где E — модуль упругости первого рода;
λ — коэффициент для рассматриваемого материала, зависящий от температуры.

Отметим, что при выводе уравнения кривой простой релаксации Зодербергом [39] была допущена ошибка. Действительно, подставляя в уравнение простой релаксации (14) гл. XII, т. II пластическую деформацию, по формуле (16) можно, очевидно, получить уравнение простой релаксации в неявной форме относительно напряжения:

$$\frac{\sigma(0)}{E} = \frac{\sigma}{E} + Q\Omega, \tag{19}$$

Зодерберг же совершенно излишне дифференцирует уравнение (19) по времени, а затем, пытаясь проинтегрировать полученный результат, заявляет, что в замкнутой форме интегрирование невозможно. В действительности, конечно, интегрирование приводит к исходному соотношению (19).

Уравнение (18), очевидно, является уравнением семейства кривых простого последействия по гипотезе старения в формулировке (18). Следовательно, по гипотезе старения в формулировке (18), как и по гипотезе упрочнения в формулировках (2) и (6), (7) и гипотезе течения Л. М. Качанова, кривые простого последействия являются геометрически подобными.

Получим уравнение семейства кривых простой релаксации по гипотезе старения в формулировке (18). Для этого подставим соотношение (18) в уравнение (14) гл. XII т. II, тогда получим уравнение семейства кривых простой релаксации в неявной форме по гипотезе старения в формулировке (18):

$$E\Omega\sigma^n + \sigma = \sigma(0). \tag{20}$$

Гипотеза старения в формулировке (16) использована Зодербергом [39] для исследования ползучести толстостенной трубы, нагруженной внутренним и внешним давлениями.

Эта же задача, а также задача о ползучести толстостенной сферы, нагруженной внутренним давлением, исследованы Л. М. Качановым по гипотезе старения в формулировке (18) на основе начала наименьшей работы [9].

Перейдем к рассмотрению варианта гипотезы старения, разработанного Н. М. Беляевым [1]. Н. М. Беляев предложил пластическую деформацию, возникающую в результате последействия, записывать в виде

$$\varepsilon_p = \psi\sigma, \tag{21}$$

где ψ — некоторый функционал, зависящий от напряжения, температуры и времени.

Дифференцируя соотношение (21) по времени, получим

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\sigma + \psi\frac{d\sigma}{dt}.$$

Для постоянного напряжения последнее соотношение принимает вид

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{d\psi}{dt}\sigma. \tag{22}$$

Полагая скорость пластической деформации при постоянном напряжении величиной постоянной и используя степенную зависимость ее от напряжения [см. формулу (1) гл. XII т. II], Н. М. Беляев установил, что

$$\frac{d\psi}{dt} = k\sigma^{n-1}. \tag{23}$$

Этот результат обобщается и на случай напряжений, изменяющихся во времени. Интегрируя выражение (23) в пределах от 0 до t учитывая, что при $t=0$ $\varepsilon_p = 0$ и, следовательно, $\psi = 0$, Н. М. Беляев получил

$$\psi = \int_0^t k\sigma^{n-1}dt \tag{24}$$

и согласно формуле (21)

$$\varepsilon_p = \sigma\int_0^t k\sigma^{n-1}dt. \tag{25}$$

Уравнение (25) является основным уравнением гипотезы старения Н. М. Беляева.

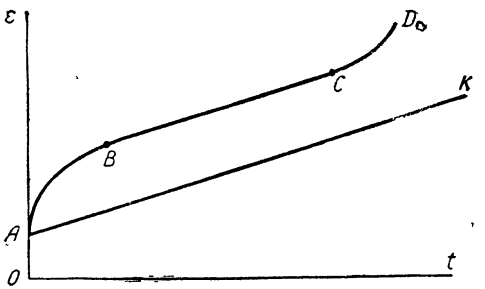
Как отмечалось выше, при выводе этого уравнения использовалось предположение постоянной скорости, которое и раньше неоднократно использовалось для расчетов на ползучесть по различным гипотезам. Однако это предположение нельзя признать удачным, поскольку оно ведет к весьма грубой схематизации кривой простого последействия.

Действительно, полагая в уравнении (25) $\sigma = \text{const}$, можно получить уравнение семейства кривых простого последействия в предположении постоянной скорости:

$$\varepsilon_p = k\sigma^n t.$$

Таким образом, используя условие постоянной скорости, устанавливаем линейную зависимость пластической деформации от времени. Следовательно, это ограничение равносильно схематизации кривой простого последействия прямой AK (фиг. 632), что является достаточно грубым приближением.

Кривая простой релаксации, построенная в предположении постоянной скорости, также сильно отличается от полученной опытным путем, особенно в начальной стадии, что объясняется тем, что для небольших значений пластической деформации указанное предположение дает сильно заниженные величины пластической деформации (фиг. 632). Величина пластической деформации при простой релаксации сравнительно невелика и не превосходит величины деформации, возникшей при нагружении, поэтому согласно уравнению (14) гл. XII т. II схематизация кривой простого последействия прямой AK (фиг. 632) должна дать сильно завышенные величины напряжений, особенно в начальной стадии простой релаксации. Это и наблюдается при обработке результатов экспериментального исследования релаксации напряжений [31].



Фиг. 632. Схематизация экспериментальной кривой простого последействия в предположении постоянной скорости пластической деформации

Отметим также, что использование положения о постоянной скорости не ведет и к существенным упрощениям в решениях задач.

В нашей работе [18] гипотеза старения Н. М. Беляева была освобождена от предположения постоянной скорости. С таким изменением эту гипотезу будем называть измененной гипотезой старения Н. М. Беляева.

Для снятия ограничения постоянной скорости можно рекомендовать следующее выражение функционала ψ:

$$\psi = \int_0^t \sigma^{n-1} B\, dt, \tag{26}$$

где n — коэффициент для рассматриваемого материала, зависящий от температуры;

B — функция времени и температуры.

На основании соотношений (21) и (26) заключаем, что зависимость пластической деформации от напряжения и времени имеет вид

$$\varepsilon_p = \sigma \int_0^t \sigma^{n-1} B\, dt. \tag{27}$$

С другой стороны, полная деформация может быть представлена как сумма деформаций, возникающих при нагружении и развивающихся в результате последействия.

В дальнейшем будем предполагать, что деформации, возникающие при нагружении, являются упругими, тогда полная деформация

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_p$$

и на основании соотношения (27)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \sigma \int_0^t \sigma^{n-1} B dt. \tag{28}$$

Полагая в выражении (27) $\sigma=\text{const}$ и используя соотношение (12) гл. XII т. II, получаем для семейства кривых простого последействия при различных напряжениях следующее уравнение:

$$\varepsilon_p = \sigma^n \Omega. \tag{29}$$

Из формулы (29) следует, что в результате принятой зависимости пластической деформации от напряжения и времени в измененной гипотезе ползучести Н. М. Беляева кривые простого последействия геометрически подобны, причем функция напряжения является степенной функцией.

Получим теперь уравнение кривой простой релаксации на основе измененной гипотезы ползучести Н. М. Беляева. Подставляя в основное уравнение простой релаксации [см. уравнение (14) гл. XII т. II] пластическую деформацию, по формуле (27) имеем

$$\frac{\sigma(0)}{E} = \frac{\sigma}{E} + \sigma \int_0^t \sigma^{n-1} B dt. \tag{30}$$

Уравнение (30) является интегро-дифференциальным уравнением простой релаксации по измененной гипотезе ползучести Н. М. Беляева. В этом уравнении искомая зависимость напряжения от времени входит как непосредственно, так и под знак интеграла. Для того чтобы вывести напряжение из-под знака интеграла и установить зависимость его от времени в явном виде, поделим соотношение (30) на σ, а затем продифференцируем по времени, тогда получим дифференциальное уравнение для напряжения

$$\frac{\sigma(0)}{E\sigma^{n+1}} d\sigma = -Bdt.$$

Проинтегрируем это уравнение в пределах от 0 до t. Используя соотношение (12) гл. XII т. II и учитывая, что при $t=0$ $\sigma=\sigma(0)$, после преобразований получим

$$\sigma = \sigma(0)\left[1 + nE\sigma^{n-1}(0)\Omega\right]^{-\frac{1}{n}}. \tag{31}$$

Уравнение (31) является уравнением семейства кривых простой релаксации по измененной гипотезе ползучести Н. М. Беляева.

Некоторые простейшие задачи по гипотезе старения Н. М. Беляева с использованием предположения постоянной скорости были решены в работе [1]. В этой статье рассмотрены простая релаксация, ползучесть и релаксация тонкостенной трубки, нагруженной внутренним давлением.

В работе [16] на основе гипотезы старения Н. М. Беляева с использованием предположения постоянной скорости исследованы ползучесть балки прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе и ползучесть бруса круглого поперечного сечения при кручении. Решения этих задач были получены в замкнутом виде.

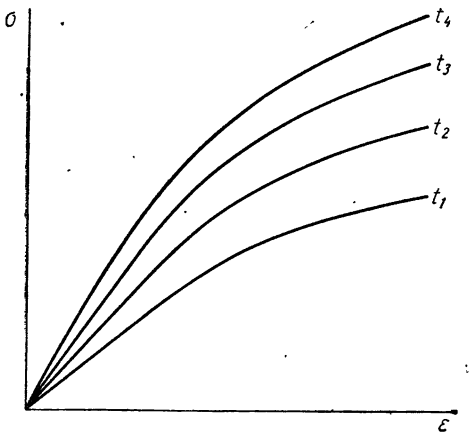
После того, как гипотеза старения Н. М. Беляева была освобождена от предположения постоянной скорости, на основе этой измененной гипотезы было дано решение в замкнутом виде одного класса одномерных задач ползучести [18]. Как частный случай этого общего решения рассмотрены ползучесть толстостенной трубы и полой сферы,

нагруженных внутренним и внешним давлениями, а также бруса прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе и брусьев с поперечными сечениями круглым полым и в виде вытянутого узкого прямоугольника при чистом кручении [18]. Решения этих задач изложены в гл. XV т. II. Отметим также, что по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева исследована ползучесть кольца прямоугольного поперечного сечения [19].

Несколько особый вариант гипотезы старения был предложен Ю. Н. Работновым [22]. Согласно этому варианту зависимость между деформацией, напряжением и временем записывается в следующем виде:

$$\sigma = f(\varepsilon, t).$$

Для расчетных целей кривые простого последействия перестраиваются в координаты ε, σ для определенных значений времени (фиг. 633). Таким образом, если при расчете какой-либо детали на ползучесть необходимо определить напряжения и деформации для заданного значения времени, то следует провести расчет на прочность и жесткость этой детали, используя график зависимости напряжения от деформации, построенный для принятого значения времени.



Фиг. 633. Графики зависимости напряжения от деформации для различных значений времени

При обработке большого количества экспериментально полученных кривых простого последействия Ю. Н. Работнов установил, что в координатах ε, σ они являются подобными, т. е. могут быть получены из одной кривой умножением ее ординат на некоторую величину, являющуюся функцией времени.

Последнее обстоятельство значительно упрощает расчеты. В этом случае зависимость напряжения от деформации и времени может быть представлена в виде произведения двух функций, из которых одна $\varphi(\varepsilon)$ является функцией только деформации, а другая $\psi(t)$ — функцией только времени:

$$\sigma = \varphi(\varepsilon)\,\psi(t). \tag{32}$$

Если принять, что

$$\psi(0) = 1,$$

то функция $\varphi(\varepsilon)$ описывает диаграмму растяжения материала. Таким образом, по результатам испытания материала на ползучесть может быть построена диаграмма растяжения.

На фиг. 634 представлены графики зависимости напряжения от деформации для различных значений времени и график функции $\varphi(\varepsilon)$ для хромистой стали [22].

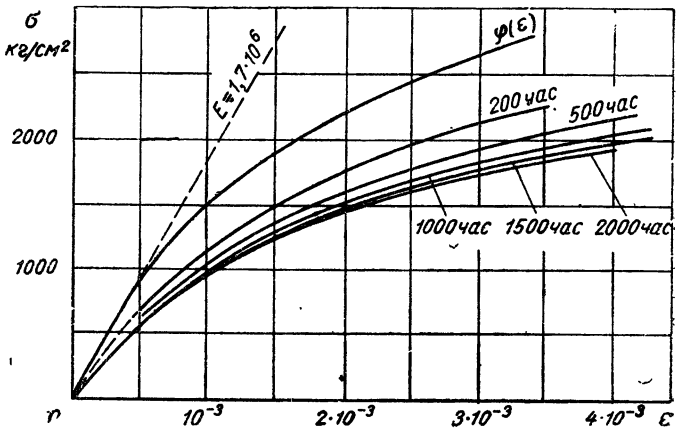
Хорошее согласование с результатами эксперимента дает следующее аналитическое представление функции ψ:

$$\psi = \frac{1}{1 + at^b}, \tag{33}$$

где a и b — коэффициенты для рассматриваемого материала, зависящие от температуры.

В случае постоянной деформации уравнение (33) описывает простую релаксацию.

На основе этой гипотезы Ю. Н. Работнов [22] решил задачи о ползучести бруса, находящегося в условиях чистого изгиба, и рассмотрел ползучесть толстостенной трубы, нагруженной внутренним и внешним давлениями.



Фиг. 634. Графики зависимости напряжения от деформации и график функции $\varphi(\varepsilon)$ для хромистой стали, химический состав которой (в %):
0,115 C; 12.46 Cr; 0,155 Si; 0,41 Mn; 0,10 Ni; 0,010 P; 0,025 S, при температуре 454° [22]

П. Я. Богуславский, используя гипотезу ползучести Ю. Н. Работнова, разработал методы расчета вращающихся дисков, осесимметричных пластин, полуколец и турбинных сопловых диафрагм [3].

§ 5. ГИПОТЕЗА ПЛАСТИЧЕСКОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

Эта гипотеза была предложена Ю. Н. Работновым [22], [23]. Она является обобщением теории, описывающей зависимость деформации в данный момент времени от предыдущего деформирования материала (теория наследственности).

Согласно теории пластической наследственности зависимость между напряжением, деформацией и временем записывается в следующей форме:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma(t) + \int_0^t K(t-\xi)\,\sigma(\xi)\,d\xi. \qquad (34)$$

Уравнение (34) относительно функции $\sigma(t)$ является линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода. В этом уравнении функция $\varphi(\varepsilon)$ является функцией только деформации, описывающей диаграмму растяжения материала; $\sigma(t)$ — напряжение в общем случае, переменное во времени; ξ — переменная интегрирования, изменяющаяся от 0 до t; $K(t-\xi)$ — ядро интегрального уравнения (функция разности

двух переменных $t-\xi$). Для случая простого последействия, когда $\sigma=\text{const}$, уравнение (34) дает

$$\varphi(\varepsilon)=\sigma[1+C(t)], \tag{35}$$

где $C(t)$ — функция простого последействия;

$$C(t)=\int_0^t K(t-\xi)\,d\xi. \tag{36}$$

Сопоставляя выражения (35) и (32), заключаем, что по теории пластической наследственности кривые простого последействия в координатах ε, σ также являются подобными, причем

$$\psi(t)=\frac{1}{1+C(t)}.$$

Поскольку для величины $\psi(t)$ хорошее согласование с результатами эксперимента дает выражение (33), устанавливаем для функции простого последействия следующее аналитическое выражение:

$$C(t)=atb. \tag{37}$$

Дифференцируя выражение (36) по времени, получаем

$$C'(t)=K(t). \tag{38}$$

Таким образом, по экспериментально полученной функции простого последействия может быть найдено ядро интегрального уравнения (34). В частном случае, если функция простого последействия выражается уравнением (37), ядро $K(t-\xi)$ интегрального уравнения (34) на основании формулы (38) имеет следующий вид:

$$K(t-\xi)=ab\,(t-\xi)^{b-1}.$$

Разрешая интегральное уравнение (34) относительно функции $\sigma(t)$, получаем

$$\sigma(t)=\varphi(\varepsilon)-\int_0^t \Gamma(t-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{39}$$

где функция разности $t-\xi$ двух переменных $\Gamma(t-\xi)$ есть резольвента интегрального уравнения (34).

Методы определения резольвенты интегрального уравнения подробно рассмотрены в теории интегральных уравнений (см., например, книгу [20]).

Для случая простой релаксации $\varepsilon=\text{const}$, и уравнение (39) дает

$$\sigma(t)=\varphi(\varepsilon)[1-R(t)], \tag{40}$$

где $R(t)$ — функция простой релаксации;

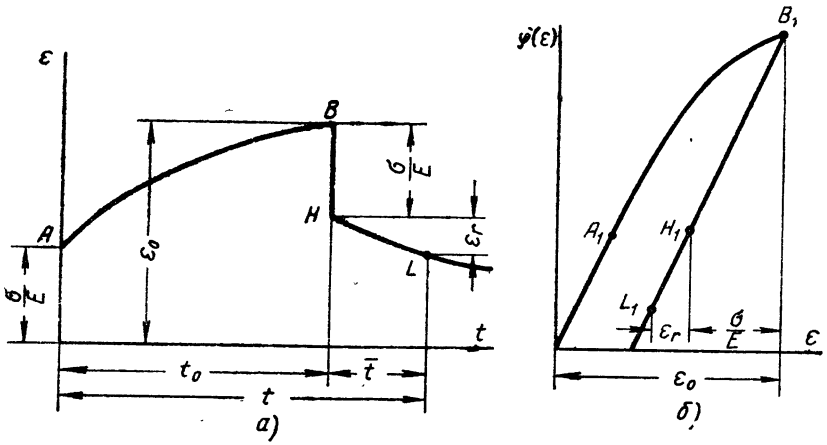
$$R(t)=\int_0^t \Gamma(t-\xi)\,d\xi. \tag{41}$$

Дифференцируя выражение (41) по времени, получаем

$$R'(t)=\Gamma(t).$$

Таким образом, определив при экспериментальном исследовании функцию простого последействия $C(t)$, можно при помощи формулы (38) определить ядро интегрального уравнения $K(t-\xi)$, затем методами, изложенными в теории интегральных уравнений, найти резольвенту ядра $\Gamma(t-\xi)$ и по ней, используя формулу (41), установить функцию простой релаксации $R(t)$. Зная последнюю, уже легко по формуле (40) построить кривую простой релаксации.

Рассмотрим с точки зрения этой теории описанное выше явление обратного последействия. Предположим, что натретый образец растянут силой, вызвавшей напряжение σ, которое меньше предела пропорцио-



Фиг. 635. Схема явления обратного последействия по гипотезе пластической наследственности

нальности материала при температуре испытания. Деформация, возникшая при нагружении образца, равна $\frac{\sigma}{E}$. Этому состоянию образца соответствуют точки A на диаграмме в координатах t, ε (фиг. 635,$а$) и A_1 на диаграмме в координатах ε, $\varphi(\varepsilon)$ (фиг. 635,$б$). В дальнейшем при постоянном напряжении в течение времени t_0 деформация возрастает (процесс простого последействия). Этому процессу соответствует движение по кривой от точки A к точке B в координатах t, ε (фиг. 635,$а$) и движение по кривой от точки A_1 к точке B_1 в координатах ε, $\varphi(\varepsilon)$ (фиг. 635,$б$). К моменту времени t_0 деформация достигает величины ε_0. В этот момент времени образец полностью разгружается (температура испытания остается постоянной).

Процессу разгрузки соответствует движение по прямой от точки B к точке H в координатах t, ε (фиг. 635,$а$) и от точки B_1 к точке H_1 в координатах ε, $\varphi(\varepsilon)$ (фиг. 635,$б$). Уменьшение деформации при разгрузке

$$\varepsilon_{разг} = \frac{\sigma}{E}.$$

В дальнейшем, после разгрузки, деформация продолжает уменьшаться. Так, к моменту времени $t = t_0 + \bar{t}$ деформация добавочно уменьшается на величину ε_r, а полное уменьшение деформации равно $\varepsilon_{разг} + \varepsilon_r$. Этому процессу уменьшения деформации после разгрузки, называемому обратным последействием, соответствует движение по кри-

вой HL в координатах t, ε (фиг. 635,*а*) и движение по прямой H_1L_1 в координатах ε, $\varphi(\varepsilon)$ (фиг. 635,*б*).

Заменяя в выражении (34) функцию $\varphi(\varepsilon)$ уравнением прямой разгрузки и учитывая, что в течение времени t_0 напряжение σ постоянно, а в течение времени $\bar{t}=t-t_0$ равно нулю, из уравнения (34) имеем

$$\varphi(\varepsilon_0)-E(\varepsilon_{разг}+\varepsilon_r)=\sigma\int_0^{t_0}K(t_0+\bar{t}-\xi)\,d\xi. \tag{42}$$

Учитываем, что

$$\int_0^{t_0}K(t_0+\bar{t}-\xi)\,d\xi=\int_0^{t_0+\bar{t}}K(t_0+\bar{t}-\xi)\,d\xi-\int_{t_0}^{t_0+\bar{t}}K(t_0+\bar{t}-\xi)\,d\xi,$$

а согласно формуле (36)

$$\int_0^{t_0+\bar{t}}K(t_0+\bar{t}-\xi)\,d\xi=C(t_0+\bar{t});$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\bar{t}}K(t_0+\bar{t}-\xi)\,d\xi=C(\bar{t}).$$

тогда из выражения (42) получаем

$$\varphi(\varepsilon_0)-E(\varepsilon_{разг}+\varepsilon_r)=\sigma[C(t_0+\bar{t})-C(\bar{t})]. \tag{43}$$

По формуле (35)

$$\varphi(\varepsilon_0)=\sigma[1+C(t_0)]. \tag{44}$$

Если вычесть из выражения (43) зависимость (44), учитывая при этом, что $\sigma=E\varepsilon_{разг}$, то получим

$$\varepsilon_r=\frac{\sigma}{E}[C(t_0)+C(\bar{t})-C(t_0+\bar{t})]. \tag{45}$$

Линейная зависимость деформации обратного последействия от напряжения и симметрия выражения ε_r от t_0 и $\bar{t}$ [см. формулу (45)] хорошо подтверждается экспериментально [33].

На основе рассмотренной гипотезы Ю. Н. Работновым [22], [23] была исследована ползучесть бруса прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе и ползучесть толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением.

§ 6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ ПОЛЗУЧЕСТИ

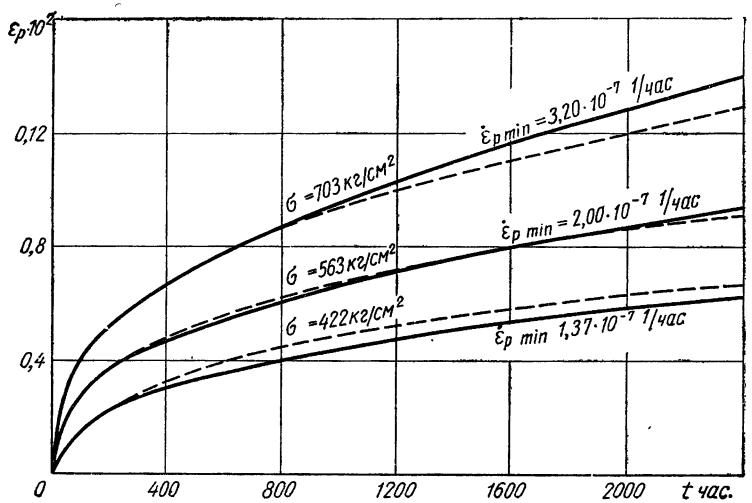
К настоящему времени проведено сравнительно немного экспериментальных исследований, на основании которых можно было бы дать оценку гипотезе ползучести. Такие опыты описаны в работах [31], [34], [5] и [4].

Рассмотрим эти испытания, а также их обработку, проведенную различными исследователями.

В статье Дэвиса [31] приведены результаты экспериментального исследования простого последействия и простой релаксации на медных образцах при температурах 165 и 235°.

Испытание образцов в условиях простого последействия при температуре 165° проводилось в течение 2600 час., а при температуре 235°

в течение 1200 час. После этого промежутка времени образцы, подвергавшиеся испытанию при температуре 235°, разгружались, а затем нагружались вновь. Поскольку при больших напряжениях за время, равное 1200 час., кривые простого последействия при температуре 235° не выходили на линейный участок, их невозможно использовать для определения основных характеристик ползучести с достаточной степенью точности. Поэтому для проверки гипотез ползучести приходится обращаться к результатам экспериментального изучения простого последействия и простой релаксации при температуре 165°.

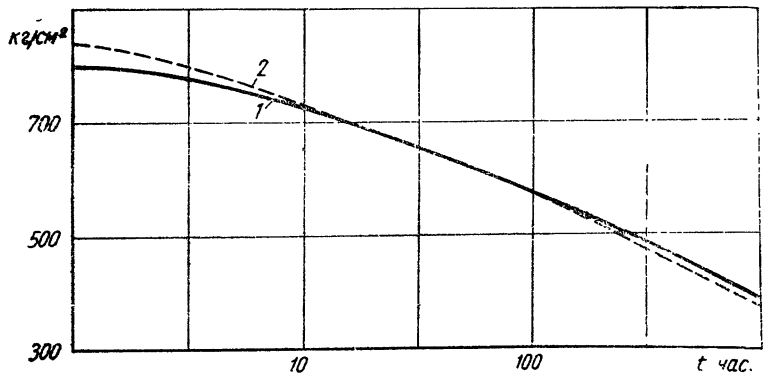


Фиг. 636. Сопоставление экспериментальных кривых простого последействия для меди при температуре 165° (сплошные линии) [31] с теоретическими графиками, построенными по гипотезе упрочнения в формулировке (6) (штриховые линии) [27]

Рассмотрим вначале обработку этих испытаний, проведенную Ф. С. Чуриковым с целью проверки гипотезы упрочнения в формулировке (6). На фиг. 636 изображены экспериментально полученные кривые простого последействия (сплошные линии) [31] и кривые простого последействия, построенные по формуле (6) при указанных в § 2 значениях постоянных a, b и c (штриховые линии) [27]. Сопоставление кривых показывает, что экспериментально полученные кривые простого последействия с достаточной степенью точности описываются уравнением (6). На фиг. 637 в полулогарифмических координатах изображены экспериментально полученная кривая простой релаксации при начальном напряжении $\sigma(0) = 949$ *кг/см*^{2} (линия *1*) [31], а также кривая простой релаксации, построенная по формуле (11) при указанных в § 2 значениях E, a, b и c (линия *2*) [27]. Как следует из сопоставления кривых, результаты эксперимента хорошо согласуются с гипотезой упрочнения.

Результаты опытов Дэвиса при температуре 165° были обработаны и Л. М. Качановым [11] для проверки гипотезы течения Л. М. Качанова и гипотезы старения в формулировке (18). Для проверки этих гипотез, а также измененной гипотезы ползучести Н. М. Беляева нами также была проведена обработка опытов Дэвиса при температуре 165° [18]. Рассмотрим результаты этой обработки.

На фиг. 638 построен график зависимости напряжения от минимальной скорости пластической деформации, величины которых указаны на фиг. 637. По этому графику так, как изложено в гл. XII т. II, установлена величина показателя степени $n=1{,}60$.

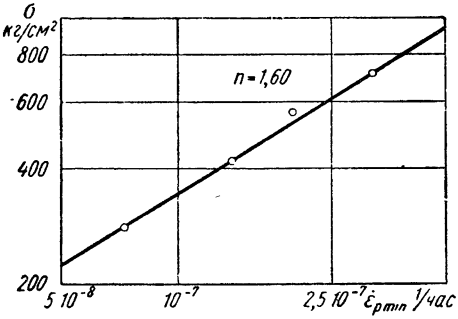


Фиг. 637. Сопоставление экспериментальной кривой простой релаксации для меди при температуре 165° и начальном напряжении $\sigma(0)=949$ *кг/см²* (линия *1*) [31] с теоретической кривой, построенной по гипотезе упрочнения в формулировке (6) (линия *2*) [27]

На фиг. 639 представлен график функции Ω. Точками на фиг. 639 изображены значения функции Ω, найденные из трех кривых простого последействия.

На фиг. 640 изображены экспериментально полученная кривая простой релаксации (линия *1*) и кривые простой релаксации, построенные по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева (линия *2*), по гипотезе течения Л. М. Качанова (линия *3*) и гипотезе старения в формулировке (18) (линия *4*). При построении теоретических кривых простой релаксации использовались приведенные выше величины модуля упругости $E=0{,}991\cdot 10^6$ *кг/см²*, показателя степени $n=1{,}60$ и график функции Ω (см. фиг. 639).

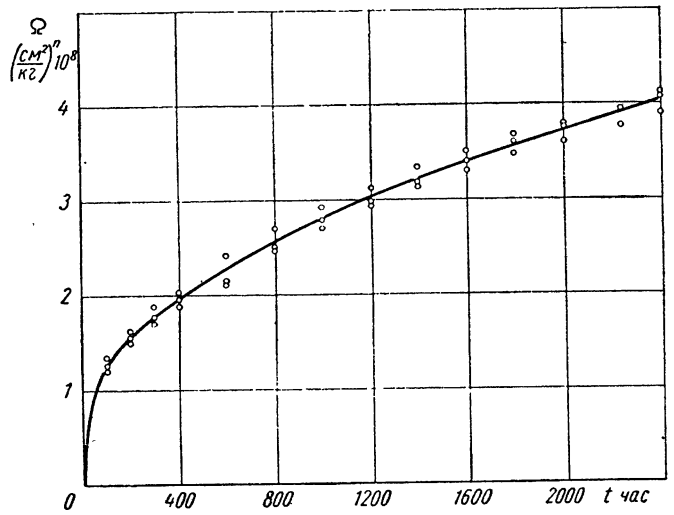
На основании сопоставления теоретических и экспериментальных кривых простой релаксации заключаем, что в рассмотренном случае данные опыта лучше всего согласуются с измененной нами гипотезой ползучести Н. М. Беляева.



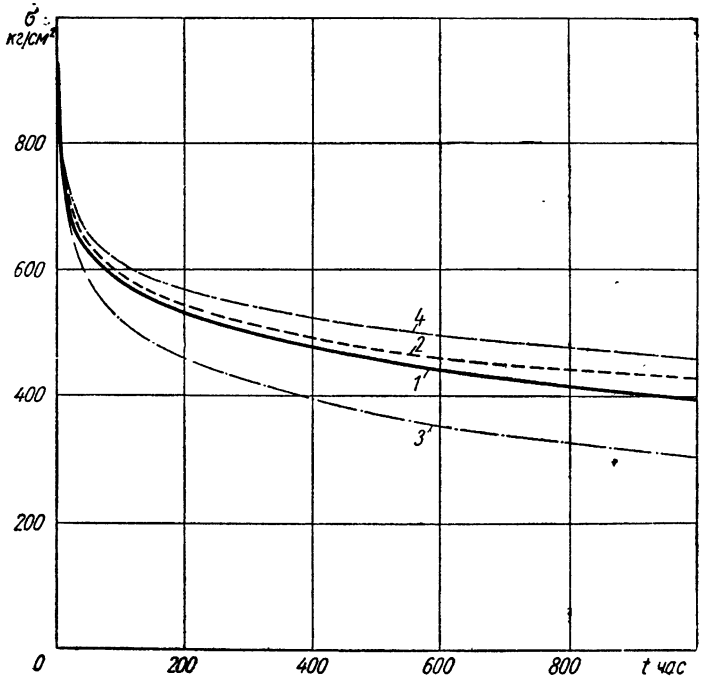
Фиг. 638. График зависимости напряжения от минимальной скорости пластической деформации для меди при температуре 165°

Перейдем к рассмотрению опытов Джонсона. В работе [34] изложены результаты экспериментального исследования простого последействия и простой релаксации на образцах хромомолибденовой стали при температуре 525°. Эти испытания были обработаны нами для экспериментальной проверки измененной гипотезы старения Н. М. Беляева, гипотезы старения в формулировке (18), а также гипотезы течения Л. М. Качанова.

На фиг. 641 представлены кривые простого последействия при шести различных напряжениях, значения которых указаны на чертеже.



Фиг. 639. График функции Ω для меди при температуре 165°

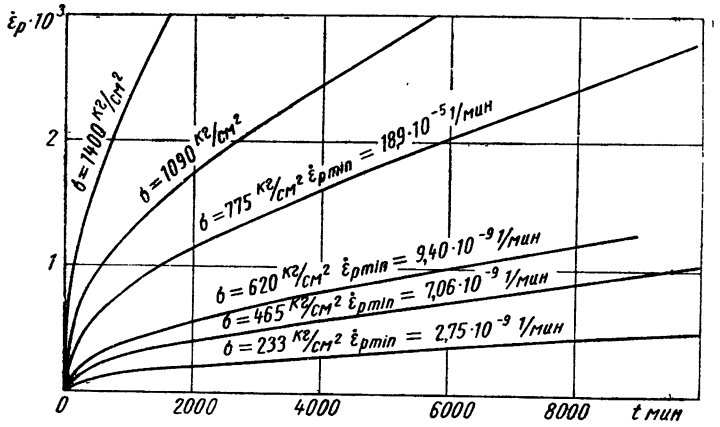


Фиг. 640. Сопоставление экспериментальной (линия *1*) и теоретических кривых простой релаксации для меди при температуре 165° и начальном напряжении $\sigma(0) = 949$ *кг/см²*

Линия *2* — по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева, линия *3* — по гипотезе течения Л. М. Качанова, линия *4* — по гипотезе старения в формулировке (18)

Там же приведены минимальные постоянные скорости пластической деформации.

На фиг. 642 изображен график зависимости напряжения от минимальной скорости пластической деформации. Показатель степени n, установленный путем обработки этого графика, равен $n=1{,}85$.

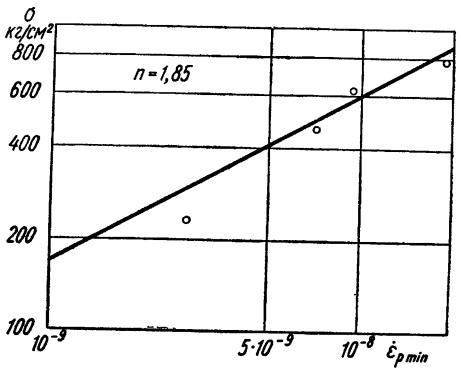


Фиг. 641. Кривые простого последействия хромомолибденовой стали при температуре 525° С. Химический состав стали (в %):

0,37 C; 0,16 Si; 0,011 S; 0,018 P; 0,38 Mn; 1,05 Cr; 0,17 Ni; 0,32 Mo; 0,08 Cu; термическая обработка—закалка в масле при 850°, отпуск при 630° с последующим охлаждением на воздухе [34[

На фиг. 643 изображен график функции Ω. В рассматриваемом случае разброс точек оказался несколько больше, чем в результатах обработки опытов Дэвиса.

На фиг. 644 представлены кривые простой релаксации для величины начального напряжения $\sigma(0)=1460$ *кг/см²*, при котором производилось экспериментальное исследование. При этом принималось, что для температуры 525° модуль упругости стали, подвергавшейся испытаниям, $E=1{,}46 \cdot 10^6$ *кг/см²* [34].

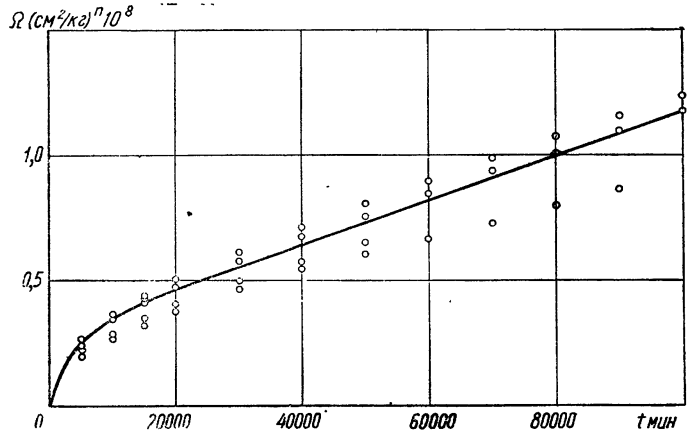


Фиг. 642. График зависимости напряжения от минимальной скорости пластической деформации для хромомолибденовой стали при температуре 525°

Так же как и раньше, линия *1* — опытная кривая, линия *2* — кривая по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева, линия *3* — по гипотезе течения Л. М. Качанова, линия *4* — по гипотезе старения в формулировке (18).

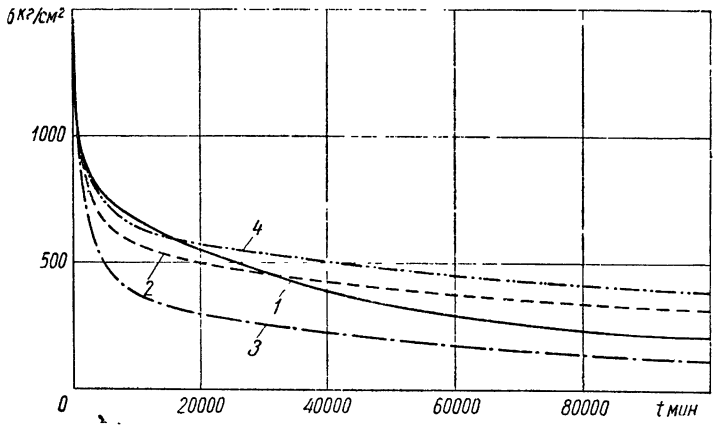
В рассматриваемом случае при небольших значениях времени опытная кривая близка к кривым, построенным по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева и гипотезе старения в формулировке (18), а затем располагается примерно посередине между кривыми по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева и гипотезе течения Л. М. Качанова.

Рассмотрим результаты опытов А. М. Жукова, Ю. Н. Работнова и Ф. С. Чурикова [5]. Ими было проведено экспериментальное исследование последействия образцов из красной меди как при постоянных во времени нагрузках, так и при нагрузках, изменяющихся ступенями.



Фиг. 643. График функции Ω для хромомолибденовой стали при температуре 525°

Температуры испытаний 165, 200, 235 и 270°. Результаты испытаний были сопоставлены с теоретическими данными по гипотезе упрочнения в формулировке (2) и гипотезе пластической наследственности.



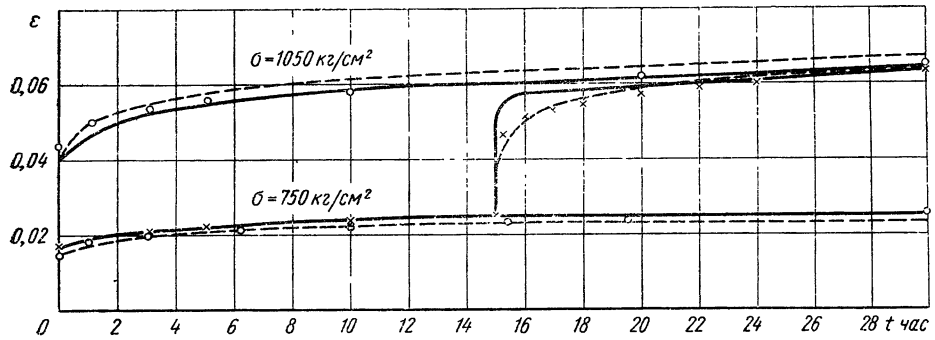
Фиг. 644. Сопоставление экспериментальной (линия *1*) и теоретических кривых простой релаксации для хромомолибденовой стали при температуре 525° и начальном напряжении $\sigma(0) = 1460$ *кг/см²*

Линия *2* — по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева, линия *3* — по гипотезе течения Л. М. Качанова, линия *4* — по гипотезе старения в формулировке (18)

На фиг. 645 в качестве примера изображены кривые последействия при постоянных и при ступенчатой нагрузках, построенные по гипотезе пластической наследственности (сплошные линии) и гипотезе упрочнения (штриховые линии) для температуры 200°. Кружочками и крестиками представлены результаты опытов

Сопоставление теоретических и экспериментальных результатов показывает, что как гипотеза пластической наследственности, так и гипотеза упрочнения хорошо подтверждается данными опыта. Однако гипотеза пластической наследственности согласуется с результатами опытов количественно несколько лучше, чем гипотеза упрочнения.

Перейдем к рассмотрению опытов, проведенных В. И. Даниловской, Г. М. Ивановой и Ю. Н. Работновым [4]. Ими были испытаны образцы хромомолибденовой стали 30ХМ при температуре 500° в усло-



Фиг. 645. Кривые последействия при постоянных и ступенчатой нагрузках для красной меди при температуре 200° по гипотезе пластической наследственности (сплошные линии) и гипотезе упрочнения (штриховые линии). Кружочками представлены результаты опытов при постоянной нагрузке, крестиками — при ступенчатой [5]

виях простого последействия и простой релаксации. Результаты этих испытаний сопоставлялись с данными по гипотезе упрочнения в формулировке (6).

На фиг. 646 представлены экспериментально полученные кривые простого последействия (сплошные линии), а также теоретические кривые (штриховые линии), построенные по уравнению (10).

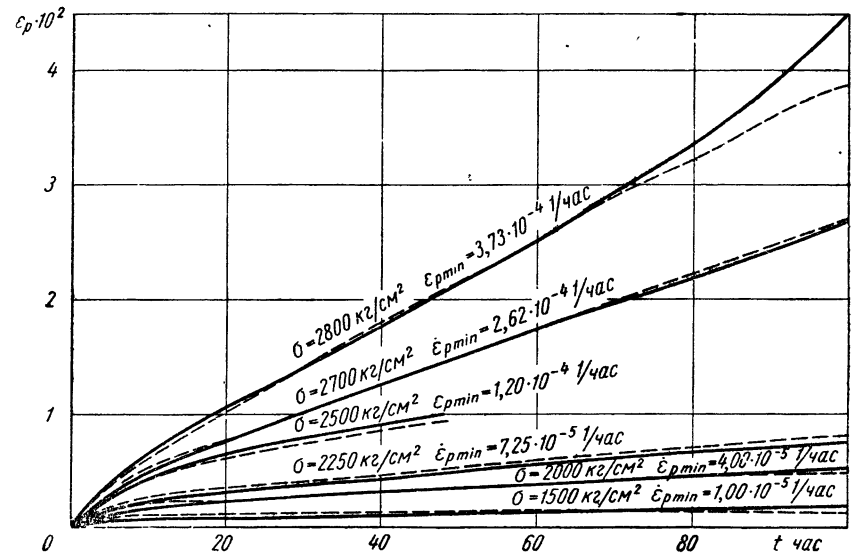
На фиг. 647 изображены экспериментальные (сплошные линии) и теоретические (штриховые линии) кривые простой релаксации. Последние построены по уравнению (11). Отметим, что для улучшения согласования с данными опыта как при построении теоретических кривых простого последействия, так и при построении теоретических кривых простой релаксации величины b и $\frac{1}{1+c}$ считались не постоянными, а линейными функциями напряжения.

Как следует из сопоставления экспериментальных и теоретических кривых простой релаксации, гипотеза упрочнения хорошо подтверждается экспериментально.

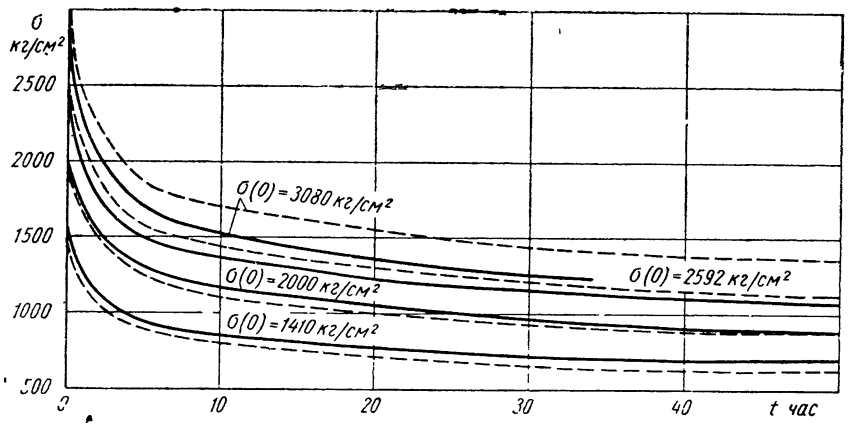
В рассматриваемой работе описано также экспериментальное исследование простой релаксации после предварительного простого последействия и предварительного растяжения за пределы упругости.

В первых опытах образцы вначале испытывались в условиях простого последействия в течение 25 час. при напряжении $\sigma=2000$ *кг/см²*, а затем в течение 50 час. в условиях простой релаксации при начальном напряжении $\sigma(0)=2000$ *кг/см²*.

Во вторых опытах образцы растягивались с постоянной скоростью нагружения до тех пор, пока пластическая деформация не достигала такой величины, как и в первых опытах, при испытаниях в условиях



Фиг. 646. Сопоставление экспериментальных кривых простого последействия для хромомолибденовой стали 30ХМ при температуре 500° (сплошные линии) с теоретическими, построенными по гипотезе упрочнения в формулировке (6) (штриховые линии) [4].

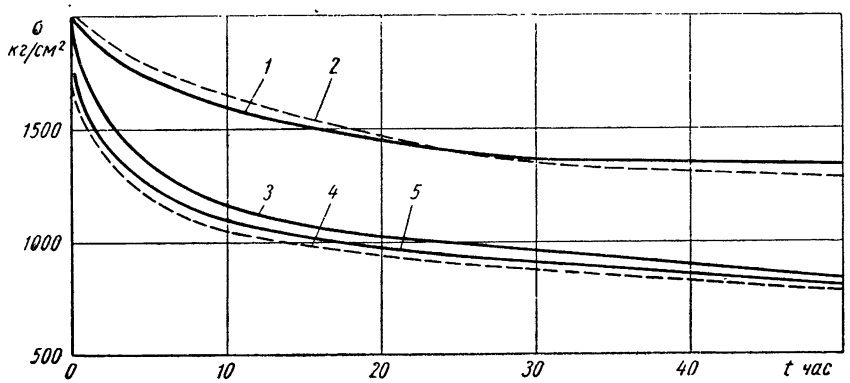


Фиг. 647. Сопоставление экспериментальных кривых простой релаксации для хромомолибденовой стали 30ХМ при температуре 500° (сплошные линии) с теоретическими, построенными по гипотезе упрочнения в формулировке (6) (штриховые линии) [4]

простого последействия. Соответствующее напряжение, очевидно, больше, чем $\sigma(0)$ в первых опытах. После этого напряжения быстро снижались до величины $\sigma(0)$ и затем производились испытания в условиях простой релаксации.

Такие испытания ставились для того, чтобы выяснить влияние на релаксацию наклепа кратковременным растяжением и последействием.

На фиг. 648 изображены опытная (линия *1*) и теоретическая (линия *2*) кривые простой релаксации после предварительного последействия, а также опытная (линия *3*) и теоретическая (линия *4*) кривые простой релаксации после кратковременного растяжения. Теоретические кривые простой релаксации построены по гипотезе упрочнения



Фиг. 648. Экспериментальные (сплошные линии) и теоретические (штриховые линии) кривые простой релаксации для хромомолибденовой стали 30ХМ при температуре 500° и начальном напряжении $\sigma(0)=2000$ *кг/см²* после предварительного последействия (линии *1* и *2*) и после предварительного кратковременного наклепа (линии *3* и *4*) Линия *5* — кривая простой релаксации без наклепа [4]

в формулировке (6). На этом же чертеже для сравнения приведена кривая простой релаксации, полученная путем испытания образцов, не получивших пластической деформации (линия *5*).

Как следует из кривых, приведенных на фиг. 648, предварительное последействие сильно замедляет релаксацию, а кратковременный наклеп почти не сказывается на ходе процесса релаксации. Это говорит о различиях протекания процессов последействия и кратковременной пластической деформации. Далее, как это следует из сопоставления экспериментальных и теоретических кривых простой релаксации, после предварительного кратковременного растяжения за пределы упругости и предварительного последействия гипотеза упрочнения хорошо подтверждается экспериментально.

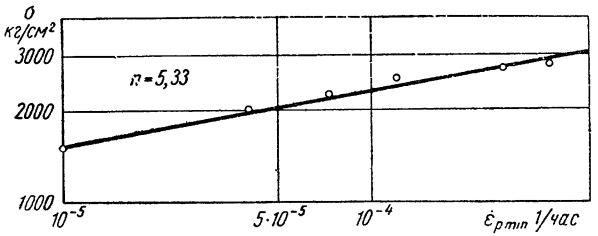
Рассмотренные выше опыты были обработаны нами для проверки измененной гипотезы старения Н. М. Беляева и гипотезы течения Л. М. Качанова.

На фиг. 649 представлен график зависимости напряжения от минимальной скорости пластической деформации, величины которых приведены на фиг. 646. Путем обработки этого графика по методике, изложенной в гл. XII т. II, установлена величина показателя степени $n=5{,}33$.

На фиг. 650 изображен график функции Ω.

На фиг. 651—653 представлены кривые простой релаксации для

величин начального напряжения $\sigma(0)=3080$ *кг/см²*, $\sigma(0)=2592$ *кг/см²* и $\sigma(0)=2000$ *кг/см²* соответственно. Экспериментальное исследование простой релаксации при начальном напряжении $\sigma(0)=1400$ *кг/см²* с теоретическими данными не сопоставлялось ввиду того, что для построения графика функции Ω кривая простого последействия при напряжении $\sigma=1500$ *кг/см²*, близком к начальному напряжению $\sigma(0)=1400$ *кг/см²*, не использовалась.

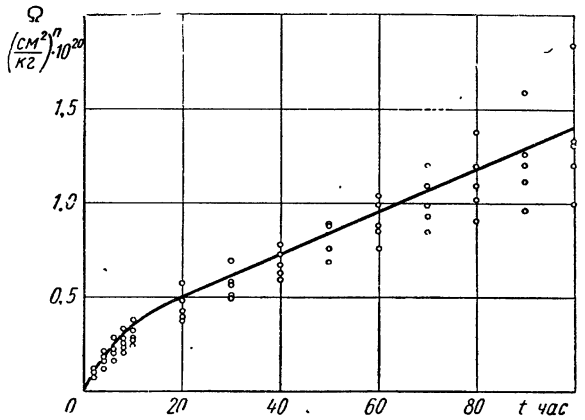


Фиг. 649. График зависимости напряжения от минимальной скорости пластической деформации для хромомолибденовой стали 30ХМ при температуре 500°

На фиг. 651—653 линии *1* — опытные кривые, линии *2* — кривые по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева, линии *3* — по гипотезе течения Л. М. Качанова.

При построении теоретических кривых простой релаксации использовалась величина модуля упругости стали 30ХМ при температуре 500° $E=1{,}48\cdot10^6$ *кг/см²*.

Кривые по гипотезе старения в формулировке (18) на фиг. 651—653 не представлены. Это объясняется тем, что, как следует из результатов обработки предыдущих испытаний, кривая простой релаксации по гипотезе старения в формулировке (18) всегда располагается выше кривой по измененной гипотезе ползучести Н. М. Беляева, которая в свою очередь выше опытной. Таким образом, кривая простой релаксации по гипотезе старения в формулировке (18) всегда хуже согласуется с данными опыта, чем кривая простой релаксации по измененной гипотезе ползучести Н. М. Беляева.



Фиг. 650. График функции Ω для хромомолибденовой стали 30ХМ при температуре 500°

Как следует из фиг. 651—653, опытные кривые несколько ближе к кривым, построенным по гипотезе течения Л. М. Качанова, чем к кривым, полученным по измененной гипотезе Н. М. Беляева. Однако отклонение сопоставляемых кривых незначительно.

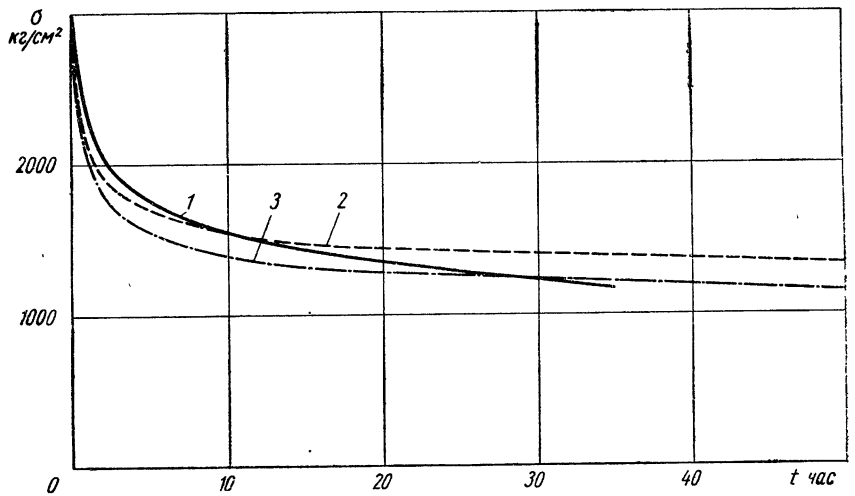
Сопоставим теперь результаты экспериментального исследования простой релаксации после предварительного последействия с теоретическими данными по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева. Для этого предварительно получим уравнение кривой простой релаксации в указанных условиях.

Обозначим время предварительного последействия через t_1.

Полагая в уравнении (28) $\sigma=\sigma(0)$, устанавливаем полную деформацию к моменту времени t_1:

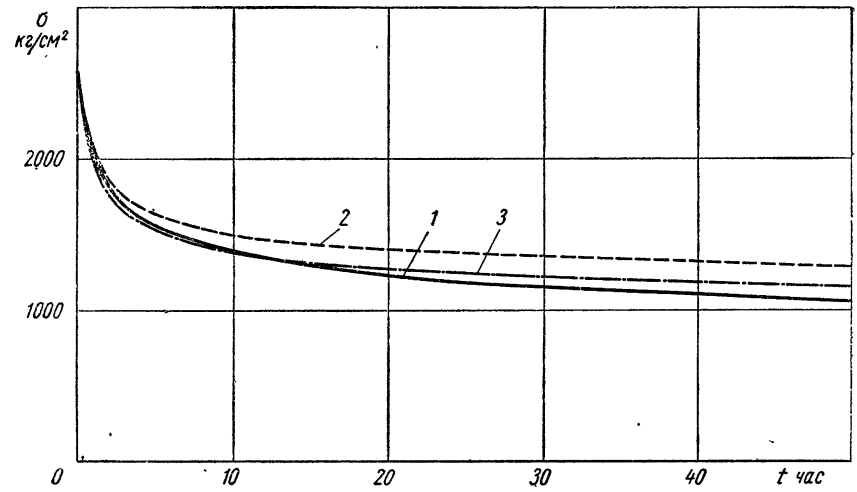
$$\varepsilon_1=\frac{\sigma(0)}{E}+\sigma^{n}(0)\,\Omega_1, \tag{46}$$

где Ω_1 — значение функции Ω для момента времени t_1.



Фиг. 651. Сопоставление экспериментальной (линия *1*) и теоретических кривых простой релаксации для хромомолибденовой стали 30ХМ при температуре 500° и начальном напряжении $\sigma(0)=3080$ *кг/см²*

Линия *2* — по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева; линия *3* — по гипотезе течения Л. М. Качанова



Фиг. 652. Сопоставление экспериментальной (линия *1*) и теоретических кривых простой релаксации для хромомолибденовой стали 30ХМ при температуре 500° и начальном напряжении $\sigma(0)=2592$ *кг/см²*

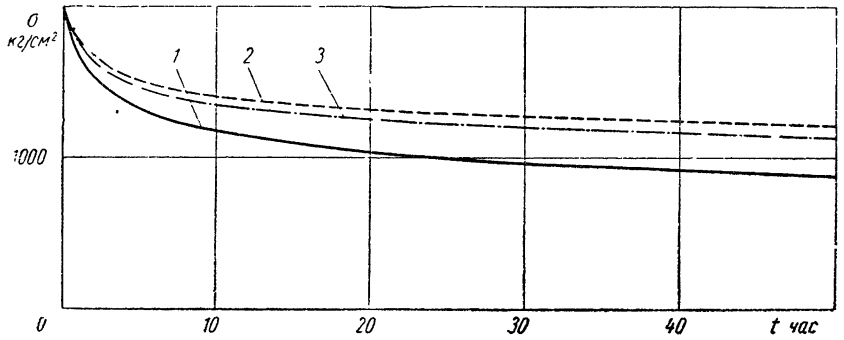
Линия *2* — по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева; линия *3* — по гипотезе течения Л. М. Качанова

В дальнейшем полная деформация образца остается постоянной и равной ε_1.

Подставляя в уравнение (28) вместо ε величину ε_1 по формуле (46) и заменяя нижний предел интегрирования на t_1 имеем

$$\frac{\sigma(0)}{E} + \sigma^n(0)\,\Omega_1 = \frac{\sigma}{E} + \sigma \int_{t_1}^{t} \sigma^{n-1} B dt.$$

Это уравнение является интегро-дифференциальным уравнением простой релаксации после предварительного последействия. Для того чтобы вывести напряжение из-под знака интеграла и установить зави-



Фиг. 653. Сопоставление экспериментальной (линии *1*) и теоретических кривых простой релаксации для хромомолибденовой стали 30ХМ при температуре 500° и начальном напряжении $\sigma(0) = 2000$ *кг/см²*

Линия *2* — по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева; линия *3* — по гипотезе течения Л. М. Качанова

симость его от времени в явном виде, поделим все члены выведенного уравнения на σ, а затем результат продифференцируем по времени, тогда получим

$$-\left[\frac{\sigma(0)}{E} + \sigma^n(0)\,\Omega_1\right]\frac{d\sigma}{\sigma^{n+1}} = B dt.$$

Проинтегрируем теперь это уравнение по времени, учитывая, что при $t = t_1$ $\sigma = \sigma(0)$. Используя соотношение (12) гл. XII т. II, после преобразований устанавливаем, что

$$\sigma = \sigma(0)\left[1 + \frac{nE\,\sigma^{n-1}(0)(\Omega - \Omega_1)}{1 + nE\,\sigma^{n-1}(0)\,\Omega_1}\right]^{-\frac{1}{n}}. \qquad (47)$$

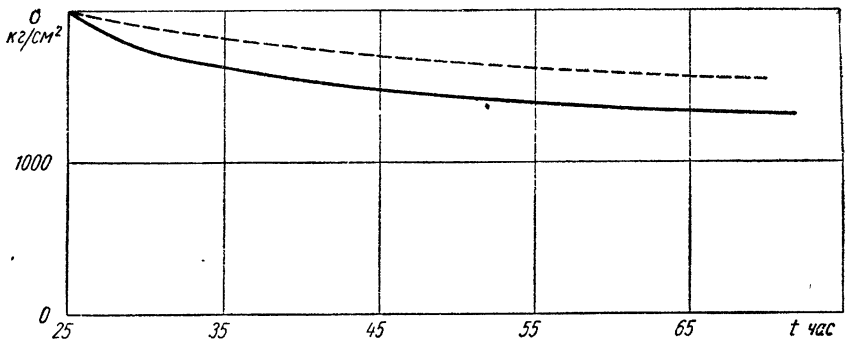
По этому уравнению можно построить кривую простой релаксации после предварительного простого последействия. На фиг. 654 она изображена штриховой линией.

Как следует из сопоставления опытной и теоретической кривых, согласование данных эксперимента и теории удовлетворительное. Наибольшая погрешность формулы (47) для $t = 70$ час. составляет 16,7%.

На основании проведенных сопоставлений экспериментальных кривых простой релаксации и кривых, построенных по измененной гипотезе ползучести Н. М. Беляева и гипотезе течения Л. М. Качанова, заключаем, что иногда опытные данные лучше согласуются с измененной гипотезой старения Н. М. Беляева, а иногда в большей степени соответствуют гипотезе течения Л. М. Качанова. Однако даже в последнем случае отличие опытных кривых от кривых по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева не столь велико, чтобы можно было поставить под сомнение эту гипотезу.

Кроме подробно рассмотренных выше экспериментальных работ по проверке гипотез ползучести, укажем еще работы Л. М. Качанова и Ш. Н. Каца [12], а также Трамплера [41].

В первой [12] работе описано экспериментальное исследование последействия свинцовых образцов при комнатной температуре и напряжениях как постоянных во времени, так и изменяющихся во времени по линейному закону. Однако вследствие разброса экспериментальных точек провести количественного сопоставления данных теории и опыта не удалось. Качественно экспериментальное исследование подтвердило гипотезу течения.



Фиг. 654. Сопоставление экспериментальной кривой простой релаксации после предварительного простого последействия (сплошная линия) и теоретической, построенной по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева (штриховая линия) для хромомолибденовой стали 30ХМ при температуре 500° и начальном напряжении $\sigma(0)=2000$ *кг/см²*

Во второй [41] работе на основе гипотезы течения было произведено построение кривой простого последействия по экспериментально полученным кривым простой релаксации при различных начальных напряжениях для легированной стали при температуре 538°. Полученная кривая была сопоставлена с опытной. Сравнение показало хорошее совпадение расчетной кривой с экспериментальной.

§ 7. КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГИПОТЕЗ ПОЛЗУЧЕСТИ

Из изложенного выше рассмотрения и экспериментальной проверки гипотез ползучести можно заключить, что наиболее совершенной и гибкой, отражающей все стороны процесса ползучести и хорошо согласующейся с данными опытов, является гипотеза пластической наследственности Ю. Н. Работнова. Она бесспорно имеет большие перспективы развития. Однако в расчетах деталей машин на ползучесть использование этой гипотезы, как правило, приводит к большим трудностям математического характера.

Гипотеза упрочнения хорошо согласуется с данными опытов. В частности, она позволяет достаточно надежно оценить релаксацию напряжений на основе экспериментального изучения простого последействия. Разработка гипотезы упрочнения, бесспорно, весьма важна. В настоящее время она не нашла применения в технических расчетах главным образом потому, что это связано с большими математическими трудностями.

Основным недостатком гипотез течения и старения является то, что в основные уравнения этих гипотез время включено явным обра-

зом, вследствие чего эти уравнения неинвариантны относительно изменения начала отсчета времени. Применение гипотез течения и старения к задачам, когда нагрузки и разгрузки чередуются, может привести к абсурдным результатам. Этот основной недостаток гипотез течения и старения был впервые указан Ю. Н. Работновым [22], [23]. Однако при плавно изменяющихся нагрузках гипотезы течения и старения хорошо согласуются с результатами опытов [11].

Расчеты на ползучесть по гипотезе старения Ю. Н. Работнова эквивалентны расчетам на прочность и жесткость при нелинейных зависимостях между напряжениями и деформациями, заданных графически. Поэтому многочисленные исследования советских ученых — А. А. Ильюшина, А. Ю. Ишлинского, Л. М. Качанова, Ю. Н. Работнова, В. В. Соколовского и др. по теории пластичности [6], [7], [10], [26] могут быть использованы в этом случае и для расчетов на ползучесть. В расчетах на ползучесть по гипотезе старения Ю. Н. Работнова возможно непосредственное использование серии экспериментально полученных кривых простого последействия, без апроксимации их аналитическими зависимостями, что, естественно, повышает точность расчетов. Однако такие расчеты неизбежно связаны с применением графических и численных методов и, следовательно, достаточно трудоемки.

Гипотеза старения в формулировке (18) согласуется с экспериментальными данными хуже, чем измененная нами гипотеза старения Н. М. Беляева, а гипотеза течения Л. М. Качанова подтверждается опытом примерно так же, как последняя. Интересно отметить, что экспериментально полученные кривые простой релаксации располагаются обычно между теоретическими, построенными по гипотезе течения Л. М. Качанова и по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева.

Использование гипотезы течения Л. М. Качанова неизбежно связано с применением приближенных вариационных методов [11], что не всегда позволяет оценить точность полученных результатов. Даже такие простые задачи, как задача о чистом изгибе прямого бруса или чистом кручении бруса круглого поперечного сечения в условиях ползучести, не решаются по гипотезе течения Л. М. Качанова в замкнутом виде.

Использование измененной гипотезы старения Н. М. Беляева позволяет получить для ряда задач аналитическое решение в замкнутом виде. Наличие таких решений позволяет провести полный анализ полученных результатов, сделать заключение относительно различных частных случаев, оценить точность приближенных решений.

Все это и послужило основанием для использования в расчетах на релаксацию (см. § 9 этой главы) и в исследованиях неустановившейся ползучести (см. гл. XV т. II) измененной гипотезы старения Н. М. Беляева.

§ 8. ПОЛЗУЧЕСТЬ ПРИ НЕОДНООСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Многие элементы конструкций, например газо- и паропроводы, турбинные диски, клапанные пружины, находятся в условиях ползучести при неодноосном напряженном состоянии. Как и в уже рассмотренных случаях, они должны быть рассчитаны так, чтобы в течение срока службы детали пластические деформации не превосходили допускаемой величины.

Для таких расчетов необходимо создание теории, которая позволила бы по результатам экспериментального изучения ползучести при

одноосном растяжении судить о деформациях или их скоростях при ползучести в случае неодноосного напряжённого состояния.

Во всех расчетах на ползучесть при неодноосном напряженном состоянии постулируется применимость к задачам ползучести теории малых упруго-пластических деформаций [1], [11], [22], [23], [27].

Согласно этой теории зависимости компонентов деформации от компонентов напряжения имеют вид (см. гл. VIII т. II)

$$\varepsilon_x = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_x - \sigma_0) + \varepsilon_0;\ \gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{xy};$$

$$\varepsilon_y = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_y - \sigma_0) + \varepsilon_0;\ \gamma_{yz} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{yz}; \qquad (48)$$

$$\varepsilon_z = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_z - \sigma_0) + \varepsilon_0;\ \gamma_{zx} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{zx},$$

где σ_i — интенсивность напряжений:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}; \qquad (49)$$

ε_i — интенсивность деформаций:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}; \qquad (50)$$

σ_0 — среднее нормальное напряжение:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}; \qquad (51)$$

ε_0 — средняя линейная деформация:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}. \qquad (52)$$

По теории малых упруго-пластических деформаций зависимость средней линейной деформации от среднего нормального напряжения имеет вид (см. гл. VIII т. II)

$$\varepsilon_0 = \frac{1 - 2\mu}{E}\sigma_0 + \theta. \qquad (53)$$

В соотношении (53) последнее слагаемое представляет собой температурную деформацию, обусловленную нагревом детали в условиях эксплуатации с начальной температуры равномерного нагрева $\vartheta_н$ до температуры ϑ. Эта температурная деформация определяется по формуле (14) гл. III т. I.

При повышенных температурах коэффициент поперечной деформации μ близок к 0,5. Поэтому на основании соотношения (53) имеем

$$\varepsilon_0 = \theta,$$

тогда зависимости (48) компонентов деформации от компонентов напряжения принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_x-\sigma_0)+\theta; \quad \gamma_{xy}=\frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{xy};\\ \varepsilon_y &= \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_y-\sigma_0)+\theta; \quad \gamma_{yz}=\frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{yz};\\ \varepsilon_z &= \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_z-\sigma_0)+\theta; \quad \gamma_{zx}=\frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{zx}. \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

Как известно, при равномерном нагреве тела, не стесненного внешними связями, температурных напряжений не возникает. В этом случае при определении напряжений температурная деформация в выражении (54) может быть опущена.

Согласно одной из гипотез теории малых упруго-пластических деформаций для несжимаемого материала интенсивности напряжений и деформаций связаны таким же соотношением, как напряжения и деформации при одноосном растяжении. Поэтому для получения зависимости интенсивности деформаций от интенсивности напряжений необходимо в приведенных выше формулах, связывающих деформацию, напряжение и время, вместо деформации подставить интенсивность деформаций, а вместо напряжения — интенсивность напряжений.

Так, например, если деформации, возникшие при нагружении, являются упругими, то по измененной нами гипотезе старения Н. М. Беляева

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} + \sigma_i \int_0^t \sigma_i^{n-1} B dt. \qquad (55)$$

Аналогично поступаем в случае использования других теорий ползучести.

Экспериментальные исследования ползучести при неодноосном напряженном состоянии проводились путем испытания тонкостенных цилиндрических труб при различном нагружении.

В испытаниях, проведенных Муром, Бетти и Доллинсом [35], Вандузером и Мак-Катченом [42], Бейли [28], Нортоном [36], [37] и Ш. Н. Кацем [8], отмечено сравнительно хорошее согласование результатов опыта с теоретическими данными, полученными на базе основных гипотез теории малых упруго-пластических деформаций. Результаты испытаний тонкостенных труб при совместном растяжении и кручении, выполненные Бейли [28], приведены в следующей главе.

Проведенных испытаний далеко недостаточно для того, чтобы обосновать возможность использования в расчетах на ползучесть теории малых упруго-пластических деформаций. Так, например, в испытаниях, выполненных Тэпселом и Джонсоном [40], Эвереттом и Кларком [32], отдельные экспериментальные точки иногда очень сильно отклоняются от теоретических результатов. Однако в настоящее время эта возможность для решения практических задач является единственной. Поэтому ниже, так же как и во всех других работах по расчетам на ползучесть, будут использоваться основные уравнения теории малых упруго-пластических деформаций.

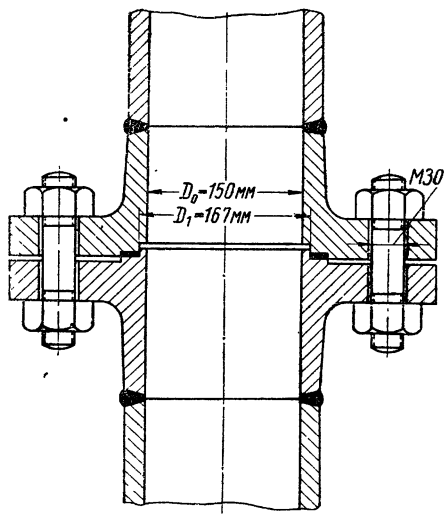
Расчеты деталей на ползучесть, особенно сложной формы, связаны со значительными трудностями. Поэтому в тех случаях, когда выполнение расчета или непосредственного испытания натурных объектов затруднительно, может быть использовано испытание моделей деталей,

проведенное в соответствии с условиями подобия. Исследование моделирования в условиях ползучести в последнее время проводилось в турбинной лаборатории Московского отделения ЦКТИ [3].

§ 9. РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕТАЛЯХ МАШИН

А. Релаксация напряжений в шпильках фланцевого соединения

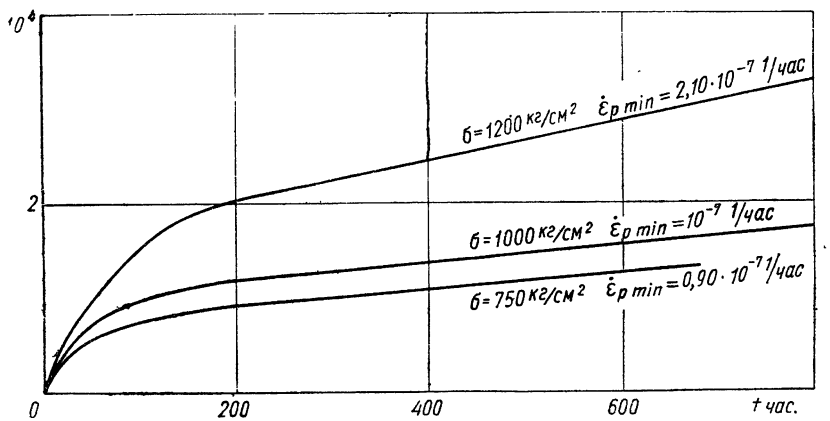
В качестве первого примера релаксации напряжений в деталях машин рассмотрим расчет шпилек фланцевого соединения паропровода, пропускающего пар под давлением $p=100$ *ат* при температуре $\vartheta=500°$. Внутренний диаметр паропровода $D_0=150$ *мм*; внутренний диаметр прокладка $D_1=167$ *мм*. Предполагается, что фланцы жесткие, с шейкой, привариваемой в стык к трубе. Чертеж и размеры фланцевого соединения изображены на фиг. 655 [13]. Число шпилек $z=12$ (резьба М30); материал шпилек — хромованадиевая сталь ЭИ10; при температуре 500° модуль упругости первого рода $E=1{,}80\cdot10^6$ *кг/см*^{2}. Кривые простого последействия стали ЭИ10 при температуре 500° представлены на фиг. 656 [15]. На фиг. 657 построен график зависимости напряжения от минимальной скорости пластической деформации, величины которых приведены на фиг. 656. Путем обработки этого графика по методу, изложенному в гл. XII т. II, установлена величина показателя степени $n=1{,}83$. На фиг. 658. представлен график функции Ω, построенный так, как это изложено в § 2 разд. В. гл. XII т. II.



Фиг. 655. Фланцевое соединение трубопровода

Шпильки фланцевого соединения обычно подтягиваются 1 раз в год во время капитального ремонта. Выясним, с каким напряжением должны быть затянуты шпильки в начале периода эксплуатации паропровода для того, чтобы плотность соединения была обеспечена в течение года.

Ввиду того что фланцы являются достаточно жесткими, пренебрежем их деформацией. Кроме этого, не будем учитывать ползучесть прокладки по сравнению с ползучестью шпилек. Эти предположения дают возможность считать деформацию шпилек в процессе эксплуатации паропровода постоянной (случай простой релаксации).

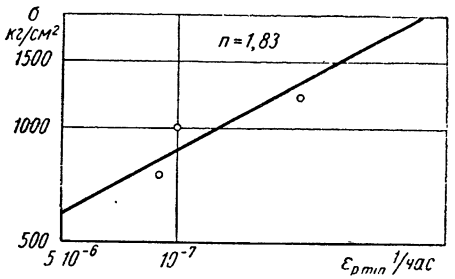


Фиг. 656. Кривые простого последействия для хромомолибденованадиевой стали ЭИ10 при температуре 500°

Химический состав стали (в %): 0,28 C; 0,24 Si; 0,58 Mn; 1,55 Cr; 0,38 Mo; 0,16 V; 0,12 Ni; термическая обработка—закалка, 9 00° (масло), отпуск 650°

Далее отметим, что температура шпилек во время эксплуатации ниже температуры пара примерно на 10—20° [14]. Не располагая кривыми простого последействия стали ЭИ10 при температурах 490—480°, примем, что температура шпилек такая же, как и пар, т. е. 500°. Это предположение повышает надежность расчета.

Для обеспечения плотности соединения прокладка при эксплуатации должна быть сжата некоторой силой $P_п$. Обозначим силу, разъединяющую фланцы, через P, а силу затяжки шпилек $P_ш$. Очевидно, что



Фиг. 657. График зависимости напряжения от минимальной скорости пластической деформации для хромомолибденованадиевой стали ЭИ10 при температуре 500°

$$P = p\,\frac{\pi D_1^2}{4}; \qquad (56)$$

$$P_ш = \sigma F_1 z, \qquad (57)$$

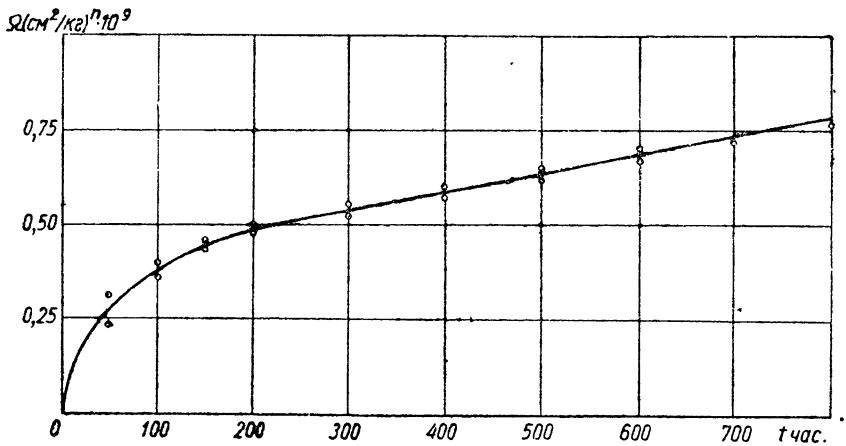
где σ — напряжение в шпильке;
F_1 — площадь поперечного сечения шпильки по внутреннему диаметру.

Из условия равновесия имеем

$$P_ш = P + P_п. \qquad (58)$$

Напряжение в поперечном сечении шпильки в течение времени уменьшается, и плотность соединения снижается. Поэтому через некоторое время после начала эксплуатации паропровода может возникнуть пропаривание фланцевого соединения.

Будем предполагать, что пропаривание начнется в тот момент, когда сила, сжимающая прокладку, станет равной нулю. Из уравнения (58) следует, что это случится, когда сила затяжки шпилек станет равной силе, разъединяющей фланцы. В действительности пропаривание может начаться и раньше. Поэтому полученное



Фиг. 658. График функции Ω для хромомолибденованадиевой стали ЭИ10 при температуре 500°

в решении задачи напряжение, с которым должны быть затянуты шпильки в начале эксплуатации, следует несколько увеличить.

Приравнивая правые части выражений (56) и (57), получаем величину напряжения в шпильке, при котором начинается пропаривание фланцев:

$$\sigma = \frac{p\,\pi D_1^2}{4 F_1 z}.$$

Подставляя в эту формулу численные значения входящих в нее величин и учитывая, что площадь поперечного сечения шпильки по внутреннему диаметру равна F_1=4,96 *см²*, имеем σ=368 *кг/см²*.

Вычислим теперь ту величину начального напряжения σ (0), при котором за год (8760 час.) напряжение снизится до величины σ=368 *кг/см²*. Для этого воспользуем-

ся уравнением (31) простой релаксации по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева. Из уравнения (31) легко получить

$$\nu^n - a\,\nu^{n-1} - 1 = 0,$$

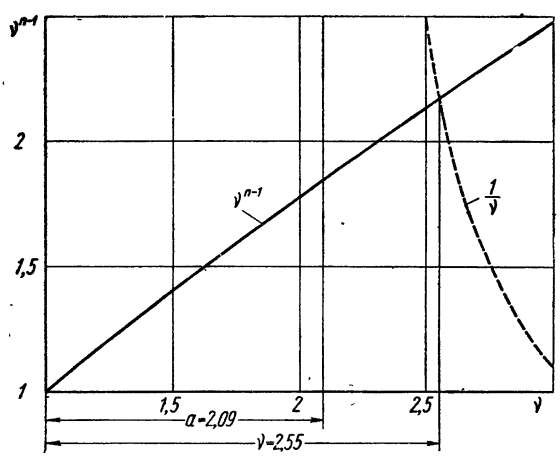
откуда

$$\nu^{n-1} = \frac{1}{\nu - a}, \tag{59}$$

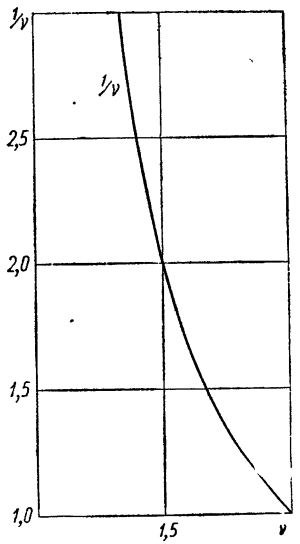
где

$$\nu = \frac{\sigma(0)}{\sigma}\ ;\quad a = n E \sigma^{n-1} \Omega. \tag{60}$$

Для решения уравнения (59) необходимо знать величину a и, следовательно, значение функции Ω при t=8760 час. График функции Ω (фиг. 658) построен путем обработки кривых простого последействия до t=800 час. Из этого графика следует,



Фиг. 659. Графическое решение уравнения (59)



Фиг. 660. График функции $\frac{1}{\nu}$

что при t>200 час. зависимость Ω от t является линейной. Учитывая, что при t=200 час. $\Omega = 0{,}485 \cdot 10^{-9}$ $(см^2/кг)^n$, а при t=700 час. $\Omega = 0{,}735 \cdot 10^{-9}$ $(см^2/кг)^n$ имеем следующее уравнение функции Ω при $t \geqslant 200$ час.:

$$\Omega = 0{,}485 \cdot 10^{-9} + \frac{0{,}735 \cdot 10^{-9} - 0{,}485 \cdot 10^{-9}}{500}\,(t - 200)$$

или

$$\Omega = 0{,}485 \cdot 10^{-9} + 0{,}500 \cdot 10^{-12}\,(t - 200).$$

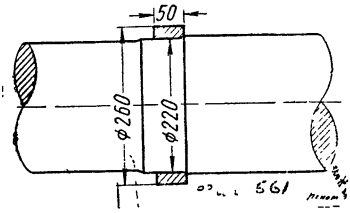
Положив в последнем уравнении t=8760 час. (1 год), получим $\Omega = 4{,}77 \cdot 10^{-9}$ $(см^2/кг)^n$. Располагая теперь значением Ω, по второй формуле (60) можно определить, что a=2,09.

Уравнение (59) решаем графически. Для этого строим на миллиметровке график функции ν^{n-1} (фиг. 659), а на кальке в том же масштабе наносим график функции $\frac{1}{\nu}$ (равнобокая гипербола) (фиг. 660). Накладываем кальку на миллиметровку, как это показано на фиг. 659 пунктиром. Ось ординат на кальке должна совпадать с вертикальной линией, уравнение которой в координатах фиг. 659 $\nu = a$. Корень уравнения (59) равен в выбранном масштабе абсциссе точки пересечения наложенных кривых. В рассматриваемом случае ν=2,55 и, следовательно, согласно первой формуле (60) $\sigma(0)$=937 *кг/см²*.

Таким образом, для обеспечения плотности соединения в течение года шпильки в начале эксплуатации паропровода должны быть затянуты минимально с напряжением $\sigma(0)=937$ *кг/см²*.

Б. Релаксация контактного давления во вращающемся тонкостенном кольце, посаженном на вал с натягом

В качестве второго примера релаксации напряжений в деталях машин рассмотрим релаксацию контактного давления во вращающемся тонкостенном кольце, посаженном на вал с натягом. Средний диаметр кольца $D=240$ *мм*; его толщина $\delta=20$ *мм*, ширина $b=50$ *мм*; диаметр вала $D_в=220$ *мм* (фиг. 661). Вал и кольцо во время эксплуатации нагреты равномерно до температуры 454° и вращаются с числом оборотов $n=3000$ об/мин. Материал вала и кольца — сталь с содержанием углерода 0,35%. Вес единицы объема материала $\gamma=0{,}0078$ *кг/см³*. Модуль упругости первого рода при комнатной температуре $E=2\times10^6$ *кг/см²* при температуре 454°, величина его $E_1=1{,}41\cdot10^6$ *кг/см²*. Коэффициент поперечной деформации при комнатной температуре $\mu=0{,}3$, при температуре 454° $\mu_1\approx0{,}5$. Кривые простого последействия используемой стали были изображены на фиг. 611, а график функции Ω на фиг. 615.



Фиг. 661. Соединение кольца с валом

Как было установлено в гл. XII т. II, величина показателя степени n для этой стали при указанной температуре $n=3{,}44$.

Предположим, что кольцо установлено на валу с прессовой посадкой по 2-му классу точности. По ОСТ 1043 находим минимальный и максимальный натяги $S_{min}=70$ *мк* $S_{max}=145$ *мк*. Расчет плотности соединения ведем по минимальному натягу $S_{min}=70$ *мк*.

Выясним величины контактного давления и напряжения в кольце, возникающие при сборке до начала эксплуатации соединения. Радиальные перемещения точек кольца, посаженного на вал с натягом, определяются по формуле

$$u_к=\frac{p\,D^2}{4\,E\,\delta}; \tag{61}$$

среднее радиальное перемещение точек контактной поверхности вала равно [см. гл. VI, т. II]

$$u_в=-\frac{\varkappa\,p\,D_в(1-\mu)}{2E}, \tag{62}$$

где p — среднее контактное давление;

$\varkappa$ — коэффициент, зависящий от отношения ширины кольца к диаметру вала $\frac{b}{D_в}$.

Величину среднего контактного давления можно установить из уравнения

$$|u_к|+|u_в|=\frac{S_{min}}{2}.$$

Подставляя в это соотношение величины $u_к$ и $u_в$ по формулам (61) и (62) и решая полученное уравнение относительно p, устанавливаем, что

$$p=\frac{2S_{min}E\,\delta}{D^2+2\varkappa D_в(1-\mu)\delta}. \tag{63}$$

Внося в эту формулу числовые значения входящих в нее величин с учетом того, что для $\frac{b}{D_в}=\frac{50}{220}=0{,}227$ $\varkappa=0{,}650$ [см. гл. VI, т. II], имеем $p=90{,}9$ *кг/см²*.

Отметим, что величину контактного давления в рассматриваемом случае с достаточной степенью точности можно получить, считая вал абсолютно жестким. В этом случае контактное давление определяется из выражения

$$p=\frac{2S_{min}E\,\delta}{D^2}. \tag{64}$$

Для нашего примера по формуле (64) получаем p=97,2 *кг/см*². Погрешность зависимости (64) в сравнении с соотношением (63) составляет всего около 7%.

Окружное напряжение в кольце, возникающее в результате посадки с натягом, определяется по формуле

$$\sigma_t = \frac{p D}{2\delta}.$$

Подставляя в это выражение величину контактного давления p=90,9 *кг/см*² и размеры кольца, получаем σ =546 *кг/см*².

Очевидно, что, после того как вал с насаждением на него кольцом начнет вращаться и нагреется, величины контактного давления и напряжение в кольце изменятся. Так как вал и кольцо выполнены из одного материала и вал предполагается нагретым равномерно по радиусу, то изменения контактного давления и напряжения в кольце возникают только за счет вращения и изменения механических характеристик материала вала и кольца в зависимости от температуры. Определим теперь величину контактного давления в начале эксплуатации соединения. Для этого вычислим радиальное перемещение точек кольца в связи с его вращением и наличием контактного давления:

$$u_{к1} = \frac{p(0) D^2}{4 E_1 \delta} + \frac{\gamma \omega^2 D^3}{8 g E_1}, \tag{65}$$

где $p(0)$ — контактное давление в начальный момент времени $t=0$ (в начале эксплуатации соединения);

$\omega = \frac{\pi n}{30}$ — угловая скорость вращения кольца и вала;

γ — вес единицы объема материала.

Приращение радиального перемещения точек кольца за счет вращения и изменения механических характеристик материала от нагрева можно получить, вычитая из выражения (65) зависимость (61):

$$\Delta u_к = \frac{p(0) D^2}{4 E_1 \delta} + \frac{\gamma \omega^2 D^3}{8 g E_1} - \frac{p D^2}{4 E \delta}. \tag{66}$$

Среднее радиальное перемещение точек контактной поверхности вала от вращения и контактного давления равно

$$u_{в1} = \varepsilon_t \frac{D_в}{2} - \frac{\varkappa p(0) D_в (1-\mu_1)}{2 E_1}, \tag{67}$$

где ε_t — окружная деформация в точках контактной поверхности вала в результате вращения.

Для вычисления ε_t воспользуемся соответствующими формулами гл. I, т. III. Полагая в этих формулах r_1=0 (сплошной вал) и $r=r_2=\frac{D_в}{2}$, $\mu_1 \approx 0{,}5$, находим напряжения в точках, наиболее удаленных от центра вала

$$\sigma_r = \sigma_t = 0; \quad \sigma_z = -\frac{\gamma \omega^2 D_в^2}{16 g}.$$

Следовательно, окружная деформация в точках на поверхности вала

$$\varepsilon_t = -\frac{\mu_1}{E_1}\sigma_z = \frac{\gamma \omega^2 D_в^2}{32 g E_1}.$$

Подставляя это выражение окружной деформации в формулу (67) и учитывая, что $\mu_1 \approx 0{,}5$, находим

$$u_{в1} = \frac{\gamma \omega^2 D_в^3}{64 g E_1} - \frac{\varkappa p(0) D_в}{4 E_1}. \tag{68}$$

Приращение радиального перемещения точек контактной поверхности вала в результате вращения и изменения механических характеристик материала в связи с нагревом можно получить вычитанием соотношения (62) из выражения (68), тогда

$$\Delta u_в = \frac{\gamma \omega^2 D_в^3}{64\, g E_1} - \frac{\varkappa p(0) D_в}{4 E_1} + \frac{\varkappa p D_в (1-\mu)}{2E}. \tag{69}$$

Величину среднего контактного давления в начальный момент времени получаем, приравнивая правые части равенств (66) и (69). После преобразований имеет

$$p(0) = \frac{\frac{\gamma \omega^2 \delta}{16 g}\left(\frac{D_в^3}{D^2} - 8D\right) + p\frac{E_1}{E} + 2\varkappa p \frac{E_1}{E}\delta\frac{D_в}{D}(1-\mu).}{1 + \varkappa \delta \frac{D_в}{D^2}}. \tag{70}$$

Подставляем в эту формулу численные значения входящих в нее величин. Учитывая, что p=90,9 *кг/см*^{2}, получаем $p(0)$=48,9 *кг/см*^{2}. Если считать вал абсолютно жестким, то величина контактного давления в начальный момент времени определяется из формулы

$$p(0) = p\frac{E_1}{E} - \frac{\gamma \omega^2 D \delta}{2g}. \tag{71}$$

Величина p при этом составляет p=97,*2 кг/см*^{2}, тогда из формулы (71) получаем $p(0)$=49,5 *кг/см*^{2}.

Погрешность, даваемая формулой (71), по сравнению с формулой (70) составляет всего лишь 1,2%.

Напряжение в поперечном сечении кольца в начальный момент времени (в начале эксплуатации) определяется по формуле

$$\sigma_t(0) = \frac{p(0) D}{2\delta} + \frac{\gamma \omega^2 D^2}{4g}. \tag{72}$$

Подставив в зависимость (72) установленную ранее величину контактного давления в начальный момент времени $p(0)$=48,9 *кг/см*^{2} и остальные числовые данные, получаем $\sigma_t(0)$=406 *кг/см*^{2}.

Перейдем к рассмотрению релаксации контактного давления. При этом будем считать вал абсолютно жестким, что, как отмечалось выше, дает достаточную степень точности. Предположение об абсолютной жесткости вала дает возможность считать окружную деформацию кольца в процессе эксплуатации до нарушения плотности соединения постоянной (случай простой релаксации). В результате нарастания пластической деформации напряжение в поперечном сечении кольца в течение времени уменьшается. Следовательно, уменьшается и величина контактного давления.

Напряжение в поперечном сечении кольца в некоторый момент времени определяется формулой, аналогичной зависимости (72), а именно

$$\sigma_t = \frac{p D}{2\delta} + \frac{\gamma \omega^2 D^2}{4 g}, \tag{73}$$

где p — контактное давление в то же время.

Из уравнения (31) простой релаксации по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева с учетом выражений (72) и (73) получаем

$$\lambda = \frac{a+1}{\left[1 + nE\sigma^{n-1}(0)\Omega\right]^{\frac{1}{n}}} - a, \tag{74}$$

где

$$\lambda = \frac{p}{p(0)}; \quad a = \frac{\gamma \omega^2 D \delta}{2 g p(0)}. \tag{75}$$

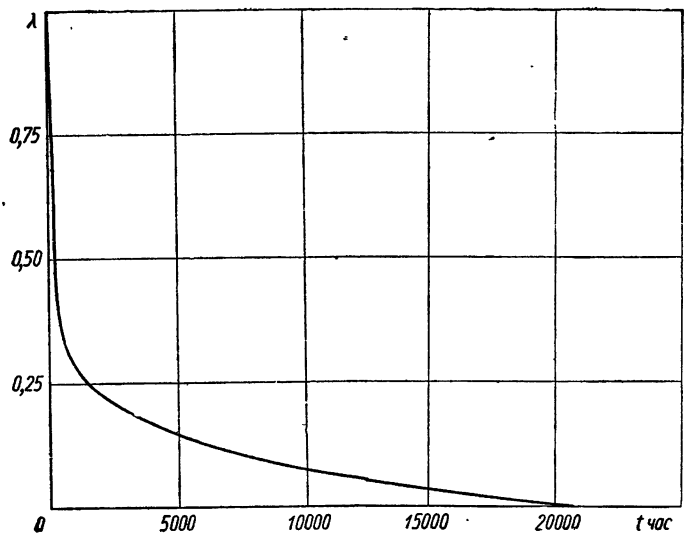
Формула (74) определяет зависимость безразмерного контактного давления λ от времени t. Для того чтобы построить график этой зависимости до полного нарушения плотности соединения, необходимо располагать величинами функции Ω для любых значений времени. График функции Ω (см. фиг. 615) построен путем обработки кривых простого последействия до t=3500 час. Из графика функции Ω следует, что при t>2000 час., функция Ω является линейной. Учитывая, что при t= = 2000 час. $\Omega = 1{,}38 \cdot 10^{-12}$ $(см^2/кг)^n$, а при $t = 3000$ час. $\Omega = 1{,}69 \cdot 10^{-12}$ $(см^2/кг)^n$, получаем следующее уравнение функции Ω при $t > 2000$ час.:

$$\Omega = 1{,}38 \cdot 10^{-12} + \frac{1{,}69 \cdot 10^{-12} - 1{,}38 \cdot 10^{-12}}{1000}(t - 2000)$$

или

$$\Omega = 1{,}38 \cdot 10^{-12} + 0{,}31 \cdot 10^{-15}(t - 2000). \qquad (76)$$

На фиг. 662 с помощью формул (74) — (76) построен график зависимости безразмерного контактного давления от времени.



Фиг. 662. График зависимости безразмерного контактного давления $\lambda = \frac{p}{p(0)}$ от времени.

Из этого графика следует, что контактное давление падает особенно быстро в начальный период времени. Так, например, в рассматриваемом случае в течение первых 60 суток контактное давление уменьшается в 4 раза.

Полное нарушение плотности соединения (p=0) будет иметь место при t= =20700 час. (2,36 года).

§ 10. НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ И УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ

В расчетах элементов конструкций на ползучесть часто условно принимают, что процесс деформации детали протекает при неизменных во времени напряжениях, величины и распределение которых в сечении детали определяются в решении задачи. Такой процесс называется установившейся ползучестью.

Деформация детали при изменяющихся во времени напряжениях называется неустановившейся ползучестью.

Установившаяся ползучесть имеет место в случае статически определимых с точки зрения определения напряжений задач при постоянных во времени внешних силах.

В случае задач, статически неопределимых даже при постоянных во времени внешних силах, изменение деформаций всегда сопровождается изменением напряжений и перераспределением их по объему детали.

Если при решении таких задач приближенно предположить, что напряжения во времени постоянны, то получающиеся в решении задачи величины напряжений и закон их распределения отличны от таковых в начальный момент времени, когда деформаций за счет ползучести еще не было. Но процесс изменения напряжений во времени остается невыясненным.

В действительности, как показали исследования неустановившейся ползучести, в сечении детали напряжения непрерывно изменяются во времени, все более и более приближаясь к величинам, полученным в решении задачи установившейся ползучести.

Таким образом, распределение напряжений при установившейся ползучести является как бы предельным. После некоторого промежутка времени распределение напряжений близко к установившемуся. Доказательство этого положения в общем виде отсутствует, однако оно неизменно подтверждается численными расчетами, как это будет показано в гл. XV т. II.

Отметим, что использование предположения установившейся ползучести в статически неопределимых с точки зрения определения напряжений задачах при постоянных во времени внешних силах приводит, как правило, к величинам перемещений, заниженным по отношению к действительным.

Как показано в гл. XV т. II, график зависимости перемещения некоторой точки детали от времени (кривая последействия), полученный в решении задачи установившейся ползучести, располагается ниже, чем график такого же типа, полученный в решении задачи неустановившейся ползучести.

Последнее объясняется тем, что в решении задачи установившейся ползучести предполагается протекание процесса при постоянных во времени напряжениях, которые в наиболее напряженных точках в любой момент времени меньше, чем в действительности.

Однако, как будет показано в гл. XV т. II, погрешность приближенного расчета в предположении установившейся ползучести может быть и весьма небольшой, если процесс перераспределения напряжений протекает наиболее интенсивно в начальный, короткий по сравнению со сроком службы детали, промежуток времени, и после этого распределение напряжений близко к установившемуся. Ниже это положение будет проиллюстрировано на примерах.

Принимая во внимание, что расчеты с допущением установившейся ползучести значительно проще, чем без него, можно, если срок службы детали достаточно велик, использовать предположение установившейся ползучести.

Естественно, что в тех случаях, когда необходимо исследовать изменение и перераспределение напряжений во времени как, например, в задаче о релаксации контактного давления в диске, посаженном на вал с натягом, предположение установившейся ползучести не может быть принято.

Глава XIV т. II посвящена расчетам при установившейся ползучести.

В гл. XV т. II изложено данное автором решение одного класса одномерных задач неустановившейся ползучести по измененной им гипотезе старения Н. М. Беляева.

Расчеты на ползучесть рабочих лопаток и дисков турбомашин изложены в т. III.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М., Применение теории пластических деформаций к расчетам на ползучесть деталей при высоких температурах, «Известия АН СССР. Отд. техн. наук» № 7, 1943.
2. Богуславский П. Я., Исследование ползучести элементов турбин, Тезисы докладов на Всесоюзном совещании по теории упругости, строительной механике и теории пластичности 7—10 декабря 1950 г., изд. АН СССР, 1950.
3. Варшавский Д. П., Богуславский П. Я., Полумордвинова И. Г., Моделирование деформированного состояния деталей сложной формы в условиях ползучести, «Теплоэнергетика» № 5, 1955.
4. Даниловская В. И., Иванова Г. М., Работнов Ю. Н., Ползучесть и релаксация хромомолибденовой стали, «Известия АН СССР. Отд. техн. наук» № 5, 1955.
5. Жуков А. М., Работнов Ю. Н., Чуриков Ф. С., Экспериментальная проверка некоторых теорий ползучести «Инженерный сборник», т. XVII, изд. АН СССР, 1953.
6. Ильюшин А. А., Пластичность, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.
7. Ишлинский А. Ю., Пластичность, сб. ст. «Механика в СССР за тридцать лет», ГИТТЛ, 1950.
8. Кац Ш. Н., Ползучесть труб, «Вестник машиностроения» № 12, 1953.
9. Качанов Л. М., Ползучесть при сложном напряженном состоянии, «Котлотурбостроение» № 4, 1947.
10. Качанов Л. М., Механика пластических сред, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.
11. Качанов Л. М., Некоторые вопросы теории ползучести, ГИТТЛ, 1949.
12. Качанов Л. М. и Кац Ш. Н., О теориях ползучести, «Котлотурбостроение» № 1, 1950.
13. Киселев П. И., Основы уплотнений в арматуре высокого давления, Госэнергоиздат, 1950.
14. Кузнецов Л. А. и Рудомино В. В., Конструирование и расчет трубопроводов теплосиловых установок, Машгиз, 1949.
15. Ларичев В., Предварительные результаты испытаний хромомолибденовой стали ЭИ10 в качестве крепежного материала, «Советское котлотурбостроение» № 3, 1940.
16. Малинин Н. Н., Основы расчетов на ползучесть, Машгиз, 1948
17. Малинин Н. Н., Расчет элементов конструкций на ползучесть, «Прочность в машиностроении», сб. ст., Машгиз, 1951.
18. Малинин Н. Н., Некоторые одномерные задачи неустановившейся ползучести, «Инженерный сборник», т. X, изд. АН СССР, 1951.
19. Малинин Н. Н., Ползучесть кольца прямоугольного поперечного сечения, «Труды Московского авиационного института имени Серго Орджоникидзе», вып. 17, Оборонгиз, 1952.
20. Михлин С. Г., Интегральные уравнения, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947.
21. Надаи А., Влияние времени на ползучесть, «Теория пластичности», сб. ст., Государственное издательство иностранной литературы, 1948.
22. Работнов Ю. Н., Расчет деталей машин на ползучесть, «Известия АН СССР. Отд. техн. наук» № 6, 1948.
23. Работнов Ю. Н., Некоторые вопросы теории ползучести, «Вестник Московского университета» № 10, 1948.
24. Розенблюм В. И., Расчет некоторых деталей турбин в условиях ползучести, «Котлотурбостроение» № 4, 1951.
25. Розенблюм В. И., Расчет ползучести турбинных диафрагм ступеней высокого давления, «Инженерный сборник», т. XX, изд. АН СССР, 1954.
26. Соколовский В. В., Теория пластичности, ГИТТЛ, 1950.
27. Чуриков Ф. С., К вопросу о напряжениях и деформациях при высокой температуре, «Вестник Московского университета. Серия физико-математических и естественных наук» № 2, 1949.

28. Bailey R. W., The utilization of creep test data in engineering design «The Institution of mechanical engineers. Proceedings», v. 131, 1935.
29. Davenport C. C., Correlation of creep and relaxation properties of copper, «Journal of applied mechanics», v. 5, N 2, 1938.
30. Davis E. A., Creep of metals at high temperature in bending, «Journal of applied mechanics», v. 5, N 1, 1938.
31. Davis E. A., Creep and relaxation of oxygen-free copper, «Journal of applied mechanics», v. 10, N 2, 1943.
32. Everett F. L. and Clark C. L., Report on torsion creep tests for comparison with tension creep tests on a carbonmolybdenum steel, «American society for testing materials. Proceedings», v. 39, 1939.
33. Johnson A. E., The creep recovery of a 0,17 per cent carbon steel, «The Institution of mechanical engineers. Journal, Proceedings,» v. 145, № 5, 1941.
34. Johnson A. E., Creep and relaxation of metals at high temperatures, «Engineering», v. 168, N 4362, 1949.
35. Moore H. F., Betty B. B., Dollins C. W., Investigation of creep and fracture of lead «University of Illinois Bulletin» N 306, 1938.
36. Norton F. H., Creep in tubular pressure vessels, «Transactions of the ASME», v. 61, 1939.
37. Norton F. H. and Soderberg C. R., Report on tubular creep tests, «Transactions of the ASME», v. 64, N 8, 1942.
38. Pao Yoh-han and Marin J., An analytical theory of the creep deformation of materials, «Journal of applied mechanics», v. 20, N 2, 1953.
39. Soderberg C. R., The interpretation of creep tests for machine design, «Transactions of the ASME», v. 58, N 8, RP 58-15, 1936.
40. Tapsell H. J. and Johnson A. E., Creep under Combined tension and torsion, «Engineering», v. 150, N 3887—3894, 1940.
41. Trumpler W. E., Relaxation of metals at high temperatures, «Journal of applied physics», v. 12, N 3, 1941.
42. Vanduzer R. M. and Mc. Cutchan A., High temperature steam experience at Detroit, «Engineering», v. CXLVII, N 3808, 3809, 1939.

ГЛАВА XIV

РАСЧЕТЫ ПРИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Расчетам при установившейся ползучести посвящено большое количество работ. В одном из первых капитальных трудов по расчетам на ползучесть, написанном Бейли [11], рассмотрена установившаяся ползучесть бруса при изгибе, а также при совместном изгибе и растяжении, исследована ползучесть тонкостенных труб при различных условиях их нагружения, установившаяся ползучесть толстостенной трубы, нагруженной внутренним и внешним давлениями при неравномерном по радиусу нагреве, а также установившаяся ползучесть вращающегося равномерно нагретого диска переменной толщины. При этом используются предложенные Бейли зависимости скоростей главных линейных деформаций от главных напряжений, включающие три характеристики ползучести. Последние определяются из экспериментального исследования простого последействия при двух различных напряженных состояниях, например при одноосном растяжении и чистом сдвиге. Это обстоятельство, естественно, затрудняет использование предложенного метода в расчетах.

Некоторые из перечисленных выше задач исследованы также в работах Марина [12]. Им используются основные уравнения теории пластичности, и по сравнению с предыдущей работой число необходимых опытных коэффициентов уменьшено с трех до двух, которые могут быть определены путем экспериментального исследования простого последействия.

В работе Надаи [13] рассмотрены основные уравнения установившейся ползучести, исследована установившаяся ползучесть в случае плоской задачи, изучена концентрация напряжений в бесконечной плоскости с круговым отверстием при установившейся ползучести.

В работе того же автора [14] решены задачи установившейся ползучести толстостенной трубы и винтовых цилиндрических пружин, а также получено основное уравнение кручения бруса некруглого поперечного сечения при установившейся ползучести.

Большое количество задач установившейся ползучести решено в книге Л. М. Качанова [2].

Во всех рассмотренных выше работах задачи установившейся ползучести рассмотрены в предположении постоянной скорости. Как уже указывалось выше, это предположение ведет к весьма грубой схема-

тизации кривой простого последействия, за счет чего результаты подсчета перемещений в задачах установившейся ползучести значительно отличаются от действительных.

Предположение постоянной скорости в задачах установившейся ползучести без усложнения решений этих задач может быть легко снято. Это и сделано в работах [8], [7], [6], где приведены решения различных задач установившейся ползучести, выполненных без использования предположения постоянной скорости. Полученные таким образом результаты изложены ниже. При этом во всех случаях предполагается, что натрев является равномерным.

Переходим к выводу зависимостей компонентов пластической деформации от компонентов напряжения при установившейся ползучести. Как было установлено в гл. VIII т. II, интенсивность деформаций может быть представлена в виде

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ie} + \varepsilon_{ip}, \tag{1}$$

где

$$\varepsilon_{ie} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{xe}-\varepsilon_{ye})^2+(\varepsilon_{ye}-\varepsilon_{ze})^2+(\varepsilon_{ze}-\varepsilon_{xe})^2+\frac{3}{2}(\gamma_{xye}^2+\gamma_{yze}^2+\gamma_{zxe}^2)} \tag{2}$$

интенсивность упругих деформаций, а

$$\varepsilon_{ip} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{xp}-\varepsilon_{yp})^2+(\varepsilon_{yp}-\varepsilon_{zp})^2+(\varepsilon_{zp}-\varepsilon_{xp})^2+\frac{3}{2}(\gamma_{xyp}^2+\gamma_{yzp}^2+\gamma_{zxp}^2)} \tag{3}$$

интенсивность пластических деформаций.

Подставляя соотношение (1) в выражения (54) гл. XIII т. II и учитывая, что при $\mu=0{,}5$ (см. гл. VIII т. II)

$$\frac{\varepsilon_{ie}}{\sigma_i} = \frac{1}{E},$$

получим

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{3}{2E}(\sigma_x-\sigma_0)+\theta+\frac{3\varepsilon_{ip}}{2\sigma_{ip}}(\sigma_x-\sigma_0);\\
\varepsilon_y &= \frac{3}{2E}(\sigma_y-\sigma_0)+\theta+\frac{3\varepsilon_{ip}}{2\sigma_i}(\sigma_y-\sigma_0);\\
\varepsilon_z &= \frac{3}{2E}(\sigma_z-\sigma_0)+\theta+\frac{3\varepsilon_{ip}}{2\sigma_i}(\sigma_z-\sigma_0);\\
\gamma_{xy} &= \frac{3\tau_{xy}}{E}+\frac{3\varepsilon_{ip}}{\sigma_i}\tau_{xy};\\
\gamma_{yz} &= \frac{3\tau_{yz}}{E}+\frac{3\varepsilon_{ip}}{\sigma_i}\tau_{yz};\\
\gamma_{zx} &= \frac{3\tau_{zx}}{E}+\frac{3\varepsilon_{ip}}{\sigma_i}\tau_{zx}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Первые слагаемые в этих выражениях представляют собой упругие деформации, а последние — пластические.

Таким образом, согласно соотношениям (4) зависимости пластических деформаций от напряжений имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xp} &= \frac{3\varepsilon_{ip}}{2\sigma_i}(\sigma_x - \sigma_0); \quad \gamma_{xyp} = \frac{3\varepsilon_{ip}}{\sigma_i}\tau_{xy}; \\ \varepsilon_{yp} &= \frac{3\varepsilon_{ip}}{2\sigma_i}(\sigma_y - \sigma_0); \quad \gamma_{yzp} = \frac{3\varepsilon_{ip}}{\sigma_i}\tau_{yz}; \\ \varepsilon_{zp} &= \frac{3\varepsilon_{ip}}{2\sigma_i}(\sigma_z - \sigma_0); \quad \gamma_{zxp} = \frac{3\varepsilon_{ip}}{\sigma_i}\tau_{zx}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Примем степенную зависимость интенсивности пластических деформаций от интенсивности напряжений в следующей форме:

$$\varepsilon_{ip} = \sigma_i^n \Omega. \qquad (6)$$

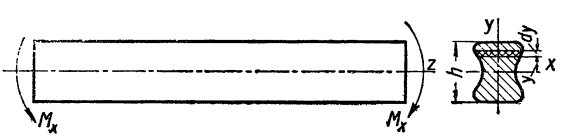
Отметим, что в случае установившейся ползучести зависимость (6) является следствием как измененной гипотезы старения Н. М. Беляева, так и гипотезы старения в формулировке (18) (см. гл. XIII т. II), а также гипотезы течения Л. М. Качанова. Это следует из соответствующих математических формулировок этих гипотез.

Как следует из соотношений (5) и (6), в такой постановке решения задач установившейся ползучести эквивалентны исследованию пластического состояния детали при степенной зависимости интенсивности деформаций от интенсивности напряжений. Поэтому работы В. В. Соколовского [9], посвященные этим вопросам, могут быть использованы и для расчетов при установившейся ползучести.

Отметим, что при установившейся ползучести в условиях стационарного температурного поля, как это следует из уравнений (5) и (6), температурные напряжения отсутствуют. Это объясняется тем, что в течение времени происходит непрерывное уменьшение (релаксация) температурных напряжений. Поэтому в состоянии установившейся ползучести, которое является как бы предельным для процесса ползучести в целом, согласно расчету, температурные напряжения равны нулю.

§ 2. ПОЛЗУЧЕСТЬ ИЗОГНУТОГО ПРЯМОГО БРУСА

Рассмотрим установившуюся ползучесть изогнутого прямого бруса, поперечное сечение которого имеет две оси симметрии, причем одна из них лежит в плоскости изгиба (фиг. 663).



Фиг. 663. Брус, поперечное сечение которого имеет две оси симметрии, находящийся в условиях ползучести при чистом изгибе

Примем, что кривые простого последействия для одного и того же материала при одинаковых напряжениях и температурах как при растяжении, так и при сжатии одинаковы.

Вначале разберем чистый изгиб бруса. В этом случае напряженное состояние всех точек бруса является одноосным.

В случае одноосного напряженного состояния, как уже отмечалось в тл. VIII т. II, $\sigma_i = |\sigma_z|$. Если, кроме того, считать, что материал несжимаем, то тогда и $\varepsilon_{ip} = |\varepsilon_{zp}|$. Поэтому из формулы (6) получаем зависимость пластической деформации от напряжения в случае одноосного растяжения или сжатия:

$$\varepsilon_{zp} = \operatorname{sign} \sigma_z \, | \, \sigma_z \, |^n \, \Omega. \tag{7}$$

В этом выражении символом $\operatorname{sign} \sigma_z$ обозначен знак напряжения σ_z.

При чистом изгибе бруса поперечное сечение его остается плоским, и, следовательно, пластическая линейная деформация ε_{zp} в некоторой точке поперечного сечения на расстоянии y от нейтральной оси x определяется формулой

$$\varepsilon_{zp} = y \varkappa_p, \tag{8}$$

где $\varkappa_p$ — кривизна оси бруса, возникшая в результате ползучести материала.

Представим формулу (8) в следующем виде:

$$\varepsilon_{zp} = \operatorname{sign} y \, | \, y \, | \, \varkappa_p. \tag{9}$$

Сопоставим выражения (7) и (9), принимая во внимание, что

$$\operatorname{sign} \sigma_z = \operatorname{sign} \varepsilon_{zp} = \operatorname{sign} y,$$

тогда получим закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении бруса

$$\sigma_z = \operatorname{sign} y \left[\frac{| y | \varkappa_p}{\Omega} \right]^{\frac{1}{n}}. \tag{10}$$

Составим выражение изгибающего момента:

$$M_x = \int_F \sigma_z \, y \, dF.$$

Подставляя в это выражение вместо σ_z его значение по уравнению (10), устанавливаем, что

$$M_x = \left[\frac{\varkappa_p}{\Omega} \right]^{\frac{1}{n}} \int_F |y|^{\frac{n+1}{n}} \, dF. \tag{11}$$

Назовем интеграл в выражении (11) обобщенным моментом инерции поперечного сечения относительно оси x и обозначим его

$$J_{nx} = \int_F |y|^{\frac{n+1}{n}} \, dF. \tag{12}$$

Из уравнения (11), воспользовавшись выражением (12), представим кривизну изогнутой оси балки, возникшую в результате ползучести материала, в следующем виде:

$$\varkappa_p = \left(\frac{M_x}{J_{nx}} \right)^n \Omega. \tag{13}$$

Подставляя выражение (13) в уравнение (10), получим формулу для нормального напряжения:

$$\sigma_z = \operatorname{sign} y \frac{M_x |y|}{J_{nx}}^{\frac{1}{n}}. \tag{14}$$

Для бруса прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой h из формулы (12) находим

$$J_{nx} = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} y^{\frac{n+1}{n}} dy.$$

Выполняя интегрирование, имеем

$$J_{nx} = \alpha_1 b h^{\frac{2n+1}{n}}, \tag{15}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{n}}} \cdot \frac{n}{2n+1}. \tag{16}$$

Для бруса круглого полого сечения с наружным диаметром D и внутренним диаметром d по формуле (12) устанавливаем, что

$$J_{nx} = 4 \int_0^{\frac{D}{2}} y^{\frac{n+1}{n}} \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2}\, dy - 4 \int_0^{\frac{d}{2}} y^{\frac{n+1}{n}} \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2}\, dy.$$

Полученные интегралы выражаются через γ-функции. Легко показать, что

$$J_{nx} = \alpha_2 \left(D^{\frac{3n+1}{n}} - d^{\frac{3n+1}{n}}\right),$$

где

$$\alpha_2 = \frac{n}{2(3n+1)} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{n}\right)}.$$

Для сплошного круглого бруса диаметром D имеем

$$J_{nx} = \alpha_2 D^{\frac{3n+1}{n}}.$$

Аналогично для бруса, поперечное сечение которого представляет собой тонкостенное кольцо со средним диаметром D и толщиной стенки δ, по формуле (12) получим

$$J_{nx} = \alpha_3 D^{\frac{2n+1}{n}} \delta,$$

где

$$\alpha_3 = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{n}\right)}.$$

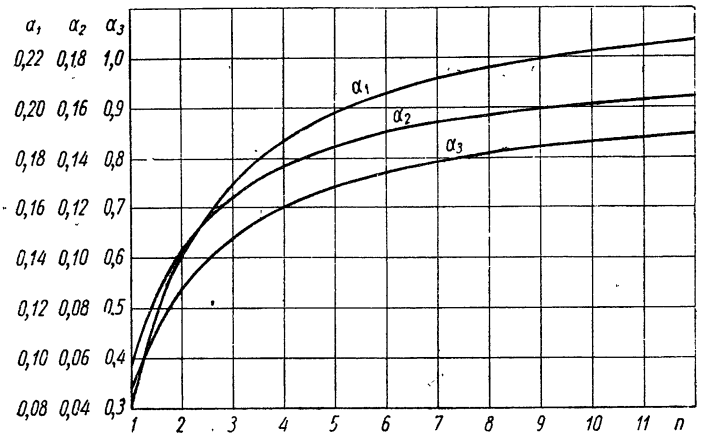
В табл. 34 приведены значения коэффициентов α_1, α_2 и α_3 для различных показателей степени от $n=1$ до $n=12$.

Таблица 34

Коэффициенты α_1, α_2 и α_3 в формулах для обобщенных моментов инерции в зависимости от показателя степени n

n	α_1	α_2	α_3	n	α_1	α_2	α_3
1,0	0,0833	0,0491	0,393	7,0	0,211	0,138	0,869
1,5	0,118	0,0723	0,530	8,0	0,216	0,141	0,884
2,0	0,141	0,0883	0,618	9,0	0,219	0,144	0,895
3,0	0,170	0,108	0,722	10	0,222	0,146	0,905
4,0	0,187	0,120	0,783	11	0,225	0,148	0,913
5,0	0,198	0,128	0,821	12	0,227	0,149	0,920
6,0	0,206	0,134	0,849				

На фиг. 664 представлены графики зависимостей этих коэффициентов от показателя степени n.



Фиг. 664. Графики зависимостей коэффициентов α_1, α_2 и α_3 от показателя степени n

Отметим, что выражения для обобщенных моментов инерции прямоугольного, кольцевого и круглого сечений получены также Л. М. Качановым [2].

Максимальное нормальное напряжение можно получить по формуле (14), полагая $y=\frac{h}{2}$ (h — высота поперечного сечения), тогда имеем

$$\sigma_{z\,\max}=\frac{M_x}{W_{nx}},$$

где W_{nx} — обобщенный момент сопротивления изгибу поперечного сечения;

$$W_{nx}=2^{\frac{1}{n}}\frac{J_{nx}}{h^{\frac{1}{n}}}.$$

Для прямоугольного поперечного сечения

$$W_{nx} = \frac{n}{2(2n+1)} bh^2.$$

Для круглого полого сечения

$$W_{nx} = 2^{\frac{1}{n}} \alpha_2 D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \right]$$

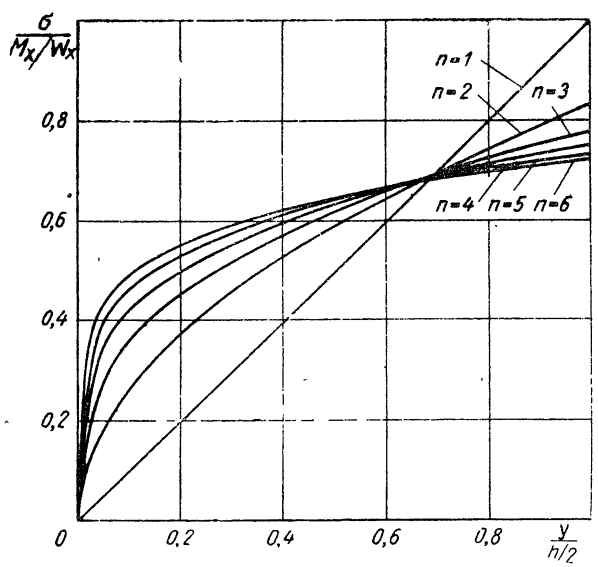
Для круглого сплошного сечения

$$W_{nx} = 2^{\frac{1}{n}} \alpha_2 D^3.$$

Для тонкостенного кольца

$$W_{nx} = 2^{\frac{1}{n}} \alpha_3 D^2 \delta.$$

На фиг. 665 представлены графики зависимостей $\frac{\sigma_z}{\frac{M_x}{W_x}}$ от $\frac{y}{\frac{n}{2}}$, построенные по формулам (14)—(16). Эти графики характеризуют вид эпюр распределения напряжений в прямоугольном поперечном сечении бруса в случае различных величин показателя степени n при установившейся ползучести. Из графиков на фиг. 665 следует, что максимальное нормальное напряжение при ползучести меньше, чем максимальное нормальное напряжение в начальный момент времени, и что чем выше показатель степени n, тем значительнее уменьшается наибольшее нормальное напряжение, и нормальные напряжения выравниваются по сечению.



Фиг. 665. Эпюры безразмерных нормальных напряжений в поперечном сечении изогнутой прямоугольной балки при установившейся ползучести для различных значений показателя степени n.

В случае, если брус сплошного сечения находится в условиях поперечного изгиба, то влиянием касательных напряжений можно пренебречь, и все выведенные выше формулы остаются в достаточной степени справедливыми.

Для определения прогибов, возникших в результате ползучести балок в случае поперечного изгиба, следует воспользоваться известной из теории сопротивления материалов дифференциальной зависимостью кривизны от прогиба для малых перемещений (см. гл. X т. I). На основании этой зависимости кривизна изогнутой оси балки $\varkappa_p$ и про-

гиб v_p, возникшие за счет ползучести материала, связаны соотношением

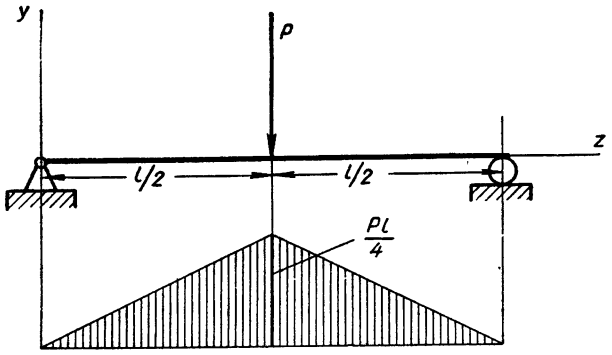
$$\varkappa_p = \frac{\partial^2 v_p}{\partial z^2},$$

Подставляя в это соотношение кривизну по формуле (13), устанавливаем, что

$$\frac{\partial^2 v_p}{\partial z^2} = \left(\frac{M_x}{J_{nx}}\right)^n \Omega.$$

Интегрирование последнего уравнения дает возможность получить величину прогиба, возникшего за счет ползучести материала балки.

Кроме этого метода определения прогибов, возможно использование интеграла Мора. Действительно, анализируя приведенное выше решение задачи о ползучести изогнутой балки, можно заключить, что



Фиг. 666. Схема двухопорной балки

оно полностью эквивалентно решению задачи об изгибе балки из материала, у которого диаграммы растяжения — сжатия могут быть апроксимированы степенной функцией. Поэтому определение прогибов, возникших за счет ползучести в рассматриваемом случае, может быть произведено и при помощи интеграла Мора для определения перемещения брусьев, выполненных из материала, не подчиняющегося закону Гука (см. гл. X т. I),

$$v_p = \int_l \varkappa_p M_{x1} dz, \tag{17}$$

где $\varkappa_p$ — кривизна изогнутой оси балки, возникшая за счет ползучести материала;

M_{x1} — изгибающий момент в текущем сечении от единичной силы, приложенной в направлении искомого перемещения в той точке, перемещение которой определяется; интегрирование производится по длине бруса.

Подставляя соотношение (13) в выражение (17), получим

$$v_p = \int_l \left(\frac{M_x}{J_{nx}}\right)^n M_{x1} \Omega \, dz. \tag{18}$$

В качестве примера определим зависимость от времени максимального прогиба, возникшего в результате ползучести материала для балки на двух опорах, нагруженной в середине пролета силой P (фиг. 666).

В этом случае изгибающий момент в текущем сечении от заданной нагрузки

$$M_x = \frac{Pz}{2},$$

а изгибающий момент в текущем сечении от единичной силы, приложенной в середине пролета,

$$M_{x1} = \frac{z}{2}.$$

Подставляя эти выражения изгибающих моментов в формулу (18), после преобразований получим величину максимального прогиба, возникшего в результате ползучести материала балки:

$$v_{p\,\max} = \frac{1}{2^{2(n+1)}\,(n+2)} \cdot \frac{P^n\, l^{n+2}}{J_{nx}^n}\,\Omega.$$

§ 3. ПОЛЗУЧЕСТЬ СКРУЧЕННОГО ПРЯМОГО БРУСА

В дальнейшем будем рассматривать чистое кручение бруса. При чистом кручении в поперечных сечениях бруса возникают только касательные напряжения, одинаковым образом распределенные во всех поперечных сечениях.

А. Брус кольцевого поперечного сечения

Изложим прежде всего решение задачи об установившейся ползучести скрученного бруса, поперечное сечение которого представляет собой круговое кольцо с наружным диаметром D и внутренним диаметром d. В этом случае поперечное сечение бруса при его деформации остается плоским, а радиусы прямолинейными, и, следовательно, пластическая угловая деформация γ_{ztp} в точке поперечного сечения на расстоянии r от центра определяется формулой

$$\gamma_{ztp} = r\,\theta_p, \tag{19}$$

где θ_p — относительный угол закручивания, возникший в результате ползучести материала бруса.

Учитывая, что в рассматриваемой задаче все компоненты напряжения и пластической деформации за исключением τ_{zt} и γ_{ztp} равны нулю, величины интенсивностей напряжений и пластических деформаций по формулам (49), гл. XIII т. II и (3) выражаются следующим образом:

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,\tau_{zt};\quad \varepsilon_{ip} = \frac{\gamma_{ztp}}{\sqrt{3}}. \tag{20}$$

Подставляя интенсивности напряжений и пластических деформаций по выражениям (20) в зависимость (6), получим

$$\gamma_{ztp} = 3^{\frac{n+1}{2}}\,\tau_{zt}^n\,\Omega. \tag{21}$$

Сопоставляя формулы (19) и (21), устанавливаем закон распределения касательных напряжений в поперечном сечении:

$$\tau_{zp} = \frac{1}{3^{\frac{n+1}{2n}}} \left(\frac{\theta_p}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}}. \tag{22}$$

Обратимся к определению относительного угла закручивания, возникающего за счет ползучести материала. Для этого составим выражение крутящего момента

$$M_к = 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \tau_{zt} r^2 \, dr. \tag{23}$$

Подставляя в выражение (23) касательное напряжение τ_{zt}, по формуле (22) получим

$$M_к = \left(\frac{\theta_p}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} \left\{ \frac{2\pi}{3^{\frac{n+1}{2n}}} \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r^{\frac{2n+1}{n}} \, dr \right\}. \tag{24}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, назовем обобщенным полярным моментом инерции кольцевого поперечного сечения и обозначим его

$$J_{пр} = \frac{2\pi}{3^{\frac{n+1}{2n}}} \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r^{\frac{2n+1}{n}} \, dr. \tag{25}$$

После интегрирования получим

$$J_{пр} = \frac{\pi}{3^{\frac{n+1}{2n}} \, 2^{\frac{2n+1}{n}}} \cdot \frac{n}{3n+1} D^{\frac{3n+1}{n}} \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{3n+1}{n}}\right]. \tag{26}$$

Для бруса круглого сечения величину обобщенного полярного момента инерции можно получить из формулы (26), полагая в ней $d=0$, тогда

$$J_{пр} = \frac{\pi}{3^{\frac{n+1}{2n}} \, 2^{\frac{2n+1}{n}}} \cdot \frac{n}{3n+1} D^{\frac{3n+1}{n}}. \tag{27}$$

Из соотношения (24) с учетом выражения (25) находим величину относительного угла закручивания, возникшего за счет ползучести материала бруса,

$$\theta_p = \left(\frac{M_к}{J_{пр}}\right)^n \Omega. \tag{28}$$

Подставляя выражение (28) в зависимость (22), выводим формулу для определения касательных напряжений:

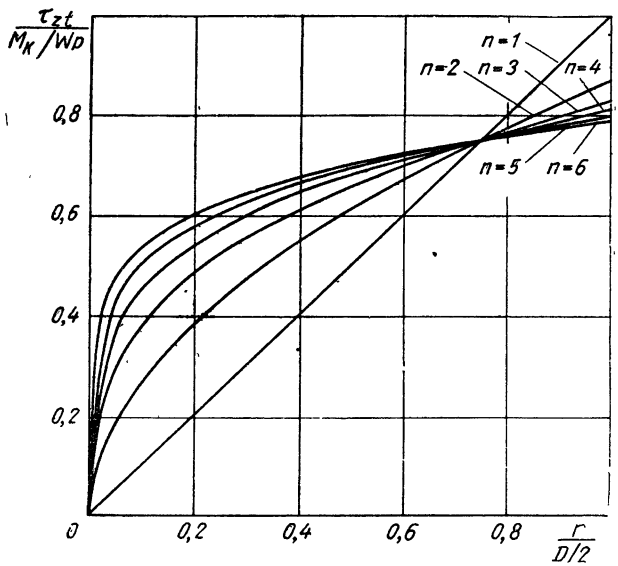
$$\tau_{zt} = \frac{1}{3^{\frac{n+1}{2n}}} \cdot \frac{M_к r^{\frac{1}{n}}}{J_{пр}}. \qquad (29)$$

Величину наибольшего касательного напряжения получаем, полагая в формуле (29) $r = \frac{D}{2}$

$$\tau_{zt\ max} = \frac{M_к}{W_{пр}},$$

где $W_{пр}$ — обобщенный момент сопротивления кручению

$$W_{пр} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{n}{3n+1} D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{3n+1}{n}}\right].$$



Фиг. 667. Эпюры безразмерных касательных напряжений в поперечном сечении скрученного круглого бруса при установившейся ползучести для различных значений показателя степени n.

Для бруса круглого сечения

$$W_{пр} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{n}{3n+1} D^3.$$

На фиг. 667 представлены графики зависимости отношения $\frac{\tau_{zt}}{\frac{M_k}{W_p}}$ от $\frac{r}{\frac{D}{2}}$, построенные по формулам (29) и (27) для различных значений n.

Эти графики характеризуют вид эпюр распределения напряжений в по-

перечном сечении при установившейся ползучести. Из графиков на фиг. 667 следует, что с увеличением показателя степени n наибольшее касательное напряжение уменьшается и распределение касательных напряжений по сечению становится все более и более равномерным.

Б. Брус некруглого поперечного сечения

Основные уравнения. В случае чистого кручения бруса

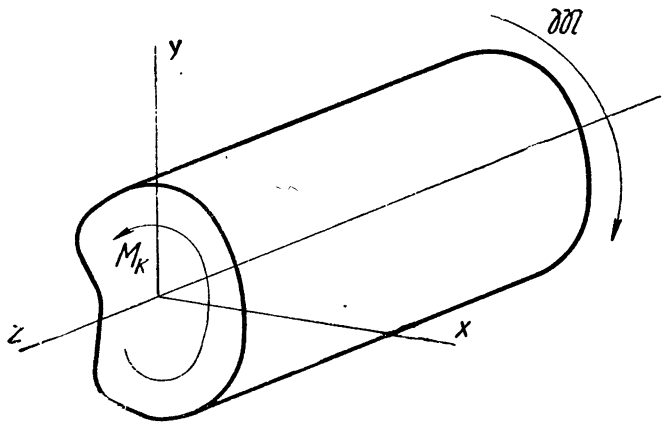
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \tag{30}$$

а поэтому на основании уравнений (5) и соотношения (51) гл. VIII т. II имеем

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0.$$

При деформации скрученного бруса некруглого сечения поперечное сечение не остается плоским.

Обозначим проекции на оси координат xyz перемещения некоторой точки бруса, возникающего за счет ползучести материала, через u_p, v_p и w_p, соответственно (фиг. 668).



Фиг. 668. Скрученный брус некруглого поперечного сечения, находящийся в условиях ползучести.

На основании зависимостей компонентов перемещения от относительного угла закручивания, приведенных в гл. VIII т. I, устанавливаем, что

$$u_p = -\theta_p yz;\ v_p = \theta_p zx. \tag{31}$$

Зависимость пластических угловых деформаций от компонентов перемещения, возникающего за счет ползучести материала, согласно формулам (47) гл. II т. I имеет вид

$$\gamma_{zyp} = \frac{\partial v_p}{\partial z} + \frac{\partial w_p}{\partial y};\quad \gamma_{zxp} = \frac{\partial u_p}{\partial z} + \frac{\partial w_p}{\partial x}. \tag{32}$$

Из выражений (32), учитывая соотношения (31), устанавливаем, что

$$\gamma_{zyp} = \theta_p x + \frac{\partial w_p}{\partial y};\quad \gamma_{zxp} = -\theta_p y + \frac{\partial w_p}{\partial x}. \tag{33}$$

Продифференцируем первое уравнение (33) по x, а второе — по y и из первого результата вычтем второй, тогда получим уравнение совместности пластических деформаций

$$\frac{\partial \gamma_{zyp}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zxp}}{\partial y} - 2\theta_p = 0. \tag{34}$$

Из уравнений (5) для рассматриваемой задачи имеем

$$\gamma_{zyp} = \frac{3\varepsilon_{ip}}{\sigma_i}\tau_{zy};\ \gamma_{zxp} = \frac{3\varepsilon_{ip}}{\sigma_i}\tau_{zx}. \tag{35}$$

Подставляя эти выражения в формулу (34), устанавливаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3\varepsilon_{ip}}{\sigma_i}\tau_{zy}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3\varepsilon_{ip}}{\sigma_i}\tau_{zx}\right) - 2\theta_p = 0.$$

Подставляя в это уравнение соотношение (6), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_i^{n-1}\tau_{zy}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_i^{n-1}\tau_{zx}\right) - \frac{2}{3}\cdot\frac{\theta_p}{\Omega} = 0. \tag{36}$$

Отметим, что для рассматриваемой задачи интенсивность напряжений можно получить из формулы (49) гл. XIII т. II, если учесть соотношения (30):

$$\sigma_i = \sqrt{3\left(\tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2\right)}.$$

В таком случае уравнение (36) может быть представлено в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\tau_{zy}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\tau_{zx}\right] - \frac{2}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}\theta_p = 0. \tag{37}$$

Уравнение равновесия в рассматриваемой задаче имеет вид (см. гл. VIII т. I)

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0. \tag{38}$$

Введем функцию напряжения $\varphi(x, y)$. Положим, что компоненты напряжения τ_{zy} и τ_{zx} выражаются через функцию напряжений следующим образом:

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x};\ \tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{39}$$

В таком случае уравнение равновесия (38) удовлетворяется тождественно, а уравнение (37) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\} + \frac{2\theta_p}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega} = 0 \tag{40}$$

Отметим, что в рассматриваемой задаче, так же как и в задаче упругого кручения, легко доказать, что функция напряжений должна иметь постоянное значение на контуре:

$$\varphi_{конт} = \text{const}.$$

Для односвязного контура величина этой постоянной не существенна, так как согласно выражениям (39) напряжения зависят только от производных функции φ. Поэтому можно принять

$$\varphi_{конт} = 0. \tag{41}$$

Запишем выражение крутящего момента:

$$M_к = \int\int (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y)\, dx\, dy. \tag{42}$$

Интеграл (42) берется по всей площади поперечного сечения бруса. Зависимость (42), так же как и в задаче упругого кручения бруса, при помощи формул (39) (см. гл. VIII т. I) может быть преобразована к виду

$$M_к = 2\int\int \varphi\, dx\, dy. \tag{43}$$

Таким образом, для решения задачи установившейся ползучести скрученного бруса, поперечное сечение которого ограничено односвязным контуром, необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение (40), учитывая условие на контуре (41). В результате решения дифференциального уравнения (40) получаем функцию напряжений φ. Касательные напряжения и крутящий момент связаны с функцией напряжений соотношениями (39) и (43).

Ввиду того что точное интегрирование уравнения (40) представляет значительные математические трудности, обратимся к приближенному интегрированию этого уравнения по методу Бубнова — Галеркина (см. гл. VII т. I). Как известно, для того чтобы проинтегрировать дифференциальное уравнение по методу Бубнова — Галеркина, необходимо задать в первом приближении функцию напряжений φ в виде

$$\varphi = C\varphi_1, \tag{44}$$

где φ_1 — некоторая функция x и y, равная нулю на контуре;

C — постоянная величина.

Для определения постоянной C выражение (44) подставляем в левую часть дифференциального уравнения (40), умножаем ее на φ_1 и интегрируем по площади поперечного сечения. Полученный результат приравниваем нулю. Тогда имеем

$$\int\int \left\{ C^n \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right\} + C^n \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right\} + \frac{2\theta_p}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}\right\} \varphi_1\, dx\, dy = 0.$$

Из последнего уравнения получим

$$C=\left(\frac{2}{3^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{\theta_p}{\Omega}\cdot\frac{J_1}{J_2}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{45}$$

где

$$J_1=\int\int\varphi_1\,dx\,dy; \tag{46}$$

$$J_2=-\int\int\left\{\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right\}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right\}\right\}\varphi_1\,dx\,dy.$$

Проинтегрируем это выражение по частям. Принимая во внимание, что функция φ_1 на контуре поперечного сечения обращается в ноль, имеем

$$J_2=\int\int\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{n+1}{2}}dx\,dy. \tag{47}$$

Выражение (43) с учетом соотношений (44) — (46) преобразуется к виду

$$\theta_p=\left(\frac{M_к}{J_{пк}}\right)^n\Omega, \tag{48}$$

где

$$J_{пк}=\frac{2^{\frac{n+1}{n}}}{3^{\frac{n+1}{2n}}}\cdot\frac{J_1^{\frac{n+1}{n}}}{J_2^{\frac{1}{n}}}. \tag{49}$$

Подставив выражение (44) в соотношения (39) и используя зависимости (45) и (48), выводим формулы для определения компонентов касательного напряжения:

$$\tau_{zy}=-\left(\frac{2}{3^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{J_1}{J_2}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{M_к}{J_{пк}}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x};$$

$$\tau_{zx}=\left(\frac{2}{3^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{J_1}{J_2}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{M_к}{J_{пк}}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}.$$

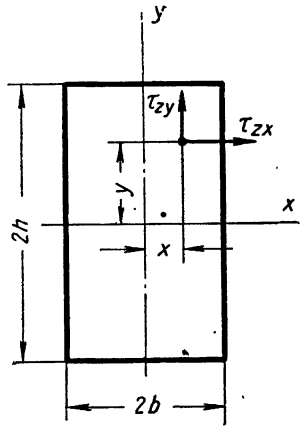
Как известно, решение задачи по методу Бубнова — Галеркина в первом приближении дает сравнительно большую погрешность в определении напряжений и значительно меньшую погрешность в определении перемещений. Поэтому, если в расчете на ползучесть наибольший интерес представляют перемещения, можно считать применение метода Бубнова — Галеркина в рассматриваемом случае вполне оправданным.

Брус прямоугольного поперечного сечения. Рассмотрим кручение бруса прямоугольного поперечного сечения со сторонами $2b$ и $2h$ $(h\geqslant b)$

(фиг. 669). В этом случае функция φ_1, равная нулю на контуре, может быть выбрана в виде

$$\varphi_1 = (x^2 - b^2)(y^2 - h^2). \tag{50}$$

Подставляя выражение (50) в формулу (46), после интегрирования и преобразований получим



Фиг. 669. Прямоугольное поперечное сечение скрученного бруса, находящегося в условиях ползучести

$$J_1 = \beta_1 (2b)^6, \tag{51}$$

где

$$\beta_1 = \frac{1}{36}\left(\frac{h}{b}\right)^3. \tag{52}$$

Продифференцируем выражение (50) по x и y:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 2x(y^2 - h^2); \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 2y(x^2 - b^2). \tag{53}$$

Формула (47) с использованием выражений (53) преобразуется к виду

$$J_2 = 4^{\frac{n+1}{2}+1} \int_0^h \int_0^b [x^2 (y^2 - h^2)^2 + y^2 (x^2 - b^2)^2]^{\frac{n+1}{2}} dx\, dy. \tag{54}$$

Обозначим

$$\frac{n+1}{2} = m \tag{55}$$

и предположим, что m — целое число. В случае промежуточных нецелых значений m можно воспользоваться интерполяцией.

Выражение, стоящее под интегралом, разложим по биному Ньютона:

$$[x^2 (y^2 - h^2)^2 + y^2 (x^2 - b^2)^2]^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{2(m-i)} (x^2 - b^2)^{2i} y^{2i} (y^2 - h^2)^{2(m-i)}, \tag{56}$$

где

$$\binom{m}{i} = \frac{m!}{i!(m-i)!}$$

биномиальный коэффициент.

Подставив выражение (56) в формулу (54) и учитывая соотношение (55), устанавливаем, что

$$J_2 = 4^{m+1} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} g_i j_i; \tag{57}$$

где

$$g_i = \int_0^b x^{2(m-i)} (x^2 - b^2)^{2i} dx;$$

$$j_i = \int_0^h y^{2i} (y^2 - h^2)^{2(m-i)} dy.$$

Очевидно, что выражение (57) может быть представлено в виде

$$J_2 = \beta_2 (2b)^{2(3m+1)}, \tag{58}$$

где

$$\beta_2 = \frac{4^{m+1}}{(2b)^{2(3m+1)}} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} g_i j_i. \tag{59}$$

Подставляя выражение (51) и (58) в формулу (49), принимая во внимание соотношение (55), получим

$$J_{пк} = \beta (2b)^{\frac{3n+1}{n}}, \tag{60}$$

где

$$\beta = \frac{2^{\frac{n+1}{n}}}{3^{\frac{n+1}{2n}}} \cdot \frac{\beta_1^{\frac{n+1}{n}}}{\beta_2^{\frac{1}{n}}}. \tag{61}$$

В табл. 35 приведены величины коэффициента β, подсчитанные по формулам (61), (59) и (52) для различных значений отношения $\frac{h}{b}$ при $n=1$, 3, 5. Для больших значений n, как показали подсчеты, коэффициент β практически мало отличается от величины β для $n=5$.

Таблица 35

Коэффициент β в выражении для жесткости скрученного бруса прямоугольного сечения в зависимости от отношения сторон $\frac{h}{b}$ и показателя степени n

$\frac{h}{b}$	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50
β для $n=1$	0,0463	0,0961	0,122	0,148	0,199
β для $n=3$	0,115	0,207	0,250	0,290	0,368
β для $n=5$	0,134	0,228	0,269	0,309	0,388

Продолжение табл. 35

3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,0
0,250	0,349	0,445	0,540	0,635	0,729	0,823	0,917
0,444	0,596	0,746	0,895	1,05	1,19	1,34	1,49
0,467	0,623	0,779	0,935	1,09	1,25	1,40	1,56

На фиг. 670 представлены графики зависимости коэффициента β от $\frac{h}{b}$ для $n=1$, 3, 5.

При $n=1$ полученные результаты соответствуют упругому решению задачи. В этом случае из формулы (48) можно получить зависимость относительного угла закручивания от крутящего момента в пределах упругости. Для этого необходимо в формуле (48) заменить функцию Ω

величиной, обратной модулю упругости первого рода $\frac{1}{E}$, и положить $n=1$, тогда получим

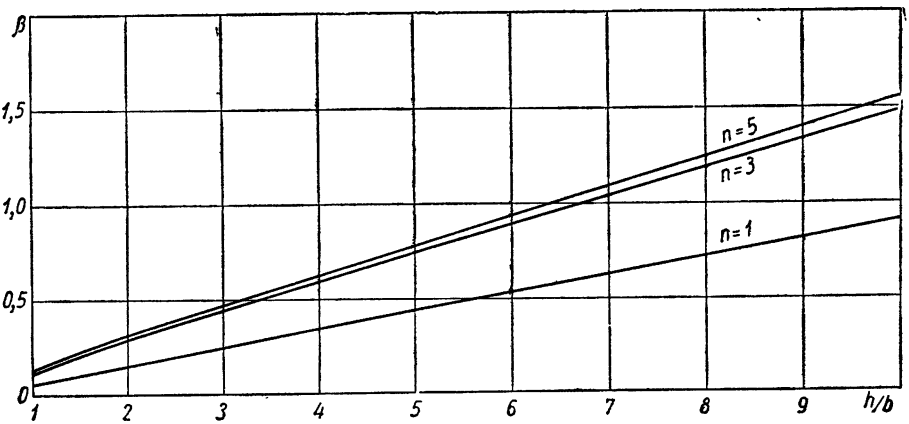
$$\theta = \frac{M_к}{E J_к}.$$

Принимая во внимание соотношение (60) для $n=1$, а также учитывая, что для несжимаемого материала $E=3G$, имеем

$$\theta = \frac{M_к}{G \beta_0 (2b)^4},$$

где

$$\beta_0 = 3\beta.$$



Фиг. 670. Графики зависимостей коэффициента β от $\frac{h}{b}$ для различных значений показателя степени n

В табл. 36 приведено сопоставление коэффициента β_0, полученного в решении задачи методом Бубнова — Галеркина, в первом приближении, с результатом точного решения задачи, известного в теории упругости (см. гл. VIII т. I). Как следует из табл. 36, наибольшая погрешность приближенного решения для $n=1$ имеет место при $\frac{h}{b}=10$ и составляет 12%.

Таблица 36

Сопоставление точного и приближенного решений задачи о кручении бруса прямоугольного поперечного сечения в пределах упругости

$\frac{h}{b}$	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00	6,00	8,00	10,0
β_0 точное	1,140	0,294	0,375	0,457	0,623	0,790	1,12	1,46	1,79	2,46	3,12
β_0 приближенное	0,139	0,288	0,367	0,444	0,598	0,750	1,05	1,33	1,62	2,19	2,75
Погрешность приближенного решения в %	0,7	2,0	2,1	2,8	4,0	5,1	6,9	8,3	9,4	11	12

Формулы для определения напряжений не приводятся, поскольку решение задачи по методу Бубнова — Галеркина в первом приближении не дает возможности получить величины напряжений при установившейся ползучести. В таком решении напряжения при установившейся ползучести не отличаются от напряжений при упругих деформациях бруса.

Брус, поперечное сечение которого — тонкая полоса. Если поперечное сечение бруса — тонкая полоса (фиг. 671) (h значительно больше b), то в этом случае можно приближенно считать

$$\tau_{zx} = 0$$

и, следовательно, на основании формулы (39) заключить, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

В таком случае дифференциальное уравнение (40) принимает вид

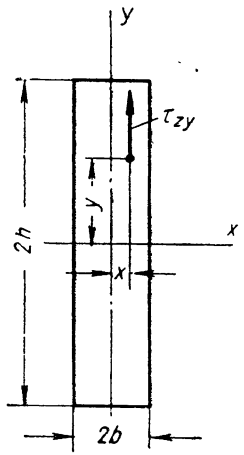
$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}\right\} = -\frac{2\theta_p}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}. \qquad (62)$$

Так как

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2$$

и

$$\operatorname{sign}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\operatorname{sign}\tau_{zy} = -\operatorname{sign} x, \qquad (63)$$



Фиг. 671. Поперечное сечение в форме вытянутого прямоугольника

из уравнения (62) устанавливаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^n = \frac{2\operatorname{sign} x\,\theta_p}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^n = \frac{2\theta_p |x|}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega} + C_1, \qquad (64)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Постоянную C_1 получаем, учитывая, что при $x = 0$ $\tau_{zy} = 0$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$. Следовательно, $C_1 = 0$. Тогда из уравнения (64), используя соотношение (63), имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\operatorname{sign} x\left[\frac{2\theta_p}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}\right]^{\frac{1}{n}} |x|^{\frac{1}{n}}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\varphi = -\frac{n}{n+1}\left(\frac{2\theta_p}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} |x|^{\frac{n+1}{n}} + C_2, \tag{65}$$

где C_2 — постоянная интегрирования.

Последнюю можно получить из условия равенства нулю функции напряжений на контуре, а именно: при $x=b$, $\varphi=0$. Из этого условия находим

$$C_2 = \frac{n}{n+1}\left(\frac{2\theta_p}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} b^{\frac{n+1}{n}}. \tag{66}$$

Подставляя выражение (66) в формулу (65), устанавливаем:

$$\varphi = \frac{n}{n+1}\left(\frac{2\theta_p}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} \left[b^{\frac{n+1}{n}} - |x|^{\frac{n+1}{n}}\right]. \tag{67}$$

Зависимость относительного угла закручивания, возникающего за счет ползучести материала бруса, от крутящего момента и времени можно найти из формулы (43). Подставляя в нее функцию напряжений по формуле (67), после интегрирования и преобразований получаем выражение (48), в котором

$$J_{пк} = \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{\frac{n+1}{2n}}} 2h(2b)^{\frac{2n+1}{n}}, \tag{68}$$

Касательное напряжение τ_{zy} определяется по первой формуле (39) с использованием выражений (67) и (48). После преобразований получим

$$\tau_{zy} = \operatorname{sign} x \frac{2^{\frac{1}{n}}}{3^{\frac{n+1}{2n}}} \cdot \frac{M_к |x|^{\frac{1}{n}}}{J_{пк}}. \tag{69}$$

Максимальное касательное напряжение можно вычислить, подставляя в уравнение (69) $x=b$. После преобразований с учетом выражения (68) имеем

$$\tau_{zy\,\max} = \frac{M_к}{W_{пк}}, \tag{70}$$

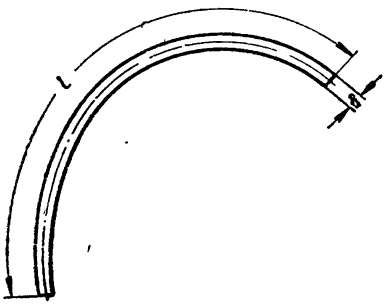
где

$$W_{пк} = \frac{n}{2n+1} 2h(2b)^2.$$

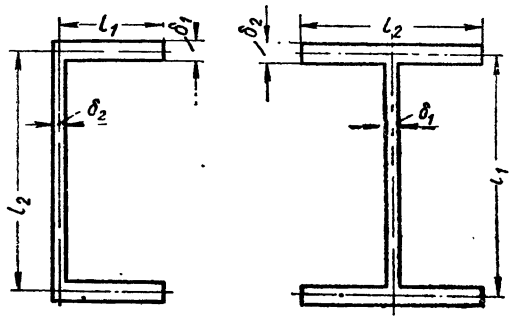
Полученными результатами можно воспользоваться и для расчета тонкостенных изогнутых полос с постоянной толщиной стенки (фиг. 672).

При этом в выведенные выше формулы следует вместо $2b$ подставить толщину стенки профиля δ, а вместо $2h$ — длину средней линии l.

Брус, поперечное сечение которого — тонкостенный открытый профиль. В случае чистого кручения тонкостенных открытых профилей, состоящих из m отдельных полос (фиг. 673), можно приближенно считать, что отдельные полосы, составляющие профиль, работают независимо



Фиг. 672. Поперечное сечение — тонкостенный незамкнутый профиль со стенкой постоянной толщины



Фиг. 673. Поперечное сечение — тонкостенный открытый профиль, состоящий из отдельных полос

одна от другой, закручиваясь в любой момент времени на одинаковый угол. Обозначим крутящий момент, воспринимаемый некоторой полосой, через M_i, а фактор жесткости $J_{пкi}$.

Согласно формуле (68)

$$J_{пкi} = \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{\frac{n+1}{2n}}} l_i \delta_i^{\frac{2n+1}{n}}, \tag{71}$$

где l_i — длина;

δ_i — ширина полосы.

Приравнивая относительный угол закручивания профиля относительному углу закручивания некоторой i-ой полосы, по формуле (48) получаем

$$\left(\frac{M_к}{J_{пк}}\right)^n \Omega = \left(\frac{M_{кi}}{J_{пкi}}\right)^n \Omega,$$

откуда

$$M_{кi} = M_к \frac{J_{пкi}}{J_{пк}}. \tag{72}$$

Просуммируем крутящие моменты на всех m полосах и приравняем полученную сумму моменту $M_к$, тогда, принимая во внимание соотношение (72), устанавливаем, что

$$M_к = \sum_{i=1}^{m} M_{кi} = \frac{M_к}{J_{пк}} \sum_{i=1}^{m} J_{пкi},$$

откуда на основании соотношения (71) имеем

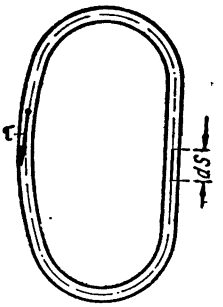
$$J_{пк} = \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{\frac{n+1}{2n}}} \sum_{i=1}^{m} l_i \delta_i^{\frac{2n+1}{n}}. \tag{73}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае относительный угол закручивания, возникающий за счет ползучести материала бруса, находится по формуле (48). Величина $J_{пк}$ в этой формуле определяется выражением (73).

Наибольшее касательное напряжение можно вычислить по формуле (70), полагая в ней

$$W_{пк} = 3^{\frac{n+1}{2n}} \frac{J_{пк}}{\delta_{\max}^{\frac{1}{n}}}.$$

Брус, поперечное сечение которого — тонкостенный замкнутый профиль. Рассмотрим теперь ползучесть скрученного бруса, поперечное сечение которого — тонкостенный замкнутый профиль (фиг. 674). Как известно, с точки зрения определения напряжений данная задача является статически определимой, и поэтому при постоянном во времени крутящем моменте напряжения во времени изменяться не будут. Таким образом, в рассматриваемом случае действительно имеет место установившаяся ползучесть. Как известно (см. гл. IX т. I), касательные напряжения при кручении бруса, поперечное сечение которого представляет собой тонкостенный замкнутый контур, определяются по формуле



Фиг. 674. Поперечное сечение — тонкостенный замкнутый профиль

$$\tau = \frac{M_к}{2f\delta}, \tag{74}$$

где δ — толщина стенки;

f — площадь, ограниченная средней линией, тонкостенного сечения.

Обратимся к определению относительного угла закручивания. Проводя те же рассуждения, что и при решении задачи об упругом кручении тонкостенных замкнутых профилей (см. гл. IX т. I), легко получить дифференциал проекции на ось бруса полного перемещения некоторой точки контура, возникающего за счет ползучести:

$$dw_p = -2\theta_p\, df + \frac{3\varepsilon_{ip}}{\sigma_i}\tau\, ds, \tag{75}$$

где ds — длина элемента дуги средней линии профиля.

Проинтегрируем уравнение (75) вдоль средней линии. При этом учтем, что в силу однозначности смещений имеет место условие

$$\oint dw_p = 0,$$

тогда получим

$$\theta_p = \frac{1}{2f}\oint \frac{3\varepsilon_{ip}}{\sigma_i}\tau\, ds.$$

Подставляя в эту формулу соотношение (6) и учитывая, что в рассматриваемой задаче

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,\tau_{zs},$$

имеем

$$\theta_p = \frac{1}{2f} \oint 3^{\frac{n+1}{2}} \tau^n \Omega \, ds.$$

Преобразуем эту формулу с помощью выражения (74), тогда получим уравнение (48), в котором

$$J_{пк} = \frac{2^{\frac{n+1}{n}}}{3^{\frac{n+1}{2n}}} \frac{f^{\frac{n+1}{n}}}{\left[\oint \frac{ds}{\delta^n}\right]^{\frac{1}{n}}}. \tag{76}$$

Для тонкостенной цилиндрической трубки со средним диаметром D и толщиной стенки δ формула (76) приводится к виду

$$J_{пк} = \frac{\pi}{2^{\frac{n+1}{2n}} \, 3^{\frac{n+1}{2n}}} D^{\frac{2n+1}{n}} \delta.$$

§ 4. ПОЛЗУЧЕСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ

Рассмотрим решение задачи о деформированном состоянии тонкостенной цилиндрической трубы, нагруженной внутренним давлением, осевой силой и крутящим моментом. Напряженное состояние такой трубы двухосное и однородное.

В рассматриваемом случае задача определения напряжений является статически определимой, так как напряжения определяются из одних уравнений статики, поэтому при постоянных во времени внутренних силовых факторах напряжения изменяться не будут, т. е. будет иметь место установившаяся ползучесть.

Обозначим средний диаметр цилиндрической трубы через D, толщину стенки δ, внутреннее давление p, осевую силу, которую будем считать растягивающей, N_z, крутящий момент $M_к$.

Компоненты напряжений определяются по общеизвестным формулам теории сопротивления материалов. Нормальное осевое напряжение равно

$$\sigma_z = \frac{N_z}{\pi D \delta}. \tag{77}$$

Нормальное окружное напряжение равно

$$\sigma_t = \frac{p D}{2\delta}. \tag{78}$$

Касательное напряжение, возникающее вследствие закручивания трубы, определяется по формуле

$$\tau_{zt} = \frac{2 M_к}{\pi D^2 \delta}. \tag{79}$$

Модель напряженного состояния элемента трубы представлена на фиг. 675.

Интенсивность напряжений и среднее нормальное напряжение для рассматриваемой задачи получаем по формулам (49) и (51) гл. XIII т. II. Тогда имеем

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_z^2 - \sigma_z\sigma_t + \sigma_t^2 + 3\tau_{zt}^2}; \tag{80}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_z + \sigma_t}{3}. \tag{81}$$

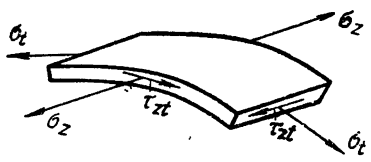
Зависимость компонентов пластической деформации от компонентов напряжения можно получить по формулам (5), используя соотношения (6), (80) и (81). После преобразований устанавливаем, что

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{tp} &= \frac{1}{2}\left(\sigma_t^2 - \sigma_t\sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau_{zt}^2\right)^{\frac{n-1}{2}} (2\sigma_t - \sigma_z)\,\Omega; \\ \varepsilon_{zp} &= \frac{1}{2}\left(\sigma_t^2 - \sigma_t\sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau_{zt}^2\right)^{\frac{n-1}{2}} (2\sigma_z - \sigma_t)\,\Omega; \\ \gamma_{ztp} &= 3\left(\sigma_t^2 - \sigma_t\sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau_{zt}^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \tau_{zt}\,\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Располагая величинами пластических деформаций, можно определить перемещения, образовавшиеся в результате ползучести материала.

Удлинение трубы длиной l равно

$$\Delta l_p = \varepsilon_{zp}\, l.$$



Фиг. 675. Напряженное состояние элемента тонкостенной трубы, нагруженной внутренним давлением, осевой силой и крутящим моментом

Приращение среднего диаметра можно определить из зависимости

$$\Delta D_p = \varepsilon_{tp} D.$$

Угол закручивания трубы при условии, что крутящий момент не меняется по длине, равен

$$\varphi_p = \frac{2\gamma_{ztp}}{D}\, l.$$

Отметим, что если тонкостенная труба, имеющая днища, подвергается воздействию только внутреннего давления и крутящего момента, то

$$N_z = p\,\frac{\pi D^2}{4},$$

и согласно формулам (77) и (78)

$$\sigma_z = \frac{\sigma_t}{2}.$$

Сопоставляя это выражение со второй формулой (82), заключаем, что в этом случае деформация в осевом направлении отсутствует.

Как отмечалось в § 8 гл. XIII т. II, экспериментальные исследования ползучести при неодноосном напряженном состоянии производились путем испытания тонкостенных цилиндрических труб, нагруженных внутренним давлением, осевой силой и крутящим моментом. Цель этих испытаний заключалась в проверке возможности использования в рас-

четах на ползучесть основных уравнений теории малых упруго-пластических деформаций.

Рассмотрим результаты испытаний тонкостенных труб при совместном растяжении и кручении в условиях ползучести [11]. Первая серия испытаний по изучению ползучести в тонкостенных стальных трубах, работающих на растяжение и кручение, была произведена на тонкостенных трубчатых образцах из мягкой стали с содержанием углерода 0,115%. Испытания производились при температуре 457°. Перед испытанием образцы были нагреты до температуры 650° в течение 1 часа и медленно охлаждены. Образцы изготовлялись из холоднотянутой трубы следующих размеров: наружный диаметр $D_н = 13{,}6$ *мм*, толщина стенки $\delta = 0{,}508$ *мм*, расчетная длина $l = 203$ *мм*.

Испытания были произведены при различных значениях осевого и касательного напряжений. Величины напряжений, при которых производились испытания, даны в табл. 37.

Таблица 37

Сопоставление теоретических данных с результатами испытаний на ползучесть при температуре 475° тонкостенных стальных труб, нагруженных осевой силой и крутящим моментом

№ испытания	σ_z в кг/см²	τ_{zt} в кг/см²	$\frac{\tau_{zt}}{\sigma_z}$	$\dot{\varepsilon}_{zp\min}$ $\frac{1}{\text{час}} 10^6$	$\dot{\gamma}_{ztp\min}$ $\frac{1}{\text{час}} 10^6$	$\frac{\dot{\gamma}_{ztp\min}}{\dot{\varepsilon}_{zp\min}}$ эксп.	$\frac{\dot{\gamma}_{ztp\min}}{\dot{\varepsilon}_{zp\min}} = 3\frac{\tau_{zt}}{\sigma_z}$ теорет.	Отклонение теоретических результатов от данных эксперимента в %
1	81,7	482	5,90	2,00	38,7	19,4	17,7	8,5
2	388	443	1,14	13,6	41,3	3,04	3,42	13
3	543	400	0,737	24,7	44,4	1,80	2,21	23
4	899	178	0,198	69,7	32,3	0,463	0,594	28
5	967	0	0,000	86,5	0,0	0,000	0,000	—

В табл. 37 приведены также экспериментально полученные значения минимальных скоростей осевой и угловой пластических деформаций и их отношение $\frac{\dot{\gamma}_{ztp\min}}{\dot{\varepsilon}_{zp\min}}$.

Теоретическое значение отношения $\frac{\dot{\gamma}_{ztp\min}}{\dot{\varepsilon}_{zp\min}}$ можно установить из формул (82). Для этого положим во второй и третьей формулах (82), что напряжение $\sigma_t = 0$. Затем эти выражения продифференцируем по времени, используя соотношение (11) гл. XII т. II и учитывая, что напряжения во времени постоянны. Поделив результаты дифференцирования, устанавливаем

$$\frac{\dot{\gamma}_{ztp\ \min}}{\dot{\varepsilon}_{zp\ \min}} = \frac{\dot{\gamma}_{ztp}}{\dot{\varepsilon}_{zp}} = \frac{\dot{\gamma}_{ztp}}{\dot{\varepsilon}_{zp}} = 3\frac{\tau_{zt}}{\sigma_z}. \qquad (83)$$

В табл. 37 приведены теоретические значения отношения $\frac{\dot{\gamma}_{ztp\min}}{\dot{\varepsilon}_{zp\min}}$ подсчитанные по формуле (83), и даны отклонения в процентах теоретических данных от результатов эксперимента.

На фиг. 676 представлен график зависимости (83) и нанесены экспериментально полученные точки.

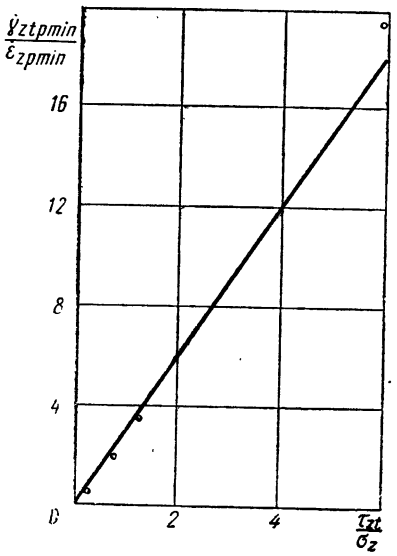
Как следует из табл. 37 и фиг. 676, совпадение результатов теории и эксперимента удовлетворительное.

Вторая серия опытов была проведена на трубчатых образцах из стали, химический состав которой дан в табл. 38. Испытания произво-

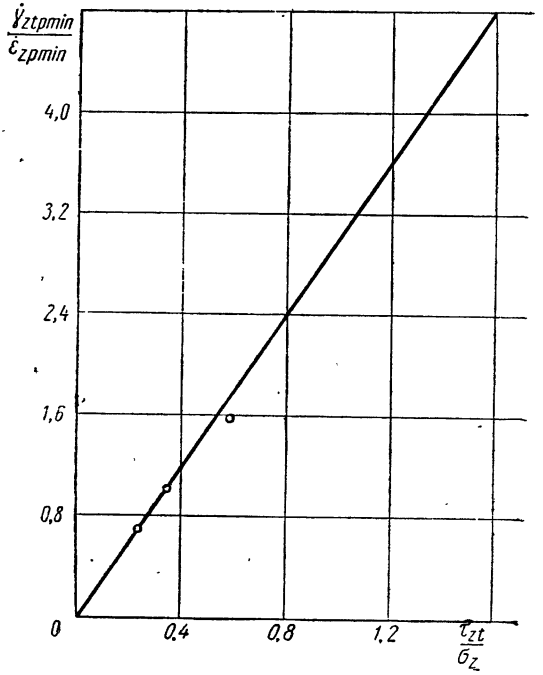
Таблица 38

Химический состав (в %) стали, из которой изготовлялись трубчатые образцы для испытаний в условиях ползучести при температуре 480° на расстяжение и кручение

C	Mn	Si	Ni	Cr	S	P
0,45	0,73	0,20	0,19	0,023	0,032	0,038



Фиг. 676. Сопоставление теоретических данных с результатами испытаний на ползучесть тонкостенных стальных труб, нагруженных осевой силой и крутящим моментом. Испытания производились при температуре 475° [11]



Фиг. 677. Сопоставление теоретических данных с результатами испытаний на ползучесть тонкостенных стальных труб, нагруженных осевой силой и крутящим моментом. Опыты производились при температуре 480° [11]

дились при температуре 480°. Формы и размеры образцов были такие же, как и в предыдущих испытаниях. Напряжения, при которых производились испытания, экспериментально полученные значения минимальных скоростей пластических деформаций и отношение их, а также от-

ношение скоростей, подсчитанное по формуле (83), и отклонение теоретических данных от результатов эксперимента приведены в табл. 39.

Таблица 39

Сопоставление теоретических данных с результатами испытаний на ползучесть при температуре 480° тонкостенных стальных труб, нагруженных осевой силой и крутящим моментом

№ испытания	σ_z в кг/см²	τ_{zt} в кг/см²	$\frac{\tau_{zt}}{\sigma_z}$	$\dot{\varepsilon}_{zp\min}$ $\frac{1}{\text{час}}10^6$	$\dot{\gamma}_{ztp\min}$ $\frac{1}{\text{час}}10^6$	$\frac{\dot{\gamma}_{ztp\min}}{\dot{\varepsilon}_{zp\min}}$ экспер.	$\frac{\dot{\gamma}_{ztp\min}}{\dot{\varepsilon}_{zp\min}} = 3\frac{\tau_{zt}}{\sigma_z}$ теорет.	Отклонение теоретических результатов от данных эксперимента %
1	0	620	∞	0	28,0	∞	∞	—
2	363	594	1,64	6,36	28,8	4,53	4,92	8,6
3	800	474	0,592	17,1	27,0	1,58	1,78	13
4	1020	355	0,349	38,1	40,2	1,06	1,05	0,94
5	1130	283	0,251	42,0	31,9	0,760	0,753	0,92
6	1240	0	0,000	47,0	0,0	0,000	0,000	—

На фиг. 677 представлен график зависимости (83) и нанесены экспериментально полученные точки.

Как следует из табл. 39 и фиг. 677, совпадение теории и эксперимента также удовлетворительное.

§ 5. ПОЛЗУЧЕСТЬ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБ

Рассмотрим установившуюся ползучесть толстостенной трубы с днищами, нагруженной внутренним и внешним давлениями.

Обозначим внутренний радиус трубы через r_1, наружный радиус r_2, внутреннее давление p_1, наружное давление p_2.

Примем, что пластическая осевая деформация трубы равна нулю:

$$\varepsilon_{zp} = 0. \tag{84}$$

Как будет показано далее, это справедливо в том случае, если осевая сила возникает только за счет давлений на днища. На основании зависимостей, установленных в гл. X т. II, пластические окружная ε_{tp} и радиальная ε_{rp} деформации в некоторой точке трубы на расстоянии r от ее центра могут быть выражены через радиальное смещение в этой точке, возникающее за счет ползучести материала u_p, следующим образом:

$$\varepsilon_{tp} = \frac{u_p}{r}; \quad \varepsilon_{rp} = \frac{du_p}{dr}. \tag{85}$$

Условие несжимаемости материала при пластических деформациях имеет вид

$$\varepsilon_{tp} + \varepsilon_{rp} + \varepsilon_{zp} = 0. \tag{86}$$

Подставляя выражения (85) и (84) в соотношение (86), получаем

$$\frac{du_p}{dr} = -\frac{u_p}{r}.$$

Интегрируя это уравнение по радиусу, можно установить закон изменения по радиусу радиального перемещения, возникшего за счет ползучести материала трубы:

$$u_p = \frac{C}{r}, \tag{87}$$

где C — некоторая функция времени.

Подставим теперь выражение (87) в соотношения (85), тогда

$$\varepsilon_{tp} = \frac{C}{r^2}; \quad \varepsilon_{rp} = -\frac{C}{r^2}. \tag{88}$$

Интенсивность пластических деформаций в рассматриваемой задаче согласно формулам (3) и (84) записывается следующим образом:

$$\varepsilon_{ip} = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon_{tp}^2 - \varepsilon_{tp}\varepsilon_{rp} + \varepsilon_{rp}^2}. \tag{89}$$

Подставляя в уравнение (89) выражения (88), устанавливаем

$$\varepsilon_{ip} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{|C|}{r^2}. \tag{90}$$

Уравнение равновесия элемента трубы имеет вид (см. гл. X т. II)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0. \tag{91}$$

Зависимость компонентов напряжений от компонентов пластических деформаций для рассматриваемой задачи согласно формулам (5) определяется соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_{ip}}\varepsilon_{tp}; \\ \sigma_r - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_{ip}}\varepsilon_{rp}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_{ip}}\varepsilon_{zp}. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Из формул (92), учитывая выражение (84), получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t - \sigma_r &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_{ip}}(\varepsilon_{tp} - \varepsilon_{rp}); \\ \sigma_z - \sigma_r &= -\frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_{ip}}\varepsilon_{rp}. \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

На основании соотношения (6) заключаем, что

$$\sigma_i = \left(\frac{\varepsilon_{ip}}{Q}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{94}$$

Преобразуем теперь выражения (93) при помощи соотношений (94), (90) и (88), тогда получим

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t-\sigma_r&=\operatorname{sign}C\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\frac{|C|^{\frac{1}{n}}}{\Omega^{\frac{1}{n}}\,r^{\frac{2}{n}}};\\ \sigma_z-\sigma_r&=\frac{\operatorname{sign}C}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\frac{|C|^{\frac{1}{n}}}{\Omega^{\frac{1}{n}}\,r^{\frac{2}{n}}}.\end{aligned}\right\}\qquad(95)$$

Подставляя первое соотношение (95) в уравнение (91), имеем

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}=\operatorname{sign}C\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\frac{|C|^{\frac{1}{n}}}{\Omega^{\frac{1}{n}}\,r^{\frac{n+2}{n}}}.$$

Проинтегрируем это уравнение по радиусу, тогда

$$\sigma_r=C_1-\operatorname{sign}C\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\frac{n}{2}\cdot\frac{|C|^{\frac{1}{n}}}{\Omega^{\frac{1}{n}}\,r^{\frac{2}{n}}}.\qquad(96)$$

Используя краевые условия:

при $r=r_1$

$$\sigma_r=-p_1;$$

при $r=r_2$

$$\sigma_r=-p_2,$$

из соотношения (96) получаем

$$\sigma_r=-p_1+\operatorname{sign}C\frac{n}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\frac{|C|^{\frac{1}{n}}}{\Omega^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{1}{r_1^{\frac{2}{n}}}-\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}\right);\qquad(97)$$

$$p_1-p_2=\operatorname{sign}C\frac{n}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\frac{|C|^{\frac{1}{n}}}{\Omega^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{r_2^{\frac{2}{n}}-r_1^{\frac{2}{n}}}{r_1^{\frac{2}{n}}\,r_2^{\frac{2}{n}}}.\qquad(98)$$

Из выражения (98) следует, что

$$\operatorname{sign}C=\operatorname{sign}(p_1-p_2)\qquad(99)$$

и

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\frac{|C|^{\frac{1}{n}}}{\Omega^{\frac{1}{n}}}=\frac{2}{n}\cdot\frac{|p_1-p_2|\,r_1^{\frac{2}{n}}\,r_2^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}}-r_1^{\frac{2}{n}}}.\qquad(100)$$

Подставим соотношение (100) в уравнение (97), тогда, используя выражение (99), получим формулу для радиального напряжения:

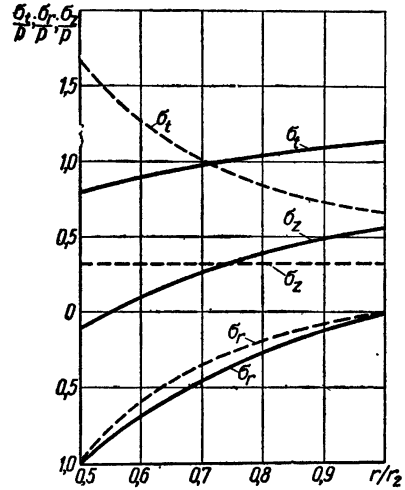
$$\sigma_r=\frac{p_1\,r_1^{\frac{2}{n}}-p_2\,r_2^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}}-r_1^{\frac{2}{n}}}-\frac{(p_1-p_2)\,r_1^{\frac{2}{n}}\,r_2^{\frac{2}{n}}}{\left(r_2^{\frac{2}{n}}-r_1^{\frac{2}{n}}\right)r^{\frac{2}{n}}}.\qquad(101)$$

Формулы для окружного и осевого напряжений получаем из выражений (95), используя соотношения (101), (100) и (99):

$$\sigma_t = \frac{p_1 r_1^{\frac{2}{n}} - p_2 r_2^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}} + \frac{2-n}{n} \cdot \frac{(p_1 - p_2) r_1^{\frac{2}{n}} r_2^{\frac{2}{n}}}{\left(r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}\right) r^{\frac{2}{n}}}; \tag{102}$$

$$\sigma_z = \frac{p_1 r_1^{\frac{2}{n}} - p_2 r_2^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(p_1 - p_2) r_1^{\frac{2}{n}} r_2^{\frac{2}{n}}}{\left(r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}\right) r^{\frac{2}{n}}}. \tag{103}$$

На фиг. 678 представлены эпюры напряжений в толстостенной трубе, подверженной воздействию внутреннего давления при установившейся ползучести (сплошные линии) и в пределах упругости (штриховые линии). При этом принято, что отношение внутреннего радиуса трубы к наружному $\frac{r_1}{r_2} = 0{,}5$, а величина показателя степени $n = 3$.



Фиг. 678. Эпюры напряжений в толстостенной трубе, нагруженной внутренним давлением при установившейся ползучести (сплошные линии) и в пределах упругости (штриховые линии)

Определим радиальное перемещение, возникающее за счет ползучести материала трубы. Из формулы (98), используя выражение (99), устанавливаем

$$C = \operatorname{sign}(p_1 - p_2) \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2 n^n} |p_1 - p_2|^n \frac{r_1^2 r_2^2}{\left(r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}\right)^n} \Omega. \tag{104}$$

Подставляя это соотношение в уравнение (87), получим

$$u_p = \operatorname{sign}(p_1 - p_2) \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2 n^n} |p_1 - p_2|^n \frac{r_1^2 r_2^2}{\left(r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}\right)^n r} \Omega \tag{105}$$

Докажем теперь, что осевая деформация трубы равна нулю в том случае, когда продольная сила возникает только за счет давлений на днища, т. е. когда

$$N_z = \pi (p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2). \tag{106}$$

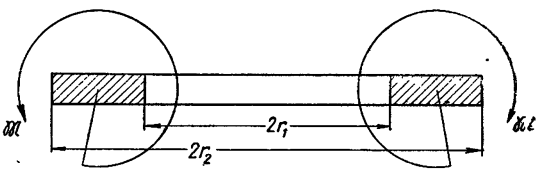
Выражение для продольной силы имеет вид

$$N_z = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r \, dr. \tag{107}$$

Подставляя в него уравнение (103), после интегрирования и преобразований получим соотношение (106), что и подтверждает сказанное.

§ 6. ПОЛЗУЧЕСТЬ КОЛЬЦА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим установившуюся ползучесть кольца прямоугольного поперечного сечения, нагруженного моментами, равномерно распределенными по его осевой линии интенсивностью $\mathfrak{M}$ (фиг. 679). К такой схеме приводится ряд задач расчета деталей машин. Так, например, при изучении ползучести свободного фланца необходимо произвести расчет кольца по схеме, представленной на фиг. 680. В аналогичных условиях нагружения находятся элементы тарельчатых и дисковых пружин.



Фиг. 679. Кольцо прямоугольного поперечного сечения, нагруженное равномерно распределенным по его осевой линии моментом интенсивности $\mathfrak{M}$, находящееся в условиях ползучести

В случае нагружения, изображенном на фиг. 680, интенсивность момента, равномерно распределенного по длине осевой линии кольца, равна

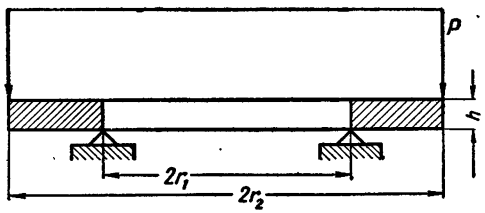
$$\mathfrak{M} = \frac{P}{\pi} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}, \tag{108}$$

где P — сила, равномерно распределенная по наружному контуру; r_1 и r_2 — внутренний и наружный радиусы кольца соответственно (фиг. 680).

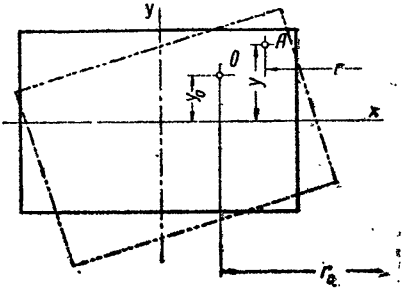
Как известно [10], при нагружении кольца по схеме, представленной на фиг. 679, в любом сечении его внутренние силы сводятся к одному изгибающему моменту M_x:

$$M_x = \mathfrak{M} \frac{r_1 + r_2}{2}, \tag{109}$$

т. е. кольцо находится в условиях чистого изгиба и, следовательно, напряженное состояние всех точек кольца является одноосным.



Фиг. 680. Кольцо прямоугольного поперечного сечения, опертое по внутреннему контуру, нагруженное равномерно распределенной по наружному контуру силой P, находящееся в условиях ползучести



Фиг. 681. Поворот поперечного сечения кольца при его деформации

Предположим, что поперечное сечение кольца при изгибе его не деформируется, а поворачивается как жесткое целое относительно некоторой точки O, которую назовем центром вращения (фиг. 681). На основе сделанного предположения легко получить выражение пласти-

ческой деформации ε_{tp} в произвольной точке кольца A при малых перемещениях [6]:

$$\varepsilon_{tp} = \frac{(y - y_0)\,\vartheta_p}{r}, \tag{110}$$

где ϑ_p — угол поворота сечения кольца, образовавшийся за счет ползучести материала его;

y — ордината точки A;

r — расстояние от точки A до оси кольца;

y_0 — ордината центра вращения (фиг. 681).

Так как в рассматриваемой задаче напряженное состояние всех точек кольца является одноосным, то зависимость пластической деформации от напряжения и времени определяется соотношением (7).

Из выражений (7) и (110) после преобразований получаем закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении кольца:

$$\sigma_t = \operatorname{sign}(y - y_0)\left[\frac{|y - y_0|\,\vartheta_p}{r\,\Omega}\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{111}$$

Для определения координаты центра вращения y_0 запишем условие равенства нулю нормальной силы в поперечном сечении кольца:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t \, dr\, dy = 0, \tag{112}$$

где h — толщина кольца.

Подставляя в условие (112) выражение (111), получим

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \operatorname{sign}(y - y_0)\,|y - y_0|^{\frac{1}{n}}\, dy \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{1}{n}}} = 0$$

или

$$\int_{-\frac{h}{2} - y_0}^{\frac{h}{2} - y_0} \operatorname{sign}(y - y_0)\,|y - y_0|^{\frac{1}{n}}\, d(y - y_0) \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{1}{n}}} = 0. \tag{113}$$

Подинтегральная функция во внешнем интеграле (113) является нечетной функцией $y - y_0$. Следовательно, интеграл (113) равен нулю только тогда, когда пределы интегрирования равны по величине и обратны по знаку

$$\frac{h}{2} - y_0 = \frac{h}{2} + y_0,$$

откуда следует, что

$$y_0 = 0. \tag{114}$$

Таким образом, в условиях установившейся ползучести, так же как и при упругих деформациях [6], центр вращения лежит на оси x. Вторая координата центра вращения r_0 остается неопределенной ввиду того, что при исследовании установившейся ползучести кольца угол поворота поперечного сечения предполагался малым [6].

Уравнение (111) на основании соотношения (114) приводится к виду

$$\sigma_t = \operatorname{sign} y \left[\frac{|y|\,\vartheta_p}{r\,\Omega}\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{115}$$

Составим выражение изгибающего момента

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t\, y\, dr\, dy. \tag{116}$$

Подставим в это выражение вместо σ_t его значение по уравнению (115), тогда после преобразований получим величину угла поворота поперечного сечения ϑ_p, образовавшегося в результате ползучести материала:

$$\vartheta_p = \frac{2^{n+1}(n-1)^n(2n+1)^n}{n^{2n}} \cdot \frac{M_x^n}{\left(r_2^{\frac{n-1}{n}} - r_1^{\frac{n-1}{n}}\right)^n h^{2n+1}}\,\Omega.$$

Подставляя в это выражение соотношение (109), имеем

$$\vartheta_p = \frac{2(n-1)^n(2n+1)^n}{n^{2n}} \cdot \frac{\mathfrak{M}^n (r_1+r_2)^n}{\left(r_2^{\frac{n-1}{n}} - r_1^{\frac{n-1}{n}}\right)^n h^{2n+1}}\,\Omega. \tag{117}$$

Теперь, используя выражение (117), из зависимости (115) выводим формулу для нормального напряжения:

$$\sigma_t = \operatorname{sign} y \frac{2^{\frac{1}{n}}(n-1)(2n+1)}{n^2} \cdot \frac{\mathfrak{M}(r_1+r_2)|y|^{\frac{1}{n}}}{\left(r_2^{\frac{n-1}{n}} - r_1^{\frac{n-1}{n}}\right) h^{\frac{2n+1}{n}} r^{\frac{1}{n}}}. \tag{118}$$

Из выражения (118) следует, что наибольшее нормальное напряжение имеет место во внутренних точках кольца при $r=r_1$, $y=\pm\frac{h}{2}$. Подставляя эти величины в уравнение (118), получаем

$$\sigma_{t\max} = \frac{(n-1)(2n+1)}{n^2} \cdot \frac{\mathfrak{M}(r_1+r_2)}{\left(r_2^{\frac{n-1}{n}} - r_1^{\frac{n-1}{n}}\right) r_1^{\frac{1}{n}} h^2}. \tag{119}$$

Для частного случая нагружения кольца по схеме, представленной на фиг. 680, из выражений (117)—(119) и (108) следует, что

$$\vartheta_p = \frac{2(n-1)^n(2n+1)^n}{\pi^n n^{2n}} \cdot \frac{P^n (r_2-r_1)^n}{\left(r_2^{\frac{n-1}{n}} - r_1^{\frac{n-1}{1}}\right)^n h^{2n+1}}\,\Omega; \tag{120}$$

$$\sigma_t = \operatorname{sign} y \frac{2^{\frac{1}{n}}(n-1)(2n+1)}{\pi n^2} \cdot \frac{P(r_2-r_1)|y|^{\frac{1}{n}}}{\left(r_2^{\frac{n-1}{n}} - r_1^{\frac{n-1}{n}}\right) h^{\frac{2n+1}{n}} r^{\frac{1}{n}}}. \quad (121)$$

$$\sigma_{t\max} = \frac{(n-1)(2n+1)}{\pi n^2} \cdot \frac{P(r_2-r_1)}{\left(r_2^{\frac{n-1}{n}} - r_1^{\frac{n-1}{n}}\right) r_1^{\frac{1}{n}} h^2}. \quad (122)$$

Очевидно, что для этого случая нагружения перемещение точек свободного контура w_p, возникшее за счет ползучести материала, связано с углом поворота поперечного сечения зависимостью

$$w_p = \varphi_p (r_2 - r_1). \quad (123$$

§ 7. ПОЛЗУЧЕСТЬ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ПЛАСТИН ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Выведем вначале основные уравнения расчета круглых и кольцевых симметрично нагруженных пластин постоянной толщины в условиях установившейся ползучести. При этом примем те же допущения и гипотезы, что и в упругом расчете пластин (см. главу I т. II). Кроме того, будем предполагать, что пластина находится в условиях поперечного изгиба, т. е. интенсивность поперечной силы не равна нулю при всех значениях радиуса r.

Как следует из изложенного выше, решение любой задачи установившейся ползучести основано на использовании трех групп уравнений: уравнений равновесия, соотношений, связывающих пластические деформации и перемещения, образовавшиеся в результате ползучести материала, и зависимостей между компонентами напряжений и компонентами пластических деформаций. Поэтому для того, чтобы вывести дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластины, предварительно рассмотрим эти три группы зависимостей.

Дифференциальные уравнения равновесия элемента пластины имеют вид (см. главу I т. II)

$$\frac{d}{dr}(Qr) = pr;\ M_t - \frac{d}{dr}(M_r r) = Qr, \quad (124)$$

где r — текущий радиус,

Q — интенсивность поперечных сил в окружном сечении пластины в *кг/см*;

M_t и M_r — интенсивности окружных и радиальных моментов в радиальном и окружном сечениях соответственно в *кгсм/см*.

Введем безразмерные величины

$$\rho = \frac{r}{r_2};\ \alpha = \frac{r_1}{r_2}, \quad (125)$$

где r_1 — внутренний;

r_2 — наружный радиусы пластины.

Преобразуем уравнения равновесия при помощи соотношений (125), тогда получим

$$\frac{d}{d\rho}(Q\rho) = pr_2\rho;\ M_t - \frac{d}{d\rho}(M_r \rho) = Qr_2\rho. \quad (126)$$

Выражения для интенсивностей моментов также приведены в гл. I т. II и имеют вид

$$M_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t z dz;\ M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz, \tag{127}$$

где z — расстояние от срединной плоскости пластины до текущей точки сечения;

h — толщина пластины.

Обозначим пластические окружную и радиальную деформации через ε_{tp} и ε_{rp} соответственно, а угол поворота нормали к срединной плоскости пластины, образовавшейся в связи с ползучестью материала, через ϑ_p.

На основании установленных в гл. I т. II зависимостей деформаций от перемещений заключаем, что

$$\varepsilon_{tp} = \frac{z}{r}\vartheta_p;\ \varepsilon_{rp} = z\frac{\partial \vartheta_p}{\partial r}. \tag{128}$$

Соотношения (128) при помощи выражений (125) могут быть преобразованы к виду

$$\varepsilon_{tp} = \frac{z}{r_2}\cdot\frac{\vartheta_p}{\rho};\ \varepsilon_{rp} = \frac{z}{r_2}\cdot\frac{\partial \vartheta_p}{\partial \rho}. \tag{129}$$

Если, как это обычно делается в упругом расчете пластин, пренебречь касательными напряжениями в окружных сечениях, то напряженное состояние пластины приближенно можно считать двухосным. Тогда из выражения (5), а также формулы (51) гл. XIII т. II получаем следующие зависимости окружного σ_t и радиального σ_r напряжений от пластических окружной и радиальной деформаций ε_{tp} и ε_{rp}:

$$\sigma_t = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_{ip}}\left(\varepsilon_{tp} + \frac{\varepsilon_{rp}}{2}\right);\ \sigma_r = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_{ip}}\left(\varepsilon_{rp} + \frac{\varepsilon_{tp}}{2}\right), \tag{130}$$

где согласно формуле (49) гл. XIII т. II, а также соотношениям (3) и (5)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\sigma_t^2 - \sigma_t\sigma_r + \sigma_r^2}\ ; \\ \varepsilon_{ip} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_t^2 + \varepsilon_t\varepsilon_r + \varepsilon_r^2}\ . \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

Выражения (130) при помощи зависимостей (129), (6) и (131) могут быть преобразованы к виду

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \operatorname{sign} z\ \frac{2^{m+1}}{3^{\frac{m+1}{2}}}\cdot\frac{\chi^{m-1}}{\Omega^m}\cdot\frac{|z|^m}{r_2^m}\left(\frac{\vartheta_p}{\rho} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \vartheta_p}{\partial \rho}\right); \\ \sigma_r &= \operatorname{sign} z\ \frac{2^{m+1}}{3^{\frac{m+1}{2}}}\cdot\frac{\chi^{m-1}}{\Omega^m}\cdot\frac{|z|^m}{r_2^m}\left(\frac{\partial \vartheta_p}{\partial \rho} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\vartheta_p}{\rho}\right), \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

где

$$m = \frac{1}{n}; \tag{133}$$

$$\chi = \sqrt{\left(\frac{\vartheta_p}{\rho}\right)^2 + \frac{\vartheta_p}{\rho} \cdot \frac{\partial \vartheta_p}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial \vartheta_p}{\partial \rho}\right)^2}, \tag{134}$$

а символом $\operatorname{sign} z$ обозначен знак величины z. Подставляя соотношения (132) в выражения (127), после преобразования получим

$$\left.\begin{aligned} M_t &= D\chi^{m-1}\left(\frac{\vartheta_p}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \vartheta_p}{\partial \rho}\right); \\ M_r &= D\chi^{m-1}\left(\frac{\partial \vartheta_p}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\vartheta_p}{\rho}\right), \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

где

$$D = \frac{h^{m+2}}{3^{\frac{m+1}{2}}(m+2)\,\Omega^m r_2^m}. \tag{136}$$

Из соотношений (132), (135) и (136) легко вывести формулы, связывающие напряжения с интенсивностями моментов:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \operatorname{sign} z\, 2^{m+1}(m+2)\frac{M_t |z|^m}{h^{m+2}}; \\ \sigma_r &= \operatorname{sign} z\, 2^{m+1}(m+2)\frac{M_r |z|^m}{h^{m+2}}. \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

Величины наибольших напряжений могут быть получены из последних формул подстановкой в них $z = \frac{h}{2}$, тогда имеем

$$\sigma_{t\max} = 2(m+1)\frac{M_t}{h^2}; \quad \sigma_{r\max} = 2(m+1)\frac{M_r}{h^2}. \tag{138}$$

Последние формулы дают возможность по известным интенсивностям моментов подсчитать величины наибольших напряжений.

Чтобы получить дифференциальное уравнение изогнутой поверхности симметрично нагруженной круглой пластины при установившейся ползучести, подставим интенсивности моментов по формулам (135) во второе уравнение равновесия (126), тогда получим

$$\chi^{m-1}\left(\frac{\vartheta_p}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \vartheta_p}{\partial \rho}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\chi^{m-1}\left(\rho \frac{\partial \vartheta_p}{\partial \rho} + \frac{1}{2}\vartheta_p\right)\right] - \frac{Q r_2}{D}\rho = 0. \tag{139}$$

Составленное уравнение является основным для установившейся ползучести круглой симметрично нагруженной пластины.

Поскольку точное интегрирование уравнения (139) представляет значительные математические трудности, обратимся к приближенному интегрированию этого уравнения методом Бубнова — Галеркина. При этом будем предполагать, что граничные условия являются однородными, т. е. одновременно и на внутреннем, и на внешнем контурах

пластины угол поворота или интенсивность радиального момента равны нулю и, следовательно, при $\rho=\alpha$ и $\rho=1$ и $\vartheta_p=0$ или

$$\frac{\partial \vartheta_p}{\partial \rho}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\vartheta_p}{\rho}=0.$$

В этом случае использование способа Бубнова — Галеркина особенно эффективно.

Для приближенного интегрирования дифференциального уравнения (139) по методу Бубнова — Галеркина положим, что угол поворота ϑ_p нормали к срединной плоскости пластины, образовавшийся за счет ползучести материала, равен

$$\vartheta_p = C\,\vartheta_1, \tag{140}$$

где C — некоторая функция времени;

$\vartheta_1=\vartheta_1(\rho)$ — функция безразмерного радиуса, удовлетворяющая граничным условиям.

При выборе функций ϑ_1 удобно принять, что закон изменения угла ϑ_p по радиусу такой же, как и при упругом изгибе пластины.

Для определения функции времени C в соответствии с методом Бубнова — Галеркина (см. гл. VII т. I) подставим соотношение (140) в левую часть дифференциального уравнения (139), умножим ее на ϑ_1 и проинтегрируем в пределах изменения ρ от α до 1. Полученный результат приравняем нулю. Тогда после преобразований, используя соотношения (134) и (136) и учитывая, что граничные условия являются однородными, найдем

$$C=\frac{3^{\frac{n+1}{2}}(2n+1)^n r_2^{n+1}}{n^n h^{2n+1}}\left(\frac{J_2}{J_1}\right)^n \Omega, \tag{141}$$

где

$$J_1=\int_\alpha^1 \chi_1^{m+1}\rho\,d\rho; \tag{142}$$

$$J_2=\int_\alpha^1 Q\varphi_1\rho\,d\rho, \tag{143}$$

а

$$\chi_1=\sqrt{\left(\frac{\vartheta}{\rho}\right)^2+\frac{\vartheta_1}{\rho}\cdot\frac{d\vartheta_1}{d\rho}+\left(\frac{d\vartheta}{d\rho}\right)^2}. \tag{144}$$

Формулы (140)—(144) определяют угол поворота нормали к срединной плоскости пластины, образовавшийся в результате ползучести материала. После вычисления его могут быть найдены интенсивности моментов и напряжения по формулам (135)—(138).

Используя зависимость, связывающую угол поворота нормали к срединной плоскости пластины с прогибом (см. гл. I т. II), имеем

$$\frac{\partial w_p}{\partial r}=-\vartheta_p, \tag{145}$$

где w_p — прогиб, образовавшийся за счет ползучести материала.

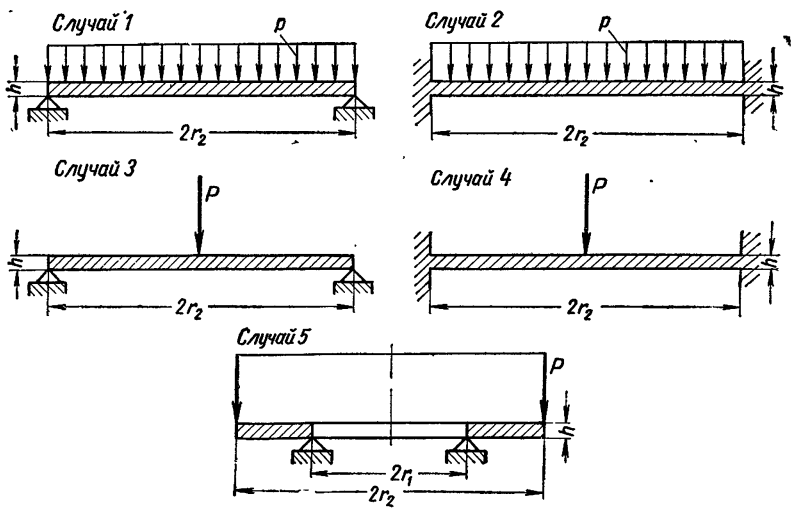
Выражение (145) на основании соотношений (125) и (140) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} = -C r_2 \vartheta_1.$$

Интегрируя полученный результат по ρ, находим

$$w_\rho = C_1 - C r_2 \int \vartheta_1 \, d\rho, \qquad (146)$$

где C_1 — функция времени, определяемая из краевого условия.



Фиг. 682. Схемы нагружения и закрепления пластин, находящихся в условиях ползучести

133

С помощью формул (146) и (140)—(144) можно определить прогиб и угол поворота нормали, образовавшиеся в результате ползучести материала для любого момента времени.

Вычисление интегралов J_1 и J_2 [см. формулы (142) и (143)], а также преобразование соотношения (146) будут рассмотрены ниже на конкретных примерах.

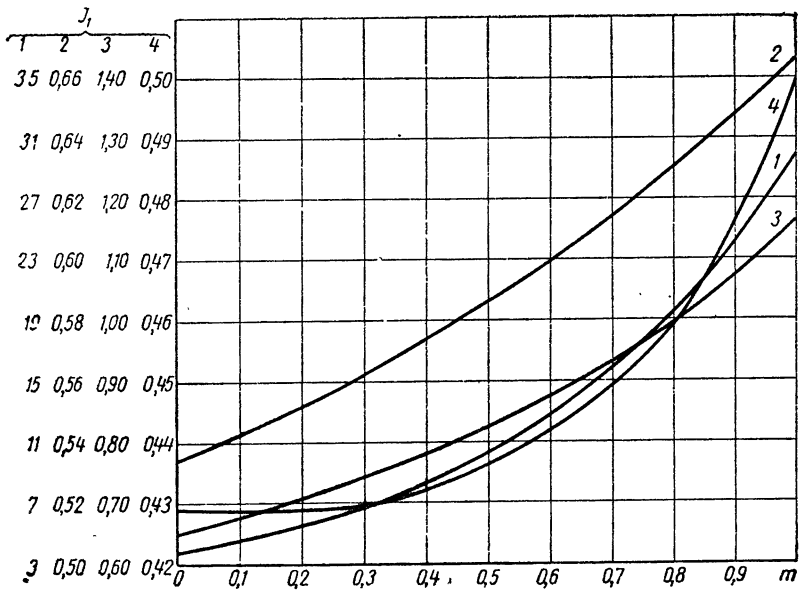
Перейдем к рассмотрению частных случаев. Разберем несколько примеров расчета круглых и кольцевых пластин, схемы нагружения и закрепления которых изображены на фиг. 682.

Для изложенных ниже примеров на основе упругого расчета соответствующих пластин выбраны функции ϑ_1, а затем при помощи формул (144), (142), (143), (141), (140) и (146) определены величины χ_1, J_1, J_2, w_ρ и $w_{\rho\max}$, которые и приведены ниже. Для четырех случаев нагружения и закрепления пластин в табл. 40 приведены величины J_i, подсчитанные при помощи численного интегрирования для различных значений m, а на фиг. 683 представлены графики зависимости J_1 от m.

Таблица 40

Величины интеграла J_1 для различных случаев нагружения и закрепления круглых пластин

m	n	J_1			
		Случай 1	Случай 2	Случай 3	Случай 4
0,0	∞	3,65	0,534	0,647	0,429
0,2	5,00	5,51	0,552	0,707	0,429
0,4	2,50	8,36	0,574	0,782	0,432
0,6	1,67	12,8	0,600	0,877	0,442
0,8	1,25	19,5	0,631	0,997	0,459
1,0	1,00	30,0	0,667	1,17	0,500



Фиг. 683. Графики зависимостей интеграла J_1 от величины m для круглых пластин

Случай 1. Круглая пластина, опертая по внешнему контуру, нагружена равномерно распределенным давлением p, тогда

$$\vartheta_1 = 7\rho - 3\rho^3;$$

$$\chi_1 = \sqrt{147 - 252\rho^2 + 117\rho^4};$$

$$J_1 = \int_0^1 (147 - 252\rho^2 + 117\rho^4)^{\frac{m+1}{2}} \rho\, d\rho$$

или

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 (147 - 252\rho_1 + 117\rho_1^2)^{\frac{m+1}{2}} d\rho_1,$$

где

$$\rho_1 = \rho^2, \qquad J_2 = \frac{5}{8} pr_2;$$

$$w_p = \frac{Cr_2}{4}(11 - 14\rho^2 + 3\rho^4);$$

$$w_{p\max} = \frac{11}{4} Cr_2 = \frac{11 \cdot 3^{\frac{n+1}{2}} (2n+1)^n r_2^{2(n+1)}}{4n^n h^{2n+1}} \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{P}{J_1}\right)^n \Omega.$$

Случай 2. Круглая пластина, заделанная по внешнему контуру, нагружена равномерно распределенным давлением p, тогда

$$\vartheta_1 = \rho - \rho^3;$$

$$\chi_1 = \sqrt{3 - 12\rho^2 + 13\rho^4};$$

$$J_1 = \int_0^1 (3 - 12\rho^2 + 13\rho^4)^{\frac{m+1}{2}} \rho\, d\rho$$

или

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 (3 - 12\rho_1 + 13\rho_1^2)^{\frac{m+1}{2}} d\rho_1,$$

где

$$\rho_1 = \rho^2;$$

$$J_2 = \frac{pr_2}{24};$$

$$w_p = \frac{Cr_2}{4}(1 - \rho^2)^2;$$

$$w_{p\max} = \frac{Cr_2}{4} = \frac{3^{\frac{n+1}{2}} (2n+1)^n r_2^{2(n+1)}}{4n^n h^{2n+1}} \left(\frac{P}{24J_1}\right)^n \Omega.$$

Случай 3. Круглая пластина, опертая по внешнему контуру, нагружена сосредоточенной силой P, приложенной в центре, тогда

$$\vartheta_1 = \frac{2}{3}\rho - \rho \ln \rho;$$

$$\chi_1 = \sqrt{\frac{1}{3} - \ln \rho + 3 \ln^2 \rho};$$

$$J_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \ln \rho + 3 \ln^2 \rho\right)^{\frac{m+1}{2}} \rho\, d\rho;$$

$$J_2 = \frac{7P}{24\pi r_2};$$

$$w_p = \frac{Cr_2}{12}(7 - 7\rho^2 + 6\rho^2 \ln \rho);$$

$$w_{p\max} = \frac{7}{12} Cr_2 = \frac{7 \cdot 3^{\frac{n+1}{2}} (2n+1)^n r_2^2}{12n^n h^{2n+1}} \left(\frac{7P}{24\pi J_1}\right)^n \Omega.$$

Случай 4. Круглая пластина, заделанная по внешнему контуру, нагружена сосредоточенной силой P, приложенной в центре, тогда

$$\vartheta_1 = -\rho \ln \rho;$$

$$\chi_1 = \sqrt{1 + 3\ln\rho + 3\ln^2\rho};$$

$$J_1 = \int_0^1 (1 + 3\ln\rho + 3\ln^2\rho)^{\frac{m+1}{2}} \rho d\rho;$$

$$J_2 = \frac{P}{8\pi r_2};$$

$$w_p = \frac{Cr_2}{4}(1 - \rho^2 + 2\rho^2 \ln\rho);$$

$$w_{p\max} = \frac{Cr_2}{4} = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}(2n+1)^n r_2^2}{4n^n h^{2n+1}} \left(\frac{P}{8\pi J_1}\right)^n \Omega.$$

Случай 5. Кольцевая пластина, опертая по внутреннему контуру, нагружена силой P, равномерно распределенной по внешнему контуру, тогда

$$\vartheta_1 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left(\rho + \frac{3}{\rho}\right)\ln\alpha + \rho\ln\rho - \frac{2}{3}\rho.$$

Напомним, что здесь через α обозначено отношение внутреннего радиуса к наружному

$$\chi_1 = \sqrt{a\ln^2\rho + b\ln\rho + \frac{c}{\rho^4} + \frac{d}{\rho^2} + f},$$

где

$$a = 3; \quad b = \frac{6\alpha^2}{1-\alpha^2}\ln\alpha - 1; \quad c = \frac{9\alpha^4}{(1-\alpha^2)^2}\ln^2\alpha;$$

$$d = -\frac{3\alpha^2}{1-\alpha^2}\ln\alpha; \quad f = \frac{3\alpha^4}{(1-\alpha^2)^2}\ln^2\alpha - \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\ln\alpha + \frac{1}{3};$$

$$J_1 = \int_\alpha^1 \left(a\ln^2\rho + b\ln\rho + \frac{c}{\rho^4} + \frac{d}{\rho^2} + f\right)^{\frac{m+1}{2}} \rho\, d\rho;$$

$$J_2 = K\frac{P}{24\pi r_2},$$

где

$$K = \frac{36\alpha^2}{1-\alpha^2}\ln^2\alpha + 7(1-\alpha^2);$$

$$w_p = Cr_2\left[\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\ln\alpha\left(\frac{\alpha^2-\rho^2}{2} + 3\ln\frac{\alpha}{\rho}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \frac{\rho^2}{2}\ln\rho - \frac{7}{12}(\alpha^2-\rho^2)\right];$$

$$w_{p\max} = \frac{K}{12}Cr_2 = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}(2n+1)^n K^{n+1} r_2^2}{12n^n h^{2n+1}}\left(\frac{P}{24\pi J_1}\right)^n \Omega.$$

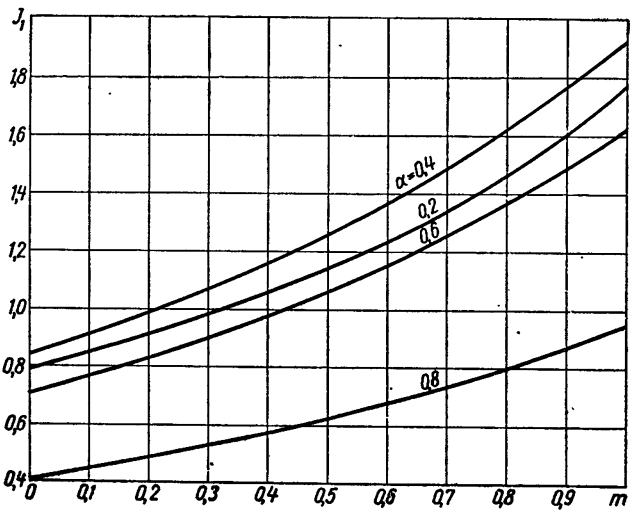
По выведенной формуле для J_1 при помощи численного интегрирования были подсчитаны величины J_1 для различных значений m и α. Результаты подсчетов сведены в табл. 41. На фиг. 684 представлены графики зависимостей J_1 от m при различных значениях α, а на фиг. 685 — графики зависимостей J_1 от α при различных значениях m.

Таблица 41

Величины интеграла J_1 для кольцевой пластины

m	n	Случай 5			
		$\alpha=0{,}2$	$\alpha=0{,}4$	$\alpha=0{,}6$	$\alpha=0{,}8$
0,0	∞	0,796	0,843	0,705	0,412
0,2	5,00	0,910	0,986	0,831	0,487
0,4	2,50	1,06	1,16	0,980	0,575
0,6	1,67	1,24	1,37	1,16	0,680
0,8	1,25	1,47	1,63	1,37	0,804
1,0	1,00	1,78	1,94	1,63	0,951

Результаты, полученные при рассмотрении этого случая для больших значений α, например для $\alpha=0{,}6$ и $\alpha=0{,}8$, интересно сопоставить с результатами приближенного решения этой задачи, в котором используется гипотеза о том, что при деформации пластины ее осевое сечение не деформируется, а поворачивается, как жесткое целое.



Фиг. 684. Графики зависимостей интеграла J_1 от величины m для кольцевой пластины

Решение рассматриваемой задачи на основе этой гипотезы было дано в предыдущем параграфе. Согласно формулам (120), (123) и (125) по теории кольца получаем

$$w_{p\max}=\frac{2(n-1)^n(2n+1)^n(1-\alpha)^{n+1}r_2^2}{\pi^n n^{2n}\left(1-\alpha^{\frac{n-1}{n}}\right)^n h^{2n+1}}P^n\Omega_*$$

Чтобы сопоставить этот результат с выражением для максимального прогиба, возникшего в результате ползучести материала по теории пластин, обозначим

$$R = \frac{(2n+1)^n r_2^2}{2^n \pi^n n^n h^{2n+1}} P^n \Omega,$$

тогда по теории кольца

$$w_{p\,\max} = \xi_1 R,$$

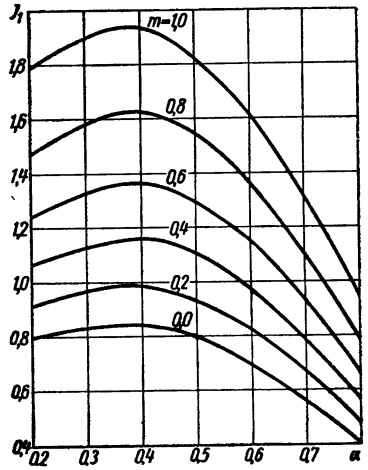
а по теории пластин

$$w_{p\,\max} = \xi_2 R,$$

где

$$\xi_1 = \frac{2^{n+1}(n-1)^n (1-\alpha)^{n+1}}{n^n \left(1-\alpha^{\frac{n-1}{n}}\right)^n};$$

$$\xi_2 = \frac{K^{n+1}}{3^{\frac{n+1}{2}} 4^{n+1} J_1^n}.$$



Фиг. 685. Графики зависимости интеграла J_1 от величины α для кольцевой пластины

В табл. 42 приведены величины коэффициентов ξ_1 и ξ_2, подсчитанных для различных значений n при $\alpha=0{,}6$ и $\alpha=0{,}8$. Из рассмотрения табл. 42 следует, что величины ξ_1 и ξ_2 при $\alpha=0{,}8$ почти не отличаются друг от друга. При $\alpha=0{,}6$ различие между ними, как и следовало ожидать, несколько больше, причем с увеличением показателя степени n оно уменьшается, однако и в этом случае отличие коэффициентов ξ_1 и ξ_2 друг от друга весьма незначительно. Поэтому можно считать, что при $\alpha=0{,}6$ и выше расчеты по теории кольца и по теории пластин практически совпадают.

Таблица 42

Сопоставление точного и приближенного расчетов кольцевой пластины

m	n	$\alpha=0{,}6$		$\alpha=0{,}8$	
		ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
0,2	5,00	20,2	19,8	11,5	11,5
0,4	2,50	3,57	3,49	2,03	2,02
0,6	1,67	2,00	1,95	1,14	1,13
0,8	1,25	1,49	1,46	0,855	0,849
1,0	1,00	1,25	1,22	0,717	0,713

Отметим, что рассмотренные выше первые четыре примера решены Л. М. Качановым [2] на основе разработанных им вариационных методов теории ползучести.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, ГИТТЛ, 1958.
2. Качанов Л. М., Некоторые вопросы теории ползучести, ГИТТЛ, 1949.
3. Малинин Н. Н., Расчеты на растяжение, изгиб и кручение при крипе, «Вестник машиностроения» № 9—10, 1945.

4. Малинин Н. Н., Крип при сложном напряженном состоянии, «Вестник машиностроения» № 11—12, 1945.

5. Малинин Н. Н., Основы расчетов на ползучесть, **Машгиз, 1948.**

6. Малинин Н. Н., Ползучесть кольца прямоугольного поперечного сечения, «Труды Московского авиационного института имени Серго Орджоникидзе, вып. 17, Оборонгиз, 1952.

7. Малинин Н. Н., Установившаяся ползучесть круглых симметрично нагруженных пластин, Московское высшее техническое училище имени Баумана, «Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций», Машгиз, 1953.

8. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. (Расчеты при динамической нагрузке. Устойчивость. Ползучесть), Машгиз, 1952.

9. Соколовский В. В., Теория пластичности, ГИТТЛ, 1950.

10. Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, т. II, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1946.

11. Bailey R. W., The utilization of creep test data in ingineering design, «The Institution of mechanical engineers. Proceedings», v. 131, 1935.

12. Marin J., Mechanical properties of materials and design, Mc. Graw-Hill Book Company, 1942.

13. Nadai A., On the creep of solids at elevated temperatures, «Journal of applied physics», v. 8, N 6, 1937.

14. Nadai A., The creep of metals under various stress conditions, «Theodore von Karman anniversary volume. Applied mechanics», California institute of technology, 1941.

ГЛАВА XV

РАСЧЕТЫ ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗМЕНЕННОЙ ГИПОТЕЗЫ ПОЛЗУЧЕСТИ Н. М. БЕЛЯЕВА

В настоящей главе изложено решение в замкнутом виде одного класса одномерных задач неустановившейся ползучести по измененной нами гипотезе ползучести Н. М. Беляева [3]. В дальнейшем будет показано, что к этому классу задач принадлежат задачи о неустановившейся ползучести бруса прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе, брусьев с поперечными сечениями в виде круглого кольца и вытянутого прямоугольника при чистом кручении, толстостенной трубы и полого шара, нагруженных постоянными по наружной и внутренней поверхностям давлениями. Во всех этих задачах компоненты и интенсивности напряжений и деформаций являются функциями некоторой безразмерной координаты ρ и времени t.

Обозначим наибольшие значения интенсивностей напряжений и деформаций в начальный момент времени $t=0$ через $\sigma_{i\,\max}(0)$ и $\varepsilon_{i\,\max}(0)$, тогда, предполагая, что деформации, возникшие при нагружении в начальный момент времени $t=0$, являются упругими, имеем

$$\sigma_{i\,\max}(0) = E\,\varepsilon_{i\,\max}(0). \tag{1}$$

Для удобства выкладок обозначим отношения интенсивностей напряжений σ_i и деформаций ε_i в некоторой точке тела в определенный момент времени к наибольшим значениям интенсивностей напряжений и деформаций в начальный момент времени $\sigma_{i\,\max}(0)$ и $\varepsilon_{i\,\max}(0)$ через η_i и ξ_i соответственно:

$$\eta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_{i\,\max}(0)}; \quad \xi_i = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i\,\max}(0)}. \tag{2}$$

Введем безразмерное время χ по формуле

$$\chi = E\,\sigma_{i\,\max}^{n-1}(0)\,\Omega. \tag{3}$$

В гл. XII т. II отмечалось, что при $t=0$, $\Omega=0$. Поэтому при $t=0$ $\chi=0$.

Заметим, что величины η_i и ξ_i являются функциями ρ и χ.

Используя соотношения (1)—(3), преобразуем основное уравнение измененной гипотезы ползучести Н. М. Беляева [уравнение (28) гл. XIII т. II] к виду

$$\frac{\xi_i}{\eta_i} = 1 + \int_0^{\chi} \eta_i^{n-1}\,d\chi. \tag{4}$$

Дифференцируя уравнение (4) по χ, имеем

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \chi} - \frac{1}{\xi_i} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial \chi} \eta_i + \frac{\eta_i^{n+1}}{\xi_i} = 0. \tag{5}$$

Таким образом, для нахождения η_i как функции безразмерного времени χ (при постоянном ρ) получено дифференциальное уравнение Бернулли (5). Интеграл его имеет вид

$$\eta_i = \xi_i \left(C + n \int_0^{\chi} \xi_i^{n-1} d\chi \right)^{-\frac{1}{n}}. \tag{6}$$

где C — некоторая функция ρ.

Функцию C можно определить из начального условия. Как следует из формулы (4), при $t=0$, $\chi=0$, $\eta_i=\xi_i$ и поэтому $C=1$, тогда уравнение (6) принимает вид

$$\eta_i = \xi_i \left(1 + n \int_0^{\chi} \xi_i^{n-1} d\chi \right)^{-\frac{1}{n}}. \tag{7}$$

§ 2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Назовем, следуя Л. М. Качанову [1], основной задачей такую, в которой на части поверхности тела заданы постоянные во времени напряжения, а другая часть поверхности свободна от них. Релаксационной будем считать такую задачу, в которой на части поверхности тела заданы постоянные во времени перемещения, а другая часть поверхности свободна от напряжений, причем объемные силы равны нулю.

Анализ решения некоторых задач неустановившейся ползучести показал, что в ряде случаев величина ξ_i может быть представлена в виде

$$\xi_i = |\beta| \rho^a, \tag{8}$$

а использование уравнений равновесия и краевых условий приводит к соотношению

$$\int_l^m \eta_i \rho^b d\rho = q, \tag{9}$$

В формулах (8) и (9) ρ — некоторая положительная безразмерная координата; a, b, l, m — постоянные величины, причем $m > l \geqslant 0$

В основной задаче β — функция безразмерного времени, подлежащая определению, причем $\beta(0)=1$, а q — известная постоянная положительная величина. В релаксационной задаче $|\beta|=1$, а q — положительная функция безразмерного времени, подлежащая определению, причем начальное значение функции $q(0)$ известно.

Рассмотрим вначале решение основной задачи. Подставляя выражение (8) в уравнение (7), получим

$$\eta_i = |\beta| \rho^a \left[1 + n\rho^{a(n-1)} \Phi \right]^{-\frac{1}{n}}, \tag{10}$$

где Φ — положительная функция безразмерного времени χ.

$$\Phi = \int_0^{\chi} |\beta|^{n-1} d\chi, \tag{11}$$

причем $\Phi(0)=0$.

Используя уравнение (10), преобразуем выражение (9) к виду

$$\int_l^m \rho^{a+b} \left[1 + n\rho^{a(n-1)}\Phi\right]^{-\frac{1}{n}} d\rho = q\,|\beta|^{-1}. \tag{12}$$

По формуле (10) может быть найдена величина безразмерной интенсивности напряжений в произвольной точке тела для любого значения времени, если известны функции безразмерного времени β и Φ.

Для определения функций β и Φ продифференцируем уравнение (12) по Φ:

$$\int_l^m \rho^{an+b} \left[1 + n\rho^{a(n-1)}\Phi\right]^{-\frac{1}{n}-1} d\rho = q\,|\beta|^{-\frac{1}{n}} \frac{d|\beta|}{d\Phi}. \tag{13}$$

Интегрируя левую часть равенства (13) по частям и используя соотношение (12), после преобразований имеем

$$\frac{d|\beta|}{d\Phi} - \frac{a+b+1}{a(n-1)} \cdot \frac{|\beta|}{\Phi} + \frac{1}{qa(n-1)\Phi}\left\{m^{a+b+1}\left[1 + nm^{a(n-1)}\Phi\right]^{-\frac{1}{n}} - l^{a+b+1}\left[1 + nl^{a(n-1)}\Phi\right]^{-\frac{1}{n}}\right\}|\beta|^2 = 0. \tag{14}$$

Таким образом, для определения $|\beta|$ как функции Φ получено дифференциальное уравнение Бернулли (14). Интеграл его имеет вид

$$|\beta| = \frac{\Phi^{\frac{a+b+1}{a(n-1)}}}{C + \frac{\Psi}{qa(n-1)}}, \tag{15}$$

где Ψ — функция Φ определяемая равенством

$$\Psi = \int_0^{\Phi} \Phi^{\frac{a+b+1}{a(n-1)}-1}\left\{m^{a+b+1}\left[1 + nm^{a(n-1)}\Phi\right]^{-\frac{1}{n}} - l^{a+b+1}\left[1 + nl^{a(n-1)}\Phi\right]^{-\frac{1}{n}}\right\} d\Phi; \tag{16}$$

C — постоянная интегрирования.

Очевидно, что $\Psi(0)=0$.

Постоянную интегрирования C можно определить из начального условия: при $t=0$, $\chi=0$, $\Phi=0$, $\Psi=0$, $|\beta|=1$. Поэтому $C=0$ и, следовательно,

$$|\beta| = qa(n-1)\frac{\Phi^{\frac{a+b+1}{a(n-1)}}}{\Psi}. \tag{17}$$

Вспоминая, что $n > 1$, $q > 0$, $\Phi > 0$, из формулы (17) заключаем что

$$\Psi a^{-1} > 0.$$

Дифференцируя выражение (11) по χ, имеем

$$\frac{d\Phi}{d\chi} = |\beta|^{n-1}. \tag{18}$$

Из выражений (17) и (18) устанавливаем

$$\frac{d\Phi}{d\chi} = (n-1)^{n-1} q^{n-1} \frac{\Phi^{\frac{a+b+1}{a}}}{(\Psi a^{-1})^{n-1}}. \tag{19}$$

Проинтегрируем это уравнение, принимая во внимание, что $\Phi(0) = 0$, тогда получим

$$\chi = \frac{1}{q^{n-1}(n-1)^{n-1}} \int_0^{\Phi} \frac{(\Psi a^{-1})^{n-1}}{\Phi^{\frac{a+b+1}{a}}} d\Phi. \tag{20}$$

Формулы (17), (20) и (16) определяют функции β и Φ.

Отметим, что при некоторых значениях a, b и n интеграл (16) выражается через элементарные функции, в общем же случае интегрирование выполняется численным методом.

При

$$\frac{a+b+1}{a(n-1)} < 1$$

подинтегральная функция в выражении (16) обращается в бесконечность для $\Phi = 0$. Если интеграл (16) не выражается через элементарные функции, то для численного его определения удобно преобразовать выражение (16), выполнив интегрирование по частям, тогда получим

$$\Psi = \frac{a(n-1)}{a+b+1} \Phi^{\frac{a+b+1}{a(n-1)}} \left\{ m^{a+b+1} \left[1 + nm^{a(n-1)} \Phi\right]^{-\frac{1}{n}} - \right.$$

$$\left. - l^{a+b+1} \left[1 + nl^{a(n-1)} \Phi\right]^{-\frac{1}{n}} \right\} +$$

$$+ \frac{a(n-1)}{a+b+1} \int_0^{\Phi} \Phi^{\frac{a+b+1}{a(n-1)}} \left\{ m^{an+b+1} \left[1 + nm^{a(n-1)} \Phi\right]^{-\frac{1}{n}-1} - \right.$$

$$\left. - l^{an+b+1} \left[1 + nl^{a(n-1)} \Phi\right]^{-\frac{1}{n}-1} \right\} d\Phi. \tag{21}$$

Значение подинтегральной функции в выражении (20) при $\Phi = 0$ получим из формул (18) и (19), учитывая, что $|\beta(0)| = 1$,

$$\left. \frac{(\Psi a^{-1})^{n-1}}{\Phi^{\frac{a+b+1}{a}}} \right|_{\Phi=0} = (n-1)^{n-1} q^{n-1}. \tag{22}$$

Перейдем теперь к решению релаксационной задачи. В этом случае $|\beta|=1$. Поэтому согласно формуле (11) численное значение функции Φ равно численному значению безразмерного времени $\Phi=\chi$. Тогда из уравнения (10) имеем

$$\eta_i = \rho^a \left[1 + n\rho^{a(n-1)}\chi\right]^{-\frac{1}{n}}. \tag{23}$$

Найдем изменение величины q во времени. Подставляя выражение (23) в соотношение (9), устанавливаем

$$\int_l^m \rho^{a+b}\left[1 + n\rho^{a(n-1)}\chi\right]^{-\frac{1}{n}} d\rho = q. \tag{24}$$

Продифференцируем выражение (24) по χ, тогда

$$-\int_l^m \rho^{an+b}\left[1 + n\rho^{a(n-1)}\chi\right]^{-\frac{1}{n}-1} d\rho = \frac{dq}{d\chi}.$$

Проинтегрируем по частям левую часть этого равенства, используя соотношение (23). После преобразований получим

$$\frac{dq}{d\chi} + \frac{a+b+1}{a(n-1)}\cdot\frac{q}{\chi} - \frac{1}{a(n-1)\chi}\left\{m^{a+b+1}\left[1 + nm^{a(n-1)}\chi\right]^{-\frac{1}{n}} - l^{a+b+1}\left[1 + nl^{a(n-1)}\chi\right]^{-\frac{1}{n}}\right\} = 0.$$

Таким образом, для определения q как функции χ получено линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Интеграл его имеет вид

$$q = \frac{C + \frac{\Psi_1}{a(n-1)}}{\chi^{\frac{a+b+1}{a(n-1)}}}, \tag{25}$$

где

$$\Psi_1 = \int_0^{\Phi} \Phi^{\frac{a+b+1}{a(n-1)}-1}\left\{m^{a+b+1}\left[1 + nm^{a(n-1)}\Phi\right]^{-\frac{1}{n}} - l^{a+b+1}\left[1 + nl^{a(n-1)}\Phi\right]^{-\frac{1}{n}}\right\} d\Phi. \tag{26}$$

C — постоянная интегрирования. Постоянную C можно определить из начального условия: при $t=0$, $\chi=0$, $\Psi_1=0$, $q=q(0)$ — конечная величина. Поэтому $C=0$ и, следовательно,

$$q = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\Psi_1 a^{-1}}{\chi^{\frac{a+b+1}{a(n-1)}}}. \tag{27}$$

Формула (27) определяет функцию безразмерного времени q.

Заметим, что Ψ_1 — такая же функция безразмерного времени χ, как Ψ функция Ф.

Перейдем теперь к рассмотрению частных случаев изложенного выше общего решения одного класса одномерных задач неустановившейся ползучести.

§ 3. ПОЛЗУЧЕСТЬ БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Так же как и в гл. XIV т. II, обозначим через M_x изгибающий момент, b — ширину и h — высоту поперечного сечения.

Рассмотрим вначале основную задачу.

Поскольку при чистом изгибе бруса его поперечные сечения остаются плоскими, линейная деформация в некоторой точке поперечного сечения на расстоянии y от нейтральной оси x определяется формулой

$$\varepsilon_z = y\varkappa, \tag{28}$$

где $\varkappa$ — кривизна оси бруса.

По формуле (28) находим величину наибольшей деформации в начальный момент времени:

$$\varepsilon_{z\max}(0) = \varkappa(0)\frac{h}{2}, \tag{29}$$

где $\varkappa(0)$ — кривизна бруса при $t=0$.

Величина $\varkappa(0)$ может быть определена по известной формуле

$$\varkappa(0) = \frac{12M_x}{Ebh^3}. \tag{30}$$

Введем безразмерные величины

$$\beta = \frac{\varkappa}{\varkappa(0)}; \quad \zeta = \frac{y}{\frac{h}{2}}. \tag{31}$$

Очевидно, что $\beta > 0$ и, следовательно $|\beta| = \beta$. Для одноосного напряженного состояния, как это уже отмечалось в гл. XIV т. II,

$$\sigma_i = |\sigma_z|. \tag{32}$$

Если принять материал несжимаемым, то и

$$\varepsilon_i = |\varepsilon_z|. \tag{33}$$

Согласно формулам (32) и (33) имеем

$$\sigma_{i\max}(0) = \sigma_{z\max}(0); \quad \varepsilon_{i\max}(0) = \varepsilon_{z\max}(0), \tag{34}$$

где

$$\sigma_{z\max}(0) = \frac{6M_x}{bh^2} \tag{35}$$

наибольшее нормальное напряжение в начальный момент времени.

Из соотношений (2), (32), (33) и (34) получим

$$\eta_i = |\eta_z|; \quad \xi_i = |\xi_z|. \tag{36}$$

Здесь

$$\eta_z = \frac{\sigma_z}{\sigma_{z\max}(0)}; \quad \xi_z = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_{z\max}(0)}, \tag{37}$$

причем

$$\operatorname{sign}\sigma_z = \operatorname{sign}\varepsilon_z = \operatorname{sign}\eta_z = \operatorname{sign}\xi_z = \operatorname{sign}\zeta. \tag{38}$$

Из формул (36), (37), (28), (29) и (31) устанавливаем, что

$$\xi_i = \beta\rho, \tag{39}$$

где

$$\rho = |\zeta|. \tag{40}$$

В рассматриваемом частном случае прямоугольного поперечного сечения выражение для изгибающего момента (см. гл. XIV т. II) запишется следующим образом:

$$M_x = 2b\int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_z y dy, \tag{41}$$

тогда из соотношений (41), (37), (35), (31) и (40) получим

$$\int_0^1 \eta_i \rho d\rho = \frac{1}{3}. \tag{42}$$

Сопоставляя формулы (39) и (8), а также (42) и (9), заключаем, что в рассматриваемой задаче

$$a = 1; \quad b = 1; \quad l = 0; \quad m = 1; \tag{43}$$

$$q = \frac{1}{3}, \tag{44}$$

поэтому функции β и Φ определяются из зависимостей (17), (20) и (16) с использованием выражений (43) и (44). Эпюра безразмерных напряжений строится по формулам (10), (36) и (43). Кривизна для любого значения времени вычисляется по первой формуле (31).

Переходим к рассмотрению релаксационной задачи. Предположим, что кривизна бруса в течение времени не изменяется:

$$\varkappa = \varkappa(0)$$

и согласно первой формуле (31)

$$\beta = 1. \tag{45}$$

Изгибающий момент при $t=0$

$$M_x(0) = \sigma_{z\max}(0)\frac{bh^2}{6}, \tag{46}$$

Из выражений (41) и (46), используя формулы (37), (36), (31) и (40), получаем

$$\int_0^1 \eta_i \rho d\rho = \frac{\lambda}{3}, \tag{47}$$

где

$$\lambda = \frac{M_x}{M_x(0)}. \qquad (48)$$

Сопоставляя выражения (47) и (9), имеем в рассматриваемом случае

$$q = \frac{\lambda}{3}. \qquad (49)$$

Постоянные a, b, l и m, очевидно, те же, что и в решении основной задачи [см. формулы (43)].

Величину изгибающего момента для любого значения времени можно получить из формул (27), (26) с учетом выражений (49), (48) и (43).

Рассмотрим пример расчета на ползучесть бруса прямоугольного поперечного сечения, находящегося в условиях чистого изгиба при постоянном во времени изгибающем моменте (основная задача). Брус равномерно нагрет до температуры 454°. Наибольшее нормальное напряжение в начальный момент времени $\sigma_{z\,\max}(0) = 450$ *кг/см*². Материал бруса — сталь с содержанием углерода 0,35%, кривые простого последействия которой при температуре 454° представлены на фиг. 611, а график функции Ω на фиг. 615. Как было установлено гл. XII т. II величина показателя степени n для этой стали при указанной температуре $n=3{,}44$, а значение модуля упругости $E = 1{,}41 \cdot 10^6$ *кг/см*².

Для получения функции Ψ воспользуемся численным интегрированием. Задаваясь различными значениями Φ, подсчитываем подинтегральную функцию в выражении (16). Обозначим ее через f Используя соотношения (43) и (44), имеем

$$f = \Phi^{\frac{3}{n-1}} (1 + n\Phi)^{-\frac{1}{n}}.$$

Величины f приведены в табл. 43. Выполнив теперь численное интегрирование функции f, получаем функцию Ψ. Значения последней внесены в табл. 44.

Таблица 43

К расчету на ползучесть бруса прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе (значения функции f)

Φ	f	Φ	f	Φ	f	Φ	f
0,00	0	0,40	0,6301	5,0	0,6226	40	0,5560
0,02	0,3995	0,60	0,6422	6,0	0,6174	50	0,5486
0,04	0,4602	0,80	0,6468	7,0	0,6127	60	0,5427
0,06	0,4965	1,0	0,6485	8,0	0,6085	70	0,5377
0,08	0,5220	1,5	0,6474	9,0	0,6048	80	0,5335
0,10	0,5408	2,0	0,6432	10	0,6014	90	0,5297
0,15	0,5731	3,0	0,6356	20	0,5789	100	0,5262
0,20	0,5938	4,0	0,6287	30	0,5655		

Для получения зависимости Φ от χ следует произвести численное интегрирование в выражении (20). Задаваясь различными значениями Φ, подсчитываем подинтегральную функцию F в выражении (20), которая после использования соотношений (43) и (44) принимает вид

$$F = \frac{\Psi^{n-1}}{\Phi^3}.$$

Значения функции Ψ, необходимые для подсчетов, берем из табл. 44. Согласно формулам (22) и (44)

$$F(0) = \left(\frac{n-1}{3}\right)^{n-1} = 0{,}6035.$$

Таблица 44

К расчету на ползучесть бруса прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе (значения функций Ψ, χ, Ω, t, β)

Φ	Ψ	χ	Ω $(см^2/кг)^n 10^{12}$	t в час.	β	Φ	Ψ	χ	Ω $(см^2/кг)^n 10^{12}$	t в час.	β
0	0,0000	0,0000	0,0000	0	1,000	10	6,209	2,769	0,6615	420	2,224
0,2	0,1001	0,1665	0,03978	—	1,122	20	12,10	3,891	0,9296	850	2,678
0,4	0,2230	0,3082	0,07362	—	1,182	30	17,82	4,679	1,118	1290	2,994
0,6	0,3503	0,4341	0,1037	—	1,239	40	23,43	5,306	1,268	1670	3,243
0,8	0,4792	0,5470	0,1307	35	1,290	50	28,95	5,833	1,394	2040	3,444
1	0,6087	0,6499	0,1553	40	1,336	60	34,41	6,292	1,503	2385	3,638
2	1,256	1,071	0,2559	80	1,519	70	39,81	6,701	1,601	2710	3,800
4	2,527	1,665	0,3978	165	1,771	80	45,17	7,070	1,689	3000	3,947
6	3,773	2,104	0,5026	250	1,953	90	50,49	7,410	1,770	3250	4,080
8	4,999	2,462	0,5882	340	2,101	100	55,77	7,723	1,845	3500	4,206

Величины F сведены в табл. 45. В результате численного интегрирования функции F устанавливаем безразмерное время χ, соответствующее определенным значениям Φ (см. табл. 44). Располагая величинами безразмерного времени, можно по формулам (3) и (34) определить функцию Ω, а затем при помощи графика этой функции (см. фиг. 618) установить и время t. Значения Ω и t также указаны в табл. 44.

Таблица 45

К расчету на ползучесть бруса прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе (значения функции F)

Φ	F	Φ	F	Φ	F
0,0	0,06035	4	0,1500	50	0,02948
0,2	0,4550	6	0,1182	60	0,02600
0,4	0,4016	8	0,09908	70	0,02337
0,6	0,3581	10	0,08609	80	0,02131
0,8	0,3244	20	0,05481	90	0,01964
1	0,2978	30	0,04178	100	0,01825
2	0,2180	40	0,03436		

Функцию β подсчитываем по формуле (17). Величины β приведены в табл. 44. На основании данных табл. 44 на фиг. 686 представлен график функции β (линия *1*). Напомним, что величина β пропорциональна кривизне балки [первая формула (31)]. Из графика на фиг. 686 следует, что за время, равное 3500 час., кривизна балки увеличивается в 4,2 раза по сравнению с кривизной, возникшей при нагружении в начальный момент времени. На фиг. 687 по формулам (10), (36) и (43) в безразмерных координатах (ζ, η_z) построены эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении балки в начальный момент времени $t=0$ и для значений времени $t=80$ час. и $t=3500$ час.

Приведем решение этого примера в предположении установившейся ползучести.

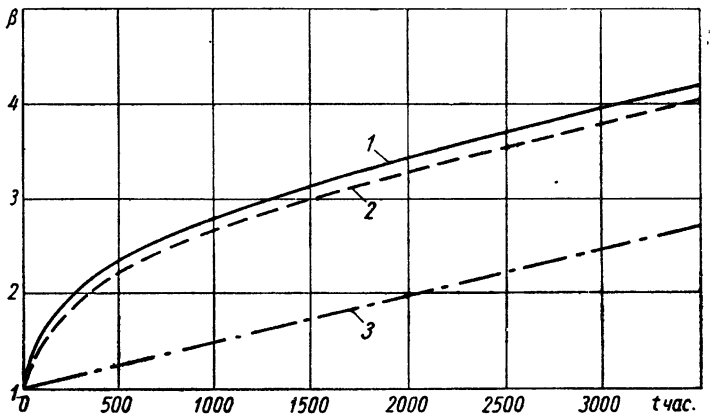
Отметим, что кривизна балки слагается из кривизны, возникающей при нагружении $\varkappa(0)$, и кривизны, образующейся в результате ползучести материала $\varkappa_p$:

$$\varkappa = \varkappa(0) + \varkappa_p. \tag{50}$$

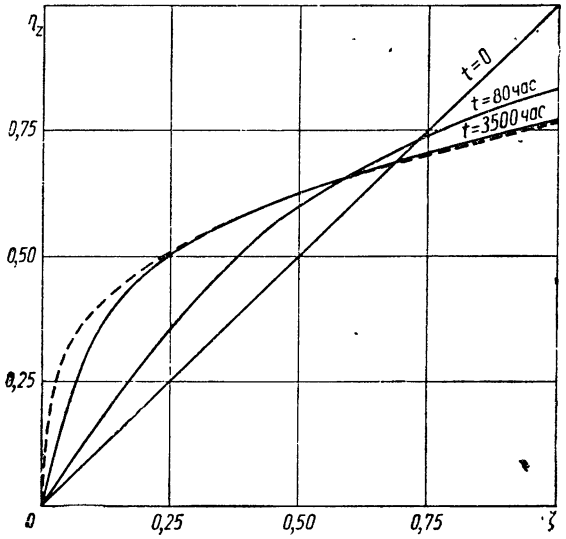
Если деформации при нагружении упругие, то кривизна $\varkappa(0)$ определяется формулой (30). Кривизна $\varkappa_p$ вычисляется по формуле (13) гл. XIV т. II.

Выражение (50) с использованием соотношений (31), (30), (3), (34) и (35), а также формул (13), (15) и (16) гл. XIV т. II приводятся к виду

$$\beta = 1 + \left(\frac{2n+1}{3n}\right)^n \chi. \tag{51}$$



Фиг. 686. График функции β для балки прямоугольного поперечного сечения, находящейся в условиях чистого изгиба, по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева в случае неустановившейся ползучести (линия *1*), в случае установившейся ползучести (линия *2*), в случае установившейся ползучести в предположении постоянной скорости (линия *3*)



Фиг. 687. Эпюры безразмерных нормальных напряжений в поперечном сечении прямоугольной балки для различных значений времени, полученные по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева в случае неустановившейся ползучести (сплошные линии) и в случае установившейся ползучести (штриховая линия)

С помощью формул (51), (3) и (34) и графика функции Ω можно определить величину β для любого значения времени. По формуле (51), используя данные табл. 44, на фиг. 686 построен график функции β (линия *2*). Для случая установившейся ползучести при постоянной скорости зависимость β от t можно установить по уравнению (51), принимая во внимание формулы (3) и (34) и учитывая, что при постоянной скорости

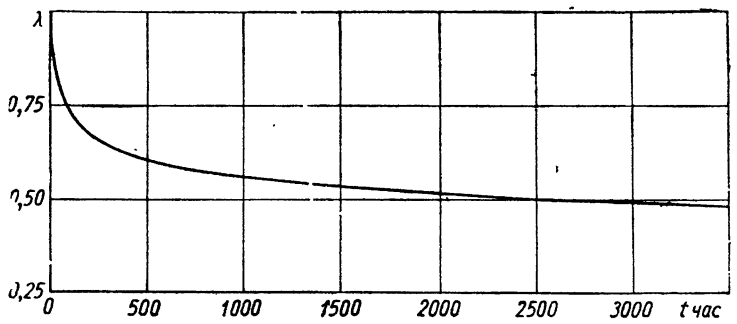
$$\Omega = kt,$$

тогда получаем

$$\beta = 1 + \left(\frac{2n+1}{3n}\right)^n E\,\sigma_{\max}^{n-1}(0)\,kt.$$

На фиг. 686 построен график этой функции (линия *3*). Коэффициент k для материала бруса при заданной температуре 454° $k = 3{,}10 \cdot 10^{-16} \left(\frac{см^2}{кг}\right)^n \Big/ час$ (см. табл. 32).

Как следует из фиг. 686, использование предположения постоянной скорости ведет к значительной погрешности в определении кривизны, в то время как предположение установившейся ползучести дает сравнительно небольшую погрешность. Последняя



Фиг. 688. График зависимости безразмерного изгибающего момента $\lambda = \frac{M_x}{M_x(0)}$ от времени

уменьшается с увеличением времени. В рассматриваемом примере для величины β погрешность решения, выполненного в предположении установившейся ползучести при $t = 40$ час., составляет 5,9%, а при $t = 3500$ час. 3,6%.

Закон изменения нормальных напряжений при установившейся ползучести может быть получен из формул (14), (15) и (16) гл. XIV т. II с учетом соотношений (37), (35) и (31):

$$\eta_z = \operatorname{sign}\zeta \frac{2n+1}{3n} |\zeta|^{\frac{1}{n}}.$$

На фиг. 687 по этой формуле в безразмерных координатах (ζ, η_z) построена эпюра нормальных напряжений при установившейся ползучести бруса (штриховая линия). Как следует из фиг. 687, в поперечном сечении бруса в течение времени происходит перераспределение напряжений, причем эпюра напряжений все более и более приближается к эпюре при установившейся ползучести и уже для значения времени $t = 3500$ час. весьма слабо отличается от нее.

Рассмотрим теперь пример релаксационной задачи. Предположим, что кривизна балки во времени постоянна. Найдем закон изменения во времени изгибающего момента. В таких условиях находится, например, прямоугольная проволока пружины кручения, нагретой до некоторой температуры и закрученной на определенный угол, величина которого не изменяется во времени.

Допустим, что материал бруса, температура и наибольшее нормальное напряжение такие же, как и в предыдущем примере.

Закон изменения изгибающего момента во времени определяется по формулам (27), (49), (48) и (43). Если учесть, что Ψ_1 является такой же функцией χ, как Ψ функцией Φ, то представляется возможным использовать произведенные в предыдущем примере подсчеты. На фиг. 688 по указанным уравнениям с учетом формул (3) и (34), график функции Ω и данных табл. 44 построена кривая, выражающая зависимость λ от t и характеризующая закон изменения во времени изгибающего момента. Как следует из фиг. 688, за время, равное 3500 час., изгибающий момент уменьшается на 52%.

§ 4. ПОЛЗУЧЕСТЬ БРУСА КОЛЬЦЕВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ЧИСТОМ КРУЧЕНИИ

Так же как и в гл. XIV т. II, обозначим через $M_к$ крутящий момент, D и d — наружный и внутренний диаметры поперечного сечения.

Рассмотрим вначале основную задачу.

При чистом кручении кольцевого бруса поперечное сечение его остается плоским, а радиусы прямолинейными. Следовательно, угловая деформация γ_{zt} в точке поперечного сечения на расстоянии r от центра определяется зависимостью

$$\gamma_{zt} = r\theta, \tag{52}$$

где θ — относительный угол закручивания бруса.

По формуле (52) можно вычислить величину наибольшей угловой деформации в начальный момент времени:

$$\gamma_{zt\,\max}(0) = \theta(0)\frac{D}{2}, \tag{53}$$

где $\theta(0)$ — относительный угол закручивания при $t=0$;

D — диаметр сечения.

Величина $\theta(0)$ определяется по формуле

$$\theta(0) = \frac{96M_к}{E\pi(D^4 - d^4)} \tag{54}$$

(при повышенных температурах $\mu \approx 0{,}5$ и поэтому принято $G=\frac{E}{3}$).

Введем безразмерные величины

$$\beta = \frac{\theta}{\theta(0)}; \quad \rho = \frac{r}{\frac{D}{2}}; \quad \alpha = \frac{d}{D}, \tag{55}$$

Очевидно, что $\beta > 0$ и, следовательно, $|\beta| = \beta$.

Поскольку в рассматриваемой задаче все компоненты напряжений и деформаций за исключением τ_{zt} и γ_{zt} равны нулю, из выражений (49) и (50) гл. XIII т. II получим

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,\tau_{zt}; \quad \varepsilon_i = \frac{\gamma_{zt}}{\sqrt{3}}. \tag{56}$$

Согласно формулам (53) имеем

$$\sigma_{i\,\max}(0) = \sqrt{3}\,\tau_{zt\,\max}(0); \quad \varepsilon_{i\,\max}(0) = \frac{\gamma_{zt\,\max}(0)}{\sqrt{3}}, \tag{57}$$

где

$$\tau_{zt\,\max}(0) = \frac{16M_кD}{\pi(D^4 - d^4)} \tag{58}$$

наибольшее касательное напряжение в начальный момент времени.

Из соотношений (2), (57) и (58) устанавливаем

$$\eta_i = \eta_{zt}; \quad \xi_i = \xi_{zt}, \tag{59}$$

где

$$\eta_{zt} = \frac{\tau_{zt}}{\tau_{zt\,\max}}; \quad \xi_{zt} = \frac{\gamma_{zt}}{\gamma_{zt\,\max}(0)}. \tag{60}$$

После преобразований с учетом формул (59), (60), (52), (53) и (55) имеем

$$\xi_i = \beta\rho. \tag{61}$$

Крутящий момент $M_к$ связан с напряжением τ_{zt} соотношением (23) гл. XIV т. II. Подставим в это выражение напряжение τ_{zt} по формуле (60), тогда, используя зависимости (58), (55) и (59), получим

$$\int_\alpha^1 \eta_i \rho^2 d\rho = \frac{1}{4}. \tag{62}$$

Сопоставляя выражения (61) и (8), а также (62) и (9), заключаем, что в рассматриваемой задаче

$$a = 1; \quad b = 2; \quad l = \alpha; \quad m = 1; \tag{63}$$

$$q = \frac{1}{4}. \tag{64}$$

Следовательно, функции β и Φ определяются по формулам (17), (20) и (16) с использованием зависимостей (63) и (64). Эпюра безразмерных напряжений строится по формулам (10), (59) и (63).

Относительный угол закручивания для любого значения времени находится по первой формуле (55).

В случае релаксационной задачи относительный угол закручивания в течение времени не изменяется [$\theta = \theta(0)$] и согласно первой формуле (55)

$$\beta = 1. \tag{65}$$

Крутящий момент при $t = 0$

$$M_к(0) = \tau_{zt\,\max}(0)\,\frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}. \tag{66}$$

Подставим в выражение (23) гл. XIV т. II напряжение τ_{zt} по формуле (60), тогда, используя соотношения (66), (59) и (55), получим

$$\int_\alpha^1 \eta_i \rho^2 d\rho = \frac{\lambda}{4}; \tag{67}$$

где

$$\lambda = \frac{M_к}{M_к(0)}. \tag{68}$$

Сопоставляя выражения (67) и (9), заключаем, что

$$q = \frac{\lambda}{4}. \tag{69}$$

Постоянные a, b, l и m, очевидно, имеют те же значения, что и в решении основной задачи [см. формулы (63)].

Величину крутящего момента в зависимости от времени можно получить из формул (27) и (26), если учесть соотношения (63), (69), (68) и (66).

§ 5. ПОЛЗУЧЕСТЬ ПРИ ЧИСТОМ КРУЧЕНИИ БРУСА, ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ КОТОРОГО — ВЫТЯНУТЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНИК

Как известно, при кручении некруглого бруса поперечные сечения его не остаются плоскими. Обозначим проекции перемещения некоторой точки бруса с координатами xyz (ось z — ось бруса) на оси координат через u, v и w соответственно.

Зависимости компонентов перемещения u и v от относительного угла закручивания θ имеют вид (см. гл. VIII т. I)

$$u = -\theta yz; \quad v = \theta zx. \tag{70}$$

Угловые деформации связаны с компонентами перемещения формулами (47) гл. II т. I:

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{71}$$

Из выражения (71), учитывая соотношение (70), устанавливаем

$$\gamma_{zy} = \theta x + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = -\theta y + \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{72}$$

Продифференцируем первое уравнение (72) по x, а второе по y и вычтем из первого результата второй, тогда получим условие совместности деформаций:

$$\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - 2\theta = 0. \tag{73}$$

Уравнение равновесия в задаче чистого кручения бруса некруглого сечения имеет вид (см. гл. VIII т. I)

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0. \tag{74}$$

Как отмечалось в гл. XIV т. II, для вытянутого прямоугольника со сторонами $h \gg b$ (фиг. 671) допустимо приближенно считать

$$\tau_{zx} = 0 \tag{75}$$

и согласно формулам (54) гл. XIII т. II

$$\gamma_{zx} = 0. \tag{76}$$

Уравнения (73) и (74) в рассматриваемой задаче на основании соотношений (75) и (76) приводятся к виду

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - 2\theta = 0. \tag{77}$$

Теперь проинтегрируем второе уравнение (77) по x, учитывая, что при $x = 0$ $\tau_{zy} = 0$ и, следовательно, согласно формулам (54) гл. XIII т. II $\gamma_{zy} = 0$, тогда получим

$$\gamma_{zy} = 2\theta x. \tag{78}$$

Из формул (77) и (78) следует, что касательное напряжение τ_{zy} и угловая деформация γ_{zy} являются функциями одной координаты x и времени t.

Рассмотрим вначале основную задачу.

Наибольшую угловую деформацию при $t=0$ получим из формулы (78):

$$\gamma_{zy\,\max}(0) = 2\theta(0)\,b, \tag{79}$$

где $\theta(0)$ — относительный угол закручивания при $t=0$;

b — половина ширины поперечного сечения (см. фиг. 671).

Величина $\theta(0)$ определяется по формуле

$$\theta(0) = \frac{9}{16} \cdot \frac{M_к}{Eb^3h} \tag{80}$$

(при повышенных температурах $\mu=0{,}5$ и поэтому принято $G=\frac{E}{3}$).

Введем безразмерные величины

$$\beta = \frac{\theta}{\theta(0)}; \quad \zeta = \frac{x}{b}. \tag{81}$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае $\beta>0$ и, следовательно, $|\beta| = \beta$.

Полагая в формулах (49) и (50) гл. XIII т. II все компоненты напряжений и деформаций за исключением τ_{zy} и γ_{zy} равными нулю, получаем для рассматриваемой задачи

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,|\tau_{zy}|; \quad \varepsilon_i = \frac{|\gamma_{zy}|}{\sqrt{3}}. \tag{82}$$

Согласно этим формулам имеем

$$\sigma_{i\,\max}(0) = \sqrt{3}\,\tau_{zy\,\max}(0); \quad \varepsilon_{i\,\max}(0) = \frac{\gamma_{zy\,\max}(0)}{\sqrt{3}}, \tag{83}$$

где

$$\tau_{zy\,\max}(0) = \frac{3}{8} \cdot \frac{M_к}{b^2h} \tag{84}$$

наибольшее касательное напряжение в начальный момент времени.

Из соотношений (2), (82) и (83) получаем

$$\eta_i = |\eta_{zy}|; \quad \xi_i = |\xi_{zy}|, \tag{85}$$

где

$$\eta_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{\tau_{zy\,\max}(0)}; \quad \xi_{zy} = \frac{\gamma_{zy}}{\gamma_{zy\,\max}(0)}, \tag{86}$$

причем

$$\operatorname{sign}\tau_{zy} = \operatorname{sign}\gamma_{zy} = \operatorname{sign}\eta_{zy} = \operatorname{sign}\xi_{zy} = \operatorname{sign}x = \operatorname{sign}\zeta. \tag{87}$$

Преобразуя соотношения (85), (86), (78) и (79) с учетом выражений (81), устанавливаем, что

$$\xi_i = \beta\rho, \tag{88}$$

где

$$\rho = |\zeta|. \tag{89}$$

Составим теперь выражение крутящего момента:

$$M_к = \int_{-b}^{b}\int_{-h}^{h} \tau_{zy}\, x\, dx\, dy. \tag{90}$$

Преобразовав соотношение (90) с использованием первой формулы (77), получим

$$M_к = 4h \int_0^b \tau_{zy}\, x\, dx. \tag{91}$$

Из выражений (91) и (84) при использовании соотношений (86), (85), (81) и (89) следует

$$\int_0^1 \eta_i\, \rho\, d\rho = \frac{2}{3}. \tag{92}$$

Сопоставляя выражения (88) и (8), а также (92) и (9), заключаем, что в рассматриваемой задаче

$$a = 1; \quad b = 1; \quad l = 0; \quad m = 1; \tag{93}$$

$$q = \frac{2}{3}, \tag{94}$$

поэтому функции β и Φ могут быть определены по формулам (17), (20) и (16), если использовать выражения (93) и (94). Эпюра безразмерных напряжений строится по формулам (10), (85) и (93).

Относительный угол закручивания находится по первой формуле (81).

Разберем решение релаксационной задачи. В этом случае относительный угол закручивания во времени не изменяется:

$$\theta = \theta(0)$$

и согласно первой формуле (81)

$$\beta = 1. \tag{95}$$

Крутящий момент при $t=0$

$$M_к(0) = \frac{8}{3} \tau_{zy\,\max}(0)\, b^2 h. \tag{96}$$

Из формул (91) и (96), используя соотношения (86), (85), (81) и (89), получаем

$$\int_0^1 \eta_i\, \rho\, d\rho = \frac{2}{3}\lambda, \tag{97}$$

где

$$\lambda = \frac{M_к}{M_к(0)}. \tag{98}$$

Сопоставляя выражения (97) и (9), заключаем, что

$$q = \frac{2}{3}\lambda. \tag{99}$$

Постоянные a, b, l и m, очевидно, те же, что и в решении основной задачи [см. выражения (93)].

Величину крутящего момента для любого значения времени можно получить из формул (27), (26) с учетом выражений (93), (99) и (98).

§ 6. ПОЛЗУЧЕСТЬ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ, НАГРУЖЕННОЙ ВНУТРЕННИМ И ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЯМИ

Так же как и в § 5 гл. XIV т. II, примем, что осевая деформация трубы равна нулю:

$$\varepsilon_z = 0. \tag{100}$$

Зависимости окружной ε_t и радиальной ε_r деформаций от радиального перемещения u определяются формулами (32) и (31) гл. V т. II:

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \tag{101}$$

Введем безразмерные величины

$$\rho = \frac{r}{r_1}; \quad \alpha = \frac{r_2}{r_1}; \tag{102}$$

$$\eta_t = \frac{\sigma_t}{\sigma_{i\max}(0)}; \quad \eta_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_{i\max}(0)}; \quad \eta_z = \frac{\sigma_z}{\sigma_{i\max}(0)}; \tag{103}$$

$$\xi_t = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_{i\max}(0)}; \quad \xi_r = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_{i\max}(0)}; \tag{104}$$

$$\nu = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{u}{\varepsilon_{i\max}(0) r_1}. \tag{105}$$

Отметим, что, используя решение задачи об упругом равновесии толстостенной трубы, нагруженной внутренним и внешним давлениями (см. гл. V т. II), легко получить

$$\sigma_{i\max}(0) = \sqrt{3}\,|p_1 - p_2| \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}, \tag{106}$$

и, следовательно, согласно формуле (1)

$$\varepsilon_{i\max}(0) = \sqrt{3}\,\frac{|p_1 - p_2|}{E} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}. \tag{107}$$

Произведя преобразования формул (101) с использованием выражений (104), (102) и (105), устанавливаем, что

$$\xi_t = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\nu}{\rho}; \quad \xi_r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{d\nu}{d\rho}. \tag{108}$$

Условие несжимаемости материала имеет вид

$$\varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_z = 0.$$

Преобразуем это соотношение, учитывая выражения (100), (104) и (108), тогда получим

$$\frac{d\nu}{d\rho} + \frac{\nu}{\rho} = 0. \tag{109}$$

Интегрируя уравнение (109) по ρ, имеем

$$\nu = \frac{\beta}{\rho}, \tag{110}$$

где β — функция времени.

Выражения (108), принимая во внимание зависимость (110), можно привести к виду

$$\xi_t = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\beta}{\rho^2}; \quad \xi_r = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\beta}{\rho^2}. \tag{111}$$

Из формулы (50) гл. XIII т. II, используя соотношение (100), для рассматриваемой задачи устанавливаем

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon_t^2 - \varepsilon_t \varepsilon_r + \varepsilon_r^2}.$$

Поделив обе части этого соотношения на $\varepsilon_{i\max}(0)$ и учитывая обозначения (2) и (104), находим

$$\xi_i = \frac{2}{3}\sqrt{\xi_t^2 - \xi_t \xi_r + \xi_r^2}. \tag{112}$$

Подставив выражения (111) в формулу (112), можно получить

$$\xi_i = \frac{|\beta|}{\rho^2}. \tag{113}$$

Вспоминая определение ξ_i, заключаем, что

$$|\beta(0)| = 1. \tag{114}$$

Уравнение равновесия элемента трубы [см. уравнение (91) гл. XIV т. II] с использованием выражений (103) и (102) может быть преобразовано к виду

$$\frac{\partial \eta_r}{\partial \rho} + \frac{\eta_r - \eta_t}{\rho} = 0. \tag{115}$$

Из выражений (54) гл. XIII т. II, учитывая соотношение (51) гл. XIII т. II, а также принимая во внимание, что при равномерном нагреве можно положить $\theta = 0$, имеем

$$\sigma_t - \sigma_r = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_t - \varepsilon_r); \tag{116}$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2}. \tag{117}$$

Преобразовав выражения (116) и (117), с помощью формул (2), (103) и (104) получим

$$\eta_t - \eta_r = \frac{2\eta_i}{3\xi_i}(\xi_t - \xi_r); \tag{118}$$

$$\eta_z = \frac{\eta_t + \eta_r}{2}. \tag{119}$$

Сопоставляя зависимости (111) и (113), устанавливаем

$$\xi_t - \xi_r = \operatorname{sign}\beta \sqrt{3}\,\xi_i .$$

Подставив это выражение в соотношение (118), находим

$$\eta_t - \eta_r = \operatorname{sign}\beta \frac{2}{\sqrt{3}}\,\eta_i . \qquad (120)$$

Из формул (115) и (120) имеем

$$\frac{\partial \eta_r}{\partial \rho} = \operatorname{sign}\beta \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\eta_i}{\rho}.$$

Проинтегрируем это уравнение по ρ, тогда

$$\eta_r = C + \operatorname{sign}\beta \frac{2}{\sqrt{3}} \int \eta_i \frac{d\rho}{\rho}, \qquad (121)$$

где C — функция времени.

Используем краевые условия:

при $r = r_1$, $\rho = 1$, $\sigma_r = -p_1$,

$$\eta_r = -\frac{p_1}{\sigma_{i\max}(0)};$$

при $r = r_2$, $\rho = \alpha$, $\sigma_r = -p_2$,

$$\eta_r = -\frac{p_2}{\sigma_{i\max}(0)},$$

тогда из соотношения (121) устанавливаем

$$\eta_r = -\frac{p_1}{\sigma_{i\max}(0)} + \operatorname{sign}\beta \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^{\rho} \eta_i \frac{d\rho}{\rho}; \qquad (122)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\sigma_{i\max}(0)} = \operatorname{sign}\beta \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^{\alpha} \eta_i \frac{d\rho}{\rho}. \qquad (123)$$

Из выражения (123) следует, что

$$\operatorname{sign}\beta = \operatorname{sign}(p_1 - p_2). \qquad (124)$$

Уравнения (123), (122), (120) и (119) с использованием зависимостей (106) и (124) могут быть преобразованы к виду

$$\int_1^{\alpha} \eta_i \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}; \qquad (125)$$

$$\eta_r = -\frac{\operatorname{sign}(p_1 - p_2)}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_1}{p_1 - p_2} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} - 2 \int_1^{\rho} \eta_i \frac{d\rho}{\rho} \right); \qquad (126)$$

$$\eta_t = \eta_r + \operatorname{sign}(p_1 - p_2) \frac{2}{\sqrt{3}}\,\eta_i; \qquad (127)$$

$$\eta_z = \eta_r + \operatorname{sign}(p_1 - p_2) \frac{1}{\sqrt{3}}\,\eta_i, \qquad (128)$$

Сопоставляя выражения (113) и (8), а также зависимости (125) и (9), заключаем, что в рассматриваемой задаче

$$a=-2;\quad b=-1;\quad l=1;\quad m=\alpha; \tag{129}$$

$$q=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}, \tag{130}$$

поэтому функции $|\beta|$ и Φ определяются соотношениями (17), (20), и (16) с использованием выражений (129) и (130). Безразмерная интенсивность напряжений определяется по формуле (10) с использованием зависимостей (29). Эпюры напряжений в безразмерных координатах для любого значения времени строятся по формулам (126)—(128).

Из выражений (105), (107), (110) и (124) получаем формулу для определения радиального смещения:

$$u=\frac{3}{2}\cdot\frac{p_1-p_2}{E}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}\cdot\frac{r_1}{\rho}|\beta|. \tag{131}$$

Перейдем к рассмотрению релаксационной задачи.

Предположим, что в результате посадки толстостенной трубы на жесткий вал с натягом на внутренней поверхности трубы в начальный момент возникает контактное давление $p(0)$. С течением времени это давление уменьшается. Определим величину давления p для любого значения времени.

Поскольку в рассматриваемом случае радиальное перемещение на внутренней поверхности трубы постоянно во времени и равно величине натяга, то, следовательно, согласно формулам (131) и (114)

$$|\beta|=1.$$

Учитывая, что в рассматриваемой задаче $p_1=p$, $p_2=0$, из выражений (123) и (106) получаем

$$\int_1^{\alpha}\eta_i\frac{d\rho}{\rho}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\lambda, \tag{132}$$

где

$$\lambda=\frac{p}{p(0)}. \tag{133}$$

Сопоставляя соотношения (132) и (9), имеем для рассматриваемой задачи

$$q=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\lambda. \tag{134}$$

Постоянные a, b, l, m, очевидно, имеют те же значения, что и в решении основной задачи [см. формулы (129)].

Величину контактного давления для любого момента времени можно получить из формул (27) и (26) с учетом выражений (134), (133) и (129).

Рассмотрим пример расчета на ползучесть толстостенной трубы с отношением наружного радиуса к внутреннему $\alpha=\frac{r_2}{r_1}=2$, нагруженной постоянным во времени

внутренним давлением $p_1=100$ *кг/см*^{2}. Труба равномерно нагрета до температуры 800°. Материал трубы — сталь ЭИ69. Кривые простого последействия этой стали при температуре 800° представлены на фиг. 612, а график функции Ω — на фиг. 616.

Как было установлено в гл. XII т. II, величина показателя степени n для этой стали при указанной температуре $n=4{,}00$, а значение модуля упругости $E=0{,}775\cdot 10^6$ *кг/см*^{2}.

На основании соотношений (16) и (129) заключаем, что подинтегральная функция в выражении (16) обращается в бесконечность при $\Phi=0$. Поэтому функцию Ψ следует определять по формуле (21). Используя соотношения (129), преобразуем эту формулу к виду

$$\Psi=-(n-1)\left(f_1+\int_0^{\Phi} f_2 d\Phi\right), \tag{135}$$

где

$$f_1=\Phi^{\frac{1}{n-1}}\left[(1+n\Phi)^{-\frac{1}{n}}-\alpha^{-2}\left(1+n\alpha^{-2n+2}\Phi\right)^{-\frac{1}{n}}\right], \tag{136}$$

$$f_2=\Phi^{\frac{1}{n-1}}\left[(1+n\Phi)^{-\frac{1}{n}-1}-\alpha^{-2n}\left(1+n\alpha^{-2n+2}\Phi\right)^{-\frac{1}{n}-1}\right].$$

Задаваясь различными значениями Φ, по формулам (136) и (137) вычисляем функции f_1 и f_2. Значения их приведены в табл. 46. Произведя численное интегрирование функции f_2, по формуле (135) определяем функцию Ψ. Результаты подсчетов сведены в табл. 46.

Таблица 46

К расчету на ползучесть толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением (значения функций f_1, f_2 и Ψ)

Φ	f_1	f_2	$\int_0^{\Phi} f_2 d\Phi$	Ψ	Φ	f_1	f_2	$\int_0^{\Phi} f_2 d\Phi$	Ψ
0,00	0,0000	0,0000	0,000000	0,0000	0,90	0,4210	0,1398	0,1921	1,839
0,02	0,1985	0,2454	0,002906	0,6042	1,0	0,4226	0,1302	0,2056	1,885
0,04	0,2441	0,2828	0,008227	0,7569	2,0	0,4216	0,07657	0,3035	2,175
0,06	0,2733	0,2978	0 01405	0,8622	4,0	0,4061	0,04127	0,4171	2,470
0,08	0,2943	0,3028	0,02007	0,9432	6,0	0,3932	0,02773	0,4837	2,631
0,10	0,3108	0,3030	0,02614	1,011	8,0	0,3828	0,02058	0,5319	2,744
0,15	0,3397	0,2931	0,04104	1,142	10	0,3744	0,01618	0,5687	2,829
0,20	0,3593	0,2784	0.05533	1,244	20	0,3509	0,007324	0,6746	3,078
0,30	0,3831	0,2472	0,08157	1,394	30	0,3402	0,004494	0,7366	3,231
0,40	0,3971	0.2203	0,1049	1,506	40	0,3351	0,003173	0,7746	3,330
0,50	0,4061	0,1980	0,1258	1,596	50	0,3319	0,002419	0,8026	3,404
0.60	0,4121	0,1793	0,1447	1,670	75	0,3297	0,001488	0,8491	3,536
0,70	0,4165	0,1641	0,1619	1,735	100	0,3304	0,001065	0,8806	3,633
0,80	0,4194	0,1511	0,1776	1,791					

Для получения зависимости Φ от χ произведем численное интегрирование в выражении (20). Задаваясь различными значениями Φ, подсчитываем подинтегральную функцию F в выражении (20), которая после использования соотношений (129) и (130) принимает вид

$$F=\frac{(-\Psi)^{n-1}}{\Phi}.$$

Для подсчетов следует воспользоваться значениями функции Ψ, приведенными в табл. 46. Согласно формулам (22), (129) и (130)

$$F(0)=\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\right)^{n-1}(n-1)^{n-1}=11{,}39.$$

Значения функции F внесены в табл. 47. Произведя численное интегрирование функций F, согласно формулам (20), (129) и (130) выясняем безразмерное время χ.

Таблица 47

К расчету на ползучесть толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением (значения функции F)

Ф	F	Ф	F	Ф	F
0,00	11,39	0,40	8,540	6,0	3,035
0,02	11,03	0,50	8,130	8,0	2,583
0,04	10,84	0,60	7,762	10	2,264
0,06	10,68	0,70	7,461	20	1,458
0,08	10,49	0,80	7,181	30	1,124
0,10	10,33	0,90	6,910	40	0,9232
0,15	9,927	1,0	6,698	50	0,7889
0,20	9,625	2,0	5,145	75	0,5895
0,30	9,030	4,0	3,767	100	0,4795

соответствующие определенными величинами Ф. Эти значения приведены в табл. 48. Имея величины безразмерного времени, можно определить по формуле (3) функцию Ω, а затем при помощи графика этой функции (фиг. 616) и время t.

Таблица 48

К расчету на ползучесть толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением (значения функций χ, Ω, t, β)

Ф	χ	Ω $(см^2/кг)^n\ 10^{12}$	t в час.	β
0	0,000	0,0000	0,00	1,000
4	2,025	0,2122	6,40	1,446
6	2,618	0,2744	10,6	1,554
10	3,548	0,3718	17,2	1,713
20	5,117	0,5063	32,0	1,984
30	6,236	0,6535	43,0	2,164
40	7,130	0,7472	54,0	2,311
50	7,882	0,8260	62,2	2,435
75	9,367	0,9817	78,6	2,683
100	10,53	1,104	91,8	2,874

Отметим, что в рассматриваемом примере согласно формуле (106) $\sigma_{i\ max}(0)=$ $=230{,}9\ кг/см^2$.

Величины Ω и t также приводятся в табл. 48.

Функция β подсчитывается по формуле (17) с использованием соотношений (129) и (130). Величины β приведены в табл. 48.

На основании данных табл. 48 на фиг. 689 построен график функции β (линия *1*).

Напомним, что величина β пропорциональна радиальному смещению некоторой точки трубы.

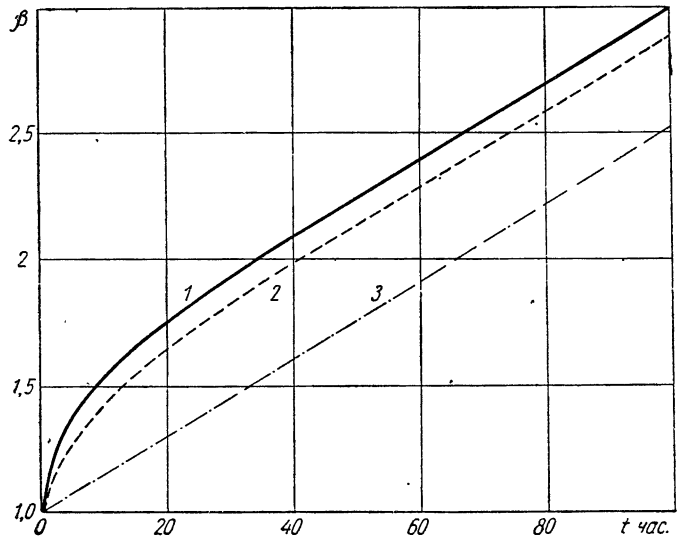
Как следует из фиг. 689, за время, равное 100 час., радиальное перемещение любой точки увеличивается в 3 раза ($\beta=3$).

На фиг. 690 изображены эпюры безразмерной интенсивности напряжений в начальный момент времени $t=0$ и для времени $t=10$ час. и $t=100$ час., построенные по формулам (10) и (129).

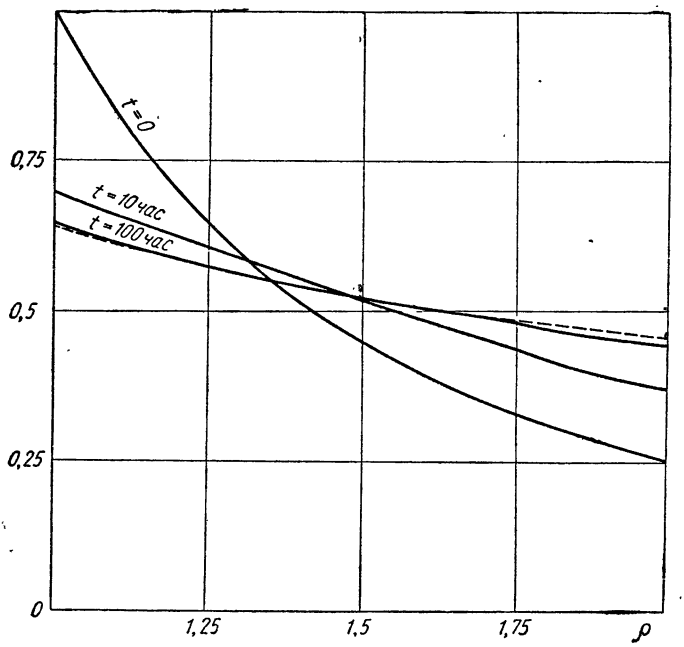
Приведем решение этого примера в предположении установившейся ползучести.

Отметим, что радиальное перемещение слагается из радиального перемещения, возникающего при нагружении $u(0)$, и радиального перемещения, образующегося в результате ползучести материала u_p:

$$u = u(0) + u_p. \qquad (138)$$



Фиг. 689. Графики функции β для толстостенной трубы, полученные по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева в случае неустановившейся ползучести (линии *1*), в случае установившейся ползучести (линия *2*), в случае установившейся ползучести в предположении постоянной скорости (линия *3*)

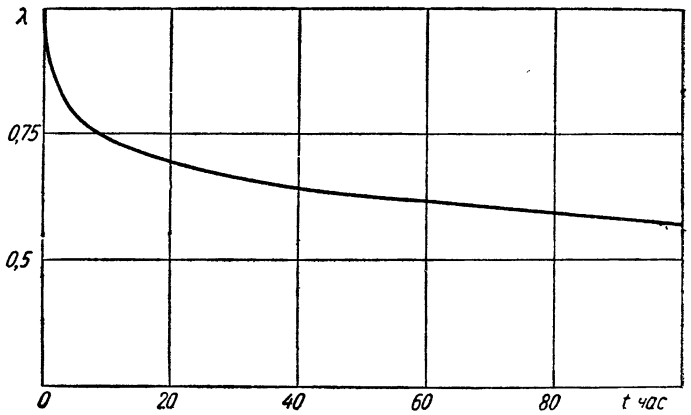


Фиг. 690. Эпюры безразмерной интенсивности напряжений для различных значений времени в толстостенной трубе, полученные по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева в случае неустановившейся ползучести (сплошные линии) и в случае установившейся ползучести (штриховая линия)

Если деформации при нагружении упругие, то радиальное перемещение $u(0)$ вычисляется по формуле (см. гл. V т. II)

$$u(0)=\frac{3(p_1-p_2)r_1^2r_2^2}{2E\left(r_2^2-r_1^2\right)r}. \tag{139}$$

Радиальное перемещение u_p определяется формулой (105) гл. XIV т. II.



Фиг. 691. График зависимости от времени безразмерного контактного давления $\lambda=\frac{p}{p(0)}$ в толстостенной трубе, посаженной на жесткий вал с натягом

Выражение (138) с использованием зависимости (105) гл. XIV т. II, а также соотношений (139), (105), (110), (107), (106), (102) и (3) приводится к виду

$$|\beta|=1+\frac{1}{n^n}\cdot\frac{\alpha^2(\alpha^2-1)^n}{\left(\alpha^{\frac{2}{n}}-1\right)^n\alpha^{2n}}\chi. \tag{140}$$

Отметим, что в рассматриваемом примере

$$\operatorname{sign}(p_1-p_2)=\operatorname{sign}\beta=1,$$

так как $p_2=0$ и поэтому $|\beta|=\beta$.

По формуле (140) с помощью данных табл. 48 на фиг. 689 построен график функции β (линия *2*). В случае установившейся ползучести и постоянной скорости зависимость β от t может быть получена по уравнению (140), принимая во внимание формулу (3), с учетом того, что при постоянной скорости $\Omega=kt$, тогда

$$\beta=1+\frac{1}{n}\frac{\alpha^2(\alpha^2-1)^n}{\left(\alpha^{\frac{2}{n}}-1\right)^n\alpha^{2n}}E\sigma_{i\max}^{n-1}(0)\,kt.$$

На фиг. 689 построен график этой функции (линия *3*).

Постоянная k для стали ЭИ69 при температуре 800° $k=9{,}52\cdot10^{-5}$ $(см^2/кг)^n$ /час (см. табл. 32).

Как следует из фиг. 689, в этом примере, так же как и в примере расчета бруса прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе, использование предположения постоянной скорости ведет к значительной неточности в определении перемещений, а использование предположения установившейся ползучести дает сравнительно небольшое отклонение от истинных значений. Последнее уменьшается с возрастанием времени. В рассматриваемом примере погрешность решения, выполненного в предположении установившейся ползучести для величины β при $t=10{,}6$ часа, составляет 7,3%, а при $t=91{,}8$ часа всего 3,7%.

Закон изменения интенсивности напряжений при установившейся ползучести можно получить из формул (94), (90) и (104) гл. XIV т. II, используя соотношения (2), (106) и (102).

После преобразований получим

$$\eta = \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha^{\frac{2}{n}} (\alpha^2 - 1)}{\alpha^2 \left(\alpha^{\frac{2}{n}} - 1\right) \rho^{\frac{2}{n}}}.$$

На фиг. 690 по этой формуле построена эпюра безразмерной интенсивности напряжений при установившейся ползучести.

В рассматриваемом случае ввиду высокой температуры эксплуатации трубы перераспределение напряжений происходит весьма быстро, и при $t=100$ час эпюра интенсивности напряжений практически совпадает с эпюрой при установившейся ползучести.

Рассмотрим теперь пример релаксации контактного давления в толстостенной трубе, посаженной на жесткий вал с натягом, в результате которого возникает контактное давление в начальный момент времени $p(0)=100$ *кг/см*^{2}. Размеры, материал и температура трубы те, же, что и в предыдущем примере.

По формулам (27) и (26), используя выражения (134), (133) и (129), график функции Ω, а также расчеты, произведенные в предыдущем примере, можно получить величину контактного давления для любого значения времени.

На фиг. 691 изображен график зависимости λ [см. формулу (133)] от t. Как следует из этого графика, за 100 час. контактное давление уменьшается на 45%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М., Некоторые вопросы теории ползучести, ГИТТЛ, 1949.
2. Малинин Н. Н., Основы расчетов на ползучесть, Машгиз, 1948.
3. Малинин Н. Н., Некоторые одномерные задачи неустановившейся ползучести, «Инженерный сборник», т. X, АН СССР, 1951.

ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ОДНООСНЫХ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Теория расчетов деталей при нелинейных зависимостях между напряжениями и деформациями, изложенная в гл. VIII—XI т. II настоящей книги, основывается на действительных характеристиках материалов при одноосных растяжении и сжатии.

Несмотря на то, что в справочной и специальной литературе приведено огромное количество экспериментальных цифровых данных, характеризующих механические свойства материалов, полные диаграммы результатов *согласованных* испытаний на растяжение и сжатие представлены довольно скудно.

Поэтому в приложении к т. II настоящей книги приведен справочный материал, позволяющий практически использовать изложенную выше теорию расчетов деталей на прочность и жесткость.

Методы испытаний, обработки результатов и построения условных и действительных характеристик подробно изложены в гл. V т. I настоящей книги.

Как было указано в гл. VIII—XI, предполагается, что рассчитываемые детали достаточно жестки, т. е. при их нагружении возникают малые деформации. Линейные деформации при растяжении и сжатии в большинстве практических случаев не превышают 0,10—0,15 *см/см*.

Исходя из сказанного, приведенные в приложении действительные характеристики материалов при растяжении и сжатии построены до $\varepsilon=0{,}20$ *см/см*.

Конструкторов часто интересует величина предельных нагрузок и коэффициентов запаса рассчитываемых деталей, для вычисления и оценки которых необходимо располагать полными характеристиками материала вплоть до разрушения или полного расплющивания образца. Поэтому в приложении приведены также и полные действительные характеристики материалов.

Кроме действительных, даны также и условные характеристики исследованных материалов.

При использовании приведенного в приложении экспериментального материала, полученного в лаборатории кафедры «Сопротивление материалов» МВТУ, следует иметь в виду, что образцы для испытаний на растяжение и сжатие вытачивались из *одного* куска материала.

Каждая характеристика пластичных материалов построена на основании испытаний всего лишь одного-двух образцов при растяжении и одного-трех образцов при сжатии, при испытании же хрупких материалов количество образцов утраивалось.

Столь незначительное количество испытанных образцов заставляет смотреть на полученные результаты, как на ориентировочные. Стружка, полученная при обработке образцов, исследовалась в химической лаборатории МВТУ. Данные анализов показали, что в ряде случаев заводская марка исследуемого материала не соответствует данным химического анализа. Поэтому при использовании характеристик материалов необходимо в первую очередь ориентироваться по данным химического анализа.

Данные по сталям 40ХНМ, 60С2М, 60ХНФА, 45ХНМФА и 40ХНВ заимствованы из работ филиала ВНИИ Минтрансмаша, выполнявшихся в лаборатории кафедры «Сопротивление материалов» МВТУ сотрудниками ВНИИ Е. Д. Цыпкиной и В. С. Сысоевой.

Данные по инструментальным сталям У12, Р18, Р9 и 9ХС получены З. М. Коньюшко [2].

Ряд материалов испытан в состоянии поставки; в некоторых случаях удалось произвести испытание одного и того же материала с различной термообработкой.

В большинстве случаев при испытании пластичных материалов использовались нормальные гагаринские образцы $d=6$ *мм*, $l=36$ *мм*. Для испытаний на сжатие использовались образцы $d=10$ *мм*, $l=10$ *мм* с плоскими шлифованными торцами.

При испытаниях на сжатие применялась смазка в виде пропарафиненной фильтровальной бумаги.

Таблица 1

Химический состав, твердость и термообработка образцов стали

№ материала	Марка	Твердость	Химический состав в %										Термообработка	
			C	Si	Mn	Cr	Ni	V	Mo	W	S	P	Закалка	Отпуск
I	Малоуглеродистая сталь	R_B=60	0,06	0,31	0,48	0,06	0,18	—	—	—	0,023	0,016	Нормализация с 670°	
II	10	R_B=68	0,11	0,25	0,50	0,12	0,13	—	—	—	0,026	0,015	—	—
III	10	R_B=72	0,11	0,25	0,50	0,12	0,13	—	—	—	0,026	0,015	Нормализация с 950°	
IV	30	R_B=77	0,27	0,23	0,57	0,12	0,04	—	—	—	0,027	0,031	—	—
V	30	R_C=33	0,27	0,23	0,57	0,12	0,04	—	—	—	0,027	0,031	Вода, 870°	400°
VI	40	R_B=75	0,32	0,29	0,70	0,08	0,26	—	—	—	0,028	0,015	Нормализация с 670°	
VII	40	R_C=36	0,32	0,29	0,70	0,08	0,26	—	—	—	0,028	0,015	Вода, 870°	375°
VIII	45	R_B=83	0,44	0,25	0,67	—	—	—	—	—	0,024	0,041	—	—
IX	45	R_C=31	0,44	0,25	0,67	—	—	—	—	—	0,024	0,041	Вода, 790°	500°
X	Углеродистая сталь	R_B=80	0,32	0,28	0,70	—	—	—	—	—	0,027	0,028	—	—
XI	То же	R_C=33	0,32	0,28	0,70	—	—	—	—	—	0,027	0,028	Вода, 870°	375°
XII	У7	R_B=68	0,74	0,25	0,38	0,05	—	—	—	—	0,021	0,029	—	—
XIII	У8	R_B=85	0,80	0,28	0,30	0,29	0,24	—	—	—	0,021	0,014	—	—
XIV	У8	R_C=33	0,74	0,27	0,32	0,30	0,29	—	—	—	0,018	0,017	Вода, 820°	350°
XV	Сталь с высоким содержанием углерода	R_B=90	1,41	0,54	0,62	1,28	0,13	—	—	—	0,014	0,023	„ 790°	200°
XVI	То же	R_C=46	1,41	0,54	0,62	1,28	0,13	—	—	—	0,014	0,023	Масло, 850°	400°
XVII	40Х	R_B=95	0,36	0,54	0,58	0,94	0,13	—	—	—	0,021	0,035	—	—
XVIII	40Х	R_C=28	0,36	0,54	0,58	0,94	0,13	—	—	—	0,021	0,035	Масло, 850°	540°
XIX	30ХГСА	R_B=90	0,30	1,12	1,10	0,93	0,26	—	—	—	0 029	0,036	Вода, 650°	—
XX	30ХГСА	R_C=26	0,32	1,08	1,10	0,93	0,37	—	—	—	0.026	0,033	Масло, 860°	640°
XXI	30ХГСА	R_C=30	0,32	1,08	1,10	0,93	0,37	—	—	—	0,026	0,033	„ 910°	525°
XXII	30ХГСА	R_C=43	0,32	1,08	1,10	0,93	0,37	—	—	—	0,026	0,033	„ 910°	375°
XXIII	40ХНМ	R_C=50	0,38	0,22	0,60	0,70	0,17	—	0,27	—	0,029	0,016	„ 850°	200°
XXIV	60С2М	R_C=51	0,56	1,90	0,98	—	—	—	0,45	—	0,029	0,019	„ 840°	400°
XXV	60ХНФА	R_C=55	0,58	0,26	0,65	0,95	1,05	0,22	—	—	—	—	„ 840°	200°
XXVI	45ХНМФА	R_C=53	0,46	0,35	0,65	0,95	1,50	0,15	—	—	0,029	0,022	„ 870°	200°
XXVII	40ХНВ	R_C=50	0,39	0,36	0,82	1,43	1,45	—	—	0,69	0,033	0,019	„ 900°	200°
XXVIII	У12	R_C=62	1,20	0,35	—	0,20	—	—	—	—	—	—	760°	200°
XXIX	Р18	R_C=62	0,71	0,34	0,28	3,86	0,21	1,50	—	—	—	—	1280°	560°
XXX	Р9	R_C=62	0,90	0,30	0,28	4,10	—	2,20	—	9,50	—	—	1250°	560°
XXXI	9ХС	R_C=62	0,88	1,35	0,47	0,99	0,23	—	—	—	—	—	860°	200°

Образцы для испытаний хрупких материалов на растяжение имели специальную форму (см. гл. V т. I).

В заключение отметим, что приведенные в приложении данные не являются исчерпывающими по охвату всего многообразия материалов, используемых в современном машиностроении. Однако можно надеяться, что предлагаемый вниманию читателей материал окажется полезным. Конструкторы должны располагать альбомами механических характеристик всех машиностроительных материалов при различной их термообработке.

В табл. I—III приведен перечень материалов, характеристики которых даны в приложении. В этих таблицах указаны марка, химический состав, твердость материалов и дана их краткая характеристика.

Таблица II

Химический состав и характеристики образцов серого литейного чугуна

№ материала	Марка	C	Si	Mn	Cr	N	S	P
XXXII	СЧ 28	3,67	1,75	0,61	0,15	0,03	0,055	0,022
XXXIII	Чугун, отлитый в кокиль .	3,25	1,00	—	—	—	0,040	0,180
XXXIV	Чугун, отлитый в землю .	3,20	1,20	—	—	—	0,050	0,200

Таблица III

Химический состав и характеристика образцов цветных металлов

№ материала	Металл	Химический состав в %													Примечание
		Cu	Sn	Pb	Fe	Zn	Ni	P	Mn	Mg	Si	Al	V	C	Ti	
XXXV	Титан	—	—	—	0,06	—	—	—	—	—	0,04	—	0,02	0,02	Осн.	Технический
XXXVI	Медь	Осн.	—	—	0,023	—	—	0,006	—	—	—	—	—	—	—	Прутковая отожженная
XXXVII	„	„	—	—	0,025	—	—	0,020	—	—	—	—	—	—	—	Прутковая
XXXVIII	Латунь . . .	62,32	—	3,13	0,15	34,26	0,16	—	—	—	—	—	—	—	—	„
XXXIX	Бронза	85,52	3,72	4,57	0,30	5,65	0,25	—	—	—	—	—	—	—	—	Литье
XL	Алюминий . .	—	—	—	0,33	—	—	—	—	0,040	0,24	Осн.	—	—	—	Прутковый
XLI	Дюраль . . .	4,00	—	—	0,18	0,06	—	—	0,63	0,47	—	Осн.	—	—	—	„
XLII	Сплав на алюминиевой основе	2,52	—	—	0,93	3,80	—	—	0,40	0,03	2,36	—	—	—	—	Литье

Номера фигур соответствуют порядковому номеру материала в таблицах.

На фигурах характеристики растяжения помечены буквой *z*, а характеристики сжатия — буквой *d*.

При достижении разрушения конечная точка кривой отмечена кружочком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буркхардт А., Механические и технологические свойства чистых металлов, ГНТИ, 1941.

2. Конюшко З. М., Исследование прочности термически обработанных инструментальных сталей, сб. Расчеты на прочность в машиностроении, «Труды МВТУ имени Баумана» № 46, Машгиз, 1955.

3. Лихарев К. К., К методике построения действительных характеристик материалов при одноосных растяжении и сжатии, «Заводская лаборатория» № 12, 1957

4. Сборник физических констант, ОНТИ, 1937.

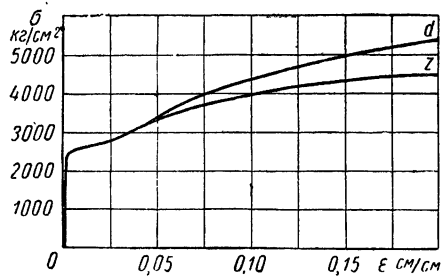
5. Свойства металлов сплавов. Металлургиздат, 1949.

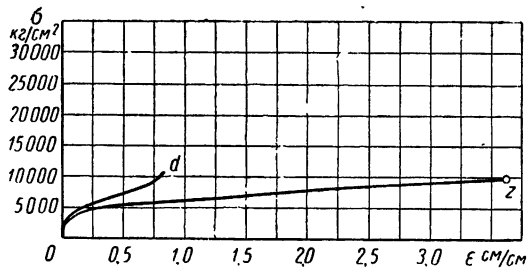
6. Справочник «Свойства металлов и сплавов», ГНТИ, 1947.

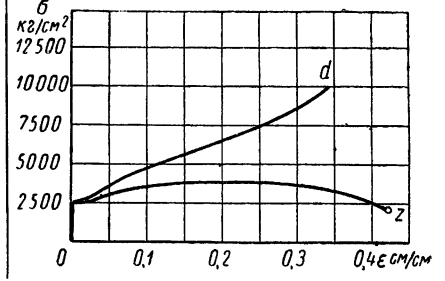
7. Эверхарт Д. Л., Титан и его сплавы, Металлургиздат, 1956.

8. Энциклопедический справочник «Машиностроение», т. 3 и 4, Машгиз, 1947.

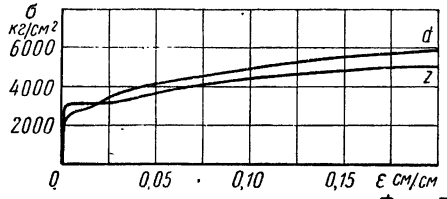
Действительные характеристики до $\varepsilon = 0{,}20$	Полные действительные характеристики	Условные характеристики

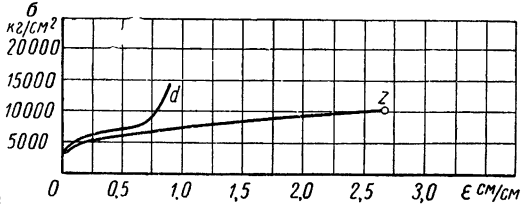


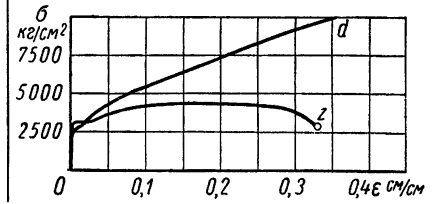




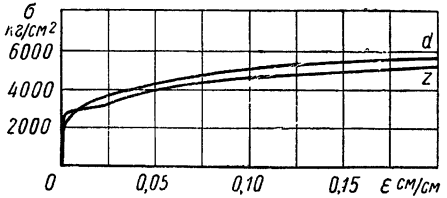
Фиг I Малоуглеродистая сталь $H_{R_B} = 60$

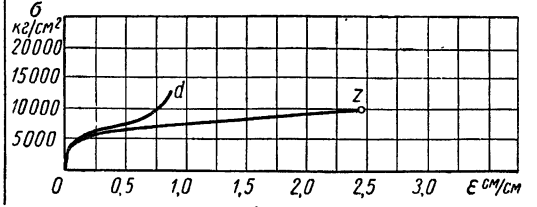


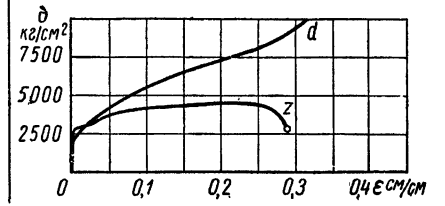




Фиг II Малоуглеродистая сталь 10 $H_{R_B} = 68$

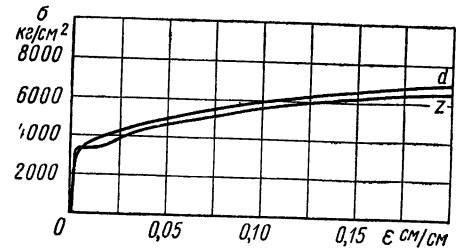


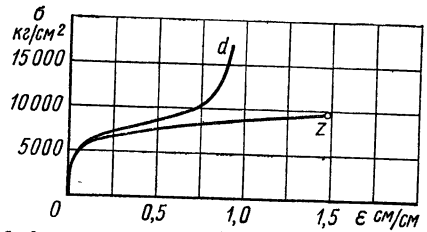


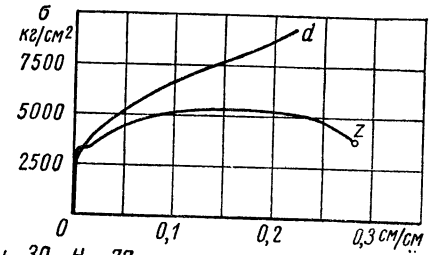


Фиг III Малоуглеродистая сталь 10 $H_{R_B} = 72$

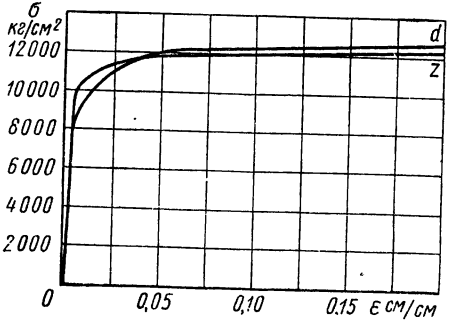
Действительные характеристики до ε=0,20	Полные действительные характеристики	Условные характеристики

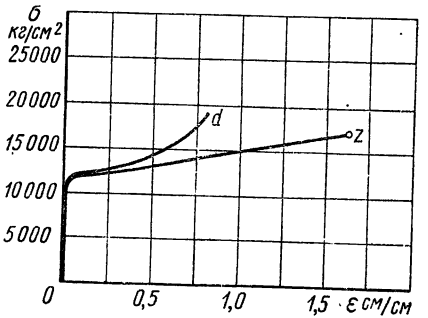


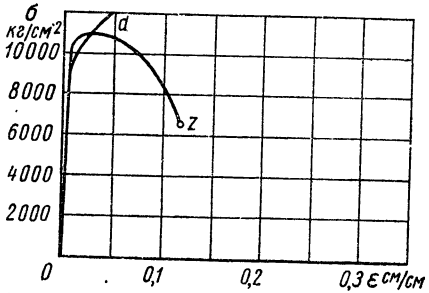




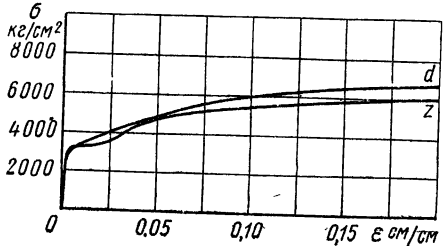
Фиг. IV. Малоуглеродистая сталь 30. H_{R_B}=77

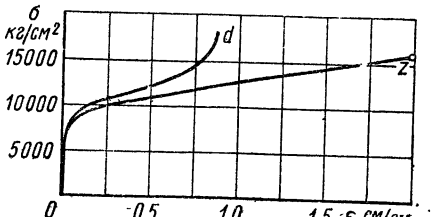


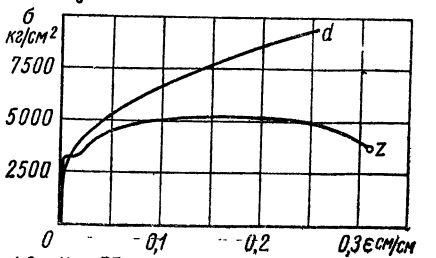




Фиг. V. Малоуглеродистая сталь 30. H_{R_C}=33

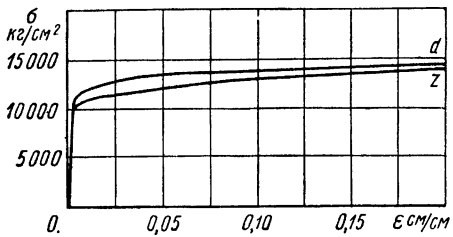


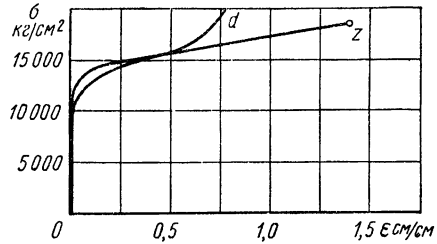


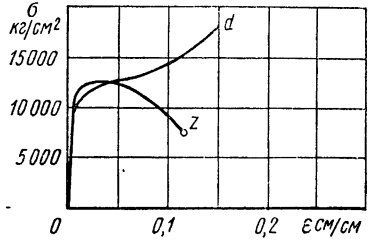


Фиг. VI. Углеродистая сталь 40. H_{R_B}=75

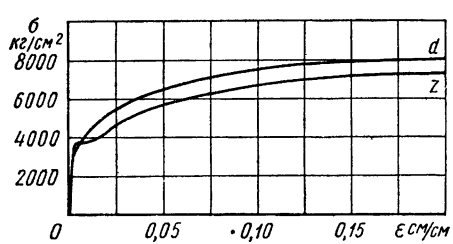
Действительные характеристики до $\varepsilon=0{,}20$	Полные действительные характеристики	Условные характеристики

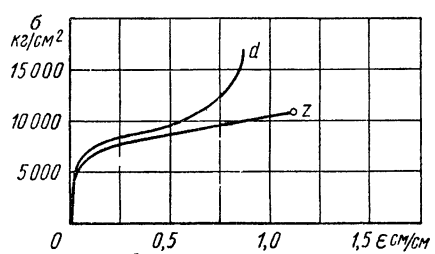


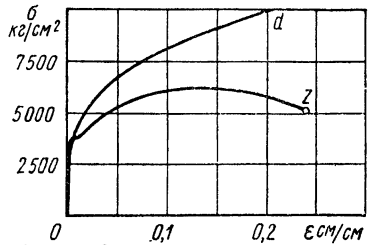




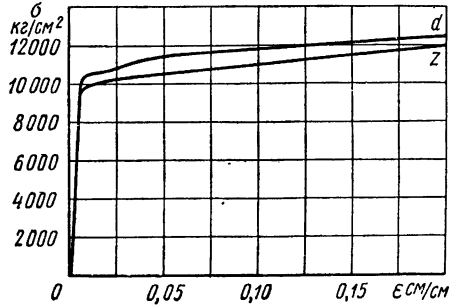
Фиг. VII. Углеродистая сталь 40. $H_{R_C}=36$

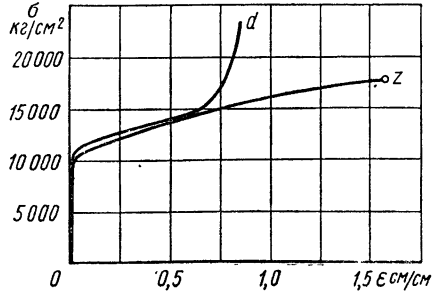


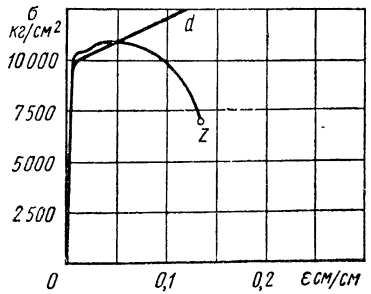




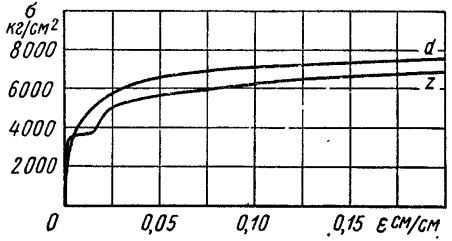
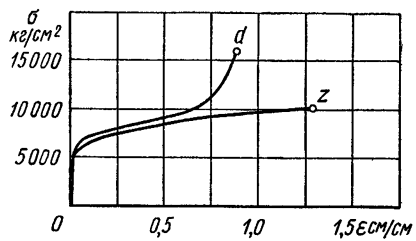
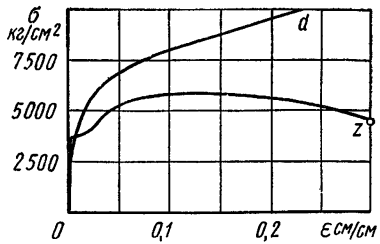
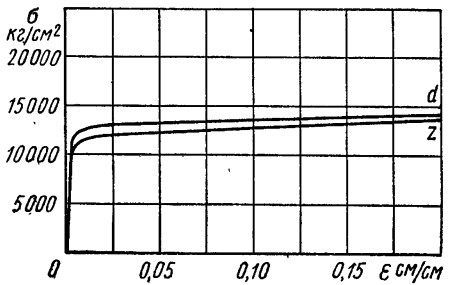
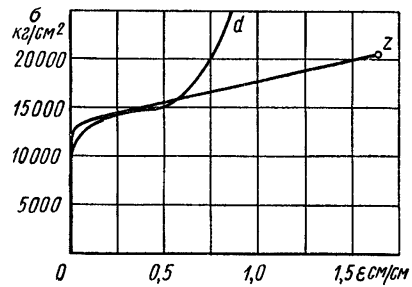
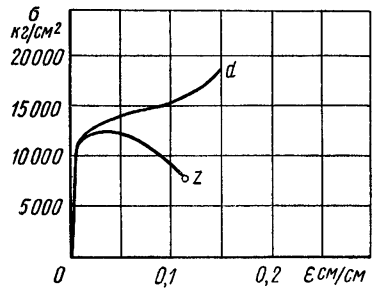
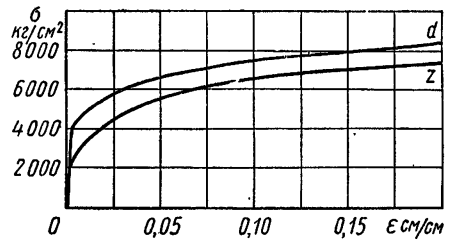
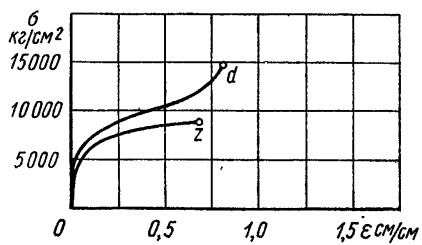
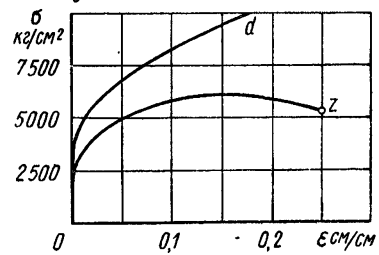
Фиг. VIII. Углеродистая сталь 45. $H_{R_B}=83$

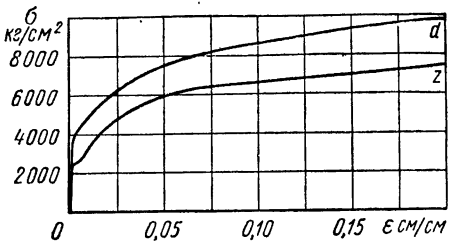
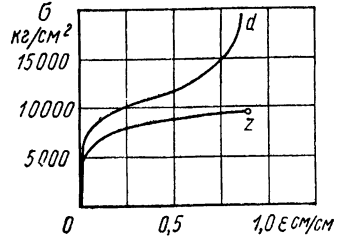
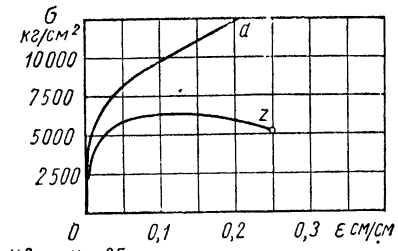
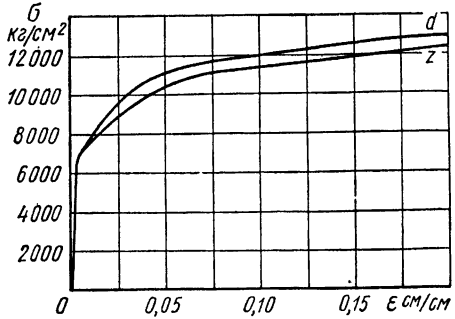
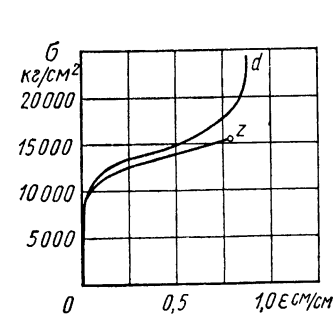
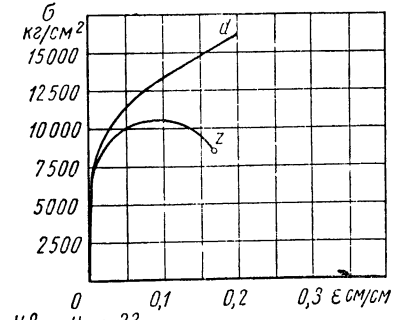
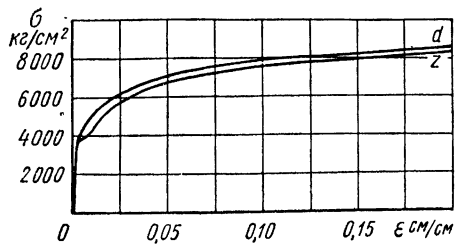
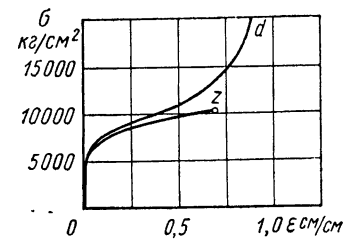
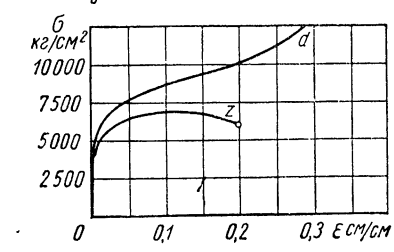




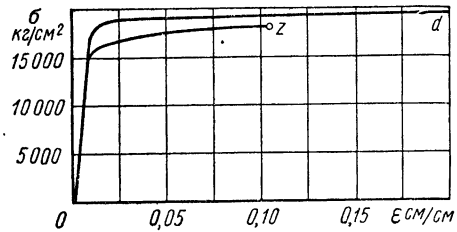


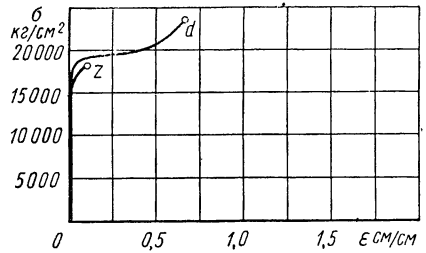
Фиг. IX. Углеродистая сталь 45. $H_{R_C}=31$

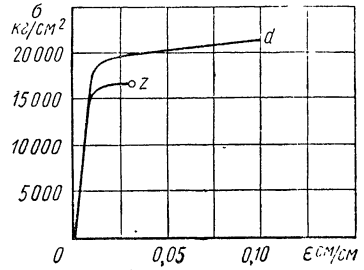
Действительные характеристики до $\varepsilon = 0{,}20$	Полные действительные характеристики	Условные характеристики
		
Фиг. X. Углеродистая сталь $H_{R_B}=80$		
		
Фиг. XI. Углеродистая сталь. $H_{R_C}=33$		
		
Фиг. XII. Сталь У7. $H_{R_B}=68$		

Действительные характеристики до $\varepsilon=0{,}20$	Полные действительные характеристики	Условные характеристики
		
Фиг. XIII. Сталь У8. $H_{R_B}=85$		
		
Фиг XIV. Сталь У8. $H_{R_C}=33$		
		
Фиг. XV Сталь с высоким содержанием углерода. $H_{R_B}=90$		

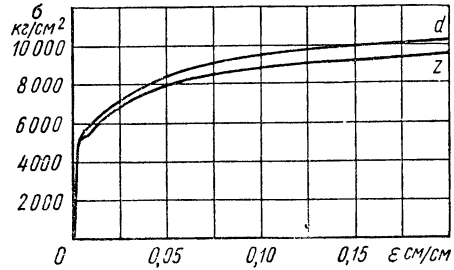
Действительные характеристики до $\varepsilon = 0{,}20$	Полные действительные характеристики	Условные характеристики

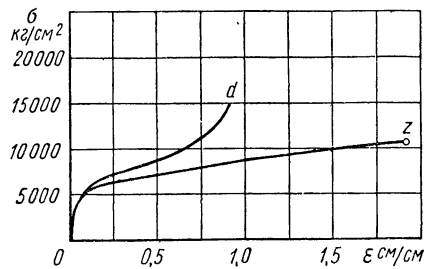


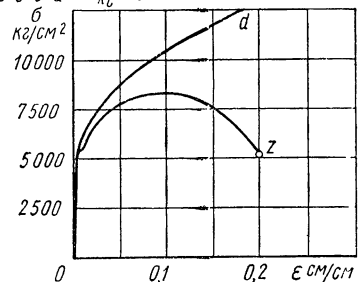




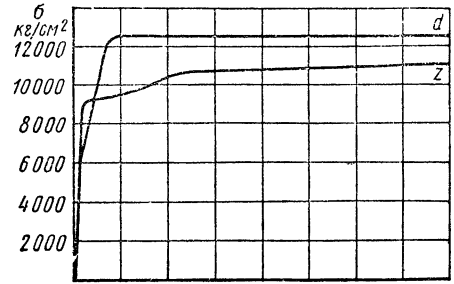
Фиг. XVI Сталь с высоким содержанием углерода $H_{RC} = 46$

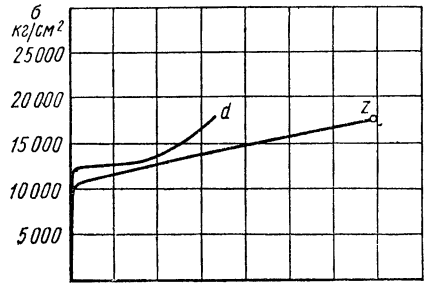


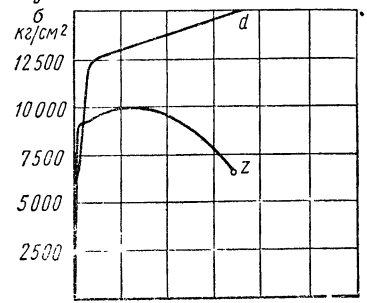




Фиг. XVII Конструкционная сталь 40Х. $H_{RB} = 95$

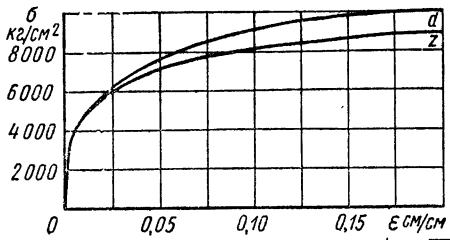


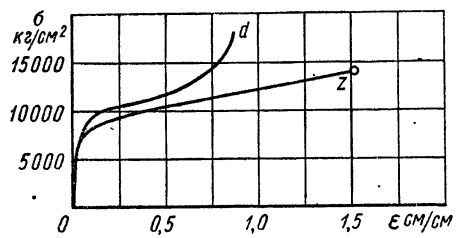


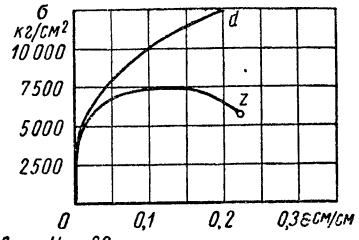


Фиг. XVIII. Конструкционная сталь 40Х $H_{RC} = 28$

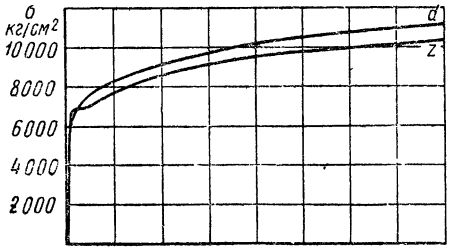
Действительные характеристики до $\varepsilon=0{,}20$	Полные действительные характеристики	Условные характеристики

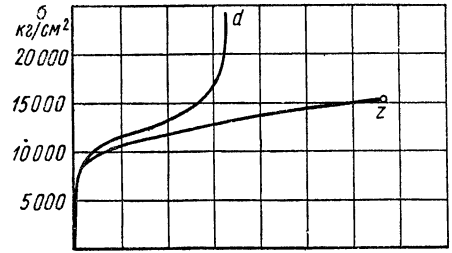


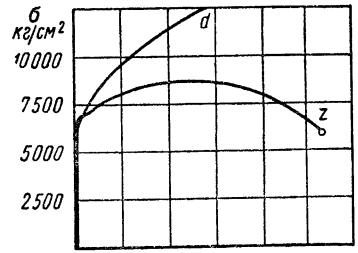




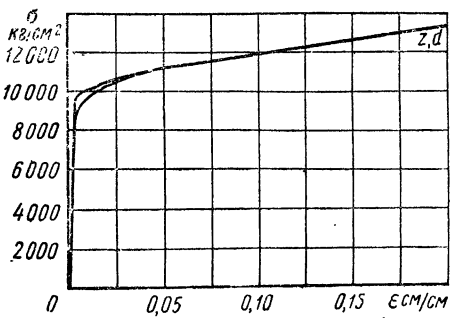
Фиг. XIX. Конструкционная сталь 30ХГСА H_{R_B} 90

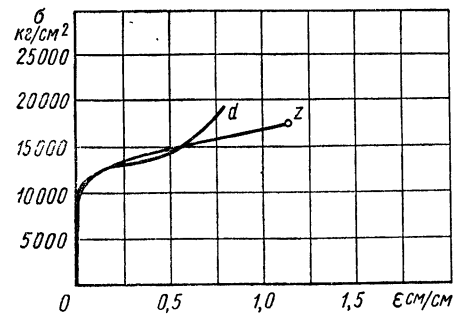


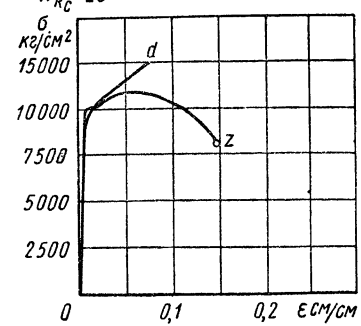




Фиг. XX. Конструкционная сталь 30ХГСА H_{R_C} 26

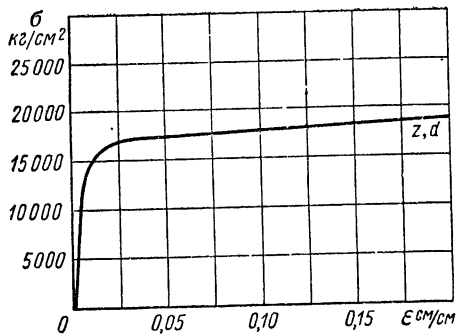


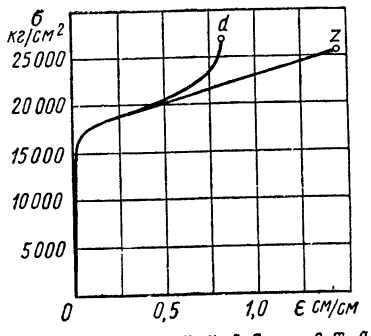


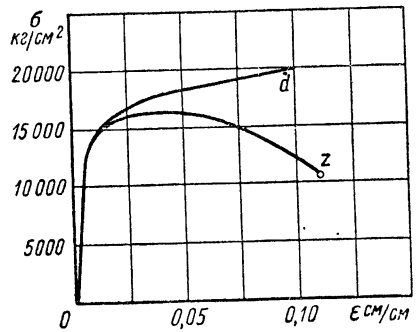


Фиг XXI. Конструкционная сталь 30ХГСА. H_{R_C} 30

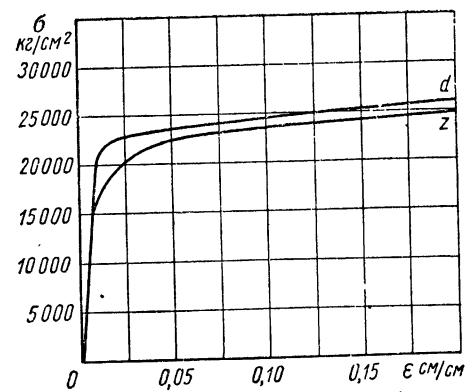
Действительные характеристики до $\varepsilon=0{,}20$	Полные действительные характеристики	Условные характеристики

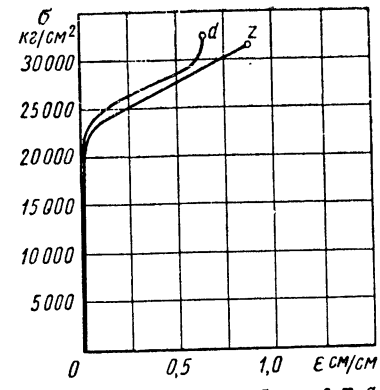


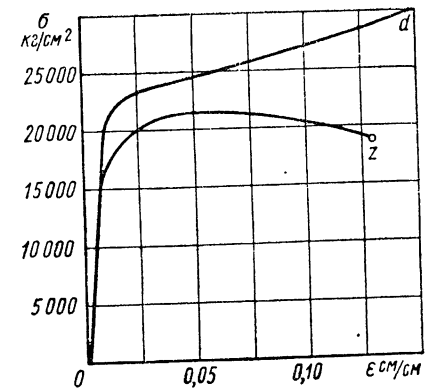




Фиг. XXII. Конструкционная сталь 30ХГСА. $H_{R_C}=43$

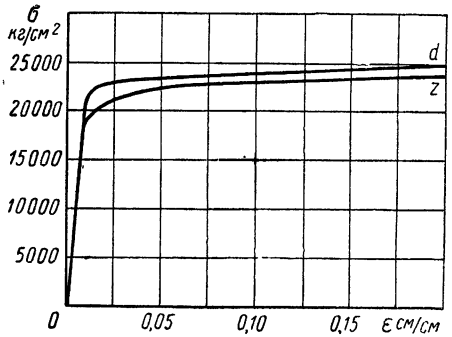


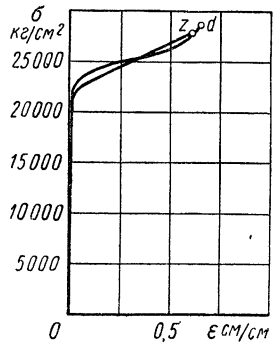


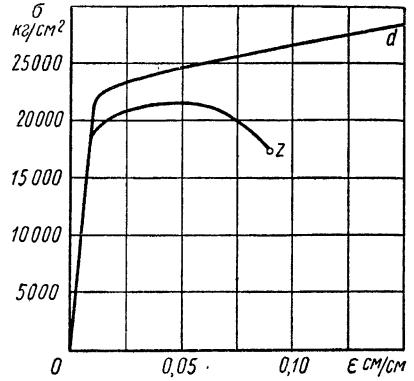


Фиг. XXIII. Конструкционная сталь 40ХНМ. $H_{R_C}=50$

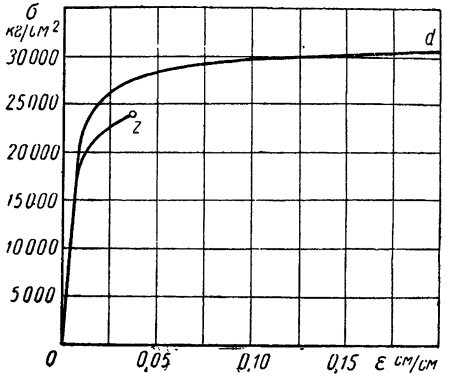
Действительные характеристики до $\varepsilon = 0{,}20$	Полные действительные характеристики	Условные характеристики

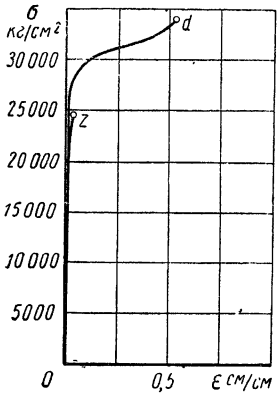


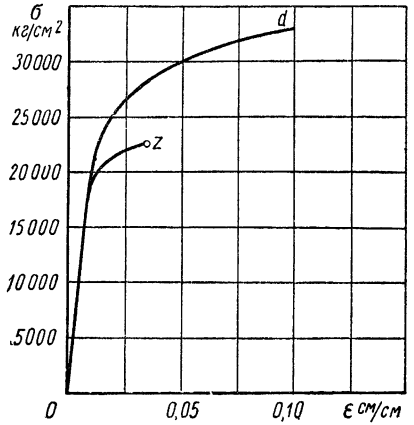




Фиг XXIV Конструкционная сталь 60С2М. $H_{R_C} = 51$

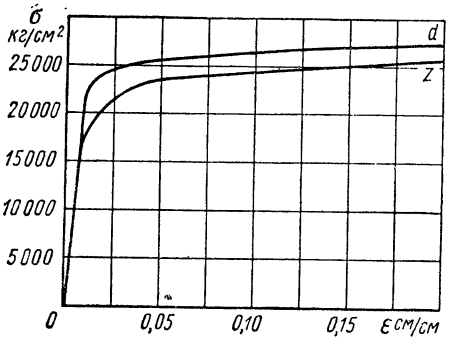


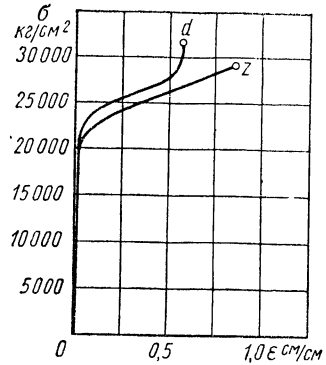


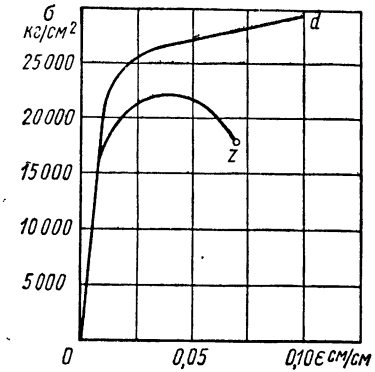


Фиг. XXV Конструкционная сталь 60ХНФА $H_{R_C} = 55$

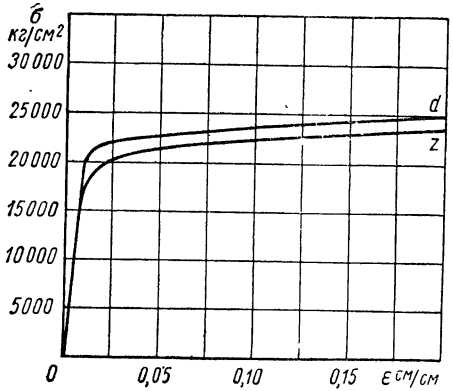
Действительные характеристики до $\varepsilon = 0{,}20$	Полные действительные характеристики	Условные характеристики

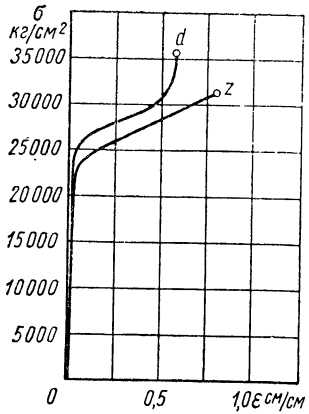


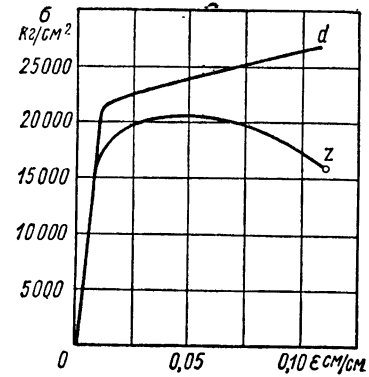




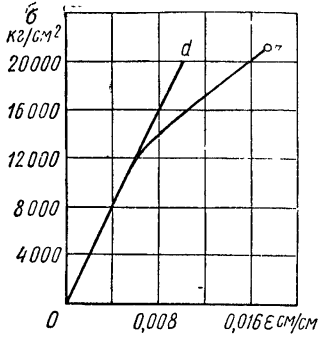
Фиг. XXVI. Конструкционная сталь 45ХНМФА. $H_{R_C} = 53$





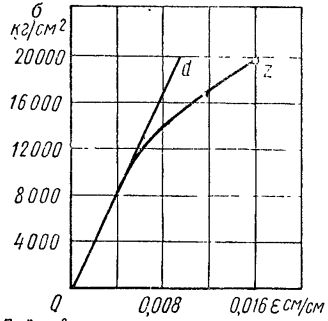


Фиг XXVII. Конструкционная сталь 40ХНВ $H_{R_C} = 50$



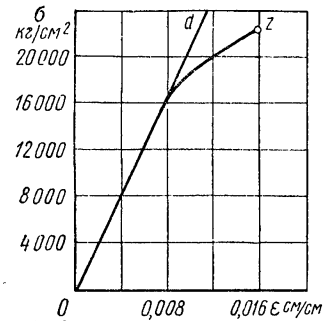
Действительная характеристика при растяжении инструментальной стали У12. $H_{R_C}=62$
Характеристика при сжатии линейна до напряжения ~30000 кг/см²

Фиг. XXVIII.



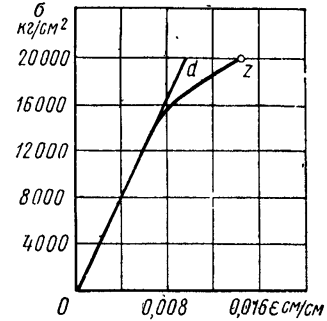
Действительная характеристика при растяжении инструментальной стали Р18. $H_{R_C}=62$.
Характеристика при сжатии линейна до напряжения ~30000 кг/см²

Фиг. XXIX.



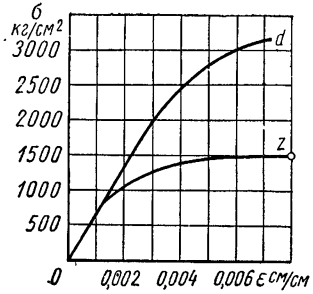
Действительная характеристика при растяжении инструментальной стали Р9 $H_{R_C}=62$.
Характеристика при сжатии линейна до напряжения ~30000 кг/см²

Фиг. XXX.

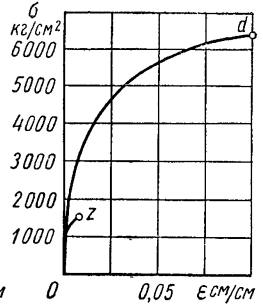


Действительная характеристика при растяжении инструментальной стали 9ХС. $H_{R_C}=62$.
Характеристика при сжатии линейна до напряжения ~30000 кг/см²

Фиг. XXXI.

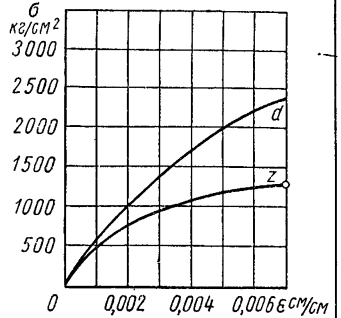


Действительная характеристика до ε=0,008



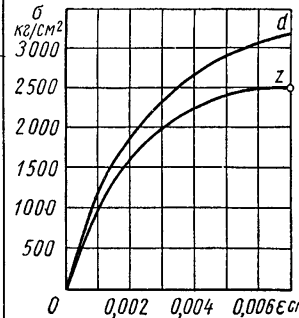
Полные действительные характеристики

Фиг. XXXII. Литейный чугун СЧ28.

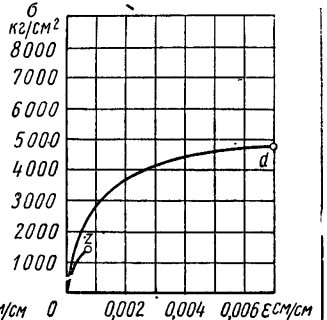


Характеристики до ε=0,007

Фиг. XXXIII. Чугун, отлитый в кокиль.



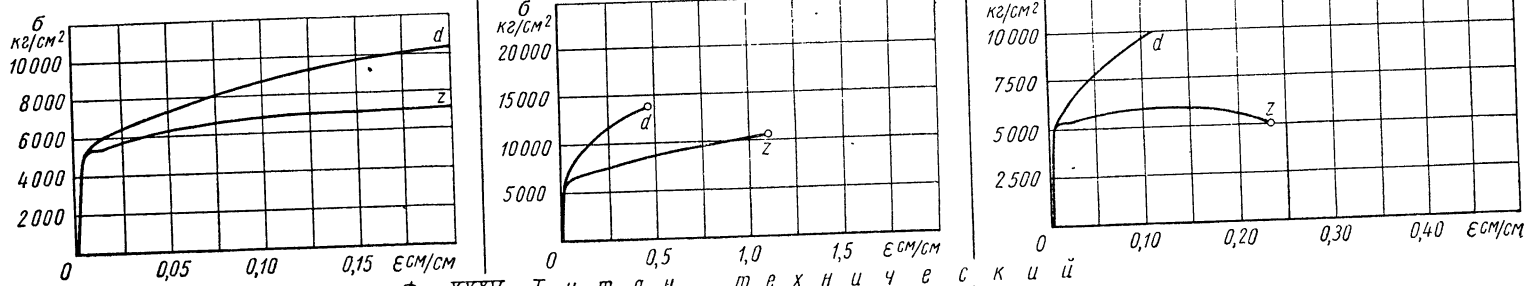
Характеристики до ε=0,007



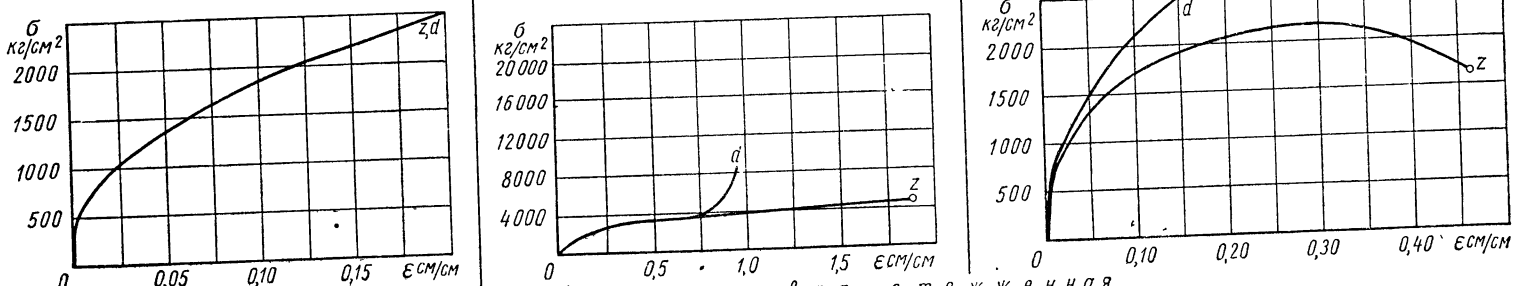
Полные характеристики

Фиг. XXXIV. Чугун, отлитый в землю.

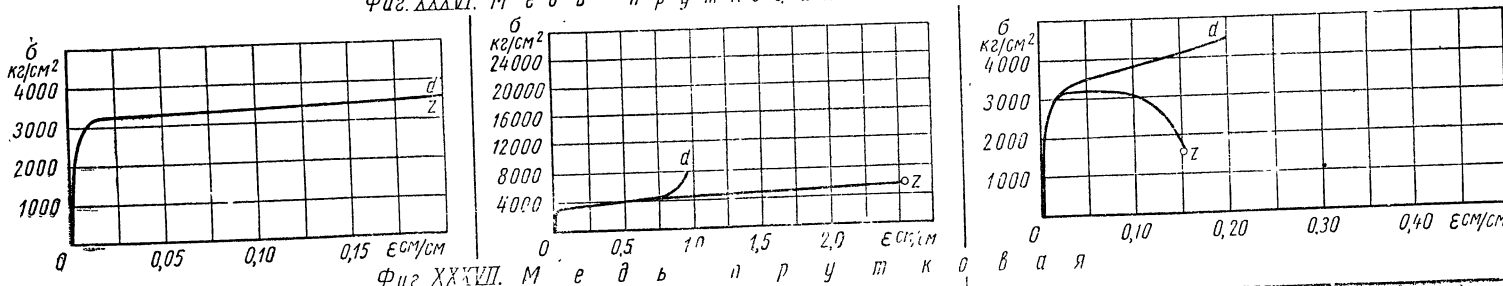
Действительные характеристики до $\varepsilon = 0{,}20$ | Полные действительные характеристики | Условные характеристики



Фиг. XXXV. Титан технический

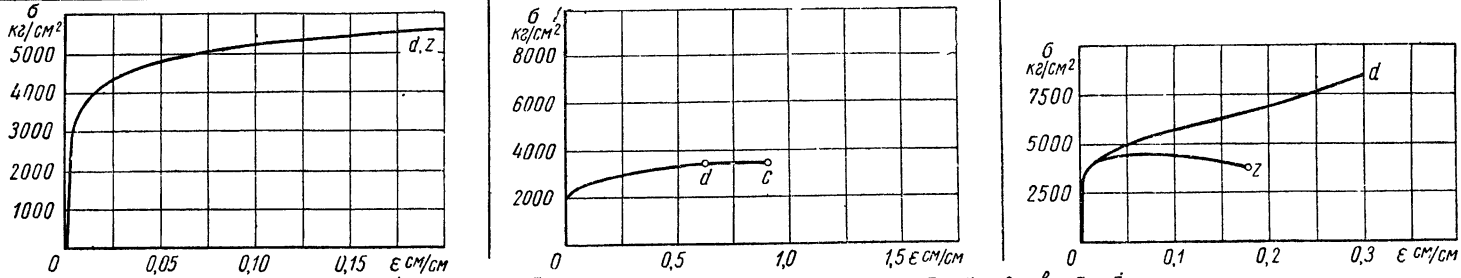


Фиг. XXXVI. Медь прутковая отожженная

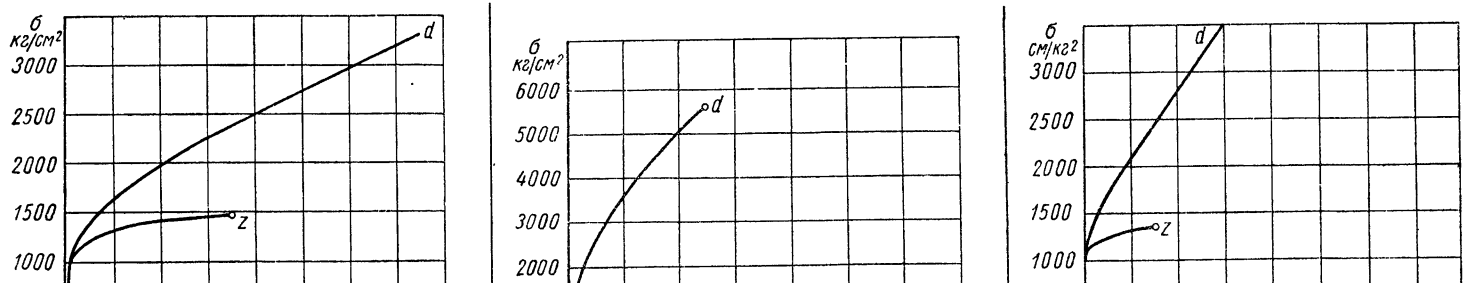


Фиг XXXVII. Медь прутковая

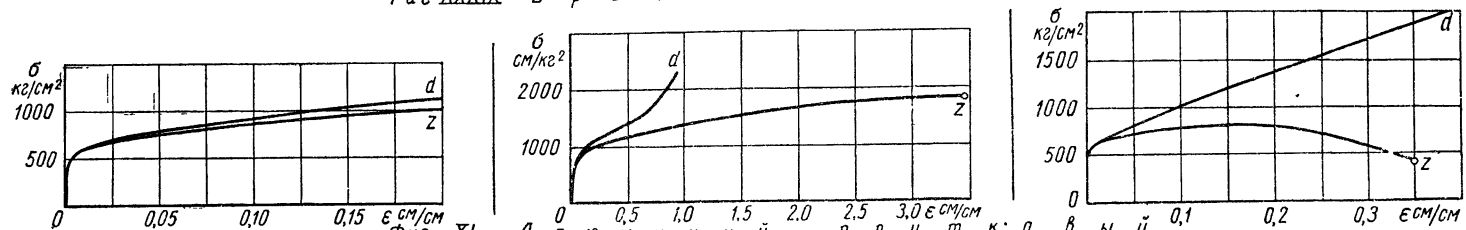
Действительные характеристики до ε=0,20	Полные действительные характеристики	Условные характеристики



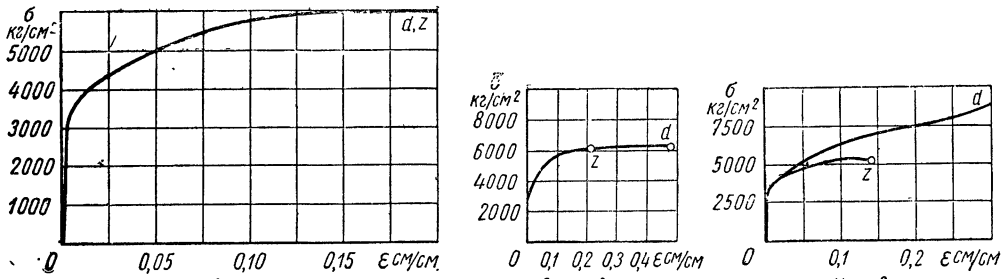
Фиг. XXXVIII. Латунь прутковая



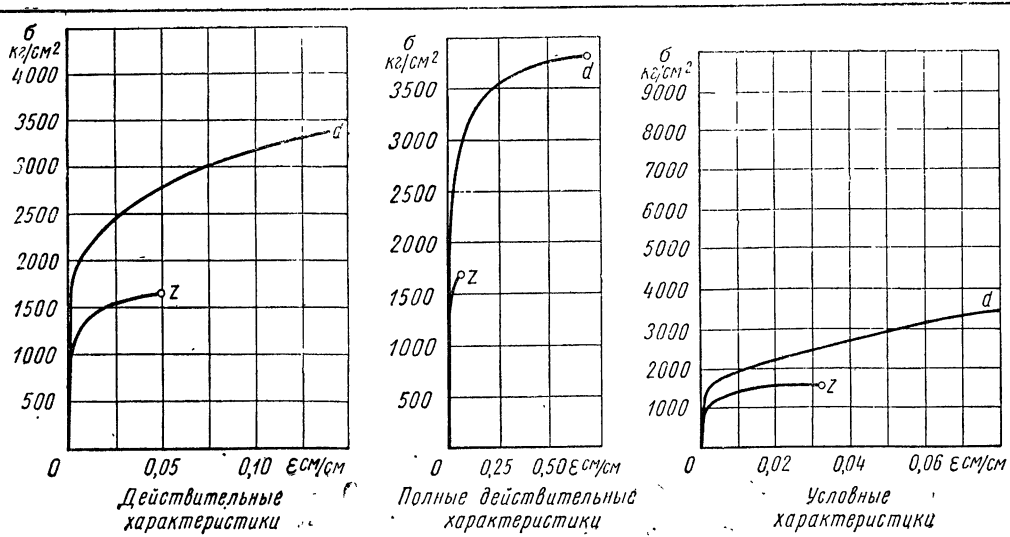
Фиг XXXIX. Бронзовое литье



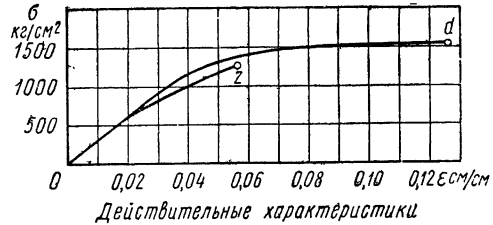
Фиг. XL. Алюминий прутковый

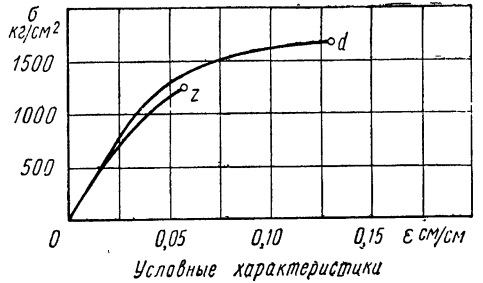


Фиг XLI. Дюраль прутковый



Фиг. XLII. Сплав на алюминиевой основе (литье).





Фиг XLIII. Текстолит

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

РАСЧЕТЫ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Глава I. **Теория изгиба круглых пластин и ее технические приложения** . 7

§ 1. Вывод расчетных уравнений изгиба симметрично нагруженных круглых тонких, жестких пластин постоянной толщины . . . 8
§ 2. Рациональный метод интегрирования дифференциального уравнения круглых пластин постоянной толщины 43
§ 3. Расчет круглых пластин переменной толщины 64
§ 4. Графический метод расчета круглых пластин 85
§ 5. Некоторые задачи асимметричного изгиба круглых пластин . 109
Литература 128

Глава II. **Теория изгиба прямоугольных пластин и ее технические приложения** 130

§ 1. Вывод дифференциальных уравнений 130
§ 2. Основные соображения, связанные с интегрированием дифференциального уравнения пластины 136
§ 3. Некоторые примеры расчета прямоугольных пластин . . . 139
§ 4. Приближенные методы определения прогибов пластин . . . 147
§ 5. Неразрезные пластины 151
§ 6. Прямоугольные пространственные коробки 170
Литература 184

Глава III. **Расчеты деталей конструкций, выполненных в виде симметричных оболочек** 185

§ 1. Безмоментная теория 185
§ 2. Изгибные напряжения в цилиндрической оболочке 192
§ 3. Общие уравнения симметричных оболочек 207
§ 4. Коническая оболочка 218
§ 5. Сферическая оболочка 230
§ 6. Торообразная оболочка 236
§ 7. Приближенное определение местных напряжений в осесимметричных оболочках в зоне краевого эффекта 244
Литература 255

Глава IV. **Осесимметричные гибкие оболочки** 256

§ 1. Уравнения больших перемещений пологих осесимметричных оболочек 256
§ 2. Круглые плоские мембраны 264
§ 3. Хлопающая мембрана 281
§ 4. Гофрированная мембрана 288
§ 5. Гофрированные коробки (сильфоны) 301
Литература 314

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБ. КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. РАСЧЕТ РЕЗИНОВЫХ ДЕТАЛЕЙ.

Глава V. **Расчет симметрично нагруженных цилиндрических деталей** . . 315

§ 1. Расчет толстостенных цилиндров, нагруженных равномерно распределенным по длине давлением (задача Ляме) 315
§ 2. Расчет прессовых посадок при одинаковой длине сопрягаемых деталей 321
§ 3. Скрепление цилиндров 323
§ 4. Графический способ определения напряжений в толстостенных цилиндрах 327
§ 5. Деформации толстостенных цилиндров, нагруженных переменным по длине давлением 329
§ 6. Приближенный метод расчета полых цилиндров, нагруженных переменным по длине давлением 332
§ 7. Применение метода Ритца к расчету полых цилиндров, нагруженных переменным по длине давлением 365
§ 8. Расчет сплошных цилиндров (валов), нагруженных переменным по длине давлением 372
§ 9. Расчет прессовых посадок при различной длине сопрягаемых деталей 376
§ 10. Температурные напряжения в трубах при симметричном относительно оси распределении температур 379
Литература 385

Глава VI. **Упругие перемещения и напряженное состояние в местах силового контакта деталей** 386

§ 1. Постановка задачи и метод решения 386
§ 2. Нагружение полупространства сосредоточенной силой, нормальной к граничной плоскости 391
§ 3. Некоторые случаи нагружения полупространства распределенными силами 399
§ 4. Некоторые геометрические соотношения для поверхностей соприкасающихся тел 406
§ 5. Выражения для размеров площадки контакта соприкасающихся тел, их сближения и величины наибольшего давления . . . 411
§ 6. Результаты экспериментальной проверки теории силового контакта упругих тел 434
§ 7. Напряженное состояние соприкасающихся тел в случае круговой площадки контакта 437
§ 8. Напряженное состояние в общем случае эллиптической площадки контакта 449
§ 9. Напряженное состояние в случае первоначального контакта по линии 460
§ 10. Влияние касательных сил на напряженное состояние . . 467
§ 11. Применение теории контактных деформаций к расчету подшипников качения на статическую прочность 470
§ 12. Краткий обзор некоторых работ по расчету на контактную прочность в машиностроении 477
Литература 482

Глава VII. **Расчеты резиновых и резино-кордных деталей** 487

§ 1. Конструкционные свойства резины 487
§ 2. Расчет резиновых амортизаторов, работающих на сжатие . 494
§ 3. Расчет резино-металлического шарнира 504
§ 4. Методы расчета резиновых деталей при больших деформациях 514
§ 5. Основные гипотезы, принимаемые при расчете резино-кордных конструкций 544
§ 6. Равновесная конфигурация и напряжения в симметричных резино-кордных оболочках, нагруженных внутренним давлением . . 550
§ 7. Расчет резино-кордных и оплеточных рукавов 559
§ 8. Расчет резино-кордных пневматических амортизаторов . . 568
§ 9. Расчет шинно-пневматических упругих муфт 576
Литература 591

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ
РАСЧЕТЫ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Глава VIII. **Теория малых упруго-пластических деформаций** 592
§ 1. Значение расчетов на прочность и жесткость за пределами упругости 592
§ 2. Механизм пластической деформации 595
§ 3. Схематизация диаграмм растяжения и сжатия материала . . 600
§ 4. Простое и сложное нагружение тела 610
§ 5. Назначение теорий пластичности 616
§ 6. Основные гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций. Зависимости между напряжениями и деформациями за пределами упругости 617
§ 7. Экспериментальная проверка основных гипотез теории малых упруго-пластических деформаций 627
§ 8. Основные уравнения расчетов за пределами упругости . . . 640
§ 9. Метод упругих решений 642
§ 10. Приближенные выражения интенсивностей напряжений и деформаций 644
§ 11. Теорема о простом нагружении 646
§ 12. Теорема о разгрузке 647
Литература 649

Глава IX. **Расчеты стержней за пределами упругости** 653
§ 1. Статически неопределимые системы при растяжении—сжатии за пределами упругости 653
§ 2 Чистый упруго-пластический изгиб прямого бруса 659
§ 3. Изгиб колец на оправке 670
§ 4. Заневоливание винтовых цилиндрических пружин кручения . . 673
§ 5. Теория навивки плоских спиральных пружин 676
§ 6. Поперечный упруго-пластический изгиб балок 680
§ 7. Расчет статически неопределимых балок по предельному состоянию 692
§ 8. Упруго-пластическое кручение бруса круглого поперечного сечения 696
§ 9. Заневоливание винтовых цилиндрических пружин растяжения — сжатия из проволоки круглого поперечного сечения 705
§ 10. Кручение некруглых стержней за пределами упругости . . 710
Литература 710

Глава X. **Расчеты толстостенных труб и шайб, нагруженных внутренним и внешним давлениями за пределами упругости** 720
§ 1. Основные уравнения расчета толстостенных труб за пределами упругости 720
§ 2. Графический способ расчета толстостенных труб за пределами упругости 725
§ 3. Упруго-пластическое состояние толстостенной трубы при линейном упрочнении 729
§ 4. Упруго-пластическое состояние толстостенной трубы без упрочнения 735
§ 5. Автоскрепление толстостенных труб 737
§ 6. Упруго-пластическое состояние шайбы, нагруженной внутренним и наружным давлениями 740
§ 7. Упруго-пластическое состояние бесконечной пластины, ослабленной круговым отверстием 750
Литература 752

Глава XI. **Расчет деталей, выполненных из материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию** 754
§ 1. Введение 754
§ 2. Характеристики материалов при одноосных растяжении и сжатии 756
§ 3. Расчет конструкций, элементы которых находятся в условиях одноосного однородного напряженного состояния (растяжение и сжатие) 758

§ 4. Расчет конструкций, элементы которых находятся в условиях одноосного неоднородного напряженного состояния (изгиб и изгиб с растяжением или сжатием) 771
§ 5. Прочность и жесткость чугунных колец 798
§ 6. Расчет заневоленных тарельчатых пружин 804
Литература 812

РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

РАСЧЕТЫ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ

Глава XII. **Основные результаты экспериментального изучения ползучести при одноосном растяжении** 813

§ 1. Введение 814
§ 2. Простое последействие 815
§ 3. Простая релаксация 837
Литература 840

Глава XIII. **Гипотезы ползучести** 842

§ 1. Сущность гипотез ползучести 842
§ 2. Гипотеза упрочнения 843
§ 3. Гипотеза течения 848
§ 4. Гипотеза старения 850
§ 5. Гипотеза пластической наследственности 856
§ 6. Экспериментальная проверка гипотез ползучести 859
§ 7. Критический анализ гипотез ползучести 871
§ 8. Ползучесть при неоднородном напряженном состоянии . . . 872
§ 9. Релаксация напряжений в деталях машин 875
§ 10. Неустановившаяся и установившаяся ползучесть 881
Литература 883

Глава XIV. **Расчеты при установившейся ползучести** 885

§ 1. Основные уравнения установившейся ползучести 885
§ 2. Ползучесть изогнутого прямого бруса 887
§ 3. Ползучесть скрученного прямого бруса 893
§ 4. Ползучесть тонкостенных цилиндрических труб 907
§ 5. Ползучесть толстостенных труб 911
§ 6. Ползучесть кольца прямоугольного поперечного сечения . . 915
§ 7. Ползучесть круглых и кольцевых симметрично нагруженных пластин постоянной толщины 918
Литература 927

Глава XV. **Расчеты при неустановившейся ползучести** 929

§ 1. Основное уравнение измененной гипотезы ползучести Н. М. Беляева 929
§ 2. Общее решение некоторых одномерных задач неустановившейся ползучести 930
§ 3. Ползучесть бруса прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе 934
§ 4. Ползучесть бруса кольцевого поперечного сечения при чистом кручении 940
§ 5. Ползучесть при чистом кручении бруса, поперечное сечение которого — вытянутый прямоугольник 942
§ 6. Ползучесть толстостенной трубы, нагруженной внутренним и внешним давлением 945
Литература 953

Приложение. Характеристики материалов при одноосных растяжении и сжатии . . . . . 96[illegible]

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
14	9-я снизу	$= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_t r d\varphi z dz$	$= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_t dr z dz$
131	7-я снизу	$= z \frac{\partial w}{\partial x}$	$= - z \frac{\partial w}{\partial x}$
145	2-я сверху	$n^2 \cos \frac{n\pi y}{2b}$	$n^2 \cos \frac{n\pi y}{2b} = 0$
157	9-я сверху	$\cos k\pi G_k$	$\cos k\pi C_k$
162	1-я снизу	$\operatorname{sh}\left(q\pi \frac{a}{b}\right) + (1-\mu)\frac{a}{}$	$2 \operatorname{sh}\left(q\pi \frac{a}{b}\right) + (1-\mu)\frac{a}{b}$
178	12-я снизу	$-2\sum_{1}^{\infty}[A_r R_{rk}(1)\cos k\pi -$	$-2\sum_{1}^{\infty}[A_k R_{rk}(1)\cos k\pi -$
191	15-я сверху	$- A_r R_{rk}(1)] - - \frac{\pi a^2}{2b} y\Big]$	$- A_k R_{rk}(1)] - - \frac{\pi a^2}{2b} y^2\Big]$
193	1-я снизу	$+ dQRd\varphi$	$- dQRd\varphi$
232	3-я снизу	ϑ	θ
259	16-я сверху	$- [T_1 r(\theta + \vartheta)]$	$- [T_1 r(\theta + \vartheta)]'$
298	Табл. 9, графа 2-я, 5-я снизу	$- \frac{2a}{l}\cos\theta_0 +$	$- \frac{2a}{l}\Big)\cos\theta_0 +$
300	2-я сверху	$- \frac{1}{60(25-m)^2} +$	$- \frac{1}{60(25-m^2)} +$
423	Табл. 13, графа 3-я 1-я снизу	R_2	R^2
643	16-я сверху	$\frac{\omega_i}{3}\frac{\partial\Delta}{\partial y}$	$\frac{\omega_i}{3}\frac{\partial\Delta}{\partial x}$
643	8-я снизу	$-\frac{2}{3}\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\Big($	$-\frac{2}{3}\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\Big($
674	16-я сверху	$\int_0^{\varepsilon_{max}} \sigma_b \varepsilon d\varepsilon$	$\int_0^{\varepsilon_{max}} \sigma b \varepsilon d\varepsilon$
788	10-я снизу	контрольного	нейтрального
857	13-я сверху	$c(t) = atb$	$c(t) = at^b$
913	4-я сверху	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
925	7-я снизу	$(\quad)^{\frac{m+1}{}}$	$(\quad)^{\frac{m+1}{2}}$
931	11-я сверху	$q\,\lvert\beta\rvert\frac{}{d\Phi}$	$q\,\lvert\beta\rvert^{-2}\frac{d\,\lvert\beta\rvert}{d\Phi}$
936	23-я сверху	$f = \Phi^{\frac{3}{n-1}}$	$f = \Phi^{\frac{3}{n-1}} - 1$