

К. ШАДАН
П. САБАТЬЕ

**Обратные
задачи
в квантовой
теории
рассеяния**

**«МИР»
МОСКВА**



Texts and
Monographs
in Physics

W. Beiglböck
series editor

K. CHADAN AND P. C. SABATIER

**INVERSE PROBLEMS IN QUANTUM
SCATTERING THEORY**

With a Foreword by R. G. Newton

SPRINGER-VERLAG
NEW YORK HEIDELBERG BERLIN
1977

К. ШАДАН, П. САБАТЬЕ

Обратные задачи в квантовой теории рассеяния

Перевод с английского

Ю. А. Музычки, Б. В. Рудяка, А. А. Сузько

под редакцией

д-ра физ.-мат. наук Б. Н. Захарьева

Издательство «Мир»

Москва

1980

Книга написана двумя видными французскими специалистами в области обратных задач рассеяния и представляет собой монографию, в которой подводится итог более чем 30-летних исследований фундаментальной проблемы квантовой механики — вычисления по данным о рассеянии (спектральным параметрам) сил, действующих между частицами и определяющих свойства ядерных, атомных и молекулярных систем.

Она рассчитана на широкий круг физиков и физико-химиков, занимающихся квантовой теорией строения материи, но будет полезна также специалистам, работающим в области геофизики, оптики, акустики, электромагнетизма.

Редакция литературы по физике

© 1977 by Springer-Verlag New York Inc.
All Rights Reserved.
Authorized translation from English language edition
published by Springer-Verlag Berlin — Heidelberg — New York.

1704020000

Ш $\frac{20402-054}{041(01)-80}$ 54—80

© Перевод на русский язык, «Мир», 1980

В квантовой механике, по существу, всего лишь две задачи: прямая и обратная. Прямая задача — это нахождение волновой функции как решения уравнения Шредингера при заданном потенциале взаимодействия. Волновой функцией определяются все наблюдаемые свойства исследуемой системы. Обратная же задача заключается в восстановлении потенциала по данным рассеяния, извлекаемым из эксперимента.

Принципиальная возможность решения обратной задачи была доказана советскими математиками И. М. Гельфандом, Б. М. Левитаном, В. А. Марченко, М. Г. Крейном. Написанные ими интегральные уравнения легли в основу дальнейшего развития теории (работы Л. Д. Фаддеева, И. Кея, Г. Мозеса, Р. Г. Ньютона, П. Сабатье и др.).

До последнего времени в мире имелась лишь одна монография, посвященная обратной задаче в квантовой механике. Ее написали 20 лет назад З. С. Агранович и В. А. Марченко. С тех пор в этой области достигнуты большие успехи и давно назрела необходимость в новой книге ¹⁾.

П. Сабатье и К. Шадан — авторитетные специалисты по теории обратных задач, им принадлежит значительная доля оригинальных результатов этой теории. П. Сабатье — организатор ежегодных международных конференций по обратным задачам, проводимых в г. Монпелье (Франция).

Книга охватывает обширный материал, относящийся к данной теме. В ней единым образом изложены способы извлечения информации о центрально-симметричном потенциале из данных рассеяния, зависящих как от энергии E при фиксированном значении орбитального углового момента l , так и от l при фиксированном значении E . Рассмотрены обобщения теории на случай поля произвольной формы и релятивистских уравнений. Большое внимание уделено разнообразным приближенным методам и анализу неоднозначностей решений, получаемых с их помощью. К достоинствам монографии следует отнести наличие в ней главы, посвященной современному состоянию фазового анализа (гл. 10). Ранее соот-

¹⁾ Авторы данного предисловия сами (вместе с В. Н. Мельниковым и Б. В. Рудяком) начали писать такую книгу до того, как появилась монография К. Шадана и П. Сабатье. Именно поэтому мы с интересом взялись за хлопотливое дело перевода их монографии. Параллельно мы предполагаем опубликовать обзор тех аспектов теории, которые не нашли в ней отражения.

ветствующие вопросы излагались отдельно от обратной задачи, хотя построение матрицы рассеяния по сечениям является необходимым предварительным этапом, так как матрица рассеяния служит источником исходной информации для восстановления потенциала.

К сожалению, за рамками книги остались проблемы регуляризации алгоритмов практического решения обратной задачи (работы А. Н. Тихонова и др.). Обратная задача относится к числу некорректно поставленных задач: сколь угодно малые погрешности в данных рассеяния могут катастрофически повлиять на результаты восстановления потенциала. Поэтому требуются специальные меры, чтобы обеспечить устойчивость процедуры построения потенциала.

При переводе был существенно расширен список цитируемой литературы, в основном за счет работ советских авторов, а также статей, опубликованных за рубежом в самое последнее время. Из сделанных нами добавлений особенно хотелось бы отметить книги В. А. Марченко [1, 2] по теории операторов Штурма — Лиувилля, где много внимания отводится обратным задачам, в частности точным оценкам влияния вариаций спектральных данных на восстанавливаемый по ним потенциал, и только что опубликованную работу С. Н. Соколова [3], в которой дается решение обратной задачи в последовательной релятивистской теории [4].

При любезном сотрудничестве П. Сабатье в русском издании был исправлен ряд замеченных неточностей и опечаток.

Перевод книги выполнили Ю. А. Музычка (гл. 1—8), Б. В. Рудяк (гл. 9—13) и А. А. Сузько (предисловие и введение, гл. 14—17).

Август 1979 г.

Б. Н. Захарьев

А. А. Сузько

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. — Киев: Наукова думка, 1972.
2. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.
3. *Соколов С. Н.* Препринт ИФВЭ 79-71. — Серпухов, 1979.
4. *Соколов С. Н.* — ТМФ, 1978, т. 36, с. 193.

Обычное занятие физиков, в самых общих чертах, — это предсказывать, как будут двигаться частицы, если известны силы, или как будет распространяться излучение, если известно строение вещества. Обратная же задача состоит в том, чтобы по наблюдаемому движению сделать заключение о силах или о строении вещества. Восприятие окружающего нас мира с помощью органов чувств в значительной мере основано на интуитивном решении такой обратной задачи: мы судим о форме, размерах и поверхностной фактуре внешних предметов по рассеянию и поглощению ими света, детектируемого нашими глазами. Аналогичный, хотя и более утонченный, характер носит задача, решаемая в экспериментах, в которых по рассеянию определяют размеры и форму частиц или силы, с которыми они действуют друг на друга. Обычно предполагается, что кинематика, т.е. уравнения движения, известна. Силы же и то, каким образом они меняются от точки к точке, требуется определить.

Как было и со многими другими физическими идеями, первым, насколько нам известно, кто заговорил (в 1877 г.) об обратной задаче, рассматриваемой нами в этой книге, был Рэлей [351]. Исследуя колебания неоднородных струн, он кратко остановился на вопросе о том, можно ли найти распределение плотности струны, зная частоту колебаний. Это место его книги можно считать как бы «предвестником» математического исследования спектральной обратной задачи, начавшегося приблизительно семьдесятю годами позднее. Современный аналог и обобщение указанного места книги Рэрея — знаменитая лекция Марка Каца [232] под названием «Можно ли услышать форму барабана?».

С появлением уравнения Шредингера необычайно расширилось физическое содержание математических понятий, связанных со спектрами дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями. Уравнениями этого типа, которые раньше применялись только для анализа механических колебаний, теперь стало возможным пользоваться и для описания атомов и молекул. Только три года потребовалось для постановки в новом контексте вопроса такого же рода, как тот, что поставил Рэлей за полстолетия до появления уравнений Шредингера. Обратная задача для уравнения Шредингера дала стимул Амбарцумяну [9] заняться исследованием вопроса о единственности собственных значений обыкновен-

ных дифференциальных уравнений второго порядка (1929 г.). После этого появилась уверенность в том, что такая кинематика пригодна для исследования сил.

Первым к решению специфической проблемы восстановления функций или граничных условий Штурма — Лиувилля по спектральным данным серьезно приступил Борг [50]. После этого детально и углубленно обратной задачей стали заниматься Левинсон [268] и советские математики Чудов [92, 93], Марченко [287—290], Гельфанд и Левитан [170, 171], Крейн [253—257], Левитан [271—275], Березанский [32, 33] и Левитан и Гасымов [276].

Между тем физики начали на практике определять потенциальные кривые по экспериментальным данным о спектрах молекул. Морз [307] начал подобные исследования на основе спектральных точно решаемых моделей, а затем этот путь был продолжен Розеном и Морзом [361], Кроуфордом и Йоргенсеном [123]. В подобном же духе Пёшль и Теллер [344] исследовали модель ангармонического осциллятора, но такой метод получения информации о внутримолекулярных силах не оказался плодотворным.

Более перспективный подход был предложен Ридбергом [363], который конструировал потенциалы по наблюдаемым молекулярным спектрам, пользуясь правилами квантования Бора — Зоммерфельда. Клейн [248] обобщил его идею в систематическую процедуру, основанную на полуклассическом приближении в квантовой механике, а Ридберг [364] и Рис [353] продолжили специальные приложения.

Именно при таком полуклассическом подходе впервые возникла идея определения сил по экспериментальным данным о *непрерывном* спектре: Хойт [209], опираясь на интеграл Абеля, вычислил межчастичный потенциал по данным о рассеянии. Позднее разработку этой идеи продолжили Фирсов [153], Сандерс и Мюллер [384], Мейсон и Мончик [300], Миллер [301—303], Бак и Паули [57, 58], Бак [55], Бойль [52], Клингбейль [251], Притчард [347]; обзоры по этому вопросу были сделаны Баком [55] и, в более легком стиле, Уилером [425].

В 1939 г. вторая мировая война прервала большинство исследований. После ее окончания Фрёберг [159—162] начал разрабатывать совершенно новое направление исследования. Идея теперь состояла в том, чтобы, исходя из радиального уравнения Шредингера с центральным потенциалом, реконструировать потенциал, опираясь на экспериментальный фазовый сдвиг рассеяния при фиксированном угловом моменте без использования ВКБ-приближения. Для этого Хиллераас [210—214] предложил конкретную методику конструирования потенциала. Но такой метод имел существенный недостаток; как показал в 1949 г. Баргман [23, 24], центральный потенциал, вычисленный по фазовым сдвигам при одном угловом моменте, заданным во всей области положительной

энергии, необязательно однозначен. Левинсон [268, 269] установил единственность в частном случае, когда нет связанных состояний. Затем Марченко [287], исследуя вопрос о единственности, положил начало ряду математических исследований, упоминавшихся ранее, которые достигли высшей точки в знаменитой статье Гельфанда — Левитана [171].

К этому времени теория рассеяния была уже значительно более разработанной, чем до войны. Уилер [423] и Гейзенберг [199, 200] открыли S -матрицу, и Гейзенберг выдвинул предположение, что в ней содержится вся физическая информация. Это означало, в частности, что по рассеянию можно определять связанные состояния системы. Дополнительную информацию можно получить путем аналитического продолжения по энергии, и нули S -матрицы при заданном угловом моменте (или, что эквивалентно, ее полюса на нефизическом листе римановой поверхности) должны быть связанными состояниями с тем же угловым моментом. Тяжелый удар по программе Гейзенберга нанесло открытие «лишних» нулей, не имеющих отношения к связанным состояниям, и такие нули обсуждались в то время в ряде статей: На [282, 283], Вильдермута [427] и Ван Кампена [410]. Вопрос был решен, когда Баргман [23, 24] доказал, что связанные состояния не зависят от фазовых сдвигов рассеяния. Единственная связь, существующая между фазовым сдвигом и связанными состояниями с одним и тем же угловым моментом, заключается в хорошо известной сейчас теореме Левинсона [268, 269]. Семейства фазово-эквивалентных потенциалов, которые также дают одни и те же связанные состояния, были в явном виде получены Йостом и Коном [228] и Холмбергом [205].

В то же время Йост и Кон [229] разработали новую систематическую процедуру построения потенциалов по фазовому сдвигу и связанным состояниям, заданным с одним угловым моментом l — в виде бесконечных рядов. Мозес [308] и Проссер [348, 349] продолжили разработку этой идеи, но ее затмил и вытеснил более элегантный метод, основанный на результатах работы Гельфанда и Левитана [171] и получивший развитие в работах Йоста и Кона [228] и Левинсона [270]. Важные альтернативные методы и обобщения вскоре были добавлены Крейном [254, 255, 257] и Марченко [290].

Указанный метод основан на двух вариантах линейных интегральных уравнений, один из которых был дан Гельфандом и Левитаном, а другой — Марченко. Благодаря своей мощи и элегантности он с тех пор остается стандартным и служит моделью для решения целого ряда других вариантов обратной задачи рассеяния. Общий подход был изложен в более абстрактной форме, что позволило применить его к решению многих других задач в ряде статей Кея и Мозеса [239—244].

Двумя наиболее интересными результатами, к которым привели такие общие методы решения обратной задачи, явилось конструирование в явном виде неограниченного семейства потенциалов, для которых радиальное уравнение Шредингера при фиксированном угловом моменте может быть решено в замкнутой форме [25, 164, 402], а также построение семейств «прозрачных» потенциалов, которые при данном угловом моменте и при всех энергиях вообще не дают рассеяния [85, 310].

Мощный метод обратной задачи, основанный на уравнении Гельфанда — Левитана, вскоре был обобщен на системы дифференциальных уравнений [34, 352], а тем самым и на случай обратной задачи рассеяния для частиц со спином [5, 314]. После этого метод можно было считать, по существу, разработанным, и он был кратко изложен в двух обзорах: Фаддеева [149] и Аграновича и Марченко [6].

Последующие разработки в данной области касались обобщения: на связанные каналы, отвечающие различным заданным значениям энергии [113—118], на потенциалы, зависящие от энергии [284, 220—223], и на релятивистские уравнения [98, 99, 167—169, 346, 411, 417, 418, 420, 421]. В ограниченной степени результаты были использованы для интерпретации экспериментальных данных [43, 164, 316, 317] и для приближенного восстановления потенциала [227, 399, 400].

Чтобы построить потенциал по фазовому сдвигу методами, основанными на уравнении Гельфанда — Левитана или уравнении Марченко, нужно знать амплитуду рассеяния при всех энергиях. Поскольку на практике это условие никогда не выполняется, нужно было исследовать вопрос о том, какую неполную информацию о потенциале можно извлечь из ограниченного объема данных, таких, как моменты фазового сдвига. Хотя такие моменты представляют собой интегралы от фазового сдвига по энергии от нуля до бесконечности, в разных моментах высокоэнергетическая область учитывается по-разному. Поэтому они вполне пригодны для приближенного восстановления потенциала. Исследование данного вопроса было начато Р. Ньютоном [315] и Фаддеевым [146] и продолжалось в течение 15 лет во все более и более общих работах Буслаева и Фаддеева [70], Буслаева [68], Парсевича [335], Парсевича и Робертса [336], Робертса [358—360], Калоджеро и Дегаспериса [74] и, наконец, было закончено Калоджеро [71]. Затем эти методы были обобщены на релятивистские уравнения Дегасперисом [133] и Корбеллой [96, 97]. Вопрос о применении этих методов для приближенного восстановления потенциалов был рассмотрен Робертсом [357], а вариационные границы на потенциалы подобным же образом были выведены Калоджеро и др. [72].

Следует отметить, что идея построения потенциала по определяемому им фазовому сдвигу при одном значении углового мо-

мента, заданному при всех энергиях, не только трудно осуществить, а неудовлетворительна с физической точки зрения, так как при высоких энергиях предполагаемая нерелятивистская кинематика нарушена, но и не совсем логична. В самом деле, амплитуда рассеяния должна быть полностью известной при всех энергиях, но информация, содержащаяся во всех фазовых сдвигах, кроме одного из них, совершенно не используется. Значительно логичнее и в принципе легче было бы определять потенциал по полной амплитуде рассеяния, или всем фазовым сдвигам, при одном значении энергии. Первые шаги в этом направлении исследований были предприняты на основе ВКБ-приближения Уилером [424, 425], Келлером и др. [427], на основе аналитического продолжения по переменной углового момента Редже [354] и на основе процедуры, применяемой только к суперпозиции потенциалов Юкавы, Мартемом и Таргонским [298].

Более общий метод восстановления потенциала при фиксированной энергии, основанный на аналоге уравнения Гельфанда — Левитана, был предложен Ньютоном [318], который показал также, что потенциалы не могут быть получены однозначно¹⁾. Метод Ньютона был значительно обобщен и углублен в ряде статей Сабатье [366—373], а также в работе Ньютона [320]. Затем новый метод Сабатье [374] привел к полному решению обратной задачи при фиксированной энергии [224, 375, 376, 379—381] в том смысле, что в широком классе определяются все потенциалы, приводящие к данному набору фазовых сдвигов. Неоднозначность в обратной задаче была показана Сабатье [377, 378], а идею Редже углубленно исследовал Лёффель [281]. Наконец, Сабатье и Хушияр [206, 208] обобщили метод фиксированной энергии на случай частиц со спином, а Хушияр [207] — на случай потенциалов, зависящих от углового момента.

Все упомянутые выше методы применимы только к рассеянию центральными потенциалами, а в случае частиц со спином — к рассеянию ротационно-инвариантными полями взаимодействия со спиновой зависимостью. Определение же нецентрального потенциала взаимодействия общего вида по амплитуде рассеяния связано со значительно большими трудностями. В электромагнитном случае некоторые результаты были получены Лаксом и Филлипсом [266], но оказалось не так легко обобщить на этот случай методы, основанные на уравнениях Гельфанда — Левитана или Марченко. Тот факт, что амплитуда рассеяния в нецентральном случае является функцией пяти переменных (двух углов, характеризующих направление падающего пучка, двух углов направления рассеяния и энергии), тогда как определяющий ее потенциал — функция только трех, означает, что на такие амплитуды должны налагаться

¹⁾ Более строго эта задача рассмотрена в работе [463].— *Прим. ред.*

жесткие ограничения и они не могут быть произвольно заданными. Более того, методы Гельфанда — Левитана и Марченко основаны на существовании интегрального ядра со свойством «треугольности», аналогичного по виду треугольной матрице. Это свойство нелегко обобщить на случай более одного измерения. Такая попытка была сделана Кейем и Мозесом [244, 245], но их метод рассчитан на нелокальные потенциалы и не гарантирует воспроизведения локальных потенциалов. Фаддеевым был сделан существенный шаг в поиске нужного свойства треугольности в случае более чем одного измерения [151, 152], и вслед за тем Фаддеевым [152] и независимо от него Ньютоном [322, 323] была решена полная трехмерная обратная задача рассеяния. И все же в данной области еще остаются без ответа некоторые важные вопросы и пока еще нельзя считать, что трехмерная обратная задача решена полностью.

Помимо случая потенциалов, не являющихся сферически-симметричными, в качестве обобщения можно рассматривать обратную задачу в случае произвольных нелокальных взаимодействий. Но простой подсчет переменных (интегральное ядро в случае трех измерений есть функция шести переменных, а амплитуда рассеяния — только пяти) показывает, что эта задача неразрешима без каких-либо ограничивающих предположений. Характер же этих ограничений таков, что весь подход становится весьма искусственным. Хотя при высоких энергиях локальные потенциалы теряют физический смысл, их использование в нерелятивистском случае вполне приемлемо.

Один класс нелокальных взаимодействий (не считая сил, зависящих от скорости) фактически уже широко применяется в ядерной физике, — это потенциалы конечного ранга (сепарабельные потенциалы). Дело в том, что с такими потенциалами уравнение Шредингера решается в явном виде через квадратуры. Во многих приложениях и модельных вычислениях данное обстоятельство оказывается большим преимуществом. Правда, применение таких потенциалов не мотивировано физически. В случае сепарабельных взаимодействий схема решения обратной задачи рассеяния значительно проще, чем в случае локальных потенциалов, и задача была решена Нордепом и Мартеном [186—188], а также Болстерли и Маккензи [49]. Шапан [82, 83], Милс и Ридлинг [304], а также Табакин [401] решили задачу в случае взаимодействий конечного ранга общего вида.

В течение многих лет, фактически с тех пор, как Хойт в 1939 г. [209] сделал первую попытку определить межчастичный потенциал по данным рассеяния, при решении обратной задачи всегда исходили из амплитуды рассеяния, хотя экспериментально наблюдается только квадрат ее модуля, т. е. эффективное сечение. Вопрос о вычислении комплексной амплитуды по ее модулю и о возмож-

ной неоднозначности результата такого вычисления серьезно не ставился, если не считать некоторых известных примеров частиц со спином, когда из-за неполноты данных о поляризации решение этого вопроса требовалось безотлагательно.

Идея определения фазы амплитуды рассеяния по дифференциальному сечению на основании оптической теоремы, или унитарности S -матрицы, была впервые выдвинута Клепиковым [250], а впоследствии независимо от него Ньютоном [321] и Мартеном [295]. В работах этих авторов обобщенная оптическая теорема рассматривается как нелинейное интегральное уравнение для фаз амплитуды, а условия для дифференциальных сечений, гарантирующие существование или единственность фазовой функции, получаются из известной теоремы о фиксированной точке Вейля. Эти первые результаты были затем обобщены и развиты далее Гербером и Карплусом [172], Тортореллой [405, 406, 407] и Аткинсоном и др. [12]. Работы последних лет [16—18, 64—66, 215, 296] добавили физически обоснованные условия в плоскости комплексной энергии (или переданного импульса), необходимые для устранения неоднозначности. Но проблема еще окончательно не решена, так как все найденные условия существования или единственности оказываются неприменимыми в большинстве случаев, представляющих интерес с физической точки зрения.

С изложенным косвенно связаны еще два ряда работ, заслуживающих краткого упоминания. Первый из них — одномерный вариант обратной задачи рассеяния, а именно одномерная задача отражения. Она не только интересна сама по себе, но и служит важной математической моделью для трехмерного случая. Ее исследованием и решением занимались Кей и Мозес [240—242] и Фаддеев [147, 149]. Другой ряд работ — это дискретный вариант обратной задачи рассеяния. Решение было найдено Кейзом и Кэцем [79], а также Кейзом [75—78] на основе аналогии с непрерывным вариантом¹⁾. Его положительная сторона — интуитивная связь с теорией переноса.

В заключение отметим одно важное и к тому же удивительное применение результатов, полученных в обратной задаче рассеяния, к решению некоторых нелинейных волновых уравнений, найденное Гарднером и др. [165]. Эти авторы установили, что простейшее однопараметрическое семейство потенциальных функций одномерного уравнения Шредингера, которое оставляет его спектр инвариантным, удовлетворяет уравнению Кортевега — де Фриза как функция параметра (рассматриваемого как «время» в последнем уравнении). Кроме того, поведение регулярного решения уравнения Шредингера на больших расстояниях как функции этого

¹⁾ См. также обзор [455] работ по конечно-разностному подходу в обратной задаче и численное решение ее в конечно-разностном приближении [453]. — *Прим. ред.*

параметра оказывается таким, что ему соответствует простое изменение фазы в коэффициенте отражения. Поэтому решение задачи с начальными условиями для уравнения Кортевега — де Фриза можно найти, решая обратную задачу отражения. Потенциал, которым определяется коэффициент отражения как функция «времени», дает решение уравнения Кортевега — де Фриза для всех «времен». Энергиями связанных состояний определяются скорости распространения солитонов, т. е. решений типа уединенной волны соответствующего уравнения Кортевега — де Фриза.

Столь неожиданно найденное применение решения обратной задачи рассеяния позже было развито далее и обобщено на другие целипейные волновые уравнения, и теперь такой метод может найти важные физические приложения. По данному методу и полученным с его помощью результатам имеется обзор Скотта и др. [385], но в этом направлении исследований в настоящее время еще ведется большая работа.

Февраль 1977

Блумингтон, шт. Индиана

Р. Ньютон

Математическое выражение физического закона — это правило, которым определяется отображение $\mathcal{M}$ множества функций $\mathcal{C}$, называемых *параметрами*, в множество функций $\mathcal{E}$, называемых *результатами*. Такое правило обычно представляет собой систему E уравнений, параметрами которых служат элементы множества $\mathcal{C}$, а решениями — соответствующие элементы множества $\mathcal{E}$, так что определение отображения $\mathcal{M}$ оказывается весьма сложным. Но из самого понятия отображения ясно, что решение системы E для любого элемента множества $\mathcal{C}$ должно существовать и быть единственным в множестве $\mathcal{E}$. Это единственное ограничение, которое следует наложить на систему уравнений E . Назовем «результатами расчета» элементы множества $\mathcal{E}$, полученные таким образом из элементов множества $\mathcal{C}$. Нахождение «результата расчета» для данного элемента множества $\mathcal{C}$ называется «решением *прямой задачи*». Нахождение же подмножества $\mathcal{C}$, соответствующего данному элементу множества $\mathcal{E}$, называется «решением *обратной задачи*».

Чтобы отображение $\mathcal{M}$ имело физический смысл, множество $\mathcal{E}$ должно быть таким, чтобы его элементы можно было *сравнивать с результатами эксперимента*. В дальнейшем мы предполагаем, что результат любого относящегося к делу измерения есть элемент подмножества $\mathcal{E}_e$, называемого множеством результатов эксперимента. Таким образом, множество $\mathcal{E}$ содержит и результаты эксперимента, и результаты расчета. Предполагается также, что множеству $\mathcal{E}$ может быть придана структура метрического пространства. Тогда, чтобы сравнить данный *результат расчета* e_i с данным *результатом эксперимента* e_j , нужно измерить расстояние $d(e_i; e_j)$.

Множество $\mathcal{C}$ было определено как множество функций, для которых могут быть решены уравнения E . Учет «физических свойств» обычно приводит к более сильным ограничениям. Другими словами, $\mathcal{C}$ — это множество $\mathcal{S}$ всех функций, для которых могут быть решены уравнения E и *которые совместимы* со всей «физической информацией», вытекающей либо из общих принципов, либо из проведенных ранее измерений. Но в большинстве случаев

для множества $\mathcal{S}$ оказывается невозможным дать прямое и точное определение, а потому приходится брать в качестве множества $\mathcal{C}$ подходящее подмножество множества $\mathcal{S}$, допускающее четкое определение. Попытки же расширить определение множества $\mathcal{C}$ иногда приводят к установлению новых классов «параметров», для которых могут быть решены прямые и обратные задачи. Мы увидим один пример недавно полученных результатов такого рода.

После таких определений может показаться, что все физические задачи обратные. Но это название обычно сохраняют лишь за теми задачами, в которых ищут точные математические формы для обобщенных обратных отображений множества $\mathcal{E}$ в множество $\mathcal{C}$. Тем самым исключается так называемый «метод подгонки», при котором модели, содержащие несколько параметров и дающие хорошее согласие с экспериментальными результатами, получают путем многократных проб и исправлений или какими-нибудь другими способами. Наша книга посвящена обратным задачам квантовой теории рассеяния. Таким образом, экспериментальные результаты — это величины, измеренные в экспериментах по рассеянию, например эффективные сечения или другие величины такого же рода. Поскольку эти величины связаны с асимптотическим поведением волновых функций, мы будем также рассматривать задачи, в которых пространство $\mathcal{E}$ состоит из результатов «теоретических измерений» этого асимптотического поведения, например амплитуды рассеяния или фазовых сдвигов. Это естественным образом приводит к отдельной проблеме конструирования амплитуды рассеяния по эффективному сечению. Если эту проблему оставить в стороне, то уравнения E , определяющие преобразование $\mathcal{M}$, представляют собой волновые уравнения (например, уравнения Шредингера, уравнения Клейна — Гордона, уравнение Дирака вместе с соответствующими краевыми условиями). Множества же параметров $\mathcal{C}$ — это множества локальных или нелокальных потенциалов, исходя из которых можно рассчитать результаты рассеяния.

Мы думаем, что нет какой-либо необходимости распространяться о важном значении всех таких задач. Поскольку всю информацию, которую мы можем получить о физике ядра, частиц и субчастиц, нам дают эксперименты по рассеянию, их важное физическое значение очевидно. Интерес же к ним как к математическим задачам самим по себе обусловлен тем, что они связаны с многими ветвями анализа: новейшими результатами теории дифференциальных и интегральных уравнений, гармонического анализа, спектральной теории операторов, голоморфных функций, асимптотических представлений, численного анализа — все это необходимо для исследования таких искорректно поставленных задач.

В книге семнадцать глав, из них первые две — вводные, в них дается общий обзор всех важнейших результатов по потенциаль-

ному рассеянию. В гл. 16 рассматриваются приближенные методы, в гл. 17 — «одномерные обратные задачи», а остальные тринадцать глав составляют две части. В них мы рассматриваем сферически-симметричные потенциалы.

В первой части (гл. 3—8) анализируемый «результат» — фазовый сдвиг $\delta_l(E)$, заданный как функция энергии E при всех ее положительных значениях, и некоторая дополнительная информация (например, связанные состояния). Соответствующие обратные задачи называются «обратными задачами при фиксированном l ».

В гл. 3 подробно анализируется так называемый метод Гельфанда — Левитана — Йоста — Кона. Мы здесь решили рассматривать класс потенциалов, который шире обычно рассматриваемого и имеет то преимущество, что находится во взаимно-однозначном соответствии с широким классом фазовых сдвигов, представляющим большой интерес с точки зрения физики. Мы полностью исследуем случай $l = 0$ и затем случай с любым целым l для уравнения Шредингера со сферическим потенциалом. В гл. 4 мы останавливаемся на некоторых общих применениях метода Гельфанда — Левитана: конструируем классы потенциалов, различающихся только связанными состояниями или являющихся фазово-эквивалентными (или и то и другое), а также классы потенциалов, функции Йоста которых различаются множителем, представляющим собой рациональную функцию (потенциалы Баргмана). Выводится также так называемая теорема Марченко, которая связывает данную асимптотическую S -функцию $S(k)$ с некоторыми операторами Шредингера. В гл. 5 излагается метод Марченко, тоже со всеми подробностями, в простом случае оператора Шредингера со сферически-симметричным потенциалом. В гл. 6 приводятся примеры результатов, которые получены этими спектральными методами и которые могут быть представлены в замкнутой форме (потенциалы Баргмана, сингулярные осциллирующие потенциалы). Гл. 7 посвящена полным или частичным исследованиям обратной задачи при фиксированном l для специальных классов потенциалов: потенциалов Юкавы (метод Мартена и методы N/D) и голоморфных потенциалов (так называемые методы следов). В гл. 8 в уравнение Шредингера вводится нелокальное взаимодействие и полностью исследуется обратная задача для этого класса взаимодействий, как сепарабельных, так и несепарабельных. В гл. 9 дается целый ряд других подходов к обратным задачам при фиксированном l . Тем самым подготавливается логический переход ко второй части книги. При этом отмечается большое число до сих пор не решенных проблем, анализу которых посвящены многие из последних публикаций.

Во второй части книги (гл. 10—15) рассматриваются задачи, в которых исходными экспериментальными результатами служат эффективные сечения, что, конечно, ближе к реальной действи-

тельности. В гл. 10 мы разбираем на первый взгляд очень простой, а на самом деле весьма сложный вопрос о построении амплитуды рассеяния по сечениям. Предполагая затем, что этот вопрос решен при заданной энергии, мы в трех следующих главах показываем, каким образом можно построить соответствующий потенциал. В первой из них (гл. 11) приводятся общие результаты и ставятся общие вопросы, на которые требуется ответить. Во второй (гл. 12) излагаются матричные методы (например, так называемые методы Ньютона — Сабатье), в которых класс параметров $\mathcal{C}$ определяется таким образом, что его элементы можно конструировать, исходя из экспериментальной амплитуды рассеяния, путем некоторого отображения, обратного отображению U . Другими словами, в силу этого отображения множество $\mathcal{C}$ есть образ множества $\mathcal{E}$ и, следовательно, представляет собой класс специальных (ad hoc) потенциалов, обратная задача для которого имеет простое решение, причем это решение может быть получено с помощью специальных матриц. Третья часть этого исследования (гл. 13) посвящена операторным методам, в которых класс $\mathcal{C}$ потенциалов определяется априори на основании физических соображений. Метод Редже и Лёффеля представляет собой обобщение метода Гельфанда — Левитана в применении к данной задаче, а «полное решение» есть дальнейшее обобщение матричных методов. Последнее позволяет ответить на все общие вопросы, поставленные в гл. 11. В гл. 14 излагается попытка решения трехмерной обратной задачи: как найти потенциал $V(\mathbf{r})$, зная амплитуду рассеяния при всех энергиях. В противоположность недоопределенным обратным задачам, о которых говорилось ранее, эта задача сильно переопределена и условия непротиворечивости, гарантирующие существование решения, еще не совсем ясны. В качестве введения к главе проводится сравнение с методами, используемыми в более простых задачах. Это очень помогает нам понять схему решения задачи, хотя и сложную, но, по существу, не отличающуюся от схемы решения остальных задач. В гл. 15 дается общий обзор различных подходов к обратным задачам при фиксированной энергии, что позволит лучше разобраться в существе некоторых подходов к решению более общих задач.

Было трудно решить точно, каким должно быть содержание гл. 16 о приближенных методах. Мы решили дать общий обзор большинства случаев, в которых была получена приближенная замкнутая форма для обобщенного обратного отображения множества $\mathcal{E}$ в множество $\mathcal{C}$. Таким образом, численные методы здесь не рассматриваются. Правда, при этом нам приходится кратко останавливаться на полуклассических методах, что иногда приводит нас к границе рассматриваемого в данной книге круга вопросов. Например, мы говорим там о РРР-методе, хотя определение дифференциального уравнения по нескольким дискретным

спектрам, очевидно, выходит за рамки нашей книги. Ясно, что границы нашей темы не очень четко определены. Так, в гл. 17 мы приводим пример обратной задачи, рассматриваемой как обобщенное преобразование и применяемой к решению нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, хотя эти проблемы слишком широки, чтобы их можно было изложить в данной книге. Такие приложения наряду с определением дифференциального оператора по нескольким дискретным спектрам, одномерным обратным задачам на всей оси и классическим обратным задачам со всеми их применениями в химии, геофизике, акустике и электромагнитных исследованиях сами заслуживают отдельной книги, и Сабатье намеревается в один прекрасный день взяться за эту работу. Последняя глава посвящена одномерной обратной задаче и некоторым ее прямым приложениям.

Очевидно, что центр интереса в обеих частях книги не совсем одинаков. Обратные задачи с фиксированным l имеют значительно более длительную историю, чем обратные задачи при фиксированных E . Поэтому многие такие задачи сейчас полностью решены, и мы сочли более целесообразным как можно короче изложить их решение и возможные обобщения, а основной упор сделать на тех сторонах, которые важны для физиков. В частности, мы избрали доказательства, которые должны знать физики, часто ограничиваясь лишь ссылками на более подробные и более строгие доказательства, предпочитаемые математиками. Обратные же задачи при фиксированных E значительно моложе, и не всегда были получены их классы, для которых результаты оказываются ясными и четкими, так что при написании соответствующих разделов требовалось больше осторожности. Но поскольку физические приложения таких задач носят более прямой характер, необходимо тщательно сравнивать все возможные схемы решения, чтобы выбрать наиболее конструктивные методы. Поэтому в построении двух частей книги имеются некоторые различия; они обусловлены, вероятно, еще и тем, что гл. 1—13 и гл. 17 были написаны в основном К. Шаданом, а гл. 9—16—П. Сабатье.

Нам оказали большую помощь три обзорные статьи: обзорная статья Фаддеева [149], лекции Мартена [296] о конструировании фазовых сдвигов по сечениям и лекции Р. Ньютона (1966—1973 гг.) [322—323], в частности лекция о трехмерной обратной задаче. Это и не удивительно. Три этих физика вместе в течение последних 20 лет выполнили наиболее важную работу по обратным задачам. Нам хотелось бы поблагодарить их за ценные обсуждения, а также всех физиков, которые частными высказываниями по отдельным вопросам помогли нам глубже понять обратные задачи в квантовой теории рассеяния; особенно мы благодарим проф-ров Аткинсона, Кокса и Лёффеля, а также наших друзей д-ров Жолана и Миодека, сделавших свой личный вклад в гл. 9 и 12. Мы не

забываем как важный источник доклад NASA «*Математика обратной задачи*» под редакцией Л. Колина [95], который оказал существенную помощь во многих междисциплинарных исследованиях по обратным задачам. П. Сабатье выражает свою особую признательность проф. Р. Ньютону, который всячески содействовал углублению понимания им обратных задач и был столь любезен, что написал предисловие к нашей книге.

Работы по обратным задачам субсидировались «Национальным центром научных исследований» по темам «Программы совместных исследований» и «Междисциплинарные исследования обратных задач». Эта организация устроила много встреч и дискуссий, что очень помогло нам.

При подготовке нашей книги нужно было проделать два вида важной работы. Во-первых, собрать ссылки и помочь в подготовке рукописи и рисунков. Это выполнила миссис Альберн, документалист при НЦНИ. Во-вторых, нужно было исправить английский язык (во второй части книги и во введении). Это сделал д-р Илия Миодек. В обоих случаях компетентность соединялась с большим вниманием к работе. Если эту книгу можно понять и если в ней можно отыскать забытую ссылку, то это лишь благодаря им, и это им должен быть особенно благодарен читатель.

Посвящение. Мне хотелось бы посвятить книгу памяти моего отца Селестэна Сабатье, который с интересом следил за ее подготовкой, но погиб в дорожной катастрофе, когда уже проходила последняя корректура.

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

§ 1. Приведенное радиальное уравнение Шредингера

Основные предположения

Рассмотрим случай рассеяния частицы с массой M в поле с центральным потенциалом $V(r)$. Будем предполагать, что потенциал действительный и локально интегрируемый (интегрируемость по Лебегу) всюду, кроме, может быть, начала координат, а в начале координат удовлетворяет условию интегрируемости

$$\int_0^a r|V(r)| dr < \infty, \quad a < \infty. \quad (1.1.1)$$

Будем также предполагать, что на бесконечности выполняется условие

$$\int_b^\infty |V(r)| dr < \infty, \quad b > 0. \quad (1.1.2)$$

В большинстве случаев мы будем рассуждать, считая потенциал непрерывной функцией. Но это нужно только для упрощения изложения. В конце главы, где будет рассматриваться особый класс сингулярных потенциалов, мы увидим, что в теорию можно включить и некоторые «умеренно сингулярные» обобщенные функции, такие, как δ -функция Дирака и пр.

Можно показать, что для потенциалов, удовлетворяющих приведенным выше условиям, справедлива обычная теория рассеяния и существует определенное соотношение между асимптотической формой волновой функции и сечением рассеяния. Но чтобы не было излишних осложнений (бесконечно большого числа связанных состояний и т. д.), обычно принимают, что функция $rV(r)$ абсолютно интегрируема на бесконечности. Комбинируя это условие с условием (1.1.1), получаем

$$\int_b^\infty |V(r)|r dr < \infty, \quad b \geq 0. \quad (1.1.3)$$

Грубо говоря, это означает, что в начале координат потенциал должен быть менее сингулярным, чем функция r^{-2} , а на бесконечности — убывать быстрее, чем r^{-2} . Мы будем называть такие потенциалы регулярными, а все другие — сингулярными.

В последние годы была разработана более общая теория рассеяния, которая позволяет оперировать с потенциалами, не удовлетворяющими условиям (1.1.1) или (1.1.2). Необходимость в отказе от условия (1.1.2) очевидна (кулоновский потенциал). Общая же теория рассеяния для потенциалов, не удовлетворяющих условию (1.1.1), необходима, поскольку приходится иметь дело с сингулярными потенциалами в физике элементарных частиц и в проблеме многих тел при использовании потенциалов с сильным отталкиванием. Итак, теперь существует общая строгая теория рассеяния для отталкивающих потенциалов, ведущих себя на бесконечности как $r^{-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), и для потенциалов, более сингулярных, чем r^{-2} , в начале координат. Для некоторых из них (осциллирующие сингулярные потенциалы, см. § 6) все результаты совершенно аналогичны результатам для регулярных потенциалов, удовлетворяющих условию (1.1.3). Для потенциалов же более общего вида обычную теорию приходится соответствующим образом изменить. Было показано, что может быть построена единая и последовательная теория рассеяния для широкого класса сингулярных потенциалов, если особенность (либо в начале координат, либо на бесконечности, либо и там и там) носит характер отталкивания. Известно, что когда потенциал сингулярен в начале координат и является потенциалом притяжения, гамильтониан нельзя считать самосопряженным. Но возможно бесконечно много самосопряженных расширений, и для каждого из них может быть построена последовательная теория рассеяния, причем в такой теории в отличие от классической механики, как это ни удивительно, отсутствует «падение на центр». Единственная проблема состоит в том, чтобы определить, какая из таких теорий может служить хорошей физической теорией. К сожалению, не существует какого-либо физического критерия, который позволил бы нам выбрать одну среди всех этих вполне солидных теорий, удовлетворяющих всем общим постулатам типа асимптотической полноты и пр. Если же сингулярность находится на бесконечности и является притягивательной, то нет и никакой теории рассеяния.

Во всяком случае, обратная задача для таких сингулярных потенциалов (кроме рассмотренных в конце главы) никем не изучалась. Дело в том, что и прямая-то задача не полностью исследована во всех ее деталях. Поэтому мы не будем рассматривать в этой книге общий случай сингулярных потенциалов.

Для упрощения записи формул мы в дальнейшем будем пользоваться единицами измерения, в которых выполняется равенство

$$\hbar = 2M = 1. \quad (1.1.4)$$

При этом полная энергия частицы будет равна

$$E = \frac{p^2}{2M} = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} = k^2, \quad (1.1.5)$$

где p — начальный или конечный импульс, а k — соответствующее волновое число. Приведенное радиальное уравнение Шредингера для парциальной волны с угловым моментом l будет иметь вид

$$\frac{d^2}{dr^2} \psi_l(k, r) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \psi_l(k, r) = V(r) \psi_l(k, r). \quad (1.1.6)$$

Физическое решение

Предположим на время, что параметр k — действительная величина. Позже мы увидим, как можно ввести комплексный параметр k . Рассматриваемое нами уравнение есть уравнение второго порядка, коэффициенты которого, вообще говоря, сингулярны в начале координат (либо $l \neq 0$, либо потенциал сингулярный). Как хорошо известно, только одно из двух линейно-независимых решений такого уравнения может обращаться в нуль при $r = 0$, а второе обычно сингулярно в начале. Чтобы строго определить это решение, мы обратимся к случаю свободного движения, т. е. отсутствию взаимодействия. Запишем свободное решение в виде

$$u_l(k, r) = \left(\frac{\pi k r}{2} \right)^{1/2} J_{l+1/2}(kr), \quad (1.1.7)$$

где J_ν — функция Бесселя ¹⁾ порядка ν . Поведение этого решения вблизи начала координат и на бесконечности дается выражениями

$$u_l \approx \left(\frac{(kr)^{l+1}}{(2l+1)!!} \right), \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (1.1.8)$$

$$u_l \approx \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \sin \left(kr - \frac{1}{2} l\pi \right), \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (1.1.9)$$

где $(2l+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2l+1)$.

В общем случае, когда имеется взаимодействие, назовем регулярным (в отличие от общего решения, обычно сингулярного при $r = 0$) решение уравнения (1.1.6), удовлетворяющее граничному условию

$$\lim_{r \rightarrow 0} (2l+1)!! r^{-l-1} \varphi_l(k, r) = 1. \quad (1.1.10)$$

Мы увидим, что для «регулярных» потенциалов такое решение существует и является единственным решением, обращающимся в нуль в начале координат. По физическим причинам, известным

¹⁾ Во всей книге мы примем определения и обозначения Эрдейи и др. [144].

из теории рассеяния, физическая волновая функция ψ_l также должна обращаться в нуль в начале координат. Следовательно, она пропорциональна решению φ_l . Коэффициент пропорциональности между этими двумя решениями определяется физическим требованием, чтобы точное асимптотическое поведение функции ψ_l соответствовало выражению

$$\psi_l \approx \exp(i\delta_l) \sin \left(kr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l \right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.1.11)$$

где фазовый сдвиг δ_l есть действительная величина, зависящая, конечно, от энергии, т. е. от импульса k .

Решения Йоста и функции Йоста

Чтобы установить точное соотношение между функциями φ_l и ψ_l , которое, как мы увидим позже, играет чрезвычайно важную роль в обратной задаче, мы должны ввести еще одно хорошо определенное решение уравнения (1.1.6), задав его асимптотическое поведение на бесконечности. Обратимся снова к случаю свободного движения и возьмем нормированное свободное решение в виде

$$w_l(kr) = i \exp(i\pi l) \left(\frac{\pi}{2} kr \right)^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(kr), \quad (1.1.12)$$

где $H_v^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода порядка v . Вблизи начала координат и на бесконечности имеем

$$w_l(kr) \underset{r \rightarrow 0}{\approx} (-1)^l [(2l-1)!!] (kr)^{-l}, \quad (1.1.13)$$

$$w_l(kr) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} e^{i \frac{\pi l}{2}} e^{ikr}. \quad (1.1.14)$$

Введем теперь решение $f_l(k, r)$ уравнения Шредингера (1.1.6), называемое решением Йоста, потребовав, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{e^{-i\pi l/2} e^{-ikr} f_l(k, r)\} = 1, \quad (1.1.15)$$

т. е. чтобы в случае свободного движения решение f_l сводилось к решению w_l . Позже мы увидим, что при выполнении условия (1.1.3) такое решение существует и удовлетворяет также условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{f_l(k, r) - e^{i \frac{\pi l}{2}} e^{ikr}\} = 0, \quad (1.1.16)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{f_l'(k, r) - ike^{i \frac{\pi l}{2}} e^{ikr}\} = 0. \quad (1.1.17)$$

Очевидно, что при $k \neq 0$ два решения $f_l(\pm k, r)$ линейно-независимы, так как их вронскиан, согласно (1.1.16) и (1.1.17), равен

$$W \{f_l(k, r), f_l(-k, r)\} = (-1)^{l+1} 2ik. \quad (1.1.18)$$

Следовательно, регулярное решение можно записать в виде линейной комбинации этих двух решений Йоста с постоянными (не зависящими от r) коэффициентами:

$$\varphi_l = \frac{1}{2} ik^{-l-1} \{F_l(k) f_l(-k, r) - (-1)^l F_l(-k) f_l(k, r)\}. \quad (1.1.19)$$

То обстоятельство, что перед обоими решениями Йоста фигурирует одна и та же функция F_l , обусловлено тем, что регулярное решение есть четная функция переменной k . Последнее же оказывается следствием того, что уравнение Шредингера четно по переменной k , а граничное условие (1.1.10) от нее не зависит.

Функция F_l , которую мы можем также выразить через вронскиан:

$$F_l(k) = (-k)^l W \{f_l(k, r), \varphi_l(k, r)\}, \quad (1.1.20)$$

называется функцией Йоста и играет очень важную роль в теории рассеяния и соответствующей обратной задаче. Одно из важных свойств функции Йоста таково:

$$F_l(-k) = \{F_l(k)\}^*, \quad k - \text{действительное}, \quad (1.1.21)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение.

Это свойство следует из соотношений

$$\{\varphi_l(k, r)\}^* = \varphi_l(k, r), \quad k - \text{действительное}, \quad (1.1.22)$$

$$\{f_l(k, r)\}^* = (-1)^l f_l(-k, r), \quad k - \text{действительное}, \quad (1.1.23)$$

которые можно доказать, если взять комплексно-сопряженное уравнение Шредингера с граничными условиями (1.1.10) и (1.1.15) и принять во внимание, что потенциал действителен. Если мы теперь напомним (определение величины δ_l)

$$F_l(k) = |F_l(k)| \exp[-i\delta_l(k)] \quad (1.1.24)$$

и воспользуемся асимптотической оценкой (1.1.16), то сразу же получим

$$\varphi_l \approx_{r \rightarrow \infty} \frac{|F_l(k)|}{k^{l+1}} \sin\left(kr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l\right). \quad (1.1.25)$$

Отсюда видно, что физическое решение дается выражением

$$\psi_l = \frac{k^{l+1}}{F_l(k)} \varphi_l \quad (1.1.26)$$

и что фазовый сдвиг точно равен взятой с обратным знаком фазе функции Йоста. Такое соотношение между фазой функции Йоста

и фазовым сдвигом — лишь одно из ее замечательных свойств. Другое ее замечательное свойство — прямое соотношение между некоторыми из ее нулей и связанными состояниями. Такие состояния представляют собой физические решения уравнения Шредингера, квадратично интегрируемые на всей действительной r -оси $[0, \infty)$. Они существуют при некоторых определенных значениях энергии. Подробным исследованием их мы займемся в следующей главе. Можно показать, что если выполняется условие (1.1.2), то они существуют только при $E \leq 0$.

Обратные задачи рассеяния

Проведенный выше анализ, который будет более детально продолжен в следующих разделах главы, приводит нас к такому заключению: если нам известен потенциал, то мы можем решить уравнение Шредингера при данном l и найти различные его решения, которые затем дадут нам фазовый сдвиг и его зависимость от энергии, а также энергию и волновые функции связанных состояний. Но можно ли, наоборот, более или менее однозначно определить потенциал по известным фазовому сдвигу и связанным состояниям? Это будет темой первой части нашей книги, где угловой момент l предполагается фиксированным, а энергия меняется во всем интервале $[0, \infty)$. Интерес к данному вопросу совершенно очевиден, так как фазовый сдвиг есть измеряемая величина, которую нам дают эксперименты по рассеянию (см. гл. 10).

Здесь мы можем сказать несколько слов эвристического характера о взаимосвязи между этими двумя величинами. Наши рассуждения ни в коем случае не будут строгими. Но общие выводы, которые мы сделаем, правильны и будут обоснованы в последующих главах. Мы хотим найти потенциал, который представляет собой действительную интегрируемую функцию одной действительной переменной, удовлетворяющую некоторым условиям типа (1.1.3). Поскольку чудес в природе не бывает, а еще меньше их в математике и математической физике, логично думать, что для того, чтобы можно было более или менее однозначно определить потенциал по какой-нибудь другой величине, эта величина должна быть величиной по крайней мере такого же общего рода, что и сам потенциал. То есть она должна быть по крайней мере действительной функцией действительной переменной. А такой величиной и является сдвиг фазы $\delta_l(k)$ при действительных значениях волнового числа k . Как мы увидим в дальнейшем, если потенциал является отталкивающим или недостаточно притягивающим для образования связанных состояний, соответствие между потенциалом $V(r)$ и фазовым сдвигом $\delta_l(k)$, который предполагается известным при всех $k \geq 0$, оказывается взаимно-однозначным.

Когда имеются связанные состояния, нам нужно знать их энергию и нормировку их волновых функций. Дело в том, что, как станет ясно позже, основным моментом в решении обратной задачи является полнота системы решений уравнения Шредингера в интервале $-\infty < E < \infty$. Известно, что, когда связанных состояний нет, система состояний рассеяния, соответствующих значениям $E \geq 0$, оказывается полной. При наличии же связанных состояний мы, чтобы обеспечить полноту системы, должны добавить их волновые функции к набору состояний рассеяния. В этом глубокая причина того, что связанные состояния, если они имеются, входят в конструирование потенциала.

Пока что мы не делали определенных предположений о свойствах потенциала. Предположим теперь, что потенциал априори принадлежит к некоторому определенному классу функций, например представляет собой голоморфную функцию аргумента r вблизи начала координат, которая не приводится к полиномиальной форме. В таком случае потенциал эквивалентен бесконечному счетному множеству действительных чисел, которые мы можем взять за коэффициенты его разложения в ряд Тейлора. Тогда можно задать вопрос: будет ли другой набор действительных чисел, таких, как значения фазового сдвига для некоторого бесконечного, но дискретного набора значений энергии, достаточен для определения потенциала? Ответ, конечно, был бы положительным, если бы удалось показать, что для таких потенциалов фазовый сдвиг при всех k также определяется набором $\{\delta_l(k_i), i = 0, 1, \dots\}$ действительных чисел. К сожалению, это, по-видимому, неверно, если фиксирована величина l . Но если фиксировать энергию и изменять l ($l = 0, 1, 2, \dots$), то при условии, что некоторая функция, связанная с потенциалом, является целой функцией экспоненциального вида, набором $\{\delta_l\}$ потенциал определяется с некоторой малой неоднозначностью. Это приводит нас к обратной задаче при фиксированной энергии, которой посвящена вторая часть книги. Там будет показано, что заданием всех фазовых сдвигов при одном значении энергии потенциал, вообще говоря, не определяется. Но если сделать некоторые специальные предположения о потенциале (голоморфность, или конечный радиус, или суперпозиция потенциалов Юкавы и др.), то тогда можно получить более точную информацию и уменьшить произвол в обратной задаче.

§ 2. Регулярное решение: S -волна ($l = 0$)

Теперь мы перейдем к подробному исследованию регулярного решения ϕ , играющего важную роль в теории обратной задачи Гельфанда — Левитана. Выбор S -волны мотивируется значительным упрощением формул и прозрачностью получаемых результа-

тов. Общий случай будет рассмотрен несколько позже в этой главе.

Комбинируя уравнение Шредингера с граничным условием (1.1.10), которое в данном случае имеет вид

$$\varphi(k, 0) = 0, \quad \varphi'(k, 0) = 1, \quad (1.2.1)$$

и пользуясь методом «вариации постоянных» Лагранжа, мы получим интегральное уравнение Вольтерра:

$$\varphi(k, r) = \frac{\sin kr}{k} + \int_0^r \frac{\sin k(r-r')}{k} V(r') \varphi(k, r') dr'. \quad (1.2.2)$$

Исследуем существование и единственность его решения, пользуясь хорошо известным итерационным методом. Написав

$$\varphi^{(0)}(k, r) = \frac{\sin kr}{k}, \quad (1.2.3)$$

$$\varphi^{(n)}(k, r) = \int_0^r \frac{\sin k(r-r')}{k} V(r') \varphi^{(n-1)}(k, r') dr' \quad (1.2.4)$$

и учитывая соотношение

$$\left| \frac{1}{z} \right| \leq C \frac{|z|}{1+|z|} e^{|\operatorname{Im} z|} \quad (1.2.5)$$

(где C — соответствующая константа) в применении и к ядру, и к неоднородному члену $\varphi^{(0)}$, легко получим

$$|\varphi^{(1)}| \leq C \frac{r}{1+|k|r} e^{|\operatorname{Im} k|r} \frac{1}{n!} \left| \int_0^r \frac{r'}{1+|k|r'} |V(r')| dr' \right|$$

и в общем случае

$$|\varphi^{(n)}| \leq \frac{r}{1+|k|r} e^{|\operatorname{Im} k|r} \frac{1}{n!} \left\{ C \int_0^r \frac{r'}{1+|k|r'} |V(r')| dr' \right\}^n. \quad (1.2.6)$$

Из этих оценок сразу же следует, что ряд

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)} \quad (1.2.7)$$

абсолютно и равномерно сходится на любом компактном множестве в комплексной k -плоскости при условии

$$\int_0^r \frac{r' |V(r')|}{1+|k|r'} dr' < \infty,$$

которое выполняется, если выполняется условие (1.1.1).

Теперь легко видеть, что ряд (1.2.7) действительно является единственным решением интегрального уравнения и, следовательно, является решением уравнения (1.1.6) и удовлетворяет условию (1.2.1) и что справедливы оценки

$$|\varphi| \leq \frac{r}{1+|k|r} e^{|\operatorname{Im} k|r} \exp \left\{ C \int_0^r \frac{r'|V(r')|}{1+|k|r'} dr' \right\} \leq C_1 \frac{r}{1+|k|r} e^{|\operatorname{Im} k|r}, \quad (1.2.8a)$$

$$\left| \varphi - \frac{\sin kr}{k} \right| \leq C_2 \frac{r}{1+|k|r} e^{|\operatorname{Im} k|r} \int_0^r \frac{r'|V(r')|}{1+|k|r'} dr', \quad (1.2.8б)$$

где $C_1, C_2, \dots$ — соответствующие константы.

Из этих оценок и того обстоятельства, что и функция $\varphi^{(0)}$, и ядро интегрального уравнения являются голоморфными целыми функциями переменной k , следует, что для «регулярных потенциалов», удовлетворяющих условию (1.1.1):

1) φ есть целая функция аргумента k при любом фиксированном конечном значении r ;

2) ее асимптотическое поведение при больших значениях k дается соотношениями

$$\varphi(k, r) = \frac{\sin kr}{k} + \frac{e^{|\operatorname{Im} k|r}}{|k|} o(1), \quad (1.2.9a)$$

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \{\varphi'(k, r) - \cos kr\} = 0, \quad (1.2.9б)$$

где малый член $o(1)$ является равномерным по r при всех $r \geq 0$. Отсюда следует, что φ действительно является целой функцией экспоненциального типа r относительно переменной k (порядка 1, типа r). При больших значениях k функция φ очень близка к свободному решению $\varphi^{(0)}$.

Как мы видели ранее, функция φ является также четной функцией переменной k . И поскольку она действительна при действительных k , на основании правила Шварца получаем

$$\varphi(-k^*, r) = \varphi(k^*, r) = [\varphi(k, r)]^*. \quad (1.2.10)$$

Асимптотическое поведение функции φ при больших r (1.1.25) и свойства фазового сдвига δ , а также свойства функции Йоста будут установлены позже, когда мы познакомимся со свойствами решения Йоста (1.1.15). Здесь же отметим для дальнейшего, что из соотношения (1.2.8б) следует неравенство

$$\int_0^\infty \left| \varphi(k, r) - \frac{\sin kr}{k} \right| dk < \infty. \quad (1.2.11)$$

Если потенциал интегрируем в начале координат, то из неравенства (1.2.8б) действительно следует, что при больших значениях k

$$\varphi = \frac{\sin kr}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (1.2.9в)$$

Аналогично

$$\varphi' = \cos kr + O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (1.2.9г)$$

§ 3. Решение Йоста: S -волна ($l = 0$)

Для простоты мы опять сначала рассмотрим лишь случай S -волны, а более общий случай отложим до конца главы. Пользуясь снова методом «вариации постоянных» Лагранжа, мы можем объединить уравнение Шредингера с граничным условием (1.1.15) и получить интегральное уравнение Вольтерра

$$f(k, r) = e^{ikr} + \int_r^\infty \frac{\sin k(r-r')}{k} V(r') f(k, r') dr'. \quad (1.3.1)$$

Применяя к этому интегральному уравнению итерационный метод и привлекая, как и прежде, соотношение (1.2.5) для ядра, мы снова приходим в полуплоскости $\text{Im } k \geq 0$ в предположении, что выполняется условие (1.1.3), к абсолютно и равномерно сходящемуся ряду $\sum f^{(n)}$:

$$f^{(0)} = e^{ikr}, \quad f^{(n)} = \int_r^\infty \frac{\sin k(r-r')}{k} V(r') f^{(n-1)}(k, r') dr',$$

где¹⁾

$$|f^{(n)}| \leq C e^{-\text{Im } kr} \frac{1}{n!} \left\{ \int_r^\infty \frac{r' |V(r')|}{1 + |k|r'} dr' \right\}^n.$$

На основании этих оценок находим

$$|f(k, r)| \leq C_2 e^{-\text{Im } kr}, \quad \text{Im } k \geq 0. \quad (1.3.2)$$

С учетом данного соотношения из выражения (1.3.1) получаем последовательно

$$|f(k, r) - e^{ikr}| \leq K e^{-\text{Im } kr} \int_r^\infty r' |V(r')| dr', \quad (1.3.3)$$

¹⁾ Очевидно, что при $k \neq 0$ и $r > 0$ для сходимости ряда было бы достаточно условия (1.1.2). Условие же (1.1.3) мы принимаем, чтобы включить точку $k = 0$.

$$|f(k, r) - e^{ikr}| \leq K \frac{e^{-\operatorname{Im} kr}}{|k|} \int_r^\infty |V(r')| dr', \quad k \neq 0, \quad (1.3.4)$$

$$|f'(k, r) - ike^{ikr}| \leq Ke^{-\operatorname{Im} kr} \int_r^\infty |V(r')| dr', \quad (1.3.5)$$

где K не зависит от r и k . Неравенство (1.3.4) дает поведение функции f при больших значениях k ($\operatorname{Im} k \geq 0$) и фиксированных r ($r > 0$), а неравенства (1.3.3) и (1.3.5) дают асимптотическое поведение функции f , когда расстояние r велико, а волновой вектор k фиксирован в замкнутой верхней полуплоскости. Замечая, что при $r \rightarrow 0$ из условия (1.1.3) следует равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \int_r^\infty |V(r')| dr' = 0,$$

мы получаем из неравенства (1.3.5) соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 0} rf'(k, r) = 0. \quad (1.3.6)$$

С учетом определения (1.1.20) отсюда получим

$$F(k) = f(k, 0). \quad (1.3.7)$$

Мы можем также продифференцировать функцию f по переменной k , разложив ее в ряд (по теории возмущений), с учетом оценки для $f^{(n)}$, приведенной выше. Таким образом, если выполняется условие (1.1.3), то функция f непрерывно дифференцируема по k при $\operatorname{Im} k \geq 0$ всюду, кроме, может быть, точки $k = 0$. Мы также получим при всех $r \geq 0$

$$|\dot{f}(k, r) - ike^{ikr}| \leq K \frac{e^{-\operatorname{Im} kr}}{|k|}, \quad \dot{f} = \frac{df}{dk}, \quad (1.3.8)$$

где K не зависит от r и k .

Приведенные выше оценки и асимптотические свойства показывают, что в случае «регулярных потенциалов» можно утверждать следующее:

1. Функция f голоморфна при $\operatorname{Im} k > 0$ и непрерывна и ограничена при $\operatorname{Im} k \geq 0$ при всех значениях $r \geq 0$.

2. Асимптотические оценки

$$f(k, r) = e^{ikr} + e^{-\operatorname{Im} kr} o(1), \quad r \rightarrow \infty \quad (1.3.9)$$

$$f'(k, r) = ike^{ikr} + e^{-\operatorname{Im} kr} o(1), \quad r \rightarrow \infty \quad (1.3.10)$$

и при $r > 0$

$$f(k, r) = e^{ikr} + \frac{e^{-\operatorname{Im} kr}}{|k|} o(1) \quad \begin{matrix} k \rightarrow \infty \\ |\operatorname{Im} k| \geq 0 \end{matrix} \quad (1.3.11)$$

равномерны по «фиксированным» переменным. Если мы хотим включить значение $r = 0$, то мы должны заменить выражение (1.3.11) выражением

$$f(k, r) = e^{ikr} + e^{-\operatorname{Im} kr} o(1), \quad (1.3.12)$$

$k \rightarrow \infty$

где снова величина $o(1)$ равномерна относительно r , $r \geq 0$.

3. Функция f действительно непрерывно дифференцируема по k при $\operatorname{Im} k \geq 0$, $k \neq 0$, и мы имеем равномерную по r оценку (1.3.8).

4. Функция f обладает свойством «симметрии»

$$f(-k^*, r) = [f(k, r)]^*, \quad (1.3.13)$$

которое выполняется для каждого члена итерационного ряда. Она действительная на мнимой k -оси. Таким образом, отсюда следует, что функция Йоста удовлетворяет соотношению

$$F(-k^*) = [F(k)]^*. \quad (1.3.14)$$

Оно представляет собой соотношение (1.1.24), обобщенное на случай $\operatorname{Im} k \geq 0$.

§ 4. Функция Йоста и фазовый сдвиг

На основании определений (1.1.19)¹⁾ и (1.1.24) и асимптотического поведения функций f и f' , определяемого выражениями (1.3.9) и (1.3.10), получаем

$$\varphi(k, r) = \frac{|F(k)|}{|k|} \sin(kr + \delta) + o(1), \quad (1.4.1)$$

$r \rightarrow \infty$

$$\varphi'(k, r) = |F(k)| \cos(kr + \delta) + o(1). \quad (1.4.2)$$

$r \rightarrow \infty$

Оба эти соотношения справедливы только при действительных значениях k . Из соотношений (1.1.21) и (1.1.24) видно, что можно определить фазовый сдвиг таким образом, чтобы при $k \geq 0$ выполнялось равенство

$$\delta(-k) = -\delta(k). \quad (1.4.3)$$

Чтобы найти асимптотику функции Йоста и фазового сдвига при больших значениях энергии, необходимую в обратной задаче, мы будем исходить из интегрального представления

$$F(k) = 1 + \int_0^\infty e^{ikr} V(r) \varphi(k, r) dr, \quad (1.4.4)$$

¹⁾ Поскольку в эту формулу входят одновременно и k , и $-k$, она справедлива, вообще говоря, только на действительной k -оси.

которое легко получить из определения (1.1.20), взятого при больших значениях r , интегрального уравнения (1.2.2) для функции Φ и приближенных оценок (1.3.9) и (1.3.10).

Из определения (1.1.20), т. е. из интегрального представления (1.4.4), следует, что функция Йоста хорошо определена в верхней полуплоскости $\text{Im } k \geq 0$, голоморфна при $\text{Im } k > 0$ и непрерывна при $\text{Im } k \geq 0$. Она также ограничена там в силу соотношения (1.2.8), которое дает

$$|F(k) - 1| \leq C \int_0^{\infty} \frac{r|V(r)|}{1 + |k|r} dr. \quad (1.4.5)$$

Таким образом, при $k \rightarrow \infty$ и $\text{Im } k \geq 0$ мы имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = 1. \quad (1.4.6)$$

Легко видеть также, что функция F непрерывно дифференцируема всюду, кроме, может быть, начала координат. Это следует из определения (1.3.7) и из того, что мы узнали о решении Йоста в предыдущем параграфе. Действительно, из соотношения (1.3.8) видно, что функция $k\dot{F}(k)$ непрерывна и ограничена во всей верхней полуплоскости $\text{Im } k \geq 0$ и что

$$\dot{F}(k) = o(1). \quad (1.4.7)$$

На основании асимптотического свойства (1.4.6) и определения фазового сдвига (1.1.24) мы, очевидно, можем выбрать

$$\delta(+\infty) = 0. \quad (1.4.8)$$

Исходя из этого, мы можем найти величину $\delta(k)$ при *всех* конечных значениях энергии, считая эту величину непрерывной функцией. Далее мы всюду будем придерживаться такого определения фазового сдвига.

Теперь легко показать, что

$$\int_0^{\infty} k^{-1} |\delta(k)| dk < \infty, \quad (1.4.9)$$

$$\int_0^{\infty} |\text{Im } F(k)| k^{-1} dk < \infty. \quad (1.4.10)$$

Поскольку оба подынтегральных выражения одного порядка величины при больших k [в силу равенств (1.1.24), (1.4.6) и (1.4.8)], достаточно доказать только неравенство (1.4.10). Учитывая определение (1.4.4) и оценки (1.2.5) и (1.2.8), мы можем написать при

$$k > 0$$

$$k^{-1} |\operatorname{Im} F| \leq C \int_0^{\infty} |V(r)| \left(\frac{r}{1+kr} \right)^2 dr,$$

откуда и следует неравенство (1.4.10).

Как мы увидим далее, условия интегрируемости (1.4.9) и (1.4.10) играют важную роль в теории обратной задачи. Они гарантируют, что потенциал, найденный по фазовому сдвигу, «регулярен», т. е. удовлетворяет условию (1.1.3). Если ввести S -матрицу (k — действительная величина)

$$e^{2i\delta} = S(k) = \frac{F(-k)}{F(k)} \quad (1.4.11)$$

то условие интегрируемости (1.4.9) можно записать в виде

$$\int_0^{\infty} |S - 1| k^{-1} dk < \infty. \quad (1.4.12)$$

Если потенциал интегрируем в начале координат, то из соотношений (1.2.9) и (1.4.4) следует, что при $k \rightarrow \infty$ выполняются по крайней мере соотношения

$$F(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (1.4.6')$$

$$\delta(k) = O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (1.4.8')$$

§ 5. Волны с $l > 0$

Выше мы подробно исследовали случай S -волны. Для волн же с отличными от нуля орбитальными моментами методы и результаты совершенно аналогичны, если не считать очевидных и незначительных изменений. Поэтому мы приведем здесь только результаты, не проводя доказательств. Наиболее существенное различие между случаями $l = 0$ и $l \geq 1$ состоит в том, что во втором из них, согласно равенству (1.1.13), свободное решение $w_l(z)$ имеет полюс порядка l в начале координат. В связи с этим появляется полюс того же порядка у функций Грина g , следовательно, сингулярность в начале координат у решения Йоста f . Поэтому нужно быть осторожным, переходя к пределам при $r \rightarrow 0$ или $k \rightarrow 0$.

Регулярные решения уравнения (1.1.6) определяются граничными условиями (1.1.10). Интегральное уравнение, которому удовлетворяет такое решение, теперь имеет вид

$$\varphi_l(k, r) = k^{-l-1} u_l(kr) + \int_0^r G_l(k, r, r') V(r') \varphi_l(k, r') dr', \quad (1.5.1)$$

$$G_l = i(-1)^l (2k)^{-1} [w_l(kr') w_l(-kr) - w_l(kr) w_l(-kr')]. \quad (1.5.2)$$

Из неравенств

$$|u_l(z)| < C \left(\frac{|z|}{1+|z|} \right)^{l+1} e^{l \operatorname{Im} z} \quad (1.5.3)$$

и ($r \geq r'$)

$$|G_l(k, r, r')| < C |k|^{-1} \left(\frac{|k|r}{1+|k|r} \right)^{l+1} \left(\frac{|k|r'}{1+|k|r'} \right)^{-l} e^{l \operatorname{Im} k(r-r')} \quad (1.5.4)$$

тем же путем, что и в § 2, мы получим следующие результаты.

1. Функция φ_l , единственное решение уравнения Шредингера, удовлетворяющее граничным условиям (1.1.10), при любом фиксированном $r \geq 0$ является целой функцией аргумента k экспоненциального типа r , причем

$$|\varphi_l(k, r)| \leq C \left(\frac{r}{1+|k|r} \right)^{l+1/2} e^{l \operatorname{Im} k r}, \quad (1.5.5)$$

$$\varphi_l - k^{-l-1} u_l(kr) \leq C \left(\frac{r}{1+|k|r} \right)^{l+1/2} e^{l \operatorname{Im} k r} o(1). \quad (1.5.6)$$

Из неравенства (1.5.6) следует, что

$$\varphi_l(k, r) = \frac{\sin \left(kr - \frac{1}{2} l \pi \right)}{k^{l+1}} + \frac{e^{l \operatorname{Im} k r}}{k^{l+1}} o(1). \quad (1.5.7)$$

2. Функция φ_l есть действительная четная функция переменной k . Следовательно, она удовлетворяет соотношениям симметрии

$$\varphi_l(-k, r) = \varphi_l(k, r) = [\varphi_l(k^*, r)]^*. \quad (1.5.8)$$

Аналогично может быть исследовано решение Йоста. Если мы определим его, наложив граничное условие (1.1.15), то оно будет удовлетворять интегральному уравнению

$$f_l(k, r) = w_l(kr) - \int_r^\infty G_l(k, r, r') V_l(r') f_l(k, r') dr', \quad (1.5.9)$$

где G_l — тоже функция, даваемая выражением (1.5.2). Из неравенства

$$|w_l(z)| \leq C \left(\frac{|z|}{1+|z|} \right)^{-l} e^{-\operatorname{Im} z} \quad (1.5.10)$$

и неравенства (1.5.4), поменяв в последнем местами r и r' (здесь $r \leq r'$), получим теперь:

1. Решение Йоста существует при любом фиксированном $r > 0$ является голоморфной функцией переменной k при $\operatorname{Im} k > 0$, а произведение $k^l f_l$ является непрерывной функцией при $\operatorname{Im} k \geq 0$.

2. При любом фиксированном $k \neq 0$ и при $\text{Im } k \geq 0$ произведение $r^l f_l$ есть непрерывная функция переменной r , если $r \geq 0$.

3. Для верхней полуплоскости $\text{Im } k \geq 0$ справедливы неравенства

$$|f_l(k, r)| < K \left(\frac{|k|r}{1+|k|r} \right)^{-l} e^{-\text{Im } k r}, \quad (1.5.11)$$

$$|f_l(k, r) - w_l(kr)| < K \left(\frac{|k|r}{1+|k|r} \right)^{-l} e^{-\text{Im } k r} \int_r^\infty r' |V(r')| dr', \quad (1.5.12)$$

$$|f_l - w_l| < \left(\frac{|k|r}{1+|k|r} \right)^{-l} \frac{e^{-\text{Im } k r}}{|k|} \int_r^\infty |V(r')| dr'. \quad (1.5.13)$$

Неравенство (1.5.11) удобно, когда одна из переменных фиксирована и отлична от нуля, а вторая принимает очень большие значения. Неравенство (1.5.12) удобно при $k \neq 0$ и $r \rightarrow \infty$. Из него следует, что при $\text{Im } k \geq 0$

$$f_l(k, r) = i^l e^{ikr} + e^{-\text{Im } k r} o(1). \quad (1.5.14)$$

$\begin{matrix} r \rightarrow \infty \\ k \neq 0 \end{matrix}$

Наконец, из неравенства (1.5.13) вытекает, что

$$f_l(k, r) = i^l e^{ikr} + o\left(\frac{e^{-\text{Im } k r}}{|k|}\right). \quad (1.5.15)$$

$\begin{matrix} k \rightarrow \infty \\ r \neq 0 \end{matrix}$

Чтобы найти функцию Йоста, выраженную через вронскиан [формула (1.1.20)], в котором r предполагается очень большим, нам нужно знать асимптотическое поведение функции f_l . Легче всего установить его, если продифференцировать выражение (1.5.9) по r , а затем, устремив r к бесконечности, использовать асимптотики свободных решений u_l и w_l , а также неравенства (1.5.11). Тогда получим

$$f_l'(k, r) = i^{l+1} k e^{ikr} + e^{-\text{Im } k r} o(1). \quad (1.5.16)$$

$\begin{matrix} r \rightarrow \infty \\ k \neq 0 \end{matrix}$

Теперь, взяв соотношение (1.1.20), подставив в него для φ_l выражение (1.5.1) и устремив r к ∞ , с учетом асимптотических свойств функции Грина G_l , а также выражений (1.5.15) и (1.5.16) получим интегральное представление

$$F_l(k) = 1 + (-k)^l \int_0^\infty w_l(kr) V(r) \varphi_l(k, r) dr. \quad (1.5.17)$$

Это интегральное представление вместе с ограничениями для w_l и φ_l приводит нас к следующим выводам.

1. Функция Йоста является голоморфной при $\text{Im } k \geq 0$.
2. Она удовлетворяет соотношению симметрии

$$F_l(-k^*) = [F_l(k)]^*. \quad (1.5.18)$$

3. При $\text{Im } k \geq 0$ выполняется равенство

$$F_l(k) = 1 + o(1), \quad k \rightarrow \infty \quad (1.5.19)$$

В силу определения (1.1.24) и равенства (1.5.19) мы можем выбрать фазовый сдвиг таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\delta_l(\infty) = 0. \quad (1.5.20)$$

Кроме того, мы имеем

$$\delta_l(-k) = -\delta_l(k), \quad k \geq 0. \quad (1.5.21)$$

Из представления (1.5.17) с учетом ограничения (1.5.10) для w_l и неравенства (1.5.5) мы снова получим, как и в случае S -волны, условия интегрируемости

$$\int_0^\infty |\delta_l(k)| \frac{dk}{k} < \infty, \quad (1.5.22)$$

$$\int_0^\infty |\text{Im } F_l| \frac{dk}{k} < \infty, \quad (1.5.23)$$

$$\int_0^\infty |S_l - 1| \frac{dk}{k} < \infty, \quad S_l = \frac{F_l(-k)}{F_l(k)}, \quad (1.5.24)$$

где величина S_l представляет собой S -матрицу. Из выражения (1.1.20), учитывая поведение функции φ_l вблизи точки $r = 0$, получаем

$$F_l(k) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(-kr)^l}{(2l-1)!} f_l(k, r). \quad (1.5.25)$$

§ 6. Сингулярные потенциалы

Насколько нам известно, обратная задача рассеяния при фиксированном угловом моменте была исследована только в следующих сингулярных случаях. Пусть короткодействующие потенциалы $V(r)$ удовлетворяют условию $rV(r) \in L^1(b, \infty)$, $b > 0$. Рассмотрим два вида потенциалов.

1. Регулярные потенциалы плюс кулоновский потенциал. Теория рассеяния для этого случая теперь хорошо разработана, и обратная задача тоже решена. К этому случаю мы вернемся позже.

2. Короткодействующие потенциалы, сингулярные вблизи начала координат и осциллирующие таким образом, что если ввести функцию

$$W(r) = - \int_r^{\infty} V(t) dt, \quad (1.6.1)$$

то она будет удовлетворять условиям ¹⁾

$$W(r) \in L^1(0, \infty), \quad (1.6.2a)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} rW(r) = 0. \quad (1.6.2b)$$

Короче говоря, хотя потенциал может быть весьма сингулярным в начале координат, он осциллирует там достаточно быстро, чтобы функция $W(r)$ была «хорошей». Примеров такого рода очень много:

$$W(r) = r^{-a} e^{-\mu r} \sin\left(\exp \frac{1}{r}\right), \quad a < 1, \quad (1.6.3)$$

и пр. Продифференцировав функцию W , нетрудно убедиться, что потенциал V действительно сильно сингулярен и очень быстро осциллирует.

Для всего этого класса потенциалов справедливо все, что было сказано выше о потенциалах, удовлетворяющих условию (1.1.3), без каких-либо изменений и обратная задача может быть сформулирована точно таким же образом. При этом самое важное значение имеет следующее обстоятельство: чтобы доказать существование единственного решения $\varphi(k, r)$ уравнения (1.2.2) в виде ряда (1.2.7) ²⁾, нет необходимости требовать абсолютной сходимости этого ряда. Как хорошо известно, достаточно равномерной сходимости. Это можно показать следующим образом.

Заменим сначала в выражении (1.2.2) величину V величиной W' и проинтегрируем по частям с учетом условия (1.6.2b) и непрерывности функции W при $r > 0$. Таким путем мы получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi(k, r) = \frac{\sin kr}{k} + \int_0^r dr' W(r') \left\{ \cos k(r-r') \varphi(k, r') - \right. \\ \left. - \frac{\sin k(r-r')}{k} \varphi'(k, r') \right\}, \end{aligned} \quad (1.6.4a)$$

¹⁾ Здесь главный момент — интегрируемость функции W в начале координат. Ее интегрируемость на бесконечности следует из неравенства (1.1.3) при $b > 0$. Из этого неравенства следует также, что $\lim_{r \rightarrow \infty} rW(r) = 0$.

²⁾ Для простоты мы снова начинаем со случая S -волны.

$$\begin{aligned} \varphi'(k, r') &= \cos kr + W(r) \varphi(k, r) - \\ &- \int_0^r dr' W(r') \{k \sin k(r-r') \varphi(k, r') + \cos k(r-r') \varphi'(k, r')\}. \end{aligned} \quad (1.6.46)$$

Решая эти уравнения итерациями с учетом неравенства (1.2.5) и неравенства

$$|\cos Z| < e^{|\operatorname{Im} Z|}, \quad (1.6.5)$$

мы получаем абсолютно и равномерно сходящийся ряд, общий член которого удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} |\varphi^{(n)}(k, r)| &\leq C \left(\frac{r}{1+|k|r} \right) e^{|\operatorname{Im} k|r} (n!)^{-1} \times \\ &\times \left\{ \int_0^r (2C|W(t)| + C^2 t W^2(t)) dt \right\}^n, \end{aligned} \quad (1.6.6a)$$

$$|\varphi^{(n)}| \leq C e^{|\operatorname{Im} k|r} (n!)^{-1} \{ \dots \}^n. \quad (1.6.6b)$$

Интегралы, входящие в эти соотношения, существуют в силу условия (1.6.2a) и того обстоятельства, что функция rW^2 как произведение ограниченной непрерывной функции rW на интегрируемую функцию W сама тоже интегрируема. Отсюда следует, как и прежде, что функции φ и φ' существуют и удовлетворяют уравнению (1.1.6) и граничным условиям (1.2.1), являясь единственными и, наконец, обладают теми же аналитическими свойствами относительно переменной k (являются целыми функциями). Они также ограничены сверху соотношениями (1.2.8) и (1.2.9), в которых лишь следует произвести замену

$$C \int_0^r |r' V(r')| dr' \rightarrow \int_0^r (2C|W| + C^2 t^2 W^2) dt. \quad (1.6.7)$$

Это, конечно, не меняет результатов, и мы снова получаем соотношения (1.2.10) и (1.2.11).

Аналогично проводится анализ и в случае волн с $l > 0$, и мы снова получаем результаты предыдущего параграфа, т. е. соотношения (1.5.5)–(1.5.8).

Поскольку существование и свойства решения Йоста $f_l(k, r)$ при $r > 0$ не зависят от сингулярности потенциала в начале координат и гарантируются единственным условием (1.1.3) с $b > 0$, мы снова можем определить функцию Йоста $F_l(k)$ выражением (1.1.19) или (1.1.20), и, как и прежде, она является аналитической функцией в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} k > 0$), непрерывной при $\operatorname{Im} k \geq 0$, и удовлетворяет там соотношениям (1.5.18) и (1.5.19).

Справедливым остается и интегральное представление (1.5.17), которое можно записать в более удобной форме (после интегрирования по частям)

$$F_l(k) = 1 - (-k)^l \int_0^{\infty} W(r) \{w_l(kr) \varphi_l' + w_l'(kr) \varphi_l\} dr. \quad (1.6.8)$$

Наконец, фазовый сдвиг снова определяется соотношением (1.1.24) и обладает всеми свойствами, указанными в соотношениях (1.5.20)—(1.5.24).

Единственное различие между регулярным потенциалом, удовлетворяющим условию (1.1.3), и сингулярным потенциалом, удовлетворяющим условиям (1.6.2а) и (1.6.2б), может состоять в отсутствии или наличии бесконечно большого числа осцилляций фазового сдвига при $k \rightarrow \infty$. Конечно, в обоих случаях фазовый сдвиг стремится к нулю, когда энергия стремится к бесконечности. Но если регулярный потенциал сохраняет свой знак вблизи начала координат и, следовательно, фазовый сдвиг стремится к нулю, тоже сохраняя свой знак (противоположный знаку потенциала вблизи начала координат), то в сингулярном случае необходимы осцилляции и поэтому фазовый сдвиг тоже неограниченно осциллирует при $k \rightarrow \infty$.

Например, в случае потенциала

$$V(r) \approx V_0 r^{-1-\beta}, \quad r \rightarrow 0, \beta < 1, \quad (1.6.9a)$$

мы имеем для S -волны

$$\delta(k) \underset{k \rightarrow \infty}{\approx} -V_0 \beta^{-1} \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \Gamma(1-\beta) (2k)^{\beta-1}, \quad (1.6.9b)$$

тогда как в случае потенциала

$$W(r) = 2(2r)^{-1/2} \sin\left(\frac{a}{2r}\right) e^{-\mu r} \quad (1.6.10a)$$

мы получаем

$$\delta(k) \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2k}\right)^{1/2} \{\sin 2(ak)^{1/2} - \cos 2(ak)^{1/2}\} + \dots \quad (1.6.10b)$$

Мы видим здесь, что имеется определенная связь между осцилляциями потенциала W и осцилляциями фазового сдвига. Это общее явление. Конечно, поскольку мы вводим осциллирующий множитель в выражение (1.6.9а), мы получаем осцилляции и в выражении (1.6.9б). Но благодаря этим осцилляциям фазовый сдвиг стремится к нулю быстрее, чем в формуле (1.6.9б).

Из условий (1.6.2а) и (1.6.2б) явствует, что наряду с осциллирующими сингулярностями в начале координат, рассмотренными выше, теория допускает и не слишком сильные (интегрируемые)

сингулярности потенциала на конечных расстояниях от начала, если работать исключительно с $W(r)$. Равным образом теорией можно пользоваться и в случае не очень сильно сингулярных обобщенных функций (δ -функции Дирака и др.), не привлекая каких-либо особых методов.

§ 7. Замечания и литература

В данной главе был представлен общий обзор всех нужных нам классических результатов теории рассеяния в случае сферически-симметричных потенциалов. За дальнейшими подробностями и указаниями на литературу по теории рассеяния отсылаем читателя к книгам де Альфаро и Редже [131], Мотта и Месси [311], Ньютона [319].

В § 6 о сингулярных потенциалах мы следовали статье Бетмана и Шадана [22]. Как неоднократно говорилось, все результаты данной главы верны, если потенциал удовлетворяет условиям, приведенным в § 6: $rV(r) \in L^1(b, \infty)$, $b > 0$, $W(r) \in L^1(0, a)$ и $\lim rW(r) = 0$ при $r \rightarrow 0$. Такие условия слабее обычного условия $rV(r) \in L^1(0, \infty)$. Мы решили начать с этого ограниченного класса потенциалов, поскольку такие потенциалы широко применяются во всех учебниках по теории рассеяния, а затем показать, что результаты для этого ограниченного класса справедливы и при более слабых предположениях о потенциале.

По вопросам общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений мы отсылаем читателя к книгам Коддингтона и Левинсона [94] и Хилле [204]. По теории интегральных уравнений см., например, книги Трикоми [409] и Погоржельского [341].

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ, РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

§ 1. Связанные состояния, теорема Левинсона

Связанные состояния

Связанные состояния соответствуют решениям уравнения (1.1.6), которые удовлетворяют граничным условиям (1.2.1) и квадратично-интегрируемы на всей положительной r -оси. Мы займемся их детальным исследованием, поскольку они необходимы в условиях полноты и, следовательно, как говорилось выше, входят в обратную задачу. Опять начнем со случая S -волны. О свойствах потенциала сделаем те же предположения, что и в гл. 1, § 6: $rV(r) \in L'(b, \infty)$, $b > 0$, $W(r) \in L'(0, a)$ и $rW(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$; они, очевидно, слабее обычного предположения $rV(r) \in L^1(0, \infty)$.

Прежде всего покажем, что всякий нуль функции Йоста при $\text{Im } k > 0$ соответствует некоему связанному состоянию. Действительно, если

$$f(k_0, 0) \equiv F(k_0) = 0, \quad (2.1.1)$$

то, как следует из определения (1.1.20), функции $f(k_0, r)$ и $\phi(k_0, r)$ не являются независимыми, т. е.

$$f(k_0, r) = f'(k_0, 0) \phi(k_0, r). \quad (2.1.2)$$

Следовательно, согласно равенству (1.3.9), функция $\phi(k_0, r)$ экспоненциально убывает при $r \rightarrow \infty$ и мы имеем связанное состояние. Заметим, что функция ϕ всюду хорошо себя ведет. Следовательно, равенство $f'(k_0, 0) = 0$ противоречило бы равенству (1.3.9).

Функция Йоста не может обращаться в нуль ни при каких действительных значениях k , кроме, может быть, точки $k = 0$. В самом деле, если $F(k_0) = 0$ при каком-либо действительном значении $k_0 \neq 0$, то в силу равенства (1.1.21) и $F(-k_0) = 0$. Тогда из равенства (1.1.19) следует, что $\phi(k_0, r) \equiv 0$, а это противоречит условию (1.2.4). К случаю $k_0 = 0$ мы вскоре вернемся. Легко также видеть, что при $\text{Im } k > 0$ нули функции Йоста представляют собой чисто мнимые значения волнового числа k (действительные отрицательные значения энергии). В самом деле, записывая уравнения Шредингера для функций $f(k_0, r)$ и $[f(k_0, r)]^*$ и комбинируя

и х, получаем

$$\begin{aligned} f'(k_0, 0) [f(k_0, 0)]^* - f(k_0, 0) [f'(k_0, 0)]^* = \\ = 4i \operatorname{Re} k_0 \operatorname{Im} k_0 \int_0^\infty |f(k_0, r)|^2 dr. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Тогда из равенства (2.1.1) следует, что если k_0 — нуль функции Йоста, то должно выполняться равенство $\operatorname{Re} k_0 = 0$, чем и доказывается наше утверждение. Ниже мы увидим, что этими нулями даются все связанные состояния.

Случай $F(0) = 0$ представляет собой в какой-то мере исключение. Рассмотрим уравнение Шредингера при нулевой энергии

$$\varphi'' = V\varphi. \quad (2.1.4)$$

Исходя из интегрального уравнения (1.2.2), взятого при $k = 0$, рассуждая так же, как и в гл. 1, § 2, и предполагая, что либо $rV(r) \in L^1(0, \infty)$, либо потенциал принадлежит к общему классу, отмеченному в гл. 1, § 6, мы находим, что асимптотическая форма функции φ при больших r имеет вид

$$\varphi = Ar + B + o(1) \quad \left. \vphantom{\varphi = Ar + B + o(1)} \right\} \quad (2.1.5a)$$

$$\varphi' = A + o(1) \quad \left. \vphantom{\varphi' = A + o(1)} \right\} \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (2.1.5b)$$

Очевидно также, что асимптотическая форма функции $f(0, r)$ имеет вид

$$f(0, r) = 1 + o(1). \quad (2.1.6)$$

$r \rightarrow \infty$

Кроме того, очевидно, что в силу результатов, представленных в гл. 1, § 2 и 3, величина A есть функция Йоста при $k = 0$.

Из формул (2.1.5a) и (2.1.6) мы видим, что асимптотическая форма общего решения (2.1.4) имеет вид $Ar + C$, т. е. оно всегда растет на бесконечности, кроме случая $A = 0$. Поэтому, даже если $F(0) = 0$, мы не имеем квадратичной интегрируемости на бесконечности и, следовательно, нет связанного состояния при нулевой энергии. Следовательно, данная сингулярность при нулевой энергии не будет входить в разложения по собственным функциям, связанные с уравнением Шредингера для S -волны.

Такой анализ может быть проведен и при $l \neq 0$. Можно показать, что, когда функция Йоста обращается в нуль при $k = 0$, функция $\varphi_l(0, r)$ имеет асимптотический вид $\varphi_l(0, r) \sim r^{-l}$. Стало быть, мы имеем квадратичную интегрируемость на бесконечности при всех угловых моментах ($l = 1, 2, \dots$), т. е. нуль функции Йоста в начале координат соответствует подлинному связанному состоянию при нулевой энергии. Этим волны с $l > 0$ отличаются от S -волны.

Посмотрим теперь, каковы число и кратность нулей функции Йоста при $\text{Im } k > 0$, которые, как мы видели, все лежат на мнимой оси. Из равенства (1.4.6) видно, что они не могут быть расположены слишком высоко на оси и точка $+i\infty$ не может быть точкой их сгущения. Можно также показать, что нули не могут сгущаться при $k = 0$. Следовательно, их число конечно.

Кроме того, все нули простые. Чтобы показать это, возьмем уравнение Шредингера для функции f и продифференцируем его по k . Введем обозначение $\dot{f} = df/dk$, и, комбинируя два уравнения, получим для k из верхней полуплоскости

$$\dot{f}'(k, 0) f(k, 0) - \dot{f}(k, 0) f'(k, 0) = 2k \int_0^\infty f^2(k, r) dr. \quad (2.1.7)$$

Из этого соотношения и формул (2.1.1) и (2.1.2) следует, что если $F(k_0) = 0$, то нормировка волновой функции связанного состояния дается соотношением

$$C_0^{-1} = \int_0^\infty \varphi^2(k_0, r) dr = \frac{-\dot{F}(k_0)}{2k_0 \dot{f}'(k_0, 0)} \quad (2.1.8)$$

Это означает, помимо всего прочего, что $\dot{F}(k_0) \neq 0$, так как интеграл в левой части положителен [формула (1.2.10)]. Следовательно, нуль простой. Можно также показать, что если имеется нуль при $k = 0$, то он тоже простой. Точнее, $\dot{F}(k)$ не обращается в нуль, когда k стремится к нулю по какому-нибудь пути в верхней полуплоскости. Как было сказано выше, мы никогда не имеем связанного состояния при нулевой энергии в случае S -волны.

Такие же общие выводы справедливы и для волн с $l = 1, 2, \dots$, за тем лишь исключением, что нуль в начале координат двукратный и соответствует подлинному связанному состоянию с энергией, равной нулю.

Интегральное уравнение Фредгольма³ для физического решения

Рассмотрев нули функции F при $\text{Im } k > 0$, мы показали, что они соответствуют связанным состояниям. Теперь можно поставить вопрос: все ли связанные состояния исчерпываются этими нулями. Ответ положительный. В самом деле, как хорошо известно и как легко убедиться, физическое решение ψ (гл. 1, § 1), удовлетворяющее граничным условиям $\psi(k, 0) = 0$ и (1.1.11), является решением

интегрального уравнения Фредгольма

$$\psi(k, r) = \sin kr - \int_0^{\infty} \frac{\sin kr_{<}}{k} e^{ikr_{>}} V(r') \psi(k, r') dr', \quad (2.1.9)$$

$$r_{>} = \max(r, r'), \quad r_{<} = \min(r, r'). \quad (2.1.9)$$

Йост и Пайс [231] показали, что это уравнение представляет собой уравнение Фредгольма, если потенциал удовлетворяет условию (1.1.3) и его определитель Фредгольма в точности равен функции Йоста $F(k)$. Тогда по теореме Фредгольма об альтернативе все квадратично-интегрируемые решения определяются нулями функции Йоста. То, что число их конечно, следует из неравенства Баргмана [25] для числа связанных состояний с угловым моментом l :

$$n_l \leq \frac{1}{2l+1} \int_0^{\infty} r |V(r)| dr. \quad (2.1.10a)$$

Уточнить это ограничение, вообще говоря, невозможно, если мы не имеем никакой другой информации о потенциале, кроме условия (1.1.3). Более того, существуют потенциалы, для которых это условие не выполняется и которые в действительности имеют бесконечное число связанных состояний.

Для потенциалов более общего вида из гл. 1, § 6 функция Йоста тоже равна определителю Фредгольма интегрального уравнения (2.1.9), которое также можно записать в виде системы уравнений типа (1.6.4a) и (1.6.4b). В этом случае мы имеем ограничение

$$n_l \leq \frac{4}{2l+1} \int_0^{\infty} r W^2(r) dr. \quad (2.1.10b)$$

Теорема Левинсона

Теорема Левинсона устанавливает связь между изменением фазового сдвига вдоль действительной оси энергии и числом связанных состояний. Это просто хорошо известное соотношение между изменением мнимой части $\ln F(k)$ вдоль замкнутого контура, включающего всю действительную ось и полуокружность бесконечного радиуса в верхней полуплоскости, и числом нулей функции Йоста в области, ограниченной этим контуром.

На основании соотношений (1.4.6) и (1.4.3) мы можем записать эту теорему в виде ¹⁾

$$l=0: \delta(0) - \delta(\infty) = \begin{cases} n\pi & \text{при } F(0) \neq 0, \\ \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi & \text{при } F(0) = 0. \end{cases} \quad (2.1.11)$$

¹⁾ Здесь мы должны предположить, что произведение $r^2 V(r)$ абсолютно интегрируемо на бесконечности, если $F(0) = 0$. То же самое относится и к выражению (2.1.12).

Эта теорема справедлива не только для локальных потенциалов, удовлетворяющих условию (1.1.3). Как мы увидим в дальнейшем, она верна даже для большого класса нелокальных потенциалов.

Волны с $l > 0$

Проведенный выше анализ без особых изменений возможен и в случае волн с $l > 0$. Рассматривая связанные состояния, можно снова показать, что функция Йоста равна определителю Фредгольма интегрального уравнения, которому удовлетворяет физическое решение (1.1.26) и которое теперь можно записать в общем виде

$$\psi_l^{\pm}(k, r) = u_l(kr) - \int_0^{\infty} u_l(kr_{<}) w_l(kr_{>}) V(r') \psi_l(k, r') dr'. \quad (2.1.9')$$

Поэтому в общем случае имеется взаимно-однозначное соответствие между нулями функции Йоста при $\text{Im } k \geq 0$ и связанными состояниями. Для P -волн и волн с $l > 1$ асимптотическая форма волновой функции при нулевой энергии дается выражениями

$$\varphi_l^{\pm}(0, r) = A_l r^{l+1} + B_l r^{-l} + o(r^{-l}), \quad (2.1.5в)$$

$$\varphi_l'(0, r) = A_l' r^l + B_l' r^{-l-1} + o(r^{-l-1}), \quad (2.1.5г)$$

которые представляют собой обобщенные выражения (2.1.5а) и (2.1.5б). Поскольку здесь $l \geq 1$, равенство нулю функции $F_l(0)$ (т. е. $A_l = 0$) соответствует связанному состоянию при нулевой энергии, так как теперь функция φ_l квадратично-интегрируема на бесконечности. В этом единственное отличие от случая S -волн.

Тем же путем, что и в случае S -волн, мы снова найдем, что нули функции Йоста в верхней полуплоскости простые и лежат, как это и должно быть, на мнимой оси. Если функция Йоста обращается в нуль при $k = 0$, то этот нуль двукратный при $l \geq 1$, тогда как при $l = 0$ он был простым.

Теорема Левинсона теперь имеет вид ($l \geq 1$)

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = n_l \pi, \quad (2.1.12)$$

где n_l — число связанных состояний с угловым моментом l , включая связанное состояние при нулевой энергии, если оно существует.

Если $k_0 = i\gamma_0$, $\gamma_0 > 0$, соответствует связанному состоянию, то мы имеем соотношения

$$f_l(k_0, r) = c_l \varphi_l(k_0, r), \quad (2.1.13а)$$

$$(-k_0)^{-l} \dot{F}_l(k_0) = -2c_l k_0 \int_0^{\infty} \varphi_l^2(k_0, r) dr, \quad (2.1.13б)$$

которые представляют собой обобщенное соотношение (2.1.8) и получены тем же путем.

Переходя к пределу при $r \rightarrow 0$ в равенстве (2.1.13а), мы также получаем

$$c_l = \lim_{r \rightarrow 0} [(2l+1)!! r^{-l-1/2} f_l(k_0, r)]. \quad (2.1.13в)$$

В дальнейшем мы увидим, что для потенциалов, убывающих на бесконечности экспоненциально или быстрее [$V \sim \exp(-\mu r)$], решение Йоста голоморфно по крайней мере при $\text{Im } k > -\mu/2$. Следовательно, имеется общая область голоморфности для функций $f_l(\pm k, r)$, представляющая собой полосу

$$|\text{Im } k| < \frac{\mu}{2}.$$

Отсюда также следует, что функции Йоста $F_l(\pm k)$ имеют ту же общую область голоморфности. Таким образом, формула (1.1.19) справедлива в этой полосе. Предположим теперь, что в этой полосе имеется связанное состояние $k_0 = i\gamma_0$ ($\gamma_0 < \mu/2$). Из соотношений (1.1.19), (2.1.1) и (2.1.13а) получим

$$\varphi_l(i\gamma_0, r) = -\left(\frac{i^l}{2}\right) \gamma_0^{-l-1} F_l(-i\gamma_0) f_l(i\gamma_0, r), \quad (2.1.13г)$$

$$c_l = -2\gamma_0^{l+1} [i^l F_l(-i\gamma_0)]^{-1}. \quad (2.1.13д)$$

Подставляя эти выражения в формулу (2.1.13в), получаем

$$C_0^{-1} = \int_0^\infty \varphi_l^2(i\gamma_0, r) dr = (-1)^l \dot{F}_l(i\gamma_0) \frac{F_l(-i\gamma_0)}{4i\gamma_0^{2l+2}}. \quad (2.1.14)$$

Так как теперь S -матрица мероморфна в указанной полосе, мы можем вычислить ее вычет в полюсе, соответствующем связанному состоянию. Он равен

$$s_0 = \frac{F(-i\gamma_0)}{\dot{F}(+i\gamma_0)} = -i \frac{F^2(i\gamma_0/2) (-1)^l C_0}{4\gamma_0^{2l+2}} \quad (2.1.14')$$

Отсюда видно, что величина $i(-1)^l s_0$ положительна в полюсе S -матрицы, соответствующем связанному состоянию.

§ 2. Интегральное представление функции Йоста

Проведенный нами анализ демонстрирует важную роль функции Йоста. Он показал, что одна эта функция несет всю информацию о рассеянии и S -матрице, а также содержит все данные о связанных состояниях (их число и энергии), кроме нормировки волновых функций связанных состояний¹⁾. Она также играет

¹⁾ См., однако, формулу (2.1.14).— *Прим. ред.*

очень важную роль в обратной задаче, ибо представляет собой звено между экспериментальными данными (фазовыми сдвигами и энергиями связи) и так называемым ядром Повзнера — Левитана, которым определяется потенциал. Это будет показано в следующей главе. Первый шаг — интегральное представление

$$F_l(k) = \prod_1^{n_l} \left(1 - \frac{E_j}{E}\right) \exp \left[-\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\delta_l(k')}{k'^2 - k^2} k' dk' \right], \quad (2.2.1)$$

справедливое при $\text{Im } k > 0$. Величины E_j — энергии связи связанных состояний ($E_j = -\gamma_j^2$).

Указанное представление можно получить, отметив, во-первых, что функция

$$\tilde{F}_l(k) = \prod_1^{n_l} \left(\frac{k + k_j}{k - k_j} \right) F_l(k) \quad (2.2.2)$$

голоморфна при $\text{Im } k > 0$, непрерывна при $\text{Im } k \geq 0$ и, согласно формуле (1.5.9), удовлетворяет условию

$$\tilde{F}_l(k) = 1 + o(1), \quad |k| \rightarrow \infty. \quad (2.2.3)$$

Отметим также, что $\tilde{F}_l$ больше нигде не обращается в нуль при $\text{Im } k > 0$. Отсюда следует, что величина $\ln \tilde{F}_l$ голоморфна при $\text{Im } k > 0$ и стремится к нулю на бесконечности в силу равенства (2.2.3). Поэтому мы можем применить интегральное преобразование Гильберта к действительной и мнимой частям величины $\ln \tilde{F}_l$. Замечая, что

$$\text{Im } \ln \tilde{F}_l = -\delta_l(k) + 2 \sum_j \text{arctg } (\gamma_j/k), \quad (2.2.4)$$

мы легко получаем выражение (2.2.1). Когда энергия становится действительной, т. е. при $k \rightarrow \text{Re } k + i0$, как мы и ожидали, фаза функции Йоста оказывается равной $-\delta_l(k)$, а ее модуль дается выражением (2.2.1), где интеграл берется в смысле главного значения:

$$|F_l(k)| = \prod_1 \left(1 - \frac{E_j}{E}\right) \times \\ \times \exp \left[-\frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\delta_l(k')}{k'^2 - k^2} k' dk' \right], \quad E = k^2 \geq 0. \quad (2.2.1')$$

§ 3. Разложение по собственным функциям

Разложение по собственным функциям, связанное с дифференциальным уравнением второго порядка, хорошо исследовано. Поэтому мы приведем здесь только основные результаты и отошлем

читателя к литературе по данному вопросу. Дифференциальное уравнение, которое мы рассматриваем, имеет вид (вначале положим $l = 0$)

$$-\varphi'' + V(r)\varphi = k^2\varphi \quad (2.3.1)$$

на интервале $[0, \infty)$. Если предположить, что потенциал $V(r)$ удовлетворяет условию интегрируемости (1.1.4) или (1.6.2a) и (1.6.2б) в начале координат, то можно показать, что начало координат соответствует (в терминологии Вейля и Титчмарша) предельному кругу. Это означает, что имеются два независимых решения уравнения (2.3.1), которые оба принадлежат пространству $L^2(0, a)$ при всяком конечном a . Следовательно, любое решение также принадлежит пространству $L^2(0, a)$.

Чтобы определить самосопряженный оператор в пространстве $L^2(0, \infty)$, необходимо наложить граничные условия. Их можно взять в виде

$$\varphi(k, 0) = 0, \quad \varphi'(k, 0) = 1. \quad (2.3.2)$$

На бесконечности мы, конечно, предполагаем, что $rV(r) \in L^1(b, \infty)$, т. е. мы имеем дело с короткодействующими потенциалами. Теперь мы можем получить нужный нам самосопряженный оператор, расширив симметричный оператор (2.3.1), действующий на дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие граничным условиям и обращающиеся в нуль вне некоторого конечного интервала. Обозначим этот самосопряженный оператор через D .

Рассмотрим теперь ядро

$$R_E(r, t) = \frac{\varphi(k, r_<)f(k, r_>)}{F(k)}, \quad \text{Im } k > 0, \quad (2.3.3)$$

где φ и f — регулярное решение и решение Йоста (гл. 1), $F(k)$ — функция Йоста, а $r_< = \min(r, t)$ и $r_> = \max(r, t)$. В данном параграфе мы принимаем, что $F(0) \neq 0$. Функция R_E аналитическая в E -плоскости с разрезом на положительной действительной полуоси и простыми полюсами на отрицательной действительной полуоси в точках, где функция Йоста обращается в нуль в верхней полуплоскости $\text{Im } k > 0$, т. е. в точках $E_j = -\gamma_j^2$, соответствующих энергиям связанных состояний. Их число конечно. Исходя из определения функции Йоста $F(k)$ [формула (1.1.20)], легко показать, что функция R_E удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + V(r) - E\right) R_E(r, t) = \delta(r - t) \quad (2.3.4)$$

и такому же уравнению по t , а также граничному условию

$$R_E(0, t) = 0. \quad (2.3.5)$$

Ограниченность функции R_E следует из неравенств (1.2.8а) и (1.3.2), а именно: при $\text{Im } k > 0$

$$|R_E(r, t)| < Cr(1 + |k|r)^{-1} e^{-\text{Im } k|r-t|}. \quad (2.3.6)$$

Это ясно показывает, что функцией R_E определяется ограниченный оператор в пространстве $L^2(0, \infty)$, т. е. это оператор резольвенты

$$R_E = \frac{1}{D - \lambda I}. \quad (2.3.7)$$

Разрывом на разрезе $E \geq 0$ и вычетами в полюсах $E_j = -\gamma_j^2$ определяется спектральная функция оператора D , с помощью которой мы можем сформулировать теперь условие полноты для решений $\varphi(E, r)$, $E \geq 0$, и $\varphi_j(r) = \varphi(E_j, r)$, $j = 1, 2, \dots, n$, связанных с дифференциальным оператором (2.3.1) и граничными условиями (2.3.2). Оно формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Функции $\varphi(E, r)$, $E \geq 0$ и $\varphi_j(r)$ образуют полную ортогональную систему, причем условие полноты для них может быть символически записано в виде*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(E, r) \varphi(E, t) |F(k)|^{-2} E^{1/2} dE + \\ + \sum_j C_j \varphi_j(r) \varphi_j(t) = \delta(r - t), \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

где нормировочные константы ¹⁾ даются формулой (2.1.8) для каждого $k_j = i\gamma_j$:

$$C_j = -\frac{2i\gamma_j f'(i\gamma_j, 0)}{\dot{F}(i\gamma_j)}. \quad (2.3.9)$$

В свободном случае, когда потенциал обращается в нуль, равенство (2.3.8) сводится к обычному условию полноты для синус-преобразования Фурье

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{k} \frac{\sin kt}{k} k^2 dk = \delta(r - t). \quad (2.3.10)$$

Рассмотренная выше резольвента R_E идентична, конечно, резольвенте интегрального уравнения Фредгольма (2.4.9) для физического решения, определяемого граничными условиями $\psi(k, 0) = 0$ и (1.1.11), а функция Йоста $F(k)$, как мы видели выше, равна его определителю Фредгольма. Вспоминая выражение (1.1.26),

¹⁾ Об определении нормировочных констант по экспериментальным данным см. работу [441].— *Прим. ред.*

мы видим, что условие (2.3.8) можно переписать в виде

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(k, r) \psi(k, t) dt + \sum_j C_j' \psi_j(r) \psi_j(t) = \delta(r - t). \quad (2.3.11)$$

Это равенство представляет собой точный аналог равенства (2.3.10), но ψ_j теперь является решением однородного интегрального уравнения, связанного с уравнением (2.1.9), а нормировочные постоянные C_j' определяются соотношением

$$C_j' \int_0^{\infty} \psi_j^2(r) dr = 1. \quad (2.3.12)$$

Так как мы имеем дело с непрерывным спектром, функции $\{\psi(k, r)\}$ не являются элементами гильбертова пространства и, следовательно, не являются собственными функциями в обычном смысле. Чтобы придать им смысл, мы должны рассматривать их как ядра интегральных преобразований, диагонализующих самосопряженный оператор D , который соответствует уравнению (2.3.1), точно так же, как функция $(\sin kr/k)$ является ядром синус-преобразования Фурье, соответствующего уравнению $-\varphi'' = k^2\varphi$ с граничным условием (2.3.2). Мы не будем подробно останавливаться на таких преобразованиях, поскольку нам не придется пользоваться ими.

Символические соотношения (2.3.8) — (2.3.10) следует, конечно, понимать как соотношения для операторов, действующих в пространстве L^2 . Для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(r)$, обращаясь в нуль вне некоторого конечного интервала, не содержащего начала координат, с помощью резольвенты R_E и контурного интегрирования по Титчмаршу [404, 226] можно показать, что

$$\begin{aligned} f(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |F(k)|^{-2} k^2 \varphi(k, r) \left[\int_0^{\infty} \varphi(k, t) f(t) dt \right] dk + \\ + \sum_j C_j \varphi_j(r) \left[\int_0^{\infty} \varphi_j(t) f(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Поскольку такие функции $f(r)$ всюду плотные в пространстве $L^2(0, \infty)$, выражение (2.3.13) справедливо для пространства L^2 и мы получаем условие (2.3.8). Запишем это условие в компактной форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(E, r) \varphi(E, t) d\rho(E) = \delta(r - t), \quad (2.3.14a)$$

где

$$\frac{d\rho(E)}{dE} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{E^{1/2}}{|F(E^{1/2})|^2} & \text{при } E \geq 0, \\ \sum_j C_j \delta(E - E_j) & \text{при } E < 0. \end{cases} \quad (2.3.146)$$

В случае волн с $l \geq 1$ все обстоит точно так же, за тем исключением, что теперь, поскольку в уравнение Шредингера входит центробежный потенциал:

$$-\varphi'' + \frac{l(l+1)}{r^2} \varphi + V(r) \varphi = E\varphi, \quad (2.3.15)$$

начало координат $r = 0$ оказывается предельной точкой, т. е. имеется только одно решение, принадлежащее пространству L^2 в окрестности начала, а именно регулярное решение φ_l ; решение же Йоста f_l сингулярно. Все остальное совершенно подобно случаю с $l = 0$ (гл. 1, § 5). Нормировочные константы для связанных состояний определяются теперь соотношением (2.1.136):

$$C_j^{-1} = \int_0^\infty \varphi_j^2(r) dr = \frac{\dot{F}(i\gamma_j)}{2i\gamma_j^{l+1}} \left\{ (2l+1)!! \lim_{r \rightarrow 0} r^{-l-1} f_l(i\gamma_j, r) \right\}. \quad (2.3.16)$$

Чтобы избежать излишних осложнений не принципиального характера, мы снова предположим, что $F_l(0) \neq 0$ (нет связанного состояния при нулевой энергии). Тогда условие полноты для собственных функций будет иметь точно такой же вид, как и раньше ¹⁾:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_l(E, r) \varphi_l(E, r') d\rho_l(E) = \delta(r - r'), \quad (2.3.17a)$$

$$\frac{d\rho_l(E)}{dE} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} (E)^{l+1/2} |F_l(E^{1/2})|^{-2} & \text{при } E \geq 0, \\ \sum_j C_j \delta(E - E_j) & \text{при } E < 0. \end{cases} \quad (2.3.176)$$

В свободном случае аналогом условия (2.3.10) служит хорошо известная формула

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty u_l(kr) u_l(kt) dk = \delta(r - t), \quad (2.3.18)$$

¹⁾ О полноте набора резонансных, связанных и антисвязанных состояний и восстановлении потенциала по параметрам этих состояний см. работы [438, 454]. О полноте решений радиального уравнения Шредингера с ядерно-кулоновским потенциалом в комплексной плоскости углового момента см. работу [466].— *Прим. ред.*

где $u_l = (\pi k r / 2)^{1/2} J_{l+1/2}(kr)$. Если мы вместо φ_l возьмем физическое решение ψ_l , то, как явствует из соотношения (1.1.26), условие (2.3.11) будет выполняться при всех l . Все изложенные результаты верны при общих предположениях, указанных в начале главы [в частности, не требуется абсолютной интегрируемости функции $rV(r)$ в начале координат].

§ 4. Другие результаты

Некоторые интегральные представления

Мы рассмотрим здесь некоторые необходимые для дальнейшего интегральные представления функции Йоста F и S -матрицы и интегральные операторы, которые определяются спектральной плотностью $d\rho_l$, введенной в предыдущем параграфе. Прежде всего, принимая либо условие $rV(r) \in L^1(0, \infty)$, либо условия (1.6.2a), (1.6.2б) и $rV(r) \in L^1(b, \infty)$, $b > 0$, получаем

$$F(k) = 1 + \int_0^\infty \Gamma(t) e^{ikt} dt, \quad (2.4.1)$$

где $\Gamma(t) \in L^1(0, \infty)$. Проще всего это представление получить из представления Левина (5.1.5) для решения Йоста, которое будет выведено в гл. 5 и которое служит исходным при решении обратной задачи методом Марченко. Полагая в этом представлении $r = 0$, мы получаем $\Gamma(t) = A(r, 0)$. Ограничение сверху (5.1.7) гарантирует, что функция Γ принадлежит пространству $L^1(0, \infty)$. Из выражения (2.4.1) мы можем получить аналогичные представления для S -матрицы, спектральной плотности $d\rho_l(E)$ и фазового сдвига. Все они следуют из теоремы Винера — Леви, которая формулируется следующим образом:

Теорема 2. Пусть $G(z)$ — функция, аналитическая в некоторой области D комплексной плоскости, а $F(k)$ — такая функция, что кривая $z = F(k)$ при $-\infty \leq k \leq +\infty$ лежит внутри области D . Тогда, если функцию $F(k)$ можно представить в виде

$$F(k) = C + \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{ikt} dt,$$

где $f(t) \in L^1(-\infty, \infty)$, то и функция $G(F(k))$ тоже допускает такое представление.

Заметим, что $C = F(\infty)$ по теореме Римана — Лебега о фурье-образах интегрируемых функций.

Теорема 2 непосредственно приложима к S -матрице и к величине $|F(k)|^{-2}$ и дает представления ¹⁾

$$\begin{aligned} |F(k)F(-k)|^{-1} &= |F(k)|^{-2} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{iht} dt = \\ &= 1 + 2 \int_0^{\infty} H(t) \cos kt dt, \quad k - \text{действительная величина}, \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

$$S(k) = \frac{F(-k)}{F(k)} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma(t) e^{-ikt} dt, \quad (2.4.3)$$

где и $H(t)$, и $\Sigma(t)$ — функции, интегрируемые на действительной оси. В обеих этих формулах k , конечно, действительная величина, поскольку, вообще говоря, $|F|^{-2}$ и $S(k)$ не являются аналитическими функциями переменной k . В формуле (2.4.3) взята функция $\exp(-ikt)$, поскольку именно в таком виде эта формула применяется в методе Марченко (гл. 5).

Теорема Винера — Леви может быть применена и к фазовому сдвигу. Если нет связанных состояний, то по теореме Левинсона мы можем взять $\delta(-\infty) = \delta(\infty) = 0$ и тогда из выражения (2.4.3) и равенства $\delta(-k) = -\delta(k)$ (k — положительная величина) получим

$$\delta(k) = \frac{i}{2} \ln S(k) = - \int_0^{\infty} \gamma(t) \sin kt dt, \quad (2.4.4)$$

где снова $\gamma(t)$ — функция, принадлежащая пространству $L^1(0, \infty)$. Отсюда на основании теории обратного преобразования Гильберта [403, гл. V] получаем

$$|F(k)| = \exp \left[\int_0^{\infty} \gamma(t) \cos kt dt \right] \quad (k \text{ действительное}), \quad (2.4.5)$$

$$F(k) = \exp \left[\int_0^{\infty} \gamma(t) e^{iht} dt \right]. \quad (2.4.6)$$

Эти выражения снова устанавливают связь между фазовым сдвигом и функцией Йоста и альтернативны представлению (2.2.1).

¹⁾ Написав $|F(k)|^{-2} - 1 = [F^{-1}(k) - 1][F^{-1}(-k) - 1] + [F^{-1}(k) - 1] + [F^{-1}(-k) - 1]$, мы применяем теорему отдельно к каждому члену, учитывая тот хорошо известный факт [403, гл. II, теоремы 40, 41], что фурье-образ произведения двух функций, фурье-образ каждой из которых принадлежит пространству $L^1(-\infty, \infty)$, также принадлежит пространству $L^1(-\infty, \infty)$. Точно так же мы поступаем с S -матрицей.

При наличии связанных состояний мы можем выделить их в виде множителя на основании соотношения [формулы (2.2.2) и (2.2.4)]

$$\tilde{S}(k) = e^{2i\delta(k)} = S(k) \prod_j \frac{k - i\gamma_j}{k + i\gamma_j}. \quad (2.4.7)$$

К функции $\tilde{S}(k)$ мы можем применить теорему Винера — Леви, так как теперь $\tilde{\delta}(-\infty) = \tilde{\delta}(0) = \tilde{\delta}(\infty) = 0$, и записать $\tilde{\delta}(k)$ в виде (2.4.4). Затем, вычислив $\tilde{F}$ по формуле (2.4.6), получаем

$$F(k) = \tilde{F}(k) \prod_j \frac{k - i\gamma_j}{k + i\gamma_j}. \quad (2.4.8)$$

Ядро Повзнера — Левитана

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\Psi}(r, t) = \int_0^\infty \cos kt \left[\varphi(k, r) - \frac{\sin kr}{k} \right] dk, \quad (2.4.9)$$

с которой встретимся в гл. 3, § 1, и которая играет важную роль в теории Гельфанда — Левитана. Это хорошо определенная непрерывная функция переменных r и t , так как согласно условию (1.2.11), подынтегральное выражение здесь — интегрируемая функция. Мы рассмотрим функцию (2.4.9) в области $0 \leq t \leq r$. Если в формулу (2.4.9) подставить выражение (1.2.2) и изменить порядок интегрирования на обратный, что допустимо, поскольку мы имеем дело с абсолютно сходящимися интегралами, то получим

$$\tilde{\Psi}(r, t) = \int_0^r V(u) \Psi(r, t; u) du, \quad (2.4.10a)$$

$$\begin{aligned} \Psi(r, t; u) &= \int_0^\infty \cos kt \frac{\sin k(r-u)}{k} \frac{\sin ku}{k} dk + \\ &+ \int_0^\infty \cos kt \frac{\sin k(r-u)}{k} \left[\varphi(k, u) - \frac{\sin ku}{k} \right] dk = \Psi_1 + \Psi_2. \end{aligned} \quad (2.4.10b)$$

В дальнейшем мы увидим, что более важную роль играет производная функции $\tilde{\Psi}(r, t)$ по переменной t . Поэтому рассмотрим производную функции, даваемой формулой (2.4.10b), по t . Как нетрудно видеть, на основании соотношения (1.2.8б) второе слагаемое в выражении (2.4.10b) можно продифференцировать под знаком интеграла, а это приведет к выражению, которое ограничено сверху

постоянной, умноженной на u . Если полученный результат подставить в выражение (2.4.10а), то мы получим абсолютно сходящийся интеграл, ибо, по предположению, произведение $uV(u)$ есть функция, интегрируемая в начале координат. Остается исследовать первое слагаемое в выражении (2.4.10б). Это абсолютно сходящийся интеграл, производная которого по t всюду конечна и записывается в виде

$$\begin{aligned} t < r: \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1(r, t; u) &= 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq u < r - t, \\ t = r: \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1(r, t; u) &= \begin{cases} \frac{\pi}{8} & \text{при} \quad u = 0, \\ \frac{\pi}{4} & \text{при} \quad 0 < u < 2r. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Объединим все эти результаты в следующей лемме.

Лемма. Если потенциал интегрируем в начале координат, то функция $\tilde{\psi}(r, t)$ имеет конечную производную по t при $0 \leq t \leq r$. Если же потенциал не является функцией, интегрируемой в начале координат, то производная $\partial \tilde{\psi} / \partial t$ конечна при $0 \leq t < r$ и, вообще говоря, бесконечна при $r = t$.

В гл. 3 будут также использованы аналогичные результаты для функции

$$\begin{aligned} G(r, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin kr \sin kt [|F(k)|^{-2} - 1] dk = \\ &= H(r - t) - H(r + t), \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

где H — функция, введенная в формуле (2.4.2). Из определения (2.4.12) видно, что G — симметричная функция своих аргументов.

Исходя из асимптотических свойств функции Йоста при больших энергиях, на основании теоремы Абеля о сходимости интегралов с осциллирующими подынтегральными выражениями легко показать, что функция $G(r, t)$ конечна при всех $t < r$, но, вообще говоря, обращается в бесконечность при $t = r$. Если же потенциал интегрируем в начале координат, то функция $G(r, t)$ конечна и при $t = r$. Это строго доказывается на основании равенства (1.4.6'). Во всех случаях функция $G(r, t)$ всюду интегрируема, в том числе и при $t = r$. Это следует из определения (2.4.12), так как мы знаем, что H — интегрируемая функция. Чтобы показать, что функция G конечна при $t = r$, если потенциал интегрируем в начале координат, мы воспользуемся тем обстоятельством, что, как было показано выше, интеграл в формуле (1.4.4) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ [формула (1.4.6)]. Отсюда следует, что при

больших значениях k

$$|F(k)|^2 - 1 \approx \int_0^\infty 2 \cos kr V(r) \varphi(k, r) dr. \quad (2.4.13)$$

Учитывая это, из выражения (2.4.12) получаем

$$G(r, t) \approx 2 \int_0^\infty \sin kr \sin kt dk \int_0^\infty \cos ku V(u) \varphi(k, u) du. \quad (2.4.14)$$

Важным пунктом здесь является сходимость интеграла по k на бесконечности. Поэтому мы заменим в этом выражении функцию φ ее асимптотической формой $(\sin ku)/k$. Теперь, введя функцию W — интеграл от потенциала (1.6.1) — и выполнив в интеграле по u интегрирование по частям, мы найдем (вспомнив, что $rW(r)$ обращается в нуль при $r = 0$ и на бесконечности)

$$\begin{aligned} G(r, t) &\approx \int_0^\infty [\cos k(r-t) - \cos k(r+t)] dk \int_0^\infty W(u) \cos 2ku du = \\ &= W\left(\frac{r-t}{2}\right) - W\left(\frac{r+t}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Отсюда сразу же следует ряд выводов. Так как, по предположению, функция W существует и непрерывна, если ее аргумент строго положителен, функция $G(r, t)$ непрерывна при $t < r$. Если потенциал интегрируем в начале координат, то функция $W(r)$ непрерывна и при $r = 0$, так что функция $G(r, t)$ конечна даже при $t = r$. Наконец, из формул (2.4.2) и (2.4.12) явствует, что доминирующей частью функции H является именно функция W .

Проведенный выше анализ касался доминирующих (по k) частей функций (2.4.12) и (2.4.14). Но путем соответствующих выкладок на основании равенств (1.2.9а)—(1.2.9г) можно показать, что учет остатков не изменит выводов. Можно строго показать, что если

$$V(r) \sim r^{-a}, \quad 1 < a < 2, \quad r \rightarrow 0, \quad (2.4.16a)$$

то сингулярность функции $G(r, t)$ при $t = r$ имеет вид

$$G(r, t) = |r - t|^{1-a} + \dots \quad (2.4.16b)$$

В следующей главе мы увидим, что ядро (Повзнера — Левитана)

$$\begin{aligned} K(r, t) &\equiv \frac{\partial \tilde{\Psi}(r, t)}{\partial t} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\varphi(k, r) - \frac{\sin kr}{k} \right) k \sin kt dk \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

играет очень важную роль в теории Гельфанда — Левитана.

Последняя формула из тех, которые понадобятся нам позже (гл. 5), представляет собой соотношение между нормированной волновой функцией связанного состояния (энергия — γ^2 , S -волна)

$$\psi_0(r) = C_0^{1/2} \varphi(i\gamma, r),$$

где C_0 определяется формулой (2.1.8), и решением Йоста $f(i\gamma, r)$. Согласно формулам (2.1.2) и (2.1.8), мы имеем

$$\psi_0(r) = s_0 f(i\gamma; r), \quad (2.4.18a)$$

где

$$s_0 = \left(\frac{2i\gamma}{-\dot{F}(i\gamma) f'(i\gamma, 0)} \right)^{1/2}. \quad (2.4.18b)$$

§ 5. Замечания и литература

Результаты, изложенные в данной главе, можно найти в книгах де Альфаро и Редже [131] и Ньютона [319], на которые мы уже ссылались в гл. 1. Теорию разложений по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями второго порядка, можно найти в работах Коддингтона и Левинсона [94], Хилле [204], Титчмарша [404], Йоргенса [226], Данфорда и Шварца [137]¹⁾.

Интегральные представления функции Йоста, S -матрицы и фазового сдвига (2.4.1)—(2.4.4) как интегралы Фурье абсолютно интегрируемых функций взяты из работ Крейна [257, 259]; см. также обзорную статью Фаддеева [148].

Еще раз напомним, что все результаты, изложенные в данной главе, в том числе и упомянутые выше интегральные представления, справедливы при общих предположениях, сделанных в гл. 1, § 6. В частности, не требуется абсолютной интегрируемости функции $rV(r)$ в начале координат. Эти обобщения были сделаны Бетманом и Шаданом [21, 22]. Неравенство (2.1.10б) получено Шаданом и Мартеном [87]²⁾.

¹⁾ Полнота системы собственных функций была впервые доказана В. А. Стекловым. Различные способы доказательства полноты изложены в книге [464].— *Прим. ред.*

²⁾ Обзор работ, посвященных различным формам теоремы Левинсона. см. в работе [437].— *Прим. ред.*

МЕТОД ГЕЛЬФАНДА — ЛЕВИТАНА — ЙОСТА — КОНА

§ 1. Представление Повзнера — Левитана

Вообще говоря, существуют два метода решения обратной задачи при фиксированном угловом моменте. Первый, основанный на регулярном решении радиального уравнения Шредингера, принадлежит Гельфанду и Левитану, а также Йосту и Кону, и ему посвящена данная глава. Второй — метод Марченко, основанный на решении Йоста. Он будет рассмотрен в следующих главах. Каждый из этих двух методов имеет свои преимущества и позволяет прояснить те или иные стороны вопроса. Оба метода, конечно, эквивалентны.

В методе Гельфанда — Левитана ключевую роль играет интегральное представление регулярного решения радиального уравнения Шредингера через его свободные решения. Оно основано на теореме Пели — Винера (или ее вариантах, подобных теореме Випера — Боаса, см. ниже) о фурье-образах целых функций экспоненциального типа, принадлежащих пространству L^2 (или L^1) на действительной оси.

Функция $f(z)$ комплексной переменной z называется *целой*, если она голоморфна в любой ограниченной области плоскости z . Если на бесконечности она возрастает с такой же скоростью, как и $\exp(\alpha |z|)$, где α — положительная величина, то она называется функцией экспоненциального типа α . Для более строгого определения введем обозначение

$$M(r) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|. \quad (3.1.1)$$

Функция f будет функцией экспоненциального типа α в том и только в том случае, если [48]

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} [(\ln r)^{-1} \ln \ln M(r)] = 1 \quad (3.1.2)$$

и

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} [r^{-1} \ln M(r)] = \alpha. \quad (3.1.3)$$

Для таких функций справедливы две следующие теоремы [48].

Теорема 1 (Пели — Винера). Функция $f(z)$ является целой функцией экспоненциального типа α в плоскости z и на действительной оси принадлежит пространству $L^2(-\infty, \infty)$ в том и только в том случае, если ее можно представить в виде

$$f(z) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{f}(t) e^{itz} dt, \quad (3.1.4a)$$

где $\tilde{f}(t)$ — функция из пространства $L^2(-\alpha, \alpha)$. Иначе говоря, фурье-образ функции f на действительной оси есть функция, квадратично-интегрируемая на интервале $(-\alpha, \alpha)$.

Теорема 2 (Винера — Боаса). Функция $f(z)$ является целой функцией экспоненциального типа α и принадлежит пространству $L^1(-\infty, \infty)$ на действительной оси в том и только в том случае, если

$$f(z) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{f}(t) e^{itz} dt, \quad (3.1.4b)$$

где $\tilde{f}(\alpha) = \tilde{f}(-\alpha) = 0$, а функция, равная $\tilde{f}(t)$ на интервале $(-\alpha, \alpha)$ и нулю вне его, имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье на любом интервале $(-\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Отметим, что здесь функция $\tilde{f}(t)$, если мы определяем ее как обратный фурье-образ функции f , непрерывна, поскольку $f(x)$ принадлежит пространству $L^1(-\infty, \infty)$.

Снова для простоты рассмотрим S -волну. Регулярное решение φ при любом фиксированном значении r имеет асимптотические свойства (1.2.10). Следовательно, по переменной k оно представляет собой целую экспоненциальную функцию типа r , а на действительной k -оси принадлежит пространству L^2 . Но мы знаем больше: если потенциал удовлетворяет условиям (1.6.2a) и (1.6.2b) или условию (1.1.1), то в силу соотношения (1.2.11) функция $\psi = \varphi - (\sin kr)/k$ принадлежит пространству L^1 на действительной k -оси. Поэтому мы можем применить к ней теорему Винера — Боаса и тогда получим (вспомнив, что φ — четная функция переменной k)

$$\begin{aligned} \psi(k, r) &\equiv \varphi(k, r) - \frac{\sin kr}{k} = \int_{-r}^r \tilde{\psi}(r, t) e^{ikt} dt = \\ &= 2 \int_0^r \tilde{\psi}(r, t) \cos kt dt, \end{aligned} \quad (3.1.5a)$$

где $\tilde{\psi}(r, t)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\tilde{\psi}(r, \pm r) = 0. \quad (3.1.5b)$$

Производя обратное преобразование Фурье, что, очевидно, допустимо, получаем

$$\tilde{\psi}(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(k, r) \cos kt \, dk. \quad (3.1.6)$$

Из данного выражения видно, что функция $\tilde{\psi}$ по крайней мере один раз дифференцируема по r или t при $t < r$. В самом деле, производя дифференцирование под знаком интеграла в формуле (3.1.6), получаем

$$\frac{\partial}{\partial r} \tilde{\psi}(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \psi(k, r) \cos kt \, dk, \quad (3.1.7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(r, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} k \psi(k, r) \sin kt \, dk. \quad (3.1.7b)$$

По теореме Абеля оба интеграла существуют, так как подынтегральные выражения осциллируют и в пределе обращаются в нуль при больших k , первое из них в силу равенства (1.2.9б), а второе в силу соотношения (1.2.8б). Отсюда следует, что дифференцирование под знаком интеграла допустимо и функция $\tilde{\psi}$ имеет первые производные по t и r , конечные всюду при $t < r$. При $t = r$ это, вообще говоря, неверно, поскольку $k\psi$ и $\partial\psi/\partial r$ содержат в своих разложениях и $\sin kr$, и $\cos kr$, так что в пределе больших k , и при $r = t$ часть интегралов в выражениях (3.1.7a) и (3.1.7b) могут сохранять свой знак. А поскольку, если мы требуем лишь выполнения условий (1.6.2a) и (1.6.2б) или условия (1.1.1), оба эти множителя¹⁾ при больших k имеют всего лишь порядок малости $o(1)$, интегралы не сходятся на верхних пределах. Во всяком случае, в гл. 2, § 4, было показано, что производная $\partial\tilde{\psi}(r, t)/\partial t$ конечна при всех $t < r$. Она также конечна при $t = r$, если потенциал интегрируем в нуле, и бесконечна, если выполняется только условие (1.1.1).

Чтобы получить представление Повзнера — Левитана функции φ , остается только проинтегрировать по частям выражение (3.1.5a) и учесть условие (3.1.5б). Окончательный результат таков:

$$\varphi(k, r) = \frac{\sin kr}{k} + \int_0^r K(r, t) \frac{\sin kt}{k} dt, \quad (3.1.8a)$$

¹⁾ Согласно соотношению (1.2.8б), при больших k функция ψ порядка $k^{-1}o(1)$. Но, дифференцируя ее, мы получаем дополнительный множитель k , так что производная $\partial\psi/\partial r$, вообще говоря, только порядка $o(1)$. Подробнее см. гл. 2, § 4.

где

$$K(r, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(r, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(k, r) \sin kt k dk. \quad (3.1.86)$$

Данное представление является ключевым при решении обратной задачи. Заметим, что ядро $K(r, t)$ не зависит от k и выражение (3.1.8a) не совпадает с интегральным уравнением (1.2.2).

Представление (3.1.8a) допустимо, если обеспечена сходимость интеграла на обоих пределах. На нижнем пределе проблем нет. Величина $K = (\partial/\partial t) \tilde{\psi}|_{t=0}$ не только конечна, но и равна нулю. Это явствует из выражения (3.1.76): переходя в нем к пределу при $t \rightarrow 0$, получаем

$$K(r, 0) = 0. \quad (3.1.9)$$

На верхнем же пределе $t = r$ величина K бесконечна, поскольку, как мы видели раньше, интеграл в формуле (3.1.76) может не сходиться на верхнем пределе, когда $t = r$. Но нам необходима только интегрируемость функции $K(r, t)$ по t при $t = r$. А это требование, очевидно, выполняется, ибо интеграл от K по t есть как раз функция $\tilde{\psi}(r, t)$, которая конечна всюду при $0 \leq t \leq r$. Можно рассуждать и иначе: исходя из выражения (3.1.5a), мы путем вполне корректных преобразований придем к формуле (3.1.8a). Следовательно, интеграл в этой формуле должен быть хорошо определенным.

Пока что представление (3.1.8a) никак не связано с уравнением Шредингера. Применим его в обеих частях уравнения (1.2.2) и произведем синус-преобразование Фурье, предполагая, что $t \leq r$ (область определения K), и изменяя, когда нужно, порядок интегрирования. В результате получим:

$$\begin{aligned} K(r, t) = & \frac{1}{2} \int_{(r-t)/2}^{(r+t)/2} V(s) ds + \\ & + \int_{(r-t)/2}^{(r+t)/2} ds \int_0^{(r-t)/2} V_1(s+u) K(s+u, s-u) du. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Очевидно, что и неоднородный член, и ядро этого интегрального уравнения имеют смысл при $t < r$. Поэтому мы можем попытаться решить его итерационным методом, как это обычно и делается, и посмотреть, не сможем ли мы обосновать апостериори формальные операции его вывода.

Предположим сначала, что потенциал интегрируем в начале координат. Тогда легко видеть, что итерационный метод приводит к сходящемуся ряду как к единственному решению уравнения

(3.1.10) и что

$$|K(r, t)| < \frac{1}{2} \int_{(r-t)/2}^{(r+t)/2} |V(s)| ds \exp \left[\int_0^{(r+t)/2} u |V(u)| du \right]. \quad (3.1.11)$$

Этот результат показывает, что ядро $K(r, t)$ конечно всюду при $0 \leq t \leq r$, и позволяет нам после довольно продолжительных, но тривиальных преобразований, которые мы опускаем, получить из выражений (1.2.2) и (3.1.8a) выражение (3.1.10). Положив в нем $t = r$, мы получим

$$K(r, r) = \frac{1}{2} \int_0^r V(t) dt. \quad (3.1.12)$$

Это самый важный результат, полученный нами из представления Повзнера — Левитана. Он дает прямой метод вычисления потенциала по ядру K . Заметим, что, учитывая наше предположение об интегрируемости самого потенциала в начале координат, можно получить представление (3.1.8a) прямо из теоремы Пели — Винера (теоремы 1). Действительно, в этом случае справедливо равенство (1.2.9в). Следовательно, функция $k_V(k, r)$ принадлежит пространству $L^2(-\infty, \infty)$ и допускает представление (3.1.4). Принимая во внимание, что она является нечетной функцией переменной k , получаем выражение (3.1.8a). Здесь при любом фиксированном r функция K принадлежит пространству $L^2(0, r)$ по переменной t , но, как мы видели [формула (3.1.11)], величина K даже конечна всюду при $0 \leq t \leq r$. Этот результат также может быть получен непосредственно.

Вернемся теперь к общему случаю, когда выполняются только либо условия (1.6.2a) и (1.6.2б), либо условие (1.1.1). В этом случае ядро $K(r, r)$ бесконечно и равенство (3.1.12), очевидно, теряет смысл. Тем не менее уравнение (3.1.10) все еще может быть решено итерационным методом при $t < r$. Чтобы показать это, произведем замену переменных

$$x = \frac{1}{2}(r+t), \quad y = \frac{1}{2}(r-t). \quad (3.1.13)$$

Это даст нам

$$K(r, t) \equiv L(x, y) = \frac{1}{2} [W(x) - W(y)] + \int_y^x ds \int_0^y du W'(s+u) L(s, u), \quad (3.1.14)$$

где W — интеграл от V , который удобно записать в виде

$$W(r) = - \int_r^{\infty} V(t) dt. \quad (3.1.15)$$

Теперь при $t < r$ мы имеем $y > 0$, так что неоднородный член в интегральном уравнении (3.1.14) конечен и ядро W' интегрируемо, ибо $s > 0$. Но нам нужно интегрировать $L(s, u)$ до точки $u = 0$, которая является особой точкой. Если мы сможем показать, что функция $L(s, u)$ интегрируема при $u = 0$, то все слагаемые выражения (3.1.14) будут иметь смысл. Это можно установить для каждого члена ряда, возникающего при решении этого уравнения методом итераций, и можно показать, что то же самое справедливо и для суммы ряда. Мы не будем приводить здесь детального доказательства, так как это относится только к прямой задаче. Что же касается интегрируемости ядра $K(r, t)$ при $t = r$, то она была показана на совершенно общих основаниях в начале параграфа [после формулы (3.1.9)].

Если потенциал есть обычная непрерывная функция, то из равенства (3.1.12) мы получаем

$$V(r) = 2 \frac{d}{dr} K(r, r). \quad (3.1.16)$$

Если же он представляет собой лишь функцию, интегрируемую до начала координат, то мы имеем равенство (3.1.12), и этого достаточно для теории рассеяния, как было показано в гл. 1, § 6, где мы видели, что важен не сам потенциал, а его интеграл $W(r)$. Поскольку мы приняли, что потенциал интегрируем на бесконечности, равенство (3.1.12) можно переписать в виде

$$K(R, R) - K(r, r) = \frac{1}{2} \int_r^R V(t) dt = \frac{1}{2} [W(R) - W(r)]. \quad (3.1.17)$$

Значение $r = 0$, соответствующее началу координат, не фигурирует в правой части этого равенства, а потому можно полагать, что оно носит более общий характер, нежели равенство (3.1.12). Представим себе, что мы ввели в потенциал некий регуляризирующий параметр ε , так что потенциал $V_\varepsilon(r)$ будет интегрируемым в начале координат, когда ε , скажем, положительно определенная величина. Равенство (3.1.17) с индексом ε будет справедливо, очевидно, всюду. Устремим теперь ε к нулю, чтобы снова получить исходный потенциал. Поскольку правая часть равенства стремится к конечному пределу, то же самое должно быть справедливо и для левой части. В конце следующего параграфа мы увидим, что такое обобщение легко ввести с самого начала в данные по рассеянию.

В заключение выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $K(r, t)$. Предположим, что $K(r, t)$ — дважды дифференцируемая функция обеих переменных r и t , и найдем φ'' , дважды продифференцировав выражение (3.1.8а). Проинтегрировав же дважды это выражение по частям, мы найдем $E\varphi$. Скомбинирав полученные результаты, с учетом равенства (3.1.9) находим, что уравнение Шредингера удовлетворяется, если

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) K(r, t) = V(r) K(r, t), \quad 0 \leq t \leq r, \quad (3.1.18)$$

и если потенциал имеет вид (3.1.16). Данное дифференциальное уравнение, конечно, эквивалентно интегральному уравнению (3.1.10). В этом нетрудно убедиться, продифференцировав последнее с учетом формулы (3.1.14). Теперь можно исследовать уравнение (3.1.18). Расширим область определения функции K до интервала $-r \leq t \leq r$ с помощью условия

$$K(r, -t) = -K(r, t), \quad (3.1.19)$$

выбор которого вполне логичен ввиду соотношений (3.1.8б) и (3.1.7б). Тогда

$$K(r, -r) = - \int_0^r V(t) dt. \quad (3.1.20)$$

Дифференциальное уравнение (3.1.18) оказывается обычным гиперболическим уравнением с граничными значениями (3.1.12) и (3.1.20) на обеих характеристиках $t = \pm r$. Следовательно, оно имеет единственное решение при некоторых предположениях о потенциале, обеспечивающих дифференцируемость ядра K . Мы видим, что уравнение Шредингера можно заменить уравнением (3.1.18), в которое не входит энергия, и соотношением (3.1.8а). На этом мы остановимся, а читателя отошлем к литературе [170, 171].

В следующем параграфе мы встретимся с уравнением, обратным уравнению (3.1.8а), а именно

$$\frac{\sin kr}{k} = \varphi(k, r) + \int_0^r \tilde{K}(r, t) \varphi(k, t) dt. \quad (3.1.24)$$

Оно выводится следующим образом. Мы знаем, что ядро $K(r, t)$ конечно при $0 \leq t < r$, удовлетворяет условию (3.1.9) и интегрируемо по t при $t = r$. Поэтому мы можем рассматривать соотношение (3.1.8а) как интегральное уравнение Вольтерра для функции $\sin kr/k$ с неоднородным членом $\varphi(k, r)$. Его можно решить методом последовательных приближений, и это даст единственное решение (3.1.21), как и должно быть в случае уравнений Вольтерра

с ядром резольвенты $\tilde{K}$, конечным при всех $t < r$ и интегрируемым по t при $t = r$. Если подставить выражение (3.1.8a) в формулу (3.1.21) и произвести синус-преобразование Фурье обеих частей уравнения, то получим соотношение

$$K(r, t) + \tilde{K}(r, t) + \int_t^r \tilde{K}(r, s) K(s, t) ds = 0, \quad (3.1.22)$$

которое представляет собой уравнение для ядра резольвенты $\tilde{K}$ из соотношения (3.1.8a), рассматриваемого как интегральное уравнение для функции $\sin kr$ [409, 341].

§ 2. Интегральное уравнение Гельфанда — Левитана

Проще всего вывести уравнения Гельфанда — Левитана можно, скомбинирав соотношения полноты (2.3.14)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(E, r) \varphi(E, t) d\rho(E) = \delta(r - t), \quad (3.2.1a)$$

$$\frac{d\rho(E)}{dE} = \begin{cases} \pi^{-1} |F(E^{1/2})|^{-2} E^{1/2} & \text{при } E \geq 0, \\ \sum_j C_j \delta(E - E_j) & \text{при } E < 0 \end{cases} \quad (3.2.1b)$$

с двумя взаимно-обратными уравнениями (3.1.8a) и (3.1.21). Из равенства (3.2.1a) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(E, r) \varphi(E, r') d\rho(E) = 0, \quad r \neq r'. \quad (3.2.2)$$

Умножим теперь обе части равенства (3.1.21) на $\varphi(E, r_1)$ и проинтегрируем по $d\rho(E)$. Если $0 \leq r < r_1$, то с учетом формулы (3.2.2) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kr}{k} \varphi(E, r_1) d\rho(E) = 0. \quad (3.2.3)$$

Теперь умножим обе части равенства (3.1.4a) на φ и проинтегрируем по $d\rho(E)$. С учетом формулы (3.2.3), незначительно изменив обозначения, мы получим при $t < r$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kr}{k} \frac{\sin kt}{k} d\rho(E) + \int_0^r K(r, s) ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ks}{k} \frac{\sin kt}{k} d\rho(E) = 0. \quad (3.2.4a)$$

Если теперь ввести величину

$$d\sigma \equiv d\rho - d\rho_0 = \begin{cases} d\rho(E) - d\left(\frac{2E^{3/2}}{3\pi}\right) & \text{при } E \geq 0, \\ d\rho(E) & \text{при } E < 0 \end{cases} \quad (3.2.5)$$

в формулу (3.2.4) и вспомнить, что

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{k} \frac{\sin kt}{k} k^2 dk = \delta(r-t), \quad (3.2.6)$$

то получим уравнение Гельфанда — Левитана

$$K(r, t) + G(r, t) + \int_0^r K(r, s) G(s, t) ds = 0, \quad (3.2.7a)$$

где

$$G(r, t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin kr}{k} \frac{\sin kt}{k} d\sigma(E). \quad (3.2.7b)$$

Отметим, что σ есть разность спектральной меры ρ и свободной спектральной меры ρ_0 . Ядро G может быть также записано в виде

$$\begin{aligned} G(r, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{k} \frac{\sin kt}{k} \left[\frac{1}{|F(k)|^2} - 1 \right] k^2 dk + \\ &+ \sum_j \frac{C_j}{4\gamma_j^2} \operatorname{sh}(\gamma_j r) \operatorname{sh}(\gamma_j t) = \\ &= H(r-t) - H(r+t) + \sum_j \dots, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

где H — функция, введенная в формуле (2.4.2). В конце гл. 2, § 4, мы исследовали свойства функции $G(r, t)$. Там было показано, что эта функция конечна при $t < r$ и интегрируема при $t = r$. Если же потенциал интегрируем в начале координат, то функция G конечна и при $t = r$.

При любом фиксированном значении r соотношение (3.2.7a) представляет собой уравнение Фредгольма для функции $K(r, t)$ относительно ее второй переменной t . Поэтому мы должны показать, что оно имеет единственное решение при тех ограничениях на $d\rho(E)$, которые мы нашли в гл. 2. Если решение найдено, то необходимо проверить, обладает ли потенциал требуемыми свойствами. Так что у нас две проблемы: единственность функции K , а следовательно, и потенциала V , и свойства потенциала V . По-

следняя задача будет рассмотрена в гл. 3, § 6. Единственность решения показывается следующим образом.

Предположим, что $\bar{d}\rho$ и, следовательно, $d\sigma$ заданы. Чтобы уравнение Фредгольма (3.2.7а) для неизвестной функции $\bar{K}(r, t)$ по переменной t имело единственное решение, у однородного уравнения

$$\bar{K}(r, t) + \int_0^r \bar{K}(r, s) G(s, t) ds = 0 \quad (3.2.9)$$

не должно быть нетривиального решения, принадлежащего пространству L^2 . Проверим это, для чего умножим (3.2.9) на $\bar{K}(r, t)$ и проинтегрируем:

$$J = \int_0^r \bar{K}^2(r, t) dt + \int_0^r ds \int_0^r G(s, t) \bar{K}(r, s) \bar{K}(r, t) dt = 0. \quad (3.2.10)$$

Далее мы можем переписать выражение (3.2.7б) в виде

$$G(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kr}{k} \frac{\sin kt}{k} d\rho(E) - \delta(r-t) = \bar{G}(r, t) - \delta(r-t), \quad (3.2.11)$$

и тогда выражение для J принимает вид

$$\begin{aligned} J &= \int_0^r ds \int_0^r \bar{K}(r, t) \bar{K}(r, s) \bar{G}(s, t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\rho(E) \left[\int_0^r \bar{K}(r, t) \frac{\sin kt}{k} dt \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Но по теореме Пели — Винера интеграл в скобках есть целая функция переменной k (а также переменной E , поскольку подынтегральное выражение является четным). Эта функция хорошо определена при всех значениях E и действительна при действительных значениях E . Так как спектральная плотность $d\rho$ положительна, мы имеем

$$\int_0^r \bar{K}(r, t) \sin kt dt = 0, \quad \forall k, \quad (3.2.13)$$

и, значит, $\bar{K}(r, t) \equiv 0$ при $t \in (0, r)$ при любом значении r , что и требовалось доказать. Следовательно, уравнение Гельфанда — Левитана имеет единственное решение при любом фиксированном значении r .

Вернемся теперь к «трюку» с ε , о котором говорилось после формулы (3.1.17). На основании уравнений (3.2.7а) и (3.2.7б) можно сказать, что дифференцируемость функции K связана с дифференцируемостью функции G и, следовательно, с уменьшением $d\sigma$ при очень больших E . При заданной величине $d\sigma$ мы можем ускорить ее убывание, умножив ее, например, на величину $1/(1 + \varepsilon k^2)$, где ε — положительно определенная величина. Вместе с тем это будет гарантией того, что функции $G(r, r)$ и $K(r, r)$ с индексом ε существуют и конечны. Уравнение (3.1.17) теперь имеет смысл при положительном ε . Если мы устремим ε к нулю, то оно останется справедливым, поскольку его правая часть стремится к конечному пределу. Примеры с сингулярными потенциалами мы рассмотрим в гл. 6.

§ 3. Уравнение Крейна

Чтобы завершить доказательство того, что потенциал, который мы получаем из теории Гельфанда — Левитана, приводит действительно к функции Йоста, с которой мы начинали, нам нужно показать, что асимптотическая форма волновой функции φ , вычисленная по формулам (3.1.8а) и (3.2.7а), совпадает с выражением (1.4.1):

$$\varphi(k, r) = \frac{|F(k)|}{|k|} \sin(kr + \delta) + o(1), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.3.1)$$

где F и δ связаны соотношением (2.2.1). В случае выражения (3.1.8а) это трудно сделать, поскольку оно весьма сложное. Но можно переписать его в эквивалентной форме, предложенной Крейном, из которой легко получить (3.3.1). Мы будем исходить из уравнения Гельфанда — Левитана, причем для простоты предположим, что связанные состояния отсутствуют. Его ядро определяется выражениями (3.2.8) и (2.4.2). Введем теперь функцию Γ как решение уравнения Крейна

$$\Gamma_{2r}(u) + H(u) + \int_0^{2r} \Gamma_{2r}(s) H(s-u) ds = 0, \quad (3.3.2)$$

где H — функция, введенная в формуле (2.4.2). Нетрудно убедиться, что если это уравнение имеет решение, то функция

$$K(r, t) = \Gamma_{2r}(r-t) - \Gamma_{2r}(r+t) \quad (3.3.3)$$

удовлетворяет уравнению Гельфанда — Левитана. Если решение Уравнения (3.3.2) является единственным, то данное уравнение эквивалентно уравнению Гельфанда — Левитана. Это было показано Крейном в серии статей [256, 259]. Преимущество уравнения Крейна состоит в том, что решение φ может быть выражено непо-

средственно через его решение Γ и тогда приобретает форму, которая позволяет легко перейти к пределу при $r \rightarrow \infty$. Действительно, подставим (3.3.2) в (3.1.8a):

$$\begin{aligned}\varphi(k, r) &= \frac{\sin kr}{k} + \int_0^r \Gamma_{2r}(r-t) \frac{\sin kt}{k} dt - \int_0^r \Gamma_{2r}(r+t) \frac{\sin kt}{k} dt = \\ &= \frac{\sin kr}{k} + \int_0^{2r} \Gamma_{2r}(t) \frac{\sin k(r-t)}{k} dt = \\ &= k^{-1} \operatorname{Im} \left[e^{ikr} \left(1 + \int_0^{2r} \Gamma_{2r}(t) e^{-ikt} dt \right) \right].\end{aligned}\quad (3.3.4)$$

Переходя теперь к пределу, получаем

$$\varphi = k^{-1} \operatorname{Im} \left[e^{ikr} \left(1 + \int_0^{\infty} \Gamma(t) e^{-ikt} dt \right) \right] + o(1), \quad (3.3.5)$$

где $\Gamma(t) = \Gamma_{\infty}(t)$ есть решение предельной формы уравнения (3.3.2)

$$\Gamma(u) + H(u) + \int_0^{\infty} \Gamma(s) H(s-u) ds = 0. \quad (3.3.6)$$

Чтобы решить это уравнение, отметим, что при действительных значениях k

$$\begin{aligned}(|F(k)|^{-2} - 1)(F(k) - 1) + (F(k) - 1) + \\ + (|F(k)|^{-2} - 1) = (F(-k))^{-1} - 1.\end{aligned}\quad (3.3.7)$$

По предположению (нет связанных состояний), функция $F(-k)$ не имеет нулей в нижней полуплоскости. Поэтому мы можем произвести фурье-преобразование обеих частей равенства (3.3.7) и замкнуть контур окружностью большого радиуса в нижней полуплоскости. Если теперь вспомнить определение (2.4.2) и (2.4.1), то получим уравнение (3.3.6). Его решение имеет вид

$$\Gamma(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (F_+(k) - 1) e^{-ikt} dk. \quad (3.3.8)$$

Тогда из выражения (3.3.5) сразу же следует, что при очень больших r

$$\varphi \rightarrow k^{-1} \operatorname{Im} [F(-k) e^{ikr}], \quad (3.3.9)$$

а это идентично выражению (3.3.1) [вспомним формулы (1.1.21) и (1.1.24)].

§ 4. Волны с $l > 0$

В гл. 1 и 2 мы детально рассмотрели свойства различных решений уравнения Шредингера (1.1.6), а также разложение по собственным функциям, связанное с регулярным решением φ_l . Коротко говоря, функция Йоста и S -матрица имеют почти такие же аналитические и асимптотические свойства, как и при $l = 0$. Конечно, при $l > 0$ свободные решения (функции Бесселя, Ханкеля и пр.) несколько сложнее синусов и косинусов. Но в асимптотике они очень близки к синусу и косинусу, а это и имело важное значение в предыдущих параграфах. Теперь вместо синус-, косинус- и экспоненциальных преобразований Фурье мы должны будем оперировать с интегральными преобразованиями, определяемыми на основе функций Бесселя и Ханкеля. Они все хорошо известны, и, если не считать некоторых алгебраических изменений, никакой дополнительной работы не потребуется, чтобы перейти от случая $l = 0$ к $l > 0$.

Представление Повзнера — Левитана в обозначениях (1.1.7) и (1.1.10) снова имеет вид

$$\varphi_l(k, r) = \varphi_l^0(k, r) + \int_0^r K_l(r, t) \varphi_l^0(k, t) dt, \quad (3.4.1a)$$

$$\varphi_l^0(k, r) = k^{-l-1} u_l(k, r). \quad (3.4.1b)$$

Комбинируя это представление с соотношением полноты (2.3.17a), получаем

$$K_l(r, t) + G_l(r, t) + \int_0^r K_l(r, s) G_l(s, t) ds = 0, \quad (3.4.2a)$$

$$\begin{aligned} G_l(r, t) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi_l^{(0)}(k, r) \varphi_l^{(0)}(k, t) k^{2l+2} [|F_l(k)|^{-2} - 1] dk + \\ & + \sum_j C_j \varphi_j(i\gamma_j, r) \varphi_l(i\gamma_j, t). \end{aligned} \quad (3.4.2b)$$

Единственность решения этого уравнения доказывается точно так же, как и в случае $l = 0$.

Можно также вывести дифференциальные уравнения, подобные уравнениям (3.1.18); теперь они будут иметь вид

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{l(l+1)}{t^2} \right) \right] K_l(r, t) = V(r) K_l(r, t). \quad (3.4.3)$$

Как нетрудно убедиться, потенциал снова дается выражением

$$V(r) = 2 \frac{d}{dr} K_l(r, r). \quad (3.4.4)$$

Мы видим, что действительно нет существенного различия между случаями $l = 0$ и $l > 0$. В следующей главе наряду с некоторыми применениями теории Гельфанда — Левитана мы рассмотрим теорему Крейна и Марченко, суть которой сводится к тому, что функция $S_l(k) = \exp(2i\delta_l)$, соответствующая некоторому угловому моменту l и потенциалу $V(r)$, может также быть S -матрицей, соответствующей любому моменту $l' = 0, 1, 2, \dots$ и потенциалу $V_{l'}(r)$, который ведет себя при $r = 0$ и $r = \infty$ точно так же, как и потенциал $V(r)$.

§ 5. Более общие уравнения

Выше мы исходили из представления Повзнера — Левитана, в котором решение φ выражается через свободные решения. Более общий случай — когда известен потенциал V_1 и нужно решить обратную задачу по отношению к этому опорному потенциалу (т. е. найти $V_2 - V_1$). Мы снова предположим, что и V_1 , и неизвестный потенциал V_2 удовлетворяют условию (1.1.3), т. е. $rV_{1,2} \in L^1(0, \infty)$, и для простоты будем рассматривать S -волну. Согласно результатам, полученным ранее, имеем

$$\varphi_1(k, r) = \frac{\sin kr}{k} + \int_0^r K_1(r, t) \frac{\sin kt}{k} dt, \quad (3.5.1)$$

$$\varphi_2(k, r) = \frac{\sin kr}{k} + \int_0^r K_2(r, t) \frac{\sin kt}{k} dt. \quad (3.5.2)$$

Решив первое уравнение относительно $(\sin kr)/k$, мы получим выражение (3.4.21). Если подставить его в формулу (3.5.2), то получим

$$\varphi_2(k, r) = \varphi_1(k, r) + \int_0^r K_{12}(r, t) \varphi_1(k, t) dt, \quad (3.5.3a)$$

где ядро K_{12} дается выражением

$$K_{12}(r, t) = \tilde{K}_1(r, t) + K_2(r, t) + \int_t^r K_2(r, s) \tilde{K}_1(s, t) ds. \quad (3.5.3b)$$

Выражение (3.5.3a) есть представление Повзнера — Левитана в его самой общей форме. Отметим, что, согласно результатам, полученным ранее, все члены выражения (3.5.3b) хорошо определены и интеграл в правой части имеет смысл при всех значениях r и t , если $r \geq t$.

Теперь мы можем по той же схеме, что прежде, построить полную теорию обратной задачи. Поскольку все аналогично преды-

дущему случаю, мы приведем лишь наиболее существенные результаты. Прежде всего на основании формул (3.5.36), (3.1.22) и (3.1.9) мы имеем равенство, совершенно аналогичное равенству (3.1.9):

$$K_{12}(r, 0) = 0. \quad (3.5.4)$$

Мы не будем записывать интегральное уравнение, подобное уравнению (3.1.40) и связывающее ядро K_{12} с V_1 , V_2 и K_1 . Его можно решить так же, как и прежде, и это приводит к тем же выводам относительно свойств ядра K_{12} . Полагая $t = r$ в формулах (3.5.36) и (3.1.22), получаем

$$K_{12}(r, r) = \tilde{K}_1(r, r) + K_2(r, r) = \\ = -K_1(r, r) + K_2(r, r), \quad (3.5.5)$$

откуда следует выражение

$$K_{12}(r, r) = \frac{1}{2} \int_0^r [V_2(t) - V_1(t)] dt, \quad (3.5.6)$$

которое представляет собой обобщенное выражение (3.1.12). Отсюда мы снова получим, что всегда, когда это имеет смысл,

$$V_2(r) - V_1'(r) = 2 \frac{d}{dr} K_{12}(r, r). \quad (3.5.7)$$

Здесь также величина $K_{12}(r, r)$ бесконечна, когда V_1 и V_2 не интегрируемы в начале координат, но мы можем применить трюк с ε (§ 2) и более общую форму выражения (3.1.17), чтобы найти интеграл от потенциала.

Далее легко установить общую форму интегрального уравнения Гельфанда — Левитана, которое теперь имеет вид

$$K_{12}(r, t) + G_{12}(r, t) + \int_0^r K_{12}(r, s) G_{12}(s, t) ds = 0, \quad (3.5.8a)$$

где

$$G_{12}(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [d\rho_2(E) - d\rho_1(E)] \varphi_1(E, r) \varphi_1(E, t), \quad (3.5.8b)$$

$$\frac{d\rho_2(E) - d\rho_1(E)}{dE} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} E^{1/2} [|F_2(k)|^2 - |F_1(k)|^2] & \text{при } E \geq 0, \\ \sum_{j_2} C_{j_2} \delta(E - E_{j_2}) - \sum_{j_1} C_{j_1} \delta(E - E_{j_1}) & \text{при } E < 0. \end{cases} \quad (3.5.8в)$$

Как мы увидим в следующей главе, такая общая форма уравнений удобна во многих случаях. Отметим, что суммирование в двух суммах в формуле (3.5.8в) может производиться по разному числу

связанных состояний для двух потенциалов. В частности, потенциал V_1 может не иметь связанных состояний, как в случае свободного движения, рассмотренного раньше. Можно снова показать, что уравнение (3.5.8а) имеет единственное решение при наших общих предположениях о данных рассеяния. Показав это, можно пойти дальше и показать, что волновая функция φ_2 действительно имеет асимптотический вид

$$\varphi_2(k, r) = k^{-1} |F_2(k)| \sin(kr + \delta_2) + o(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.5.9)$$

Обобщение на случай волн с $l > 0$ тоже не представляет трудностей. Формулы (3.5.8) справедливы при любом угловом моменте, если мы используем соответствующие волновые функции φ_l и пр. Наконец, дифференциальное уравнение (3.4.3) принимает вид

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial r'^2} - \frac{l(l+1)}{r'^2} \right) \right] K_{12}(r, r') = [V_2(r) - V_1(r')] K_2(r, r'). \quad (3.5.10)$$

§ 6. Краткое изложение метода

Предположения. Предположим, что фазовый сдвиг $\delta_l(k)$ для парциальной волны, соответствующей угловому моменту l , известен при всех положительных энергиях $E = k^2 \geq 0$ и что он представляет собой непрерывную функцию волнового числа k и удовлетворяет условиям (1.5.20) и (1.5.22):

$$\delta_l(\infty) = 0, \quad \int_0^\infty k^{-1} |\delta_l(k)| dk < \infty. \quad (3.6.1)$$

Предположим также, что функция $H(t)$, определяемая выражениями (2.4.2) или (2.4.12), принадлежит пространству $L^1(0, \infty)$ и удовлетворяет соотношению

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rH(r) = 0. \quad (3.6.2)$$

Задано также конечное число связанных состояний с энергиями связи $0 \geq E_1 > E_2 > \dots > E_n$, и мы предположим, что фазовый сдвиг $\delta_l(k)$ согласован с этим числом, т. е. выполняется теорема Левинсона [формулы (2.1.11) и (2.1.12)]. Предположим для простоты, что $E_1 \neq 0$, т. е. $F_l(0) \neq 0$. Это означает, что отсутствуют резонансы при нулевой энергии в случае S -волны или связанное состояние с нулевой энергией связи в случае волн с $l > 0$. Случай $F_l(0) = 0$ может быть получен как предел при $E_1 \rightarrow 0$. Вспомним, что функция $|F(k)|$, входящая в определение функции H , дается выражением (2.2.1).

Задача. Нужно сконструировать все потенциалы, которые воспроизводят $\{\delta_l(k), k \geq 0, \text{ и } E_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ и принадлежат

к классу, определяемому условиями

$$rV(r) \in L^1(b, \infty), \quad b > 0, \quad (3.6.3)$$

$$W \in L^1(0, \infty), \quad (3.6.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} rW(r) = 0, \quad (3.6.5)$$

где

$$W(r) = - \int_r^\infty V(t) dt.$$

Решение. Сначала на основании формулы (2.2.1) мы конструируем функцию Йоста $F_l(k)$. Ее модуль определяется выражением (2.2.1'). Затем, пользуясь формулой (2.3.14б) при $l = 0$ и формулой (2.3.17б) при любом l , строим спектральную функцию $d\rho_l(E) dE$ с n произвольными положительными параметрами C_j . Вычисляем разность этой спектральной функции и спектральной функции для случая свободного движения. Пользуясь формулой (3.2.8) при $l = 0$ и формулой (3.4.2б) при любом l , вычисляем ядро $G(r, t)$. Это симметричное ядро подставляется в интегральное уравнение Гельфанда — Левитана (3.2.7а) или (3.4.2а) и вычисляется ядро преобразования K . Зная K , легко вычислить потенциал по формуле (3.1.16) или (3.1.17) при $l = 0$ и по формуле (3.4.4) или по формуле, которая представляет собой ее интегральный аналог, при любом l .

В гл. 5 мы, пользуясь методом Марченко, покажем, что для того, чтобы выполнялось условие $rV(r) \in L^1(0, \infty)$, на фазовый сдвиг нужно наложить следующие дополнительные условия: если $S(k) = \exp\{2i\delta(k)\}$ и

$$A_0(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S(k) - 1] e^{ikt} dk, \quad (3.6.6)$$

где $\delta(k)$ при $k < 0$ определяется соотношением (1.5.21), то неравенства

$$\int_0^\infty r |V(r)| dr < \infty, \quad (3.6.7)$$

$$\int_0^\infty t |A'_0(t)| dt < \infty \quad (3.6.8)$$

совершенно эквивалентны, т. е. величины $rV(r)$ и $rA'_0(r)$ ведут себя одинаково в отношении абсолютной интегрируемости при $r = 0$ и $r = \infty$.

В общем случае, рассматриваемом здесь, поскольку мы требуем, чтобы выполнялось условие (3.6.3), мы должны, конечно,

принять, что $rA'_0(r) \in L^1(b, \infty)$. Вместе с условиями (3.6.1) и (3.6.2) этого достаточно для того, чтобы выполнялись условия (3.6.4) и (3.6.5). Действительно, из ряда Неймана, полученного путем итераций из уравнения Гельфанда — Левитана, если воспользоваться формулой (3.1.17) и равенством [формула (3.2.8)]

$$G(R, R) - G(r, r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{|F(k)|^2} - 1 \right) (\cos 2kr - \cos 2kR) dk + \\ + \sum (\text{связанные состояния}) = H(2r) - H(2R) + \\ + \sum (\text{связанные состояния}), \quad (3.6.9)$$

легко видеть, что все последовательные приближения к потенциалу удовлетворяют условию (3.6.5) и условию $W \in L^1(0, a)$ при любом конечном a . Из последнего условия и условия (3.6.3) следует условие (3.6.4). Так как ряд сходится абсолютно и равномерно, все сказанное, очевидно, справедливо и для истинного потенциала. Короче говоря, мы имеем следующую теорему.

Теорема. Пусть фазовый сдвиг — непрерывная функция переменной k , удовлетворяющая условиям (3.6.1) и (3.6.2) и теореме Левинсона (в соответствии с числом связанных состояний), и пусть он таков, что $rA'_0(r) \in L^1(b, \infty)$. Тогда для потенциала, полученного с помощью уравнения Гельфанда — Левитана, выполняются условия (3.6.3) — (3.6.5). Обратная теорема была доказана в гл. 1 и 2, когда мы рассматривали прямую задачу. Не была доказана лишь абсолютная интегрируемость функции $rA'_0(r)$ на бесконечности, и это будет сделано в гл. 5.

В более общем случае (гл. 5), когда исходят не из случая свободного движения ($V \equiv 0$), а из известного потенциала V_1 , ход рассуждений и выводы совершенно аналогичны.

Замечание. Предположим, что имеются полные данные рассеяния (или спектральная функция) при нескольких l . При каждом из них определяется единственный потенциал. Вообще говоря, все эти потенциалы неодинаковы. Условия совместности, которые необходимо наложить на эти различные данные рассеяния при разных l , чтобы получить один и тот же потенциал, неизвестны. Об обобщении метода Гельфанда — Левитана на случай системы уравнений, случай многих каналов и случай релятивистских уравнений см. гл. 9.

§ 7. Замечания и литература

Обратная задача очень интенсивно исследовалась с двух точек зрения. Первая — точка зрения математиков. Они были среди самых первых исследователей в этой области и интересовались

в основном конструированием дифференциальных операторов по одному или нескольким дискретным спектрам (различным граничным условиям) или по полной спектральной мере, соответствующей данному граничному условию. Первая задача выходит за рамки нашей книги, хотя это, пожалуй, самая старая обратная спектральная задача из рассматривавшихся физиками (Рэлей, 1877 г. [351]). Для нас важна вторая задача. В случае уравнения Шредингера $\varphi'' + E\varphi = V\varphi$ она состоит в нахождении потенциала V по известной спектральной мере, соответствующей заданным граничным условиям, которой полностью определяется спектр.

Из работ математиков, имена которых связаны с решением указанных выше задач, мы упомянем работы Амбарцумяна [9], Повзнера [345], Борга [50, 51], Чудова [92, 93], Гельфанда и Левитана [170, 171], Березанского [32, 33], Левитана [272—274], Левитана и Гасымова [276], Аграновича и Марченко [4], Лейбензона [278], Лянце [280], Фридмана [158], Крейна (несколько ссылок приведено ниже), Марченко (несколько ссылок приведено ниже).

Марченко [287] первым показал, что спектральной функцией потенциал определяется единственным образом. В фундаментальной работе Гельфанда и Левитана [171] показано, что потенциал может быть определен по спектральной мере путем решения линейного уравнения Фредгольма, которое теперь носит их имя.

Вторая сторона обратной задачи, больше всего интересующая физиков, занимающихся теорией рассеяния, состоит в нахождении потенциала по S -матрице и связанным состояниям. Первая попытка решить такую задачу была сделана Фрёбергом [159, 160] и Хиллераасом [210]. Эти авторы нашли формальные методы, основанные на разложении в ряды, сходимость и общность которых представляются правдоподобными.

Первым, кто показал, что при наличии связанных состояний потенциал определяется фазовым сдвигом и энергиями связи не однозначно, был Баргман [23, 24], который построил несколько потенциалов, приводящих к одной и той же S -матрице и тем же энергиям связи. Левинсон [268, 269] показал, что регулярный потенциал, такой, что $V(r) + l(l+1)/r^2 \geq 0$, однозначно определяется фазовым сдвигом $\delta_l(k)$, известным при всех $k \geq 0$. Математическую причину этого установил Марченко [288, 289], который показал, что S -матрицей определяется только непрерывная часть спектральной меры. Чтобы построить спектральную функцию при наличии связанных состояний, необходимо знать не только их положение, но еще и некоторый действительный параметр для каждого из них. Таким параметром может служить, например, значение в начале координат производной соответствующей нормированной собственной функции. Это было также показано примерно в то же самое время Боргом [51]. Следуя методу Левинсона, Йост и Кон [228] пришли к тому же самому выводу об отсут-

ствии единственности потенциала при наличии связанных состояний. Они предложили метод нахождения потенциала, основанный на разложении в ряд. Они также вывели точные формулы для построения всех фазово-эквивалентных потенциалов и их волновых функций [229]. Аналогичные формулы для фазово-эквивалентных потенциалов были выведены в это же время Холмбергом [205].

Как уже упоминалось, метод точного нахождения потенциала по его спектральной функции, изложенный в данной главе, разработан Гельфандом и Левитаном [170, 171]. Их общий метод сразу же был применен к физической задаче о нахождении потенциала по данным рассеяния Йостом и Коном [230] и Левинсоном [270]. Эти авторы дали полное решение задачи. Некоторые примеры фазово-эквивалентных потенциалов были рассмотрены Йостом и Коном в их статье. Крейн [254] установил необходимые и достаточные условия для спектральной функции. Метод Крейна и уравнения, использованные в этой главе, можно найти в его статьях [255—258].

Дополнительные ссылки на работы, в которых применялось уравнение Гельфанда — Левитана, можно найти в гл. 4 и 6.

Обобщение теории Гельфанда — Левитана на случай волн с $l > 0$ осуществлено в работах Сташевской [396] и Волка [413]. См. также работы Йоста и Кона [230] и Ньютона [315].

Более общий и более абстрактный подход, основанный на общей теории оператора преобразования Фридрихса, можно найти в работах Кея и Мозеса [239, 240].

Другие ссылки имеются в гл. 4, 6, 9 и 17.

В данной главе мы рассматривали обратную задачу в общем случае, когда потенциал имеет сингулярности тех типов, которые были рассмотрены в гл. 1, § 6, и затем в гл. 2, посвященной связанным состояниям, разложениям по собственным функциям и др. результатам. В этих главах было показано, что естественные рамки для теории рассеяния и метода Гельфанда — Левитана в случае короткодействующих потенциалов, т. е. потенциалов, удовлетворяющих условию

$$rV(r) \in L^1(b, \infty), \quad b > 0,$$

определяются условиями, налагаемыми на интеграл от потенциала (§ 6). Более жесткое условие $rV \in L^1(0, \infty)$ налагает более сильные ограничения на данные рассеяния (§ 6). Эти дополнительные ограничения будут выведены в гл. 5 методом Марченко. Они устанавливают необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять данные рассеяния, для того чтобы выполнялось условие $rV \in L^1(0, \infty)$. Анализ более общего случая, представленный в данной главе, был взят из работы Бетмана и Шадана [21, 22].

Методы, альтернативные методу Гельфанда — Левитана. Наиболее важные альтернативы методу Гельфанда — Левитана — Йоста — Кона будут рассмотрены в гл. 5 (метод Марченко) и гл. 7 (методы для специальных классов потенциалов). Упомянем здесь два других метода, имеющих историческое значение. Первый из них принадлежит Йосту и Кону [228] и развит Мозесом [308]. Йост и Кон нашли алгоритм, который воспроизводит потенциал, по существу, путем обращения ряда Борна для матрицы рассеяния. Метод Йоста — Кона менее эффективен (результаты получаются в виде ряда, сходимость которого, вообще говоря, не доказана) и менее привлекателен, чем более известный метод Гельфанда — Левитана, но он прост в концептуальном отношении. Он был применен Проссером [348, 349] к обратным задачам для рассеяния на потенциале, а также для волн в среде с переменным показателем преломления и для отражения от мягкой границы. Второй подход был развит Хиллераасом [210, 211, 214]. Используя системы биортонормированных функций, он получил несимметричное разложение потенциала, которое в отсутствие связанных состояний, по существу, эквивалентно формуле (5.2.27), выведенной позже в методе Марченко. Потенциал находится в результате очевидного итерационного процесса, сходимость которого, однако, не обоснована, если потенциал не является достаточно малым.

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА — ЛЕВИТАНА

§ 1. Введение новых связанных состояний

Поскольку уравнение Гельфанда — Левитана относится к типу уравнения Фредгольма, оно, вообще говоря, не может быть решено в замкнутом виде. За редкими исключениями, такое решение можно получить только в том случае, если вырождено ядро. Известно, что в этом случае уравнение может быть решено алгебраически. Наиболее интересны две задачи такого рода. В первой из них исходят из потенциала V_1 , который не имеет связанных состояний и все характеристики которого [волновая функция φ_1 и спектральная плотность $d\rho_1(E)$] известны, и ищут все потенциалы V , которые характеризуются той же спектральной плотностью при положительной энергии (тем же континуумом), но, кроме того, имеют какие-то связанные состояния. Во второй задаче исходят из заданной функции Йоста. Снова предполагается, что известны все величины, связанные с ней, и в их числе потенциал, и ищут все потенциалы, функции Йоста которых отличаются от исходной множителем, являющимся рациональной функцией переменной k . Эту задачу мы отложим до § 3, а сейчас рассмотрим первую.

Мы должны обратиться к общей форме уравнения Гельфанда — Левитана (гл. 3, § 6), в которой исходят из заданного потенциала V_1 , а не из случая свободного движения. Так как теперь по предположению $d\rho(E) = d\rho_1(E)$ при $E \geq 0$, уравнение (3.5.8а) сводится к виду

$$K(r, t) + G(r, t) + \int_0^r K(r, s) G(s, t) ds = 0, \quad (4.1.1)$$

где G — сумма по конечному числу связанных состояний потенциала $V(r)$:

$$G(r, t) = \sum_j C_j \varphi_1(i\gamma_j, r) \varphi_1(i\gamma_j, t), \quad (4.1.2)$$

причем $\varphi_1(k, r)$ — регулярное решение для потенциала V_1 . Заметим, что $\varphi_1(i\gamma_j, r)$ не является волновой функцией, соответствующей связанному состоянию, и поэтому не ограничена при очень

больших r . Так как теперь ядро G вырождено, уравнение легко решить. Если написать в векторной форме

$$G(r, t) = (\psi(r), \chi(t)), \quad (4.1.3)$$

где ψ и χ — векторы: первый с компонентами $C_j \varphi_1(i\gamma_j, r)$, а второй с компонентами $\varphi_1(i\gamma_j, r)$, то мы должны искать решение уравнения (4.1.1) в виде

$$K(r, t) = (K(r), \chi(t)), \quad (4.1.4)$$

где $K(r)$ — вектор с n компонентами. Уравнение (4.1.1) теперь принимает вид

$$(K(r), \chi(t)) + (\psi(r), \chi(t)) + \left\{ \left[\int_0^r R(s) ds \right] K(r), \chi(t) \right\} = 0, \quad (4.1.5)$$

где $R(s)$ — тензорное произведение векторов ψ и χ , т. е. матрица с элементами

$$R_{jk}(s) = C_j \varphi_1(i\gamma_j, s) \varphi_1(i\gamma_k, s). \quad (4.1.6)$$

В силу общих результатов гл. 3 относительно существования единственного решения уравнения Гельфанда — Левитана для матрицы

$$C(r) = I + \int_0^r R(s) ds \quad (4.1.7)$$

при всех значениях r существует обратная матрица. Это также очевидно, ибо из определения матрицы $C(r)$ и соотношения (4.1.6) следует, что $C(r)$ — положительно определенная матрица.

Решение уравнения (4.1.5) можно найти как произведение матрицы C^{-1} на неоднородный член

$$K(r, t) = -(C^{-1}(r) \psi(r), \chi(t)). \quad (4.1.8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} K(r, r) &= -(C^{-1}(r) \psi(r), \chi(r)) = \\ &= -\text{Sp} [C^{-1}(r) R(r)] = -\text{Sp} \left[C^{-1}(r) \frac{d}{dr} C(r) \right] = \\ &= -\frac{d}{dr} \ln \det C(r). \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Потенциал V определяется соотношением

$$V(r) - V_1(r) = 2 \frac{d}{dr} K(r, r) = -\frac{d^2}{dr^2} \ln \det C(r), \quad (4.1.10)$$

и решение φ таково:

$$\varphi(k, r) = \det \begin{vmatrix} C(r) & \psi(r) \\ \beta(k, r) & \varphi_1(k, r) \end{vmatrix} [\det C(r)]^{-1}. \quad (4.1.11)$$

Здесь в числителе стоит матрица, которая получена добавлением к матрице $C(r)$ столбца ψ , строки β и последнего диагонального элемента φ_1 , причем

$$\beta(k, r) = \int_0^r \chi(t) \varphi_1(k, t) dt. \quad (4.1.12)$$

Из полученных соотношений можно найти функцию Йоста $F(k)$, асимптотическую форму функции φ и приращение потенциала $V - V_1$. Теперь мы покажем, что, как и ожидалось,

$$F(k) = F_1(k) \prod_j \left(\frac{k - i\gamma_j}{k + i\gamma_j} \right) \quad (4.1.13)$$

и приращение потенциала ΔV удовлетворяет неравенству

$$\int_0^\infty r |\Delta V(r)| dr < \infty. \quad (4.1.14)$$

Мы получим выражения

$$\Delta V(r) = -4 \sum_j C_j r + o(1), \quad r \rightarrow 0, \quad (4.1.15)$$

$$\Delta V(r) = -\frac{2}{C_0} (2\gamma_0)^5 e^{-2\gamma_0 r} [1 + o(1)], \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.1.16)$$

где γ_0 — наименьшая из величин γ_j , а C_0 — соответствующая ей нормировочная постоянная. Начнем со случая, когда имеется одно связанное состояние с энергией, равной $-\gamma^2$, и нормировочной постоянной C . Матрицы, с которыми мы имеем дело, — это простые двумерные матрицы, и, как нетрудно убедиться, из выражения (4.1.11) следует выражение

$$\begin{aligned} \varphi(k, r) = & \varphi_1(k, r) - C \varphi_1(i\gamma, r) \times \\ & \times \left[1 + C \int_0^r \varphi_1^2(i\gamma, t) dt \right]^{-1} \int_0^r \varphi_1(i\gamma, t) \varphi_1(k, t) dt. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Из этого выражения мы должны найти решение Йоста и функцию Йоста. Воспользуемся тождеством

$$(k^2 + \gamma^2) \int_0^r \varphi_1(i\gamma, t) \varphi_1(k, t) dt = W[\varphi_1(k, r), \varphi_1(i\gamma, r)], \quad (4.1.18)$$

которое представляет собой результат интегрирования уравнения Шредингера с имеющимися граничными условиями. Если под-

ставить это выражение в формулу (4.1.17), произвести разложение

$$\varphi_1(k, r) = (2ik)^{-1} [g_1(k, r) - g_1(-k, r)], \quad (4.1.19a)$$

$$g_1(k, r) = F_1(-k) f_1(k, r) \quad (4.1.19b)$$

и аналогичным образом представить $\varphi(k, r)$, то мы однозначно получим

$$F(-k) f(k, r) = F_1(-k) [f_1(k, r) - C(k^2 + \gamma^2)^{-1} \varphi_1(i\gamma, r) \times \\ \times \left(1 + \int_0^r \varphi_1^2(i\gamma, t) dt\right)^{-1} W(f_1(k, r), \varphi_1(i\gamma, r))]. \quad (4.1.20)$$

В единственности такого разложения легко убедиться, воспользовавшись соотношениями (1.2.86) и (1.2.8в), из которых видно, что функция $\varphi_1(i\gamma, r)$ экспоненциально возрастает при $r \rightarrow \infty$, и соотношениями (1.3.9) и (1.3.10). Названные формулы показывают, что асимптотическая форма выражения (4.1.20) при больших r действительно с точностью до постоянного множителя имеет вид $\exp(ikr)$ и что любое другое разложение будет состоять из членов, также содержащих $\exp(-ikr)$. В самом деле, вычисляя асимптотическую форму выражения (4.1.20) с учетом выражения

$$|\varphi_1(i\gamma, r)| = (2\gamma)^{-1} e^{2\gamma r} [1 + o(1)], \quad (4.1.21)$$

получаем

$$F_1(k) = F_1\left(\frac{k-i\gamma}{k+i\gamma}\right). \quad (4.1.22)$$

Отсюда со всей очевидностью следует, что потенциал $V(r)$ действительно имеет связанное состояние с энергией $-\gamma^2$, т. е. его функция Йоста обращается в нуль, когда $k = i\gamma$. Заметим, что, положив в формуле (4.1.20) $r = 0$, мы получим в согласии с формулой (4.1.22)

$$|F(k)|^2 = |F_1(k)|^2, \quad k \text{ действительное}, \quad (4.1.23)$$

что гарантирует нам идентичность спектральных плотностей $d\rho$ и $d\rho_1$ при положительных энергиях, т. е. в непрерывной части спектра.

Положив в формуле (4.1.17) $k = i\gamma$, получим выражение для волновой функции связанного состояния

$$\varphi(i\gamma, r) = \frac{\varphi_1(i\gamma, r)}{1 + C \int_0^r \varphi_1^2(i\gamma, t) dt}, \quad (4.1.24)$$

которое позволяет легко убедиться, что C — действительно нормировочная постоянная, определяемая равенством (2.3.16).

Из формул (4.1.24) и (4.1.20) можно найти решение Йоста:

$$f(k, r) = \frac{k - i\gamma}{k + i\gamma} \left[f_1(k, r) - C \frac{\Phi_1(i\gamma, r)}{1 + C \int_0^r \Phi_1^2(i\gamma, t) dt} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{k^2 + \gamma^2} W(f_1(k, r), \Phi_1(i\gamma, r)) \right]. \quad (4.1.25)$$

Такую процедуру можно повторить столько раз, сколько нам пужно. На каждом шаге мы добавляем одно связанное состояние, сохраняя нормировочные константы предыдущих связанных состояний. Различие между старой и новой спектральными плотностями сводится снова к одному члену, отвечающему новому связанному состоянию, и мы получим простые формулы для вычисления всех интересующих нас величин, совершенно аналогичные формулам (4.1.7), (4.1.20) и (4.1.22). Из последней формулы следует, что в конце концов мы должны получить формулу (4.1.13).

Исследуем поведение приращения потенциала ΔV вблизи начала координат и на бесконечности, для чего воспользуемся формулой (4.1.10) и снова предположим, что имеется только одно связанное состояние. Из формул (4.1.6) и (4.1.7) следует, что величина $C(r)$ дважды непрерывно дифференцируема, даже если потенциал V_1 представляет собой δ -функцию (гл. 1, § 6). Поэтому приращение потенциала есть обыкновенная непрерывная функция. Из выражения

$$\varphi(k, r) = r + o(r), \quad r \rightarrow 0, \quad (4.1.26)$$

и формулы (4.1.6) видим, что вблизи начала координат

$$C(r) = 1 + \frac{C}{3} r^3 + o(r^3), \quad (4.1.27)$$

где C — нормировочная постоянная связанного состояния. Таким образом,

$$\Delta V = -2 \frac{d^2}{dr^2} \ln C(r) = -4Cr [1 + o(1)]. \quad (4.1.28)$$

Мы снова можем прийти к общему случаю шаг за шагом, вводя по одному связанные состояния. Поскольку приращения потенциала складываются, в конечном счете мы получим формулу (4.1.15).

Чтобы выяснить поведение приращения ΔV на бесконечности, подставим выражение (4.1.21) в формулу (4.1.10). Тогда при больших значениях r получим

$$C(r) = 1 + \frac{C}{2\gamma^3} e^{-2\gamma r} + \dots, \quad (4.1.29)$$

$$\Delta V = -2 \frac{C''(r) - C'(r)}{C^2(r)} = -\frac{2}{C} (2\gamma)^5 e^{-2\gamma r} + \dots \quad (4.1.30)$$

Следовательно, приращение потенциала ведет себя на бесконечности как квадрат волновой функции связанного состояния. Вводя теперь одно за другим остальные связанные состояния, как мы делали выше, мы каждый раз будем добавлять к потенциалу член, который ведет себя подобно (4.1.30). И очевидно, что в результате мы получим для асимптотики полного приращения потенциала выражение (4.1.16). Очевидно также, что, вообще говоря, выполняется соотношение

$$\int_0^{\infty} |\Delta V(r)| r dr < \infty. \quad (4.1.31)$$

§ 2. Фазово-эквивалентные потенциалы

Приведенная выше общая формула, выражающая потенциал V с n связанными состояниями через исходный потенциал V_1 , у которого нет связанных состояний, но спектральная плотность в непрерывной части спектра такая же, как и у потенциала V , дает нам также зависимость потенциала V от нормировочных постоянных C_j . В общем выражении для V можно сохранять все γ_j фиксированными и варьировать только величины C_j . Таким путем мы получим n -параметрическое семейство потенциалов с одинаковым фазовым сдвигом и одинаковыми энергиями связи. Действительно, поскольку спектральная плотность при положительных энергиях и, стало быть, величина $|F(k)|$ при $k \geq 0$ одинаковы для всех членов семейства и величины γ_j тоже одинаковы, из сказанного в гл. 2, § 2, следует, что фазовый сдвиг также одинаков. Поэтому такое семейство называется фазово-эквивалентным, но мы должны помнить, что энергии связи фиксированы. Если мы будем сохранять постоянным фазовый сдвиг и изменять энергии связи и соответствующие нормировочные постоянные, то, как явствует из выражения (2.2.1), будет изменяться и непрерывная часть спектральной плотности, так что решение задачи теперь сложнее, чем прежде. Тем не менее, как мы увидим в следующем параграфе, задача может быть решена аналитически. А сейчас мы подробнее остановимся на фазово-эквивалентных потенциалах.

Основной проблемой при рассмотрении семейства фазово-эквивалентных потенциалов, когда мы меняем только величины C_j в общей формуле (4.1.10), является связь между отдельными членами семейства. Она, конечно, содержится в приведенной выше общей формуле, но в простых случаях ее можно представить в более явной форме. Рассмотрим сначала случай, когда одна из постоянных изменяется от первоначального значения $\bar{C}$ до конечного C , а все остальные фиксированы. Можно поставить вопрос: как выразить волновую функцию и потенциал, относящиеся к C , через

соответствующие величины, относящиеся к $\bar{C}$, которые мы также будем обозначать черточкой сверху? Ответ снова дается общей формой уравнения Гельфанда — Левитана (гл. 3, § 5). Пользуясь очевидными обозначениями, в рассматриваемом случае получаем

$$d\rho(E) - d\bar{\rho}(E) = (C - \bar{C}) \delta(E + \gamma^2). \quad (4.2.1)$$

Это самый простой случай, приводящий к вырожденному ядру с одним членом, подобным (4.1.2), но с тем существенным отличием, что начальная волновая функция $\bar{\varphi}(i\gamma, r)$ соответствует теперь связанному состоянию, т. е. стремится к нулю как $\exp(-\gamma r)$ при больших значениях r . Все остальное остается тем же самым, и мы можем получить ответ, опираясь на результаты предыдущего параграфа. Из выражения (4.1.17) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(k, r) = & \bar{\varphi}(k, r) - (C - \bar{C}) \bar{\varphi}(i\gamma, r) \times \\ & \times \left[1 + (C - \bar{C}) \int_0^r \bar{\varphi}^2(i\gamma, t) dt \right]^{-1} \int_0^r \bar{\varphi}(i\gamma, t) \bar{\varphi}(k, t) dt. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Чтобы обеспечить отсутствие сингулярностей у функции φ , мы должны показать, что знаменатель никогда не обращается в нуль. Это следует из очевидного равенства

$$1 + (C - \bar{C}) \int_0^r \bar{\varphi}^2(i\gamma, t) dt = C \int_0^r \bar{\varphi}^2(i\gamma, t) dt + \bar{C} \int_r^\infty \bar{\varphi}^2(i\gamma, t) dt, \quad (4.2.3)$$

так как C и $\bar{C}$ положительны. Полагая в формуле (4.2.2) r очень большим, мы видим также, что при действительных k функции φ и $\bar{\varphi}$ имеют одинаковую асимптотику, т. е., как и ожидалось, им соответствует один и тот же фазовый сдвиг. Вспоминая также, что теперь

$$F(k) \equiv \bar{F}(k), \quad (4.2.4)$$

получаем из выражения (4.1.20)

$$\begin{aligned} f(k, r) = & \bar{f}(k, r) - \frac{C - \bar{C}}{k^2 + \gamma^2} \frac{\bar{\varphi}(i\gamma, r)}{1 + (C - \bar{C}) \int_0^r \bar{\varphi}^2(i\gamma, t) dt} \times \\ & \times W[\bar{f}(k, r), \bar{\varphi}(i\gamma, r)]. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Поскольку второй член в этом выражении экспоненциально стремится к нулю при больших значениях r , асимптотическое поведение функций $f(k, r)$ и $\bar{f}(k, r)$ также одинаково. Что же касается волновой функции связанного состояния, то из выражения (4.2.2)

следует, что

$$\varphi(i\gamma, r) = \frac{\bar{\varphi}(i\gamma, r)}{1 + (C - \bar{C}) \int_0^r \bar{\varphi}^2(i\gamma, t) dt}. \quad (4.2.6)$$

Мы закончим данный параграф, записав в несколько иной форме приведенные выше формулы для фазово-эквивалентных потенциалов. Предположим, что нам известны один потенциал из семейства $V_0(r)$ и его решение Йоста $f_0(k, r)$. Рассмотрим сначала для простоты случай одного связанного состояния с энергией связи $-\gamma^2$. Пусть $\psi_0(r)$ — волновая функция связанного состояния:

$$\psi_0(r) = f_0(i\gamma, r). \quad (4.2.7)$$

Легко показать, что для других членов семейства

$$\psi_0(\lambda, r) = \frac{\psi_0(r)}{N(\lambda, r)}, \quad (4.2.8)$$

$$\begin{aligned} V(\lambda, r) &= V_0(r) + \lambda N^{-1}(\lambda, r) \psi_0(r) \psi_0'(r) + \frac{\lambda^2}{8} N^{-2}(\lambda, r) \psi_0^4(r) = \\ &= V_0(r) - \frac{d^2}{dr^2} \ln \left[1 + \frac{\lambda}{4} \int_r^\infty \psi_0^2(t) dt \right], \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

где

$$N(\lambda, r) = 1 + \frac{\lambda}{4} \int_r^\infty \psi_0^2(t) dt. \quad (4.2.10)$$

Допустимый интервал значений параметра λ таков:

$$-4 \left[\int_0^\infty \psi_0^2(t) dt \right]^{-1} < \lambda < \infty. \quad (4.2.11)$$

Когда λ меньше левой границы, величина $N(\lambda, r)$ обращается в нуль при некотором строго положительном значении r и потенциал становится сингулярным с полюсом второго порядка. Такие потенциалы не имеют смысла с точки зрения теории рассеяния. Из равенства (4.2.8) легко получить нормировочную постоянную для волновой функции связанного состояния для произвольного λ :

$$\tilde{C}^{-1}(\lambda) \equiv \int_0^\infty \psi_0^2(\lambda, r) dr = \frac{\tilde{C}^{-1}(0)}{1 + \lambda \tilde{C}^{-1}(0)/4}. \quad (4.2.12a)$$

Это соотношение легко преобразовать к виду

$$\lambda = 4 [\tilde{C}(\lambda) - \tilde{C}(0)]. \quad (4.2.12b)$$

При изменении величины λ в допустимом интервале $(-4\tilde{C}(0), \infty)$ величина $\tilde{C}(\lambda)$ пробегает все значения в интервале $(0, \infty)$.

Решение Йоста при произвольном λ дается выражением

$$f(\lambda; k, r) = f_0(k, r) - \frac{\lambda}{4N(\lambda, r)} \psi_0(r) \int_r^\infty \psi_0(t) f_0(k, t) dt, \quad (4.2.13a)$$

в чем легко убедиться. Так как все потенциалы данного семейства имеют одну и ту же функцию Йоста $F(k)$ [что следует из выражения (4.2.5), если положить $r = 0$], то регулярное решение φ будет иметь вид

$$\varphi(\lambda; k, r) = \varphi_0(k, r) - \frac{\lambda}{4} N^{-1}(\lambda, r) \psi_0(r) \int_r^\infty \psi_0(t) \varphi_0(k, t) dt. \quad (4.2.13b)$$

Из этих формул легко видеть, что дополнительные члены, обусловленные параметром λ , экспоненциально стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$.

Если у нас более одного связанного состояния, мы можем решить задачу шаг за шагом, начиная с одного связанного состояния и добавляя остальные по-одному. Мы можем таким путем получить целое семейство фазово-эквивалентных потенциалов. Можно также решить задачу в общем виде методом, совершенно аналогичным тому, который был использован в § 1. Действительно, поскольку все потенциалы семейства имеют одну и ту же функцию Йоста, ядро общего уравнения Гельфанда — Левитана [формула (3.5.8a)], в котором мы исходим из одного определенного члена семейства, соответствующего нормировочным константам C_j^0 , имеет вид

$$G(r, t) = \sum_j (C_j - C_j^0) \varphi_0(i\gamma_j, r) \varphi_0(i\gamma_j, t), \quad (4.2.14a)$$

где $\varphi_0(i\gamma_j, r)$ — волновая функция j -го связанного состояния. Это выражение во всем подобно выражению (4.1.2), кроме того, что там $\varphi_1(i\gamma_j, r)$ не является волновой функцией связанного состояния. Так или иначе интегральное уравнение может быть снова решено в замкнутой форме и результат совершенно аналогичен (4.1.10):

$$V(r) = V_0(r) - 2 \frac{d^2}{dr^2} \ln \det \| M_{jk}(r) \|, \quad (4.2.14b)$$

где

$$M_{jk}(r) = -\delta_{jk} - (C_j - C_j^0) \int_0^r \varphi_0(i\gamma_j, t) \varphi_0(i\gamma_k, t) dt. \quad (4.2.14b)$$

Можно показать, что для матрицы M_{jk} существует обратная матрица, и, следовательно, потенциал (4.2.14б) хорошо определен. Приращение потенциала снова имеет порядок малости $O(r)$ в начале координат и $O \exp(-\gamma_0 r)$ на больших расстояниях, где γ_0 — наименьшая из величин γ_j . Примеры мы рассмотрим в гл. 6.

§ 3. Потенциалы Баргмана¹⁾

В § 1 мы рассматривали случай, когда исходный потенциал не имеет связанных состояний, и показали, как можно сконструировать потенциал, имеющий ту же спектральную плотность при положительной энергии и, кроме того, n связанных состояний. Задача может быть решена точно, так как ядро общего уравнения Гельфанда — Левитана будет вырожденным. Задача может быть точно решена и в другом случае, когда мы исходим из заданной функции Йоста F_1 , для которой известно все, в том числе и потенциал, и мы хотим сконструировать потенциал, функция Йоста F_2 которого равна исходной, умноженной на рациональную функцию переменной k . Из выражения (4.1.13) видно, что рассмотренная выше задача в действительности представляет собой вариант этого общего случая. Потенциалом Баргмана для данного потенциала V_1 называется такой потенциал V_2 , функция Йоста F_2 которого отличается от F_1 рациональным множителем.

Поскольку функция Йоста должна стремиться к 1 при очень больших k , имеем

$$F_2(k) = \prod_j \left(\frac{k + ia_j}{k + ib_j} \right) F_1(k). \quad (4.3.1)$$

Для того чтобы функция F_2 была голоморфной в верхней полуплоскости, необходимо принять, что $\operatorname{Re} b_j > 0$. Мы также должны иметь либо $a_j < 0$, что означает введение нового связанного состояния, либо $\operatorname{Re} a_j > 0$. Очевидно, что в силу свойства симметрии (1.1.21) множителю $k + ib_j$ соответствует также множитель $k + +ib_j^*$, и, если $\operatorname{Re} a_j > 0$, мы должны также иметь в числителе множитель $k + ia_j^*$. Если a_j — действительная и отрицательная (новое связанное состояние) величина, то всегда можно написать

$$\frac{k - i|a|}{k + ib} = \left(\frac{k - i|a|}{k + i|a|} \right) \left(\frac{k + i|a|}{k + ib} \right) \quad (4.3.2)$$

и рассматривать сначала второй множитель (нет связанного состояния) так, как будет сделано ниже, а затем первый множитель — так, как делалось в § 1. Тем самым мы будем предполагать, что рациональный множитель не вводит новых связанных состояний.

¹⁾ Обобщение метода баргмановских потенциалов на случай фиксированной энергии (потенциалы Баргмана — Малярова) дано в работе [466]. Позднее аналогичные результаты были получены в работе [487]. — *Прим. ред.*

Простейший случай — когда исходный потенциал не имеет связанных состояний и когда по предположению величины a_j и b_j удовлетворяют условиям

$$a_j > 0, \quad b_j > 0 \quad (4.3.3)$$

и все разные. Это все-таки довольно общий случай, в котором можно выявить важнейшие особенности результатов. Тем же самым методом (который мы изложим) можно будет исследовать и совершенно общий случай, когда некоторые из величин a_j или b_j комплексные. Из свойства симметрии (1.1.21) следует, что такие комплексные величины a_j и b_j появляются всегда парами (a и a^* , b и b^*), и мы должны рассматривать оба члена каждой такой пары одновременно. Это несколько усложняет алгебраические выкладки, но не меняет основных результатов. Поэтому будем предполагать, что выполняется условие (4.3.3). Тогда ядро Гельфанда — Левитана принимает вид

$$\begin{aligned} G(r, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi_1(k, r) [|F_2(k)|^2 - |F_1(k)|^2] \varphi_1(k, t) k^2 dk = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi_1(k, r) |F_1(k)|^2 \left[\prod_j \left(\frac{k^2 + b_j^2}{k^2 + a_j^2} \right) - 1 \right] \varphi_1(k, t) k^2 dk. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Учитывая тождество

$$\prod_j \frac{k^2 + b_j^2}{k^2 + a_j^2} - 1 = \sum_j \frac{A_j}{k^2 + a_j^2}, \quad (4.3.5a)$$

$$A_j = \frac{\prod_l (b_l^2 - a_j^2)}{\prod_{l \neq j} (a_l^2 - a_j^2)}, \quad (4.3.5b)$$

получаем

$$G(r, t) = \sum_j \frac{2}{\pi} A_j \int_0^\infty \varphi_1(k, r) \varphi_1(k, t) (k^2 + a_j^2)^{-1} |F_1(k)|^2 k^2 dk. \quad (4.3.6)$$

Легко видеть, что каждый член этой суммы является ядром резольвенты (2.3.4) уравнения Шредингера для потенциала V_1 и энергии $-a_j^2$. Действительно, если мы применим дифференциальный оператор $-(d^2/dr^2) + V_1 + a_j^2$ к каждому интегралу и учтем условие полноты (2.3.8), то получим уравнение (2.3.4). Вместе с условием симметрии относительно r и t и граничным условием (2.3.5), которые оба тривиально выполняются в данном случае, это доказывает справедливость нашего утверждения. Если взять теперь выра-

жение для резольвенты (2.3.3), то можно переписать выражение (4.3.6) при $r < t$ в виде

$$\begin{aligned} G(r, t) &= \sum_j A_j R_{-a_j^2}(r, t) = \\ &= \sum_j A_j F_1^{-1}(ia_j) f_1(ia_j, t) \varphi_1(ia_j, r), \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

а при $t < r$ — в симметричном виде. Оба эти выражения нужно подставить в уравнение

$$K(r, t) + G(r, t) + \int_0^r K(r, s) G(s, t) ds = 0. \quad (4.3.8)$$

Поскольку ядро снова оказывается вырожденным, мы будем искать решение в виде

$$K(r, t) = \sum_j \omega_j(r) \varphi_1(ib_j, t). \quad (4.3.9)$$

Интегральное уравнение теперь сводится к виду

$$\begin{aligned} \sum_j \omega_j(r) \varphi_1(ib_j, t) + \sum_j A_j \varphi_1(ia_j, t) F_1^{-1}(ia_j) f_1(ia_j, r) + \\ + \sum_j \sum_l A_l \omega_j(r) \int_0^r \varphi_1(ib_j, s) R_{-a_j^2}(s, t) ds = 0. \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Если учесть тождество

$$(a^2 + k^2) \int_{r_1}^{r_2} R_{-a^2}(r, t) \psi(t) dt = \psi(r) + W[R_{-a^2}(r, t), \psi(t)]|_{r_1}^{r_2}, \quad (4.3.11a)$$

где ψ — решение уравнения Шредингера

$$\psi'' + k^2 \psi = V_1 \psi, \quad (4.3.11b)$$

то последнее слагаемое в левой части равенства (4.3.10) становится равным

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_l \omega_j(r) A_l (a_l^2 - b_j^2)^{-1} \varphi_1(ib_j, t) + \\ + \sum_j \sum_l \omega_j(r) W[R_{-a^2}(r, t) \varphi_1(ib_j, r)] \frac{A_l}{a_l^2 - b_j^2}. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Если воспользоваться определением (4.3.5б), то мы увидим, что первый член в выражении (4.3.12) взаимно уничтожается с первым

членом в формуле (4.3.10) и у нас остается

$$\sum_l A_l \varphi_1(i a_l, t) F_1^{-1}(i a_l) [f_1(i a_l, r) + \sum_j W_{lj}(r) \omega_j(r)] = 0, \quad (4.3.13a)$$

где

$$W_{lj}(r) = (a_l^2 - b_j^2)^{-1} W[f_1(i a_l, r) \varphi_1(i b_j, r)]. \quad (4.3.13b)$$

Учитывая то обстоятельство, что функции $\varphi_1(i a_j, t)$ линейно-независимы, мы можем записать уравнение (4.3.13a) в векторной форме:

$$f(r) + W(r) \omega(r) = 0. \quad (4.3.14)$$

Таким образом,

$$\omega(r) = -W^{-1}(r) f(r), \quad (4.3.15)$$

и, обозначив круглыми скобками скалярное произведение двух векторов, получаем

$$K(r, t) = (\omega(r), \varphi(t)) = -(W^{-1}(r) f(r), \varphi(t)). \quad (4.3.16)$$

Заметим, что аналогично выражениям (4.1.6) — (4.1.8) мы имеем

$$\frac{d}{dr} W_{lj}(r) = f_1(i a_l, r) \varphi(i b_j, r). \quad (4.3.17)$$

Следовательно, так же как выводились формулы (4.1.9) и (4.1.10), получаем

$$\Delta V(r) = V_2(r) = -\frac{d^2}{dr^2} \ln \det W(r), \quad (4.3.18)$$

$$\varphi_2(k, r) = \frac{\det \begin{vmatrix} W(r) & f(r) \\ \beta(k, r) & \varphi_1(k, r) \end{vmatrix}}{\det W(r)}, \quad (4.3.19a)$$

где β — вектор с компонентами

$$\beta_j(k, r) = \frac{W[\varphi_1(i b_j, r), \varphi(k, r)]}{k^2 + b_j^2} = \int_0^r \varphi_1(i b_j, t) \varphi_1(k, t) dt. \quad (4.3.19b)$$

В следующем параграфе мы увидим, что φ_2 действительно представляет собой решение уравнения Шредингера с потенциалом V_2 (Крейн). Точно так же, как и при введении связанных состояний в § 1, мы можем найти асимптотику функции φ_2 при больших значениях r :

$$\varphi_2(k, r) = (2ik)^{-1} [F_2(-k) e^{ikr} - F_2(k) e^{-ikr}] + o(1), \quad (4.3.20)$$

где, как и предполагалось,

$$F_2(k) = F_1(k) \prod_j \frac{k + i a_j}{k + i b_j}.$$

Как и прежде, мы можем проанализировать поведение приращен-
ния потенциала в начале координат и на бесконечности. На беско-
нечности оно убывает экспоненциально, как $\exp(-2br)$, где b —
наименьшая из величин b_j . В начале координат в отличие от слу-
чая, рассмотренного в § 1, приращение потенциала не обращается
в нуль, а остается конечным.

§ 4. Преобразования уравнения Шредингера

Здесь мы докажем две теоремы, сформулированные раньше.
Первая из них, теорема Марченко, которая упоминалась в гл. 3,
§ 4, формулируется следующим образом.

Теорема Марченко. *Если $S(k)$ есть « S -матрица», соответ-
ствующая потенциалу $V(r)$ и угловому моменту l , то она явля-
ется « S -матрицей» и для любого другого углового момента l' и потен-
циала $V_{l'}(r)$, который ведет себя точно так же, как и $V(r)$, в нача-
ле координат и на бесконечности.*

Вторая теорема (Крейна) состоит в том, что функция φ_2 , давае-
мая выражением (4.3.19а), удовлетворяет уравнению Шредингера
с потенциалом V_2 , который дается выражением (4.3.18).

Доказательство этих теорем основано на некоторых общих
преобразованиях дифференциальных уравнений второго порядка.
Пусть φ_0 — решение уравнения

$$\varphi''(E, r) + E\varphi(E, r) = V(r)\varphi(E, r), \quad (4.4.1)$$

соответствующее значению $E = E_0$ и не обращающееся в нуль
на некотором интервале, содержащем точку r_0 . Рассмотрим теперь
величину

$$\varphi_1(E, r) = W[\varphi(E, r), \varphi_0(E_0, r)] [(E - E_0)\varphi_0(E_0, r)]^{-1}, \quad (4.4.2)$$

где φ — любое решение уравнения (4.4.1), а W — вронскиан.
Функция φ_1 есть решение того же уравнения с потенциалом $V_1 =$
 $= V + \Delta V$, где

$$\Delta V(r) = V_1(r) - V(r) = -2 \frac{d}{dr} \frac{\varphi'_0(E_0, r)}{\varphi_0(E_0, r)}. \quad (4.4.3)$$

Для доказательства этой леммы мы воспользуемся тождеством

$$\frac{d}{dr} \frac{W[\varphi(E_1, r), \varphi(E_2, r)]}{E_1 - E_2} = \varphi(E_1, r)\varphi(E_2, r), \quad (4.4.4)$$

которому удовлетворяют любые два решения уравнения (4.4.1)
с одним и тем же потенциалом. Тогда из выражения (4.4.2) следует,

что

$$\varphi'_1(E, r) = \varphi(E, r) - \frac{W[\varphi(E, r), \varphi_0(E_0, r)]}{(E - E_0) \varphi_0^2(E_0, r)} \varphi'_0(E_0, r). \quad (4.4.5)$$

Еще одно дифференцирование приводит к желаемому результату.

Решение (4.4.2) имеет, конечно, смысл, только если $E \neq E_0$. При $E = E_0$ одним из решений преобразованного уравнения, т. е. уравнения с потенциалом $V_1(r)$, является функция

$$\psi_1(E_0, r) = \frac{1}{\varphi_0(E_0, r)}, \quad (4.4.6)$$

в чем можно убедиться путем соответствующих выкладок. В качестве второго линейно-независимого решения мы запишем хорошо известное выражение

$$\varphi_1(E_0, r) = \psi_1(E_0, r) \int_r^t \frac{dt}{\psi_1^2(E_0, r)} = \varphi_0^{-1}(E_0, r) \int_r^t \varphi_0^2(E_0, t) dt. \quad (4.4.7)$$

Как нетрудно убедиться, вронскиан функций ψ_1 и φ_1 действительно равен единице. В формулах (4.4.2), (4.4.6) и (4.4.7) решение уравнения Шредингера с потенциалом V_1 выражается через решения, соответствующие потенциалу V , где V и V_1 связаны между собой соотношением (4.4.3). Можно и наоборот — решение $\varphi(E, r)$ исходного уравнения выразить через решения преобразованного уравнения. Действительно, из соотношения (4.4.6) следует, что

$$\frac{\varphi'_0(E_0, r)}{\varphi_0(E_0, r)} = - \frac{\psi'_1(E_0, r)}{\psi_1(E_0, r)}. \quad (4.4.8)$$

Поэтому выражение (4.4.5) можно записать в виде

$$\varphi(E, r) = \frac{W[\varphi_1(E, r), \psi_1(E_0, r)]}{\psi_1(E_0, r)}. \quad (4.4.9)$$

Эта формула обратна формуле (4.4.2).

Выше мы предполагали, что функция $\varphi(E_0, r)$ не обращается в нуль в окрестности точки $r = r_0$, и рассматривали эту окрестность. Теперь предположим, что $r_0 = 0$ и функция $\varphi_0(E_0, r)$ не обращается в нуль в начале координат, а поведение потенциала $V(r)$ вблизи начала координат таково:

$$V = l(l+1)r^{-2} + \bar{V}(r) = l(l+1)r^{-2} + O\left(\frac{1}{r^{2-\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon > 0. \quad (4.4.10)$$

Здесь условие, налагаемое на потенциал вторым членом, несколько более жесткое, нежели требование интегрируемости произведения $r | \bar{V}(r) |$ в начале координат, но благодаря этому упрощаются выкладки. Как нам известно, имеются два типа решения уравнения

Шредингера с потенциалом V :

$$\varphi(E, r) = Cr^{l+1} [1 + O(r^\varepsilon)], \quad (4.4.11a)$$

$$\psi(E, r) = Dr^{-l} [1 + O(r^\varepsilon)]. \quad (4.4.11b)$$

Если для преобразований, рассмотренных выше, взять регулярное решение $\varphi(E_0, r)$, то приращение потенциала будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta V(r) &= -2 \frac{d^2}{dr^2} \ln r^{l+1} [1 + O(r^\varepsilon)] = \\ &= 2(l+1)r^{-2} + O(r^{\varepsilon-2}), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Следовательно, новый потенциал V_1 вблизи начала координат соответствует угловому моменту $l' = l + 1$. В этом можно также убедиться, рассмотрев решения φ и ψ . Из тождества (4.4.4) следует равенство

$$\frac{W[\varphi(E, r), \varphi(E_0, r)]}{E - E_0} = \int_0^r \varphi(E, t) \varphi(E_0, t) dt. \quad (4.4.13)$$

Учитывая это, из определения (4.4.2) получаем

$$\varphi_1(E, r) = \frac{C}{2l+3} r^{l+2} [1 + O(r^\varepsilon)], \quad (4.4.14)$$

$$\psi_1(E, r) = \frac{(2l+1)D}{r^{l+1}} [1 + O(r^\varepsilon)]. \quad (4.4.15)$$

Следовательно, при преобразовании с регулярным решением порядок сингулярности потенциала в начале координат изменяется от l до $l + 1$ и регулярное и сингулярное решения переходят в регулярное и сингулярное решения для нового потенциала. Легко также убедиться, что преобразование с сингулярным решением понижает порядок сингулярности потенциала в начале координат от l до $l - 1$, но типы решений снова сохраняются.

Перейдем теперь к доказательству теоремы Крейна о том, что функция (4.3.19a) удовлетворяет уравнению Шредингера с потенциалом V_2 вида (4.3.18). Для этого выполним сначала введенное выше преобразование уравнения Шредингера с потенциалом V_1 , взяв регулярное решение $\varphi_1(ib, r)$ ¹⁾. Все величины, относящиеся к этому новому уравнению, мы будем отмечать черточкой: $\bar{\varphi}$, . . . и т. д. Затем выполним преобразование этого уравнения, взяв на этот раз его сингулярное решение $\bar{f}(ia, r)$ [полученное также из $f_1(ib, r)$ при преобразовании с функцией $\varphi_1(ib, r)$,

¹⁾ Обращаем внимание на изменение обозначений. У нас теперь будет два шага: $V_1 \rightarrow \bar{V}$ и $\bar{V} \rightarrow V_2$.

как отмечалось выше]. Комбинируя теперь выражения

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(k, r) &= \frac{W[\varphi_1(k, r), \varphi_1(ib, r)]}{(k^2 + b^2) \varphi_1(ib, r)} = \\ &= \frac{1}{\varphi_1(ib, r)} \int_0^r \varphi_1(k, t) \varphi_1(ib, t) dt, \quad (4.4.16)\end{aligned}$$

$$\bar{f}(ia, r) = \frac{W[f_1(ia, r), \varphi_1(ib, r)]}{(b^2 - a^2) \varphi_1(ib, r)} \equiv \frac{W(r)}{\varphi_1(ib, r)}, \quad (4.4.17)$$

$$\varphi_2(k, r) = \frac{W[\bar{\varphi}(k, r), \bar{f}(ia, r)]}{\bar{f}(ia, r)}, \quad (4.4.18)$$

$$V_2 - \bar{V} = -2 \frac{d^2}{dr^2} \ln [\varphi_1(ib, r) \bar{f}(ia, r)], \quad (4.4.19)$$

получаем, что функция

$$\varphi_2(k, r) = \varphi_1(k, r) - \frac{f_1(ia, r)}{W(r)} \frac{W[\varphi_1(k, r), \varphi_1(ib, r)]}{k^2 + b^2} \quad (4.4.20)$$

является решением уравнения Шредингера с потенциалом

$$\begin{aligned}V_2(r) &= V_1(r) - 2 \frac{d^2}{dr^2} \ln W(r) = \\ &= V_1(r) - 2 \frac{d^2}{dr^2} \ln \frac{W[f_1(ia, r), \varphi_1(ib, r)]}{b^2 - a^2}, \quad (4.4.21)\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к доказательству теоремы Марченко. Рассмотренные выше преобразования с регулярным решением φ изменяют поведение потенциала только вблизи начала координат, увеличивая порядок сингулярности от l до $l + 1$. На бесконечности же поведение приращения потенциала зависит от E_0 . Во всех рассмотренных выше случаях приращение потенциала убывает экспоненциально. Чтобы полученный в результате потенциал был действительным, мы должны, очевидно, предположить, что действительна величина E_0 , ибо тогда будет гарантирована действительность величины ΔV в формуле (4.4.3), где теперь функция φ_0 есть регулярное решение, обращающееся в нуль в начале координат. Но, как следует из выражения (4.4.3), при положительных значениях E_0 величина ΔV будет иметь особенности в бесконечном числе точек на оси r , так как при положительной энергии регулярное решение обращается в нуль бесконечное число раз. Выбор же отрицательного значения E_0 приводит к экспоненциальному убыванию потенциала на бесконечности. Следовательно, для того чтобы обеспечить полиномиальное убывание на бесконечности, мы должны положить $E_0 = 0$. Покажем, что в таком случае приращение ΔV ведет себя на бесконечности как $2(l + 1)r^{-2}$, если

исходный потенциал содержит центробежный член $l(l+1)r^{-2}$. Выше было показано, что приращение ΔV так же ведет себя и вблизи начала координат, а отсюда и следует, что полный потенциал содержит центробежный член $(l+1)(l+2)r^{-2}$, т. е. что мы действительно добавили единицу к угловому моменту в уравнении Шредингера.

Для доказательства этого утверждения мы поступим, как и прежде. Поскольку мы исходим из углового момента l , при очень больших r

$$\varphi_l(0, r) = Cr^{l+1} [1 + O(r^{-\delta})] \quad (4.4.22)$$

и мы можем найти среди сингулярных решений такое решение ψ , что

$$\psi_l(0, r) = Dr^{-l} [1 + O(r^{-\delta})]. \quad (4.4.23)$$

Если подставить функцию φ в формулы (4.4.2) и (4.4.3), то при больших значениях r получим

$$\Delta V = 2(l+1)r^{-2} + O(r^{-2-\delta}), \quad (4.4.24)$$

а подставив функцию ψ в формулу (4.4.3), получим при больших значениях r

$$\Delta V = -2lr^{-2} + O(r^{-2-\delta}). \quad (4.4.25)$$

Таким образом, взяв φ в преобразовании уравнения Шредингера, мы увеличиваем, а взяв ψ , уменьшаем угловой момент на единицу. Посмотрим теперь, что происходит с « S -матрицей» для преобразованного уравнения. Легко показать, что решения Йоста имеют вид

$$f_{l+1}(k, r) = -\frac{W[f_l(k, r), \varphi_l(0, r)]}{ik\varphi_l(0, r)}, \quad (4.4.26)$$

$$f_{l-1}(k, r) = -\frac{W[f_l(k, r), \psi_l(0, r)]}{ik\psi_l(0, r)} \quad (4.4.27)$$

и в асимптотическом пределе

$$f_{l\pm 1}(k, r) = i^{l\pm 1}e^{ikr} + o(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.4.28)$$

Согласно формуле (1.5.25), решение Йоста имеет вид

$$f_l(k, r) = (2l-1)!! (kr)^{-l} F_l(k) [1 + O(r^{-\varepsilon})]. \quad (4.4.29)$$

Переходя к тому же пределу в выражениях (4.4.26) и (4.4.27), получаем при $r \rightarrow 0$

$$f_{l+1}(k, r) = (2l+1)!! (kr)^{-l-1} F_l(k) [1 + O(r^{-\varepsilon})], \quad (4.4.30)$$

$$f_{l-1}(k, r) = (2l-3)!! (kr)^{-l+1} F_l(k) [1 + O(r^{-\varepsilon})]. \quad (4.4.31)$$

Отсюда следует, что функция Йоста, а следовательно, и « S -матрица» инвариантны относительно рассматриваемых преобразований, тогда как угловой момент изменяется в одном случае от l до $l + 1$, а в другом от l до $l - 1$. Тем самым теорема Марченко доказана.

§ 5. Замечания и литература



В гл. 1 мы указали основные работы, посвященные методу решения обратной задачи Гельфанда — Левитана. В § 1 данной главы изложены результаты, полученные главным образом Йостом и Коном [230], которым принадлежит общая формула для приращения потенциала (4.1.10). Выражение (4.1.11) для волновой функции в случае одного связанного состояния было получено ранее Крейном [254, 256]. В § 2 (о фазово-эквивалентных потенциалах) приведены результаты, полученные главным образом Йостом и Коном [229, 230] и Холмбергом [205]. В § 3, где речь идет о потенциалах Баргмана, мы следовали методу, разработанному Тейсом [402] и Фултоном и Ньютоном [164] и основанному на (неопубликованных) идеях и методах Баргмана, который первым решил обратную задачу в случае действительной функции Йоста (см. также работы Баргмана [23, 24] и Блажека [44]) ¹⁾. В § 4 первая теорема была доказана Марченко в работе [290]. Общие преобразования, о которых говорится в § 4, впервые применил Крам [126] для уменьшения числа собственных значений на одно. Крейн [258] развил метод Крама далее и применил полученные результаты для вычисления всех характеристик спектральной функции потенциала, имеющего в начале координат особенность вида $l(l+1)/r^2$. Марченко [44] пользовался аналогичным преобразованием в доказательстве своей теоремы. Мы в своем изложении следовали обзорной статье Фаддеева [148].

Потенциалы Баргмана при наличии спин-орбитальных и тензорных сил досконально исследованы Фултоном и Ньютоном [164].

Другие ссылки см. в гл. 5—7, 9.

¹⁾ Численное решение обратной задачи методами потенциалов Баргмана и Баргмана — Малярова см. в работах [467—470].— *Прим. ред.*

МЕТОД МАРЧЕНКО

§ 1. Представление Левина

Представление Левина аналогично представлению (3.1.8а) для решения Йоста $f(k, r)$. Из гл. 1 мы знаем, что эта функция голоморфна в области $\text{Im } k > 0$ и удовлетворяет в данной области при $r \neq 0$ неравенству (1.3.4). Отсюда следует, что функция $h = f - \exp(ikr)$ является функцией из пространства L^2 относительно переменной k на любой прямой, параллельной действительной оси, и что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\sigma + i\tau)|^2 d\sigma = O(e^{-2\tau r}). \quad (5.1.1)$$

Мы знаем также, что функции $f(k, r)$ и $h(k, r)$ непрерывны на действительной оси k . К таким функциям мы можем применить следующую теорему.

Теорема Титчмарша [403, теорема 96]. *Для того чтобы функция $F(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ была при $y \rightarrow 0$ в верхней полуплоскости $y > 0$ пределом аналитической функции $F(z = x + iy)$, такой, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x + iy)|^2 dx = O(e^{2\lambda y}), \quad (5.1.2)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-itx} dx = 0 \quad (5.1.3)$$

при всех значениях $t < -\lambda$.

Эта теорема прямо применима к функции $h(k, r)$ и дает нам

$$A(r, t) \equiv \tilde{h}(t, r) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [f(k, r) - e^{ikr}] e^{-ikt} dk = 0, \quad t < r. \quad (5.1.4)$$

Преобразование Фурье, обратное данному, приводит к выражению

$$f(k, r) = e^{ikr} + \int_r^{\infty} A(r, t) e^{ikt} dt, \quad (5.1.5)$$

справедливому всюду при $\text{Im } k > 0$, причем $A(r, t)$ — функция из пространства L^2 относительно переменной t при всех $r > 0$, $t \geq r$.

Выражение (5.1.5), аналогичное представлению (3.1.8а), можно подставить в интегральное уравнение (1.3.1) и, раскрыв преобразование Фурье, получить интегральное уравнение

$$A(r, t) = \frac{1}{2} \int_{(r+t)/2}^{\infty} V(s) ds - \int_{(r+t)/2}^{\infty} ds \int_0^{(t-r)/2} V(s-u) \times \\ \times A(s-u, s+u) du, \quad t \geq r. \quad (5.1.6)$$

Это уравнение, аналогичное уравнению (3.1.10), может быть решено методом последовательных приближений. У него единственное решение, удовлетворяющее неравенству

$$|A(r, t)| < \frac{1}{2} \int_{(r+t)/2}^{\infty} |V(s)| ds \exp \left[\int_r^{\infty} u |V(u)| du \right] \quad (5.1.7)$$

при условии $rV(r) \in L^1(b, \infty)$, $b > 0$. На основании выражения (5.1.6) легко получить неравенство

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} A(r, t) + \frac{1}{4} V\left(\frac{r+t}{2}\right) \right| \leq K \int_r^{\infty} |V(s)| ds \int_{(r+t)/2}^{\infty} |V(u)| du \quad (5.1.8)$$

и аналогичное неравенство для $(\partial/\partial t) A$, причем K — некоторая константа.

Каждый формальный шаг при переходе от уравнения (5.1.6) к уравнению (5.1.5) легко обосновать, так как при этом мы имеем дело только с функциями, принадлежащими пространству L^2 . Кроме того, интегральное уравнение (5.1.6) имеет смысл при $0 < r \leq t$, если выполняется только условие интегрируемости потенциала $rV(r) \in L^1(b, \infty)$, $b > 0$. Из уравнения (5.1.6), пола-

гая $r = t$, получаем, согласно определению (1.6.1),

$$A(r, r) = \frac{1}{2} \int_r^{\infty} V(t) dt = -\frac{1}{2} W(r). \quad (5.1.9)$$

Если потенциал — непрерывная функция, то

$$V(r) = -2 \frac{dA(r, r)}{dr}. \quad (5.1.10)$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям (3.1.12) и (3.1.16). Но у них то преимущество, что они имеют смысл, даже если не выполняется условие интегрируемости потенциала в начале координат. Поэтому представление Левина (5.1.5) и интегральное уравнение (5.1.6) оказываются более общими и более подходящими в случае потенциалов, сингулярных в начале координат. В следующем параграфе мы увидим, что из уравнения Марченко можно получить точные формулы, описывающие поведение потенциала вблизи начала координат.

Можно пойти дальше и предположить, что A — дважды дифференцируемая функция переменных r и t . Тогда из выражения (5.1.5) или (5.1.6) получим с учетом формулы (5.1.9) дифференциальное уравнение Марченко:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A(r, t) = V(r) A(r, t). \quad (5.1.11)$$

Это уравнение, аналогичное уравнению (3.1.18), можно исследовать само по себе как альтернативное уравнению Шредингера. Если найдено не зависящее от энергии решение $A(r, t)$, то мы можем по формуле (5.1.5) найти решение уравнения Шредингера.

§ 2. Интегральное уравнение Марченко

Будем исходить из условия полноты (2.3.14а), предполагая для простоты, что связанные состояния отсутствуют. С учетом выражений (1.1.19) и (1.4.11) его можно переписать в виде

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(k, r) [f(-k, t) - S(k) f(k, t)] dk = \delta(r - t). \quad (5.2.1)$$

В то же время точно таким способом, каким было выведено представление (5.1.5), мы можем получить равенство

$$e^{ikr} = f(k, r) + \int_r^{\infty} \tilde{A}(r, t) f(k, t) dt. \quad (5.2.2)$$

Это можно сделать, либо опираясь на общую теорию интегральных преобразований с ядром, принадлежащим пространству L^2 , либо более простым способом, рассматривая (5.1.5) как интегральное

уравнение Вольтерра для функции $\exp(ikr)$ с ядром A и неоднородным членом f . Благодаря неравенству (5.1.7) можно решить это уравнение и получить выражение (5.2.2), в котором $\tilde{A}(r, t) \in L^2(r, \infty)$ относительно переменной t при всех $r > 0$.

Комбинируя теперь формулы (5.2.1) и (5.2.2), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k, r) [e^{-ikt} - S(k) e^{ikt}] dk = 0, \quad r \geq t. \quad (5.2.3)$$

Если подставить в это уравнение решение Йоста в форме (5.1.5), то получим

$$A(r, t) = A_0(r+t) + \int_r^{\infty} A(r, s) A_0(s+t) ds, \quad t > r, \quad (5.2.4a)$$

где

$$A_0(t) = (2i\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [S(k) - 1] e^{ikt} dk. \quad (5.2.4b)$$

Очевидно, что при наличии связанных состояний мы будем иметь

$$A_0(t) = (2i\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [S(k) - 1] e^{ikt} dk + \sum_j s_j e^{-\gamma_j t}, \quad (5.2.4b)$$

где s_j — нормировочные константы связанных состояний [формула (2.4.18б)].

Уравнение (5.2.4a) с ядром (5.2.4б) или (5.2.4в) — это уравнение Марченко. Оно несколько проще уравнения Гельфанда — Левитана в том отношении, что в нем ядро прямо связано с $S(k) = \exp(2i\delta_l)$. В случае же уравнения Гельфанда — Левитана мы должны сначала найти с помощью представления (2.2.1) функцию Йоста, затем подставить ее в формулу (2.3.14б) для вычисления спектральной плотности $d\rho(E)$, а последнюю в свою очередь подставить в формулы (3.2.5) и (3.2.7б).

Теперь мы должны рассмотреть два вопроса — единственно ли решение уравнения Марченко и обладает ли получаемый нами потенциал требуемыми свойствами. На первой задаче мы останавливаться не будем. Ее можно решить тем же способом, что и в случае уравнения Гельфанда — Левитана (гл. 3, § 2), хотя и с некоторыми дополнительными затратами труда. Вместо этого мы покажем, что уравнение Марченко эквивалентно уравнению Гельфанда — Левитана. Тогда свойства потенциала и их связь со свойствами функции $S(k)$ можно будет установить, пользуясь теорией Марченко.

Эквивалентность двух методов решения обратной задачи доказывается следующим образом. Рассмотрим функцию

$$\bar{\varphi}(k, r) = \frac{\varphi(k, r)}{F(-k)F(k)} = (2ik)^{-1} \left[\frac{f(k, r)}{F(k)} - \frac{f(-k, r)}{F(-k)} \right] \quad (5.2.5)$$

и соответствующее ядро [формулы (3.1.5а) и (3.1.6)]

$$\begin{aligned} \bar{K}(r, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\varphi(k, r)}{|F(k)|^2} - \frac{\sin kr}{k} \right] \frac{\sin kt}{k} k^2 dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{f(k, r)}{F(k)} - e^{ikr} \right] e^{-ikt} dk, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

которое, согласно различным асимптотическим оценкам, полученным в гл. 2, имеет смысл при $r \neq t$. Сначала предположим, что связанные состояния отсутствуют. Тогда функция

$$\frac{e^{-ikt} f(k, r)}{F(k)}$$

будет голоморфной и ограниченной в верхней полуплоскости (гл. 2). Следовательно, при $r > t$ мы можем замкнуть контур интегрирования в верхней полуплоскости и воспользоваться теоремой о вычетах. Таким образом,

$$\bar{K}(r, t) = 0, \quad r > t. \quad (5.2.7)$$

Если теперь обратить преобразования (5.2.6), то мы получим

$$\frac{f(k, r)}{F(k)} = e^{ikr} + \int_r^{\infty} \bar{K}(r, t) e^{ikt} dt. \quad (5.2.8)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\Pi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{F(k)} - 1 \right) e^{-ikt} dk. \quad (5.2.9)$$

Поскольку функция F^{-1} не обращается в нуль в верхней полуплоскости, мы имеем

$$\Pi(t) = 0, \quad t < 0. \quad (5.2.10)$$

Вспоминая представление Левина (5.1.5) и теорему о свертке, из соотношения (5.2.8) получаем уравнение

$$A_i(r, t) + \Pi(t-r) + \int_r^t A(r, s) \Pi(s-t) ds = \bar{K}(r, t). \quad (5.2.11)$$

Из этого уравнения следует

$$A(r, r) = \bar{K}(r, r) - \Pi(0), \quad (5.2.12)$$

$$V(r) = -2 \frac{dA(r, r)}{dr} = -2 \frac{d\bar{K}(r, r)}{dr}. \quad (5.2.13)$$

Теперь нам нужно установить связь между ядром $\bar{K}$ и ядром уравнения Гельфанда — Левитана K . Легче всего это сделать следующим образом. Подставим в формулу (5.2.6) выражение (3.1.8а) для функции φ , положим $r > t$ и возьмем промежуточное выражение в формуле (3.2.8). С учетом равенства (5.2.7) из формулы (5.2.6) получаем соотношение

$$\bar{K}(r, t) = G(r, t) + K(r, t) + \int_0^r K(r, s) G(s, t) ds = 0, \quad (5.2.14)$$

которое представляет собой интегральное уравнение Гельфанда — Левитана. Если $r < t$, то функция $\bar{K}(r, t)$ уже не равна нулю. Легко показать, что в этом случае она совпадает с ядром резольвенты $\tilde{K}(t, r)$, введенным в гл. 3 [формулы (3.1.21) и (3.1.22)]. Действительно, при $r < t$ имеем

$$\bar{K}(r, t) = \int_0^\infty \varphi(k, r) \frac{\sin kt}{k} d\rho(k^2) - \delta(r - t). \quad (5.2.15)$$

Интеграл теперь легко вычислить, умножив равенство (3.1.21) на φ и проинтегрировав по $d\rho$. Принимая во внимание условие полноты (2.3.14а), получаем

$$\bar{K}(r, t) \equiv \tilde{K}(t, r), \quad r < t, \quad (5.2.16)$$

где $\tilde{K}$ — ядро резольвенты уравнения Гельфанда — Левитана. Но мы знаем, что $\tilde{K}$ удовлетворяет интегральному уравнению (3.1.22)

$$K(r, t) + \tilde{K}(r, t) + \int_t^r \tilde{K}(r, s) K(s, t) ds = 0. \quad (5.2.17)$$

Отсюда

$$\bar{K}(r, r) = -K(r, r). \quad (5.2.18)$$

Следовательно, потенциал (5.2.13) идентичен потенциалу (3.1.16)

$$V(r) = 2 \frac{dK(r, r)}{dr}, \quad (5.2.19)$$

чем и доказывается эквивалентность метода Марченко методу Гельфанда — Левитана.

Мы предполагали, что связанные состояния отсутствуют. Если же они имеются, то необходимо только учесть соответствующие полюса при вычислении контурных интегралов в верхней полуплоскости, входящих в выражения (5.2.6) и (5.2.9) для величин $\bar{K}$ и Π . Дополнительные члены, которые мы получим по теореме о вычетах, взаимно уничтожатся, и в результате мы снова получим формулы (5.2.11), (5.2.13) и (5.2.19).

Последний из вопросов, рассматриваемых в данной главе, — это вопрос об интегрируемости потенциала. Мы увидим, что потенциал $V(r)$ во многих отношениях ведет себя подобно производной функции $A_0(t)$. Если ввести обозначения

$$s(r) = \int_r^{\infty} |V(t)| dt, \quad (5.2.20a)$$

$$s_1(r) = \int_r^{\infty} t |V(t)| dt, \quad (5.2.20b)$$

то неравенства (5.1.7) и (5.1.8) можно записать в виде

$$|A_1^+(r, t)| < Cs \left(\frac{r+t}{2} \right), \quad (5.2.21a)$$

$$\left| \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{4} V \left(\frac{r+t}{2} \right) \right| < Cs(r) s \left(\frac{r+t}{2} \right), \quad (5.2.21b)$$

где C — соответствующая константа, содержащая $s_1(0)$.

Из интегрального уравнения Марченко вытекает равенство

$$A(r, r) = A_0(2r) + \int_r^{\infty} A(r, t) A_0(r+t) dt, \quad (5.2.22a)$$

которое можно переписать в виде

$$A_0(2r) = A(r, r) + \int_r^{\infty} A(r, 2t-r) A_0(2t) dt. \quad (5.2.22b)$$

Решив это уравнение относительно функции A_0 методом итераций, легко получим неравенство

$$|A_0(2r)| < Cs(r). \quad (5.2.23)$$

Если теперь продифференцировать уравнение (5.2.22b) по переменной r и учесть определение (5.2.20b) и неравенство (5.2.23), то получим

$$|A'_0(2r) + \frac{1}{4} V(r)| < Cs^2(r). \quad (5.2.24)$$

Таким методом можно легко получать оценки, подобные (5.2.23), в частности

$$|A'_0(2r) + \frac{1}{4} V(r)| < C\tau^2(2r), \quad (5.2.25a)$$

где

$$\tau(r) = \int_r^\infty |A'_0(t)| dt. \quad (5.2.25b)$$

Неравенства (5.2.24) и (5.2.25a) указывают на большое сходство между функцией $A'_0(2r)$ и потенциалом $V(r)$. В частности, из них следует полная эквивалентность величин

$$s_1(0) = \int_0^\infty r |V(r)| dr < \infty, \quad (5.2.26a)$$

$$\tau_1(0) = \int_0^\infty t |A'_0(2t)| dt < \infty. \quad (5.2.26b)$$

Что касается других соотношений между свойствами потенциала и S -матрицы или функции Йоста, то мы отсылаем читателя к статьям, указанным в списке литературы. Нетрудно видеть, что выводы о связи между фазовым сдвигом и потенциалом, сделанные в данной главе, совпадают с результатами, полученными в гл. 3, т. е. наиболее общие условия, при которых существует взаимно-однозначное соответствие между короткодействующим потенциалом и фазовым сдвигом, оказываются такими же, как и в гл. 3, § 6.

Интересно отметить, что функция $A(r, r')$ [или $V(r)$] может быть представлена в виде разложения по произведениям возмущенной и невозмущенной волновых функций. Из выражений (5.2.4a), (5.2.4b) и (5.1.5) легко можно получить разложение (справедливое в отсутствие связанных состояний)

$$A(r, t) = (2i\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [S(k) - 1] f(k, r) e^{ikt} dk \quad (5.2.27)$$

с тривиальными дополнениями при наличии связанных состояний. Аналогичные результаты можно получить методом Гельфанда — Левитана и в случае обратной задачи при фиксированной энергии [см., например, формулу (12.2.3)]. Такие формулы [при $t = r$ или для $V(r)$] применялись в некоторых итерационных методах.

Краткое изложение метода Марченко. Физик, желающий определить потенциал по данным рассеяния, должен сначала вычислить $A_0(t)$, исходя из $S(k)$ и имеющейся информации о связанных состоя-

ниях¹⁾, по формуле (5.2.4б) или (5.2.4в). Затем нужно решить уравнение Марченко (5.2.4а) и, найдя $A(r, r)$, вычислить потенциал по формуле (5.1.10).

Замечание. Наши выводы решения задачи методами Гельфанда — Левитана и Марченко наиболее широко приняты в теоретической физике. Общая схема этих выводов приведена в гл. 13, 1, и в данной книге можно найти много примеров ее применения (например, в гл. 9). Эти выводы можно назвать «стандартными». С точки зрения математика некоторые их моменты выглядят недостаточно убедительными. Читатель, интересующийся очень полным и математически строгим выводом, может обратиться к следующим работам:

1) о первом шаге спектральная функция $\rightarrow$ потенциал (метод Гельфанда — Левитана): статьи Гельфанда и Левитана [170, 171] или Левитана и Гасимова [276];

2) о шаге $\delta_0(k) \rightarrow$ спектральная функция и о непротиворечивости метода Гельфанда — Левитана: обзор Фаддеева [147];

3) о методе Марченко: книга Аграновича и Марченко [6].

Заметим, однако, что многие этапы выводов, которые были изложены здесь в соответствии со стандартами физиков, легко переписать в форме, отвечающей стандартам математиков. Для примера покажем, как можно обойтись без применения δ -функций при выводе уравнения Марченко.

Предположим для простоты, что связанные состояния отсутствуют. Исследование прямой задачи привело к представлению (5.1.5) $s t \rightarrow A(r, t) \in L^1 \cap L^2$. Кроме того, разность $S(k) - 1$ есть фурье-образ функции A_0 из пространства $L^1(R)$:

$$S(k) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t) e^{-ikt} dt. \quad (5.2.28)$$

Из формул (1.1.19) (при $l = 0$), (5.1.5), (1.4.11) и (5.2.28) мы получаем уравнение

$$\begin{aligned} 2ik \left[\varphi(k, r) \left(\frac{1}{\Gamma(k)} - 1 \right) + \left(\varphi(k, r) - \frac{\sin kr}{k} \right) \right] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} B(r, t) e^{-ikt} dt, \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

¹⁾ Условия согласования такие же, как в гл. 3, § 6. В частности, функция $S(k)$ должна иметь вид $\exp[2i\delta(k)]$, где $\delta(k)$ — функция, действительная при действительных k (унитарность) и удовлетворяющая формуле Левинсона (2.1.11).

где функция

$$B(r, t) = A_0(r+t) + \int_r^\infty A_0(t+u) A(r, u) du - \theta(t-r) A(r, t) + \\ + \theta[-(t+r)] A(r, -t) \quad (5.2.30)$$

принадлежит пространству L^1 , а θ — ступенчатая функция. Фурье-образ $t \rightarrow \tilde{B}(r, t)$ правой части почти всюду равен $t \rightarrow B(r, t)$ при $t \in R$ и, в частности, при $t \geq r \geq 0$. Мы можем вычислить $\tilde{B}(r, t)$ по формуле

$$\tilde{B}(r, t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R 2ik \left[\varphi(k, r) \left(\frac{1}{\Gamma(k)} - 1 \right) + \right. \\ \left. + \left(\varphi(k, r) - \frac{\sin kr}{ik} \right) \right] e^{ikt} dk. \quad (5.2.31)$$

Подынтегральное выражение в формуле (5.2.31) есть функция, аналитическая относительно переменной k в верхней полуплоскости $\text{Im } k > 0$ и в силу неравенства (1.2.8) экспоненциально стремящаяся к нулю (при любом $t > r \geq 0$), когда $|k| \rightarrow \infty$, $\text{Im } k > 0$. Кроме того, она стремится к нулю при $k \rightarrow \pm\infty$. Выполнив контурное интегрирование, получим, что функция $\tilde{B}(r, t)$ равна нулю при $t > r \geq 0$ и, следовательно, $B(r, t) =$ почти всюду при $t > r \geq 0$. Таким образом, мы получаем, что почти всюду справедливо уравнение Марченко.

$$A(r, t) \stackrel{\text{почти всюду}}{=} A_0(r+t) + \int_r^\infty A_0(t+u) A(r, u) du \quad (t > r \geq 0), \quad (5.2.32)$$

а в силу непрерывности оно выполняется и всюду (при $t \geq r \geq 0$).

§ 3. Замечания и литература

Представление (5.1.5) получено Левиным [267]. Интегральное уравнение (5.2.4а) выведено Марченко [290]. Другие результаты и выводы, в частности установление тесной связи между абсолютной интегрируемостью функций $rV(r)$ и $tA'_0(t)$, принадлежат Аграновичу и Марченко [3—6]. Соотношение между поведением потенциала и функции Йоста или S -матрицы рассматривалось также в работах Нейгауза [313], Фридмана [158], Йоста [227] и Ньютона [315].

В книге Аграновича и Марченко [6] рассматривается общий случай системы уравнений в матричной форме и приводится весьма подробный список литературы.

Соотношение между ядром Гельфанда — Левитана K и ядром A [формулы (5.2.11) и (5.2.16)] установлено Фаддеевым [148].

Обобщение на случай сингулярных потенциалов, рассмотренных в гл. 1, осуществлено Бетманом и Шаданом [21, 22].

Условия, при которых радиус действия потенциала конечен, найдены Раммом [350].

ПРИМЕРЫ

§ 1. Потенциалы Баргмана

Ниже мы рассмотрим некоторые простые примеры потенциалов Баргмана. Вообще говоря, это потенциалы, функция Йоста которых представляет собой рациональную функцию переменной k . В гл. 4, § 3, мы исследовали даже более общий случай, когда потенциал состоит из произвольного исходного потенциала, о котором все известно, и некой прибавки, наличие которой приводит к умножению исходной функции Йоста на рациональную функцию переменной k .

Здесь мы рассмотрим просто случай S -волны, когда исходный потенциал равен нулю. В самом простом случае у функции Йоста имеются один нуль и один полюс. В силу свойства симметрии (1.3.14) мы имеем

$$F(k) = \frac{k + ia}{k + ib}, \quad (6.1.1)$$

где a и b — действительные величины и необходимо, чтобы выполнялось условие $b > 0$. При $a > 0$ связанных состояний нет. Если же $a < 0$, то мы имеем одно связанное состояние с энергией $-a^2$. При $a = 0$ данное связанное состояние переходит в «резонанс» при нулевой энергии.

Случай, когда нет связанных состояний. Метод, изложенный в гл. 4, § 3, принимает простейшую форму. На основании равенств

$$\begin{aligned} F_1(k) &= 1, \\ f_1(k, r) &= e^{ikr}, \\ \varphi_1(k, r) &= \frac{\sin kr}{k} \end{aligned}$$

и

$$|F(k)|^{-2} - 1 = \frac{b^2 - a^2}{k^2 + a^2}, \quad k \text{ действительное} \quad (6.1.2)$$

в соответствии с формулой (4.3.7) получаем выражение

$$G(r, t) = -(a^2 - b^2) e^{-ar} \frac{\operatorname{sh} at}{a}, \quad r \geq t \quad (6.1.3)$$

и симметричное ему выражение при $r < t$. Решив уравнение Гельфанда — Левитана с этим ядром, мы получим при $r \geq t$

$$K(r, t) = -2 \frac{(b-a) e^{-br}}{1 + \beta e^{-2br}} \operatorname{sh} bt, \quad (6.1.4)$$

$$V(r) = -8b^2\beta \frac{e^{-2br}}{(1 + \beta e^{-2br})^2}, \quad (6.1.5)$$

где $b = (b-a)/(b+a)$. Это один из потенциалов Эккарта [23, 24].

Потенциал (6.1.5) соответствует равенству

$$k \operatorname{ctg} \delta = \frac{ab}{b-a} + \frac{1}{b-a} k^2 = -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2, \quad (6.1.6)$$

т. е. случаю, когда приближение эффективного радиуса приводит к точному результату при всех энергиях. Это двухпараметрическое семейство потенциалов, в котором двумя параметрами могут служить длина рассеяния a_0 и эффективный радиус r_0 , так что

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{r_0} [-1 + (1 - 2r_0 a_0^{-1})^{1/2}], \\ b &= \frac{1}{r_0} [1 + (1 - 2r_0 a_0^{-1})^{1/2}]. \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Если $b > a > 0$, то $r_0 > 0$, $a_0 < 0$: потенциал соответствует притяжению, но недостаточно глубок, чтобы возникло связанное состояние. При $a > b > 0$ мы имеем $r_0 < 0$, $a_0 > 0$, и потенциал всюду является отталкивающим. Приближение эффективного радиуса в низкоэнергетическом нейтрон-протонном рассеянии в синглетном состоянии соответствует случаю $b > a > 0$.

Нормированная регулярная волновая функция имеет вид

$$\varphi(k, r) = \frac{\sin kr}{r} + \frac{(b^2 - a^2)}{k(k^2 + b^2)} \frac{k \operatorname{sh}(br) \cos(kr) - b \operatorname{ch}(br) \sin(kr)}{b \operatorname{ch}(br) + a \operatorname{sh}(br)}, \quad (6.1.8)$$

а решение Йоста дается выражением

$$f(k, r) = e^{ikr} \left[1 - \left(\frac{2ib}{k + ib} \right) \frac{\beta e^{-2br}}{1 + \beta e^{-2br}} \right]. \quad (6.1.9)$$

Отметим, что асимптотический хвост потенциала во всех случаях, кроме случая $b = 0$, имеет вид $\exp(-2br)$. В последнем же случае мы имеем

$$V(r) = \frac{2a^2}{(1 + ar)^2}. \quad (6.1.10)$$

Это потенциал с большим радиусом действия, не удовлетворяющий условию (1.1.3). Фазовый сдвиг, нормированный так, что он обращается в нуль на бесконечности, равен $-\pi/2$ при нулевой энергии, и теорема Левинсона нарушается.

Когда $a = 0$, мы имеем «резонанс» при нулевой энергии. Фазовый сдвиг здесь равен $\pi/2$, и мы имеем бесконечное сечение рассеяния. Соответствующий потенциал имеет вид

$$V(r) = \frac{-2b^2}{\text{ch}^2 br} \quad (6.1.11)$$

Случай одного связанного состояния. В этом случае $a < 0$ и, следовательно, у нас имеется одно связанное состояние с энергией $-a^2$. Теперь у нас целое семейство фазово-эквивалентных потенциалов, различающихся нормировочной константой связанного состояния C . Мы можем идти дальше двумя путями: либо решать задачу для всего класса, и тогда у нас будут три параметра (a , b и нормировочная постоянная C), либо записать функцию Йоста в виде

$$F(k) = \frac{k - ia}{k + ib} \frac{k + ia}{k - ia} = F_1(k) F_2(k), \quad (6.1.12)$$

решить задачу для функции F_1 , соответствующей случаю отсутствия связанных состояний, а затем ввести F_2 и одно связанное состояние методом, изложенным в гл. 4, § 1. В обоих вариантах вычисления элементарны и сводятся к простым алгебраическим выкладкам. Примем обозначения из выражений (4.2.8)–(4.2.10). При $\lambda = 0$ мы получим те же формулы, что и в случае, когда отсутствуют связанные состояния:

$$V_0(r) = -8b^2 \frac{\beta e^{-2br}}{(1 + \beta e^{-2br})^2}, \quad (6.1.13)$$

где $\beta = (b - a)/(b + a) = (b + \gamma)/(b - \gamma)$ и снова

$$k \text{ ctg } \delta = \frac{-b\gamma}{b + \gamma} + \frac{1}{b + \gamma} k^2. \quad (6.1.14)$$

Те же соотношения (6.1.7) связывают величины a и b с длиной рассеяния и эффективным радиусом. Регулярное решение снова дается выражением (6.1.8), а функция Йоста — выражением (6.1.9). Напомним, что в рассматриваемом случае $a = -\gamma$. Волновую функцию связанного состояния получим подстановкой $k = -ia$ в формулу (6.1.8) или (6.1.9). В соответствии с выражением (1.1.19) в результате получим

$$\varphi_0(r) = \frac{-1}{2\gamma} F(-i\gamma) f(i\gamma, r) = -\frac{1}{b - \gamma} f(i\gamma, r), \quad (6.1.15a)$$

$$\psi_0(r) \equiv f(i\gamma, r) = e^{-\gamma r} \frac{(b - \gamma) \text{sh } br}{b \text{ ch } br - \gamma \text{ sh } br}. \quad (6.1.15b)$$

Нормировочная постоянная волновой функции связанного состояния в соответствии с формулой (2.1.14) определяется соотношением

$$C_0^{-1} = \int_0^{\infty} \Phi_0^2(r) dr = \frac{1}{2\gamma(b^2 - \gamma^2)}. \quad (6.1.16)$$

Мы видим, что она зависит от величин a и b .

Основное различие между данным случаем и предыдущим состоит в том, что параметр a (отрицательный) не может быть слишком большим по абсолютной величине. Действительно, если $a < < -b$, то потенциал V_0 имеет полюс второго порядка где-то на положительной оси r и потому лишен физического смысла. Из формулы (6.1.16) видно также, что постоянная нормировки C_0 в этом случае отрицательна.

Получив эти формулы, мы можем теперь построить все фазово-эквивалентное семейство и соответствующие волновые функции при любом значении λ , пользуясь формулами (4.2.7)–(4.2.13б). Полные выражения для них слишком громоздки, а потому мы приведем только основные результаты, которые позволят читателю легко найти волновые функции.

Как явствует из выражения (6.1.13), у потенциала V_0 имеется асимптотический «хвост» $\exp(-2br)$, тогда как у всех других членов семейства [формула (4.2.9)] имеется более длинный хвост $\exp(-2\gamma r)$, поскольку теперь $\gamma < b$. Следовательно, потенциал V_0 — это единственный член семейства, имеющий самый короткий хвост, т. е. быстрее всех других убывающий на бесконечности. Функция $N(\lambda, r)$, которую мы ввели в гл. 4, имеет вид

$$N(\lambda, r) = 1 + \frac{\lambda}{8\gamma} \frac{b-\gamma}{b+\gamma} \frac{b \operatorname{ch} br + \gamma \operatorname{sh} br}{b \operatorname{ch} br - \gamma \operatorname{sh} br} e^{-2\gamma r}. \quad (6.1.17)$$

Интегралы в формулах (4.2.13а) и (4.2.13б) легко вычисляются с помощью тождества (4.4.4), справедливого для любых двух решений уравнения Шредингера, соответствующих разным энергиям, и поэтому можно получить точные аналитические выражения для регулярного решения и решения Йоста:

$$f(\lambda; k, r) = f_0(k, r) + \frac{\lambda \psi_0(r)}{4N(\lambda, r)} \frac{1}{k^2 + \gamma^2} W[f_0(k, r), \psi_0(r)], \quad (6.1.18)$$

$$\varphi(\lambda; k, r) = \varphi_0(k, r) + \frac{\lambda \psi_0(r)}{4N(\lambda, r)} \frac{1}{k^2 + \gamma^2} W[\varphi_0(k, r), \psi_0(r)]. \quad (6.1.19)$$

В более компактной форме записи имеем

$$V(\mu, r) = -4\gamma \frac{d}{dr} \left[\operatorname{sh} br \frac{g(\mu; \gamma, r)}{g(\mu; b+\gamma, r) - g(\mu; \gamma-b, r)} \right]. \quad (6.1.20a)$$

где

$$g(\mu; x, r) = x^{-1} (e^{-xr} + \mu \operatorname{sh} xr). \quad (6.1.20b)$$

Нормированная волновая функция связанного состояния определяется соотношением

$$C_0^{1/2} \varphi_0(\mu, r) = 2 \left(\frac{\mu\gamma}{b^2 - \gamma^2} \right)^{1/2} \frac{\operatorname{sh} br}{g(\mu; \gamma + b, r) - g(\mu; \gamma - b, r)}. \quad (6.1.21)$$

Соотношение между величинами λ и μ имеет вид

$$\mu = 2 \left(1 + \frac{\lambda}{8\gamma} \frac{b - \gamma}{b + \gamma} \right)^{-1}, \quad \lambda \in \left[-\frac{8\gamma(b + \gamma)}{b - \gamma}, \infty \right], \quad (6.1.22)$$

так что при изменении величины λ в ее допустимой области μ изменяется от 0 до ∞ . При $\lambda = 0$ мы имеем $\mu = 2$ и самый короткий радиус действия потенциала.

В качестве особого случая можно рассмотреть предел при $\gamma \rightarrow b$. В этом случае потенциал V_0 тождественно равен нулю, поскольку $\beta = \infty$, так же, как и $\varphi_0, \dots$ и др. Все фазово-эквивалентное семейство обращается в нуль при конечных значениях λ . Но если при $\gamma \rightarrow b$ мы допустим, что одновременно и $\mu \rightarrow \infty$, причем

$$2\mu(b - \gamma) = A^{-1}, \quad (6.1.23)$$

то [формула (6.1.20)] в пределе получится потенциал, равный

$$V(r) = 2 \frac{\operatorname{sh}(\gamma r) \left[2\gamma \left(\frac{1}{2} r - A \right) \operatorname{ch}(\gamma r) - \operatorname{sh}(\gamma r) \right]}{\left[A + \frac{1}{2} ((\operatorname{sh} 2\gamma r)/2\gamma - r) \right]^2}, \quad (6.1.24)$$

где $\gamma^2 = a^2 = b^2$ есть энергия связанного состояния. Из функции Йоста

$$F(k) = \frac{k - i\gamma}{k + i\gamma} \quad (6.1.25)$$

мы получим

$$\cos \delta = \frac{k^2 - \gamma^2}{k^2 + \gamma^2}, \quad \sin \delta = \frac{2k\gamma}{k^2 + \gamma^2}. \quad (6.1.26)$$

Волновые функции имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(k, r) = & \frac{\sin kr}{kr} - \\ & - \frac{\operatorname{sh}(\gamma r) [\gamma \sin(kr) \operatorname{ch}(\gamma r) - k \cos(kr) \operatorname{sh}(\gamma r)]}{k(k^2 + \gamma^2) \left[A + \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} 2\gamma r}{2\gamma} - r \right) \right]^2}, \end{aligned} \quad (6.1.27)$$

$$\varphi_0(r) = \frac{A \operatorname{sh} \gamma r}{\gamma \left[A + \frac{1}{2} ((\operatorname{sh} 2\gamma r)/2\gamma - r) \right]}. \quad (6.1.28)$$

Легко видеть, что нормировочная константа для связанного состояния определяется соотношением

$$C_0^{-1} = \frac{A}{\gamma^2}. \quad (6.1.29)$$

Рассмотрим теперь предельный случай $\gamma \rightarrow 0$. Предельный потенциал при конечном $\mu = 2\gamma^2/A$ таков:

$$V(r) = \frac{6r(r^3 - 2\mu)}{(r^3 + \mu)^2}. \quad (6.1.30)$$

Это далекодействующий потенциал, который не удовлетворяет условию (1.1.3). В этом случае мы имеем настоящее связанное состояние при нулевой энергии, волновая функция которого имеет вид

$$\varphi_0(r) = \frac{\mu r}{\mu + r^3}. \quad (6.1.31)$$

Функция Йоста тождественно равна единице, а фазовый сдвиг — нулю¹). Это также легко видеть из выражения для волновой функции

$$\begin{aligned} \varphi(k, r) = & k^{-1} \sin kr + 3r^2(r^3 + \mu)^{-1} k^{-2} \cos kr - \\ & - 3r(r^3 + \mu)^{-1} \frac{\sin kr}{k^3}. \end{aligned} \quad (6.1.32)$$

Более общий случай. В двух предыдущих случаях мы имели два параметра в данных рассеяния: длину рассеяния a_0 и эффективный радиус r_0 . Энергия связи $-\gamma^2$ была функцией этих двух параметров. В данном случае мы снова рассмотрим формулу приближения эффективного радиуса (6.1.14) и предположим, что она точна при всех энергиях. Но теперь будем предполагать, что энергия связи $-\gamma^2$ не зависит от a_0 и r_0 , т. е. функция Йоста имеет два нуля $k = \pm i\gamma$ и два полюса:

$$\begin{aligned} F(k) = & \frac{k^2 + \gamma^2}{[k + i(\beta - \sigma)][k + i(\beta + \sigma)]}, \\ \beta = & r_0^{-1}, \quad \sigma = r_0^{-1}(1 - 2r_0 a_0^{-1})^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.1.33)$$

и будем, конечно, предполагать, что $2r_0/a_0 < 1$, $a_0 > 0$, $r_0 > 0$.

Мы можем применить здесь метод гл. 4, § 1, рассматривая сначала вспомогательный потенциал V_1 , который не имеет связанных состояний и для которого $|F_1(k)| = |F(k)|$. Его функция Йоста имеет вид

$$F_1(k) = \frac{(k + i\gamma)^2}{[k + i(\beta - \sigma)][k + i(\beta + \sigma)]}. \quad (6.1.34)$$

¹) В связи с этим такие потенциалы получили название прозрачных (другие примеры см. в гл. 8).

Ядро G уравнения Гельфанда — Левитана, которое позволяет выразить V через V_1 , имеет в данном случае только один член, а поэтому все становится совершенно тривиальным. Если написать

$$\gamma = (\beta + \sigma) \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}, \quad -1 < \lambda < 1, \quad (6.1.35)$$

то потенциал $V_1(r)$, полученный так, как говорилось в гл. 4, § 3, можно представить в виде

$$\begin{aligned} V_1(r) = & 2\beta\sigma \{(\beta + \lambda\sigma)^2 (\sigma + \lambda\beta)^2 (\beta - \sigma)^2 [e^{1/2(\beta+\sigma)r} - \lambda^2 e^{-1/2(\beta+\sigma)r}]^2 - \\ & - \lambda^2 (\beta + \sigma)^2 [(\beta + \lambda\sigma)^2 e^{1/2(\beta-\sigma)r} - (\sigma + \lambda\beta)^2 e^{-1/2(\beta-\sigma)r}]^2\} \times \\ & \times \{(\beta + \lambda\sigma)^2 [(\sigma e^{\beta r} + \beta \lambda^2 e^{-\sigma r})] - (\sigma + \lambda\beta)^2 [\beta e^{\sigma r} + \sigma \lambda^2 e^{-\beta r}]\}^{-2}, \end{aligned} \quad (6.1.36)$$

и соответствующая регулярная функция при $E = k^2 = -\gamma^2$ примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) = & \varphi_1(i\gamma, r) = e^{\gamma r} (1 - \lambda^2) \times \\ & \times \frac{(\beta + \lambda\sigma)(\sigma e^{\beta r} + \beta \lambda e^{-\sigma r}) - (\sigma + \lambda\beta)(\beta e^{\sigma r} + \lambda \sigma e^{-\beta r})}{(\beta + \lambda\sigma)^2 (\sigma e^{\beta r} + \beta \lambda^2 e^{-\sigma r}) - (\sigma + \lambda\beta)^2 (\beta e^{\sigma r} + \lambda^2 \sigma e^{-\beta r})}. \end{aligned} \quad (6.1.37)$$

Напомним, что эта функция не соответствует какому-либо связанному состоянию.

Интегральное уравнение для $K(r, t)$ имеет вид

$$K(r, t) + C\varphi_1(r)\varphi_1(t) + C\varphi_1(t) \int_0^r K(r, s)\varphi_1(s) ds = 0.$$

Его решение таково:

$$K(r, t) = - \frac{C\varphi_1(r)\varphi_1(t)}{1 + C \int_0^r \varphi_1^2(t) dt}, \quad (6.1.38)$$

и потенциал:

$$V(r) = V_1(r) - 2C \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\varphi_1^2(r)}{1 + C \int_0^r \varphi_1^2(t) dt} \right). \quad (6.1.39)$$

Волновая функция связанного состояния:

$$\begin{aligned} \varphi(i\gamma, r) = & \varphi_1(i\gamma, r) + \int_0^r K(r, t)\varphi_1(i\gamma, t) dt = \\ = & \frac{\varphi_1(i\gamma, r)}{1 + C \int_0^r \varphi_1^2(i\gamma, t) dt}. \end{aligned} \quad (6.1.40)$$

§ 2. Сингулярные потенциалы

Рассмотрим в качестве последнего примера случай сингулярных осциллирующих потенциалов (гл. 1, § 6). Мы снова возьмем уравнение Гельфанда — Левитана и для простоты предположим, что связанных состояний нет. Задание функции Йоста или спектральной плотности равнозначно заданию функции $H(t)$, входящей в формулы (2.4.12) и (3.2.8), которой определяется ядро $G(r, t)$ интегрального уравнения. Раньше было показано [формула (2.4.15)], что в точке $t = r$, являющейся обычно особой точкой функций G и K , основная часть функции H дается равенством

$$H(r - t) \approx W(r - t), \quad (6.2.1)$$

где W — интеграл от потенциала (1.6.1). Следовательно, для того чтобы сингулярный потенциал был осциллирующим, необходимо, чтобы функция $H(t)$ была осциллирующей и сингулярной в начале координат.

Пример такого рода — функция

$$H(t) = t^{-\alpha} \sin \frac{a}{t} e^{-\mu t}, \quad \alpha < 1. \quad (6.2.2)$$

Она соответствует короткодействующему потенциалу, и очевидно, что

$$G(r, t) = \frac{\bar{G}(r, t)}{|r - t|^\alpha}, \quad (6.2.3)$$

где $\bar{G}$ — ограниченная функция.

Согласно общей теории уравнений Фредгольма с сингулярным, но интегрируемым ядром, после достаточно большого числа итераций в таком уравнении можно получить конечное ядро. Сингулярным же будет только неоднородный член. В случае нашего ядра (6.2.3), когда $\alpha \neq 1/2$, для этого необходимо n итераций, причем $n \geq (1 - \alpha)^{-1}$ (при $\alpha = 1/2$ нужно три итерации из-за логарифма во второй итерации). Так или иначе, выполнив необходимое число итераций, мы получим

$$K + G_1 + \int KG_2 dt = 0,$$

где G_1 — сумма итераций для функции G , а G_2 — ее последняя итерация, $G^{(n)}$. Тогда можно показать, что сингулярную часть потенциала V мы получим, положив $K = G_1$. Например, при $\alpha = 1/2$ имеем

$$\begin{aligned} V(r) \underset{r \rightarrow 0}{\approx} 2e^{-2\mu r} \left[2a(2r)^{-5/2} \cos \frac{a}{2r} + \right. \\ \left. + (2r)^{-3/2} \sin \frac{a}{2r} + 2\mu r^{-1/2} \sin \frac{a}{2r} \right] + \dots \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Поведение фазового сдвига при высокой энергии описывается выражением

$$\delta(k) \underset{k \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \operatorname{Im} [(1-i)(k+i\mu)^{-1/2} \times \\ \times (e^{2ia^{1/2}(k+i\mu)^{1/2}} - e^{-2a^{1/2}(k+i\mu)^{1/2}})]. \quad (6.2.5)$$

Мы видим, что, неограниченно осциллируя, он убывает как $k^{-1/2}$.

Другой пример можно получить, задав величину $\gamma(t)$ в выражении (2.4.4). Функция Йоста в этом случае дается выражениями (2.4.5) и (2.4.6). Положив, например,

$$\gamma(t) = t^{-1/2} \sin \frac{a}{t}, \quad (6.2.6a)$$

получим фазовый сдвиг

$$\delta(k) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2k} \right)^{1/2} [\sin 2(ak)^{1/2} - \cos 2(ak)^{1/2} - e^{-2(ak)^{1/2}}], \quad (6.2.6b)$$

который тоже осциллирует. При $t \rightarrow 0$ имеем

$$H(t) \approx \gamma(t), \quad (6.2.7)$$

и интегральное уравнение дает

$$V(r) \underset{r \rightarrow 0}{=} 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[(2r)^{-1/2} \sin \frac{a}{2r} \right] + O(r^{-1}). \quad (6.2.8)$$

§ 3. Замечания и литература

Много различных потенциалов Баргмана было впервые приведено самим Баргманом [23, 24]¹⁾. Примеры (6.1.5), (6.1.10), (6.1.11), (6.1.13) и (6.1.24) принадлежат ему. Общие формы для фазово-эквивалентных потенциалов (6.1.17)–(6.1.19) получены Йостом и Коном [229]. Потенциалы (6.1.5) и (6.1.13), для которых формула приближения эффективного радиуса оказывается точной при всех энергиях, исследовали также методом Гельфанда — Левитана Йост и Кон [230]. Компактные формы (6.1.20), (6.1.21) получены Баргманом (не опубликовано) и приведены в работе Ньютона [316]. Потенциал (6.1.24) и его волновая функция (6.1.27) были также получены Мозесом и Туаном [310], которые рассмотрели и предельный случай (6.1.30) с выражениями (6.1.31) и (6.1.32).

Более общий случай, соответствующий выражению (6.1.33), можно найти у Баргмана [24], а также у Йоста и Кона [230].

¹⁾ Обобщение метода Баргмана на случай данных рассеяния при фиксированной энергии (потенциалы Баргмана — Малярова) и результаты численных расчетов, выполненных такими методами, см. в работах [466–470]. — Прим. ред.

Простые потенциалы Баргмана, для которых приближение эффективного радиуса является точным при всех энергиях, были использованы Шаданом [80, 81] и Ньютоном [316, 317] для представления феноменологического нейтрон-протонного взаимодействия без тензорных сил при низких энергиях. См. также работу Блажека [43].

Мы уже упоминали в гл. 3 работу Фултона и Ньютона [164], посвященную потенциалам Баргмана для системы уравнений при наличии спин-орбитальных и тензорных сил. О применении к феноменологическим нейтрон-протонным взаимодействиям см. работу Ньютона и Фултона [324]. По поводу других методов и дополнительных численных расчетов см. работы Свона и Пирса [400], Свопа [399] и Бенна и Шарфа [29]. Сингулярные потенциалы, рассмотренные в гл. 2, § 2, в рамках методов Гельфанда — Левитана и Марченко, были введены Бетманом и Шаданом [21, 22].

Задача двух тел при низких энергиях, в которой разложение, получаемое в приближении эффективного радиуса, сначала заменяется приближением Падэ, а затем используется в связи с методом Марченко, изложенным в гл. 5, детально рассмотрена Ламбертом и др. [260]. Эти авторы показали, что в случае, когда нет связанных состояний, условие $\delta(0) - \delta(\infty) = 0$ оказывается достаточным для того, чтобы заданное приближение Падэ $[M, N]$ для $\text{ctg } \delta$ с $M \leq N - 1$ точно воспроизводилось потенциалом Баргмана.

Попытки (гл. 3 и 6) применить общие строгие методы к задачам, не относящимся к квантовой механике, делались, например, в геофизике [380, 381, 415]. Более подробные сведения о применении этих методов в других областях можно найти у Ньютона [500] и Сабатье [376, 501].

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ПОТЕНЦИАЛОВ

§ 1. Потенциалы Юкавы и прямая задача

Потенциалы Юкавы играли важную роль в физике элементарных частиц и были предметом интенсивного исследования в прошлом. Обратную задачу для них можно решать и методом Гельфанда — Левитана, и методом Марченко, но Мартен разработал специальный метод, позволяющий решать обе задачи (прямую и обратную) путем итераций, основанных на определенных свойствах преобразования Лапласа. Мы будем следовать его методу.

Итак, мы хотим показать, что в случае потенциалов Юкавы обратную задачу рассеяния можно решить следующим способом. Сначала рассчитаем по фазовому сдвигу S -матрицу при действительных значениях импульса k . Если данные рассеяния соответствуют потенциалам Юкавы, то S -матрица обязательно должна быть голоморфной в плоскости переменной k с двумя разрезами [292, 294, 131]

$$k = \pm i\chi, \quad \chi > \frac{\mu_0}{2},$$

вдоль мнимой оси. Мы знаем, что ее полюса в верхней полуплоскости соответствуют связанным состояниям и расположены на мнимой оси. Они простые. Все эти сингулярности (разрезы и полюса) в принципе могут быть получены аналитическим продолжением с действительной оси. Нам нужно показать, что разрывом S -матрицы на ее разрезе в верхней полуплоскости простым образом определяется потенциал. Для простоты мы снова будем рассматривать S -волну и предположим, что потенциал имеет вид

$$V(r) = \int_{\mu_0}^{\infty} C(\alpha) e^{-\alpha r} d\alpha, \quad \mu_0 > 0, \quad (7.1.1)$$

где $C(\alpha)$ — ограниченная функция, интегрируемая на бесконечности, характер интегрируемости которой мы уточним позже. Заметим, что простой потенциал Юкавы $[\exp(-\mu r)]/r$ получится, если положить $C(\alpha) = 1$. Решение Йоста можно записать в виде

$$f(k, r) = e^{ikr} g(k, r), \quad (7.1.2)$$

где g — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$g'' + 2ikg' = V(g). \quad (7.1.3)$$

Граничное условие (4.1.15) принимает вид

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(k, r) = 1. \quad (7.1.4)$$

Поэтому мы можем принять «гипотезу»

$$g(k, r) = 1 + \int_0^{\infty} \rho(k, \alpha) e^{-\alpha r} d\alpha, \quad (7.1.5)$$

совершенно естественную, так как потенциал дастся преобразованием Лапласа (7.1.1.) и функция g должна удовлетворять условию (7.1.4). Подставив выражения (7.1.5) и (7.1.1) в уравнение (7.1.3), получим

$$\alpha(\alpha - 2ik) \rho(k, \alpha) = C(\alpha) + \int_0^{\alpha} C(\alpha - \beta) \rho(k, \beta) d\beta. \quad (7.1.6)$$

Это интегральное уравнение Вольтерра, в котором величина k служит параметром. Если k — действительная величина, то оно представляет собой регулярное уравнение и из него сразу же видно, что

$$\rho(k, \alpha) = 0, \quad \alpha < \mu_0, \quad (7.1.7)$$

как следствие выражения (7.1.1). Стало быть, интегрирование в формуле (7.1.5) производится от μ_0 до бесконечности и можно, пользуясь ступенчатой функцией Хевисайда θ , записать уравнение (7.1.6) в виде

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha - 2ik) \rho(k, \alpha) = C(\alpha) + \theta(\alpha - 2\mu_0) \times \\ \times \int_{\mu_0}^{\alpha - \mu_0} C(\alpha - \beta) \rho(k, \beta) d\beta. \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

У данного уравнения есть замечательное свойство: оно точно решается итерациями в следующих один за другим интервалах $[\mu_0, (n+1)\mu_0]$. Зная функцию $\rho(k, \alpha)$ в интервале $[\mu_0, n\mu_0]$, мы можем вычислить ее точно в следующем интервале. Исходя из уравнения (7.1.8), мы должны начать с

$$\rho(k, \alpha) = \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha - 2ik)}, \quad \mu_0 \leq \alpha < 2\mu_0. \quad (7.1.9)$$

Поэтому предположим, что функция $\rho(k, \alpha)$ известна в интервале $[\mu_0, n\mu_0]$. Ясно, что при $\alpha \in [n\mu_0, (n+1)\mu_0]$ интеграл

в формуле (7.1.8) берется только по интервалу $[\mu_0, 2\mu_0)$, в котором функция $\rho(k, \alpha)$ известна (по предположению). Функция же $\rho(k, \alpha)$ в новом интервале получается простым интегрированием по предыдущему интервалу. Начав с функции (7.1.9), мы можем таким путем точно найти функцию $\rho(k, \alpha)$ в любом конечном интервале, сделав конечное число итераций. Итак, исходя из функции (7.1.9), получаем

$$\rho(k, \alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha - 2ik)} \left(C(\alpha) + \int_{\mu_0}^{\alpha - \mu_0} \frac{C(\alpha - \beta) C(\beta)}{\beta(\beta - 2ik)} d\beta \right), \quad 2\mu_0 \leq \alpha < 3\mu_0. \quad (7.1.10)$$

Чтобы завершить доказательство того, что полученная таким путем функция действительно удовлетворяет уравнению (7.1.3), мы должны показать, что интеграл в формуле (7.1.5) сходится на своем верхнем пределе. Поэтому нам нужно наложить некоторые ограничения на функцию $C(\alpha)$. Мы не будем рассматривать детально этот вопрос, а просто приведем результат. Во-первых, заметим, что во всех последовательных интервалах нет необходимости требовать, чтобы величина k была действительной. Если величина k лежит вне интервала $[-i\mu_0/2, -i\infty)$, то все следующие друг за другом подынтегральные выражения имеют смысл. Поэтому рассмотрим k вне указанного разреза, т. е.

$$\left| \arg k - \frac{3\pi}{2} \right| > \varepsilon. \quad (7.1.11)$$

В такой разрезанной плоскости имеем

$$|\alpha - 2ik| > \alpha \sin \varepsilon, \quad (7.1.12a)$$

$$|\alpha - 2ik| > 2|k| \sin \varepsilon. \quad (7.1.12b)$$

Неравенства (7.1.12) получены путем проектирования величины $\alpha - 2ik$ на прямую $(0, 2ik)$ и величин $-2ik$ и $\alpha - 2ik$ на действительную ось. Если ввести обозначение

$$\tilde{\rho}(k, \alpha) = \alpha(\alpha - 2ik) \rho(k, \alpha), \quad (7.1.13)$$

то интегральное уравнение принимает вид

$$\tilde{\rho}(k, \alpha) = C(\alpha) + \theta(\alpha - 2\mu_0) \int_{\mu_0}^{\alpha - \mu_0} \frac{C(\alpha - \beta)}{\beta(\beta - 2ik)!} \tilde{\rho}(k, \beta) d\beta. \quad (7.1.14)$$

Предположим, что существует положительная возрастающая функция $B(\alpha)$, такая, что всюду

$$|C(\alpha)| \leq B(\alpha), \quad B'(\alpha) \geq 0. \quad (7.1.15)$$

Согласно неравенству (7.1.12а), имеем

$$\left| \frac{C(\alpha - \beta)}{\beta(\beta - 2ik)} \right| < \frac{B(\alpha)}{\beta^2 \sin \varepsilon}. \quad (7.1.16)$$

Теперь очевидно, что решение уравнения

$$\bar{\rho}(\alpha) = B(\alpha) \left(1 + \int_{\mu_0}^{\alpha} \frac{\bar{\rho}(\beta)}{\beta^2 \sin \varepsilon} d\beta \right), \quad (7.1.17)$$

имеющее вид

$$\bar{\rho}(\alpha) = B(\alpha) \exp \left(\int_{\mu_0}^{\alpha} \frac{B(\beta)}{\beta^2 \sin \varepsilon} d\beta \right), \quad (7.1.18)$$

является мажорантой для функции $\tilde{\rho}(k, \alpha)$. В самом деле, при переходе от (7.1.14) к (7.1.17) мы заменяли величины их абсолютными величинами, мажорировали все множители, а также увеличили интервал интегрирования. Поэтому

$$|\rho(k, \alpha)| < \frac{B(\alpha)}{\alpha^2 \sin \varepsilon} \exp \left(\int_{\mu_0}^{\alpha} \frac{B(\beta)}{\beta^2 \sin \varepsilon} d\beta \right). \quad (7.1.19)$$

Отсюда следует, что при всех значениях переменных α и k , удовлетворяющих условиям

$$\alpha \in [\mu_0, \infty), \quad (7.1.20a)$$

$$\left| \arg k - \frac{3}{2} \pi \right| > \varepsilon, \quad (7.1.20b)$$

где ε — сколь угодно малая положительная величина, функция $\rho(k, \alpha)$ существует, если

$$\int_{\mu_0}^{\infty} \beta^{-2} B(\beta) d\beta < \infty. \quad (7.1.21)$$

Заметим, что в силу неравенства (7.1.15) $rV(r) \in L^1(0, \infty)$. Кроме того, функция ρ при всех значениях α из области ее определения является голоморфной функцией переменной k в плоскости, разрезанной вдоль нижней части мнимой оси от $-i\mu_0/2$ до $-i\infty$. В силу неравенства (7.1.19) мы имеем также

$$\int_{\mu_0}^{\infty} |\rho(k, \alpha)| d\alpha < C_{\varepsilon} < \infty, \quad (7.1.22)$$

где $C_{\varepsilon} \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым обеспечивается абсолютная и равномерная сходимость интеграла в уравнении (7.1.5) в лю-

бой компактной области k -плоскости, даже при $r = 0$. Мы также можем продифференцировать обе части уравнения (7.1.6) по переменной k и, опять учитывая неравенство (7.1.19), получить оценку

$$\int_{\mu_0}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial k} \rho(k, \alpha) \right| d\alpha < C_\varepsilon < \infty, \quad (7.1.23)$$

справедливую в k -плоскости с разрезом. Отсюда следует, что производная

$$\frac{\partial}{\partial k} g(k, \alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial k} \rho(k, \alpha) e^{-\alpha r} d\alpha \quad (7.1.24)$$

также существует в той же плоскости с разрезом при всех $r \geq 0$. Поэтому функция $g(k, r)$, а значит, и функция $f(k, r)$ голоморфны относительно переменной k вне разреза

$$k = -i\chi, \quad \chi \geq \frac{\mu_0}{2},$$

и функция g действительно является решением уравнения (7.1.3) и удовлетворяет граничному условию (7.1.4) при всех k вне разреза. Легко также показать на основании формул (7.1.8), (7.1.12б) и (7.1.19), что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(k, r) = 1, \quad \left| \arg k - \frac{3}{2} \pi \right| > \varepsilon \quad (7.1.25)$$

равномерно по $r \geq 0$.

Поскольку для функции Йоста выполняется равенство

$$F(k) = f(k, 0) = g(k, 0), \quad (7.1.26)$$

она, очевидно, тоже голоморфна в той же плоскости с разрезом и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = 1, \quad \left| \arg k - \frac{3}{2} \pi \right| > \varepsilon \quad (7.1.27)$$

при сколь угодно малом положительном ε . Кроме того, на всю эту плоскость с разрезом распространяется соотношение (1.3.14)

$$F(-k^*) = [F(k)]^*. \quad (7.1.28)$$

Рассмотрим теперь регулярное решение

$$\varphi(k, r) = (2ik)^{-1} [F(-k) f(k, r) - F(k) f(-k, r)]. \quad (7.1.29)$$

Мы знаем, что это целая функция переменной k . Следовательно, разрезы, находящиеся в правой части, должны взаимно унич-

тожиться. На верхнем разрезе (вспомним, что φ — четная функция переменной k)

$$k = i\chi \pm 0, \quad \chi \geq \frac{\mu_0}{2},$$

который проявляется в $F(-k)$ и $f(-k, r)$, мы получим на основании равенства (7.1.28) и условия

$$\varphi(i\chi + 0, r) = \varphi(i\chi - 0, r)$$

с учетом формул (7.1.5) и (7.1.8), что разрыв функции Йоста равен

$$\begin{aligned} 2i\Delta(\chi) &= F(-i\chi + 0) - F(-i\chi - 0) = \\ &= 2i\pi \frac{F(i\chi)}{2\chi} \left[C(2\chi) + \theta(2\chi - \mu_0) \int_{\mu_0}^{2\chi - \mu_0} C(2\chi - \beta) \rho(-i\chi, \beta) d\beta \right]. \end{aligned} \quad (7.1.30)$$

Вследствие равенства (7.1.28) $\Delta(\chi)$ — действительная величина.

Предположим теперь, что все полюса, соответствующие связанным состояниям [нули функции $F(i\chi)$, $\chi > 0$], лежат вне верхнего разреза, т. е. в интервале $(0, i\mu_0/2)$. Разрыв S -матрицы

$$S(k) = \frac{F(-k)}{F(k)} \quad (7.1.31)$$

вдоль верхнего разреза будет равен (определение функции D !)

$$S(i\chi + 0) - S(i\chi - 0) = 2iD(\chi) = \frac{2i\Delta(\chi)}{F(i\chi)}. \quad (7.1.32)$$

Отсюда с учетом равенства (7.1.30) получаем

$$D(\chi) = -\pi \frac{1}{2\chi} \left[C(2\chi) + \theta(2\chi - \mu_0) \int_{\mu_0}^{2\chi - \mu_0} C(2\chi - \beta) \rho(-i\chi, \beta) d\beta \right]. \quad (7.1.33)$$

Это уравнение дает нам возможность находить $D(\chi)$ путем итераций в следующих один за другим интервалах $[n\mu_0/2, (n+1)\mu_0/2]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, из функции $C(\alpha)$ так, как говорилось выше. Если функция $C(\alpha)$ непрерывна, то непрерывна и функция $D(\alpha)$. Но поскольку функция $F(i\chi)$ непрерывна, непрерывна и функция $\Delta(\chi)$. Отсюда с учетом равенства (7.1.30) и того, что $F(i\chi) \neq 0$ на разрезе, заключаем, что функция $g(-i\chi + 0, r) - g(-i\chi - 0, r)$ также непрерывна на разрезе при всех значениях $r \geq 0$.

§ 2. Потенциалы Юкавы и обратная задача

Решить обратную задачу, т. е. найти функцию $C(\alpha)$, зная $D(\chi)$, как говорилось в начале главы, легко позволяет уравнение (7.1.33). Из него прямо следует, что

$$C(\alpha) = -\frac{\alpha}{\pi} D\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \mu_0 \leq \alpha < 2\mu_0. \quad (7.2.1)$$

Зная $C(\alpha)$, мы можем найти по формуле (7.1.9) функцию $\rho(k, \alpha)$ для $\alpha \in [\mu_0, 2\mu_0]$. Вернемся снова к уравнению (7.1.33) при $\mu_0 \leq \chi < 3\mu_0/2$. Область интегрирования по β входит в интервал $[\mu_0, 2\mu_0]$, в котором подынтегральное выражение нам известно. Обратив преобразование (7.1.33), получим

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= -\frac{\alpha}{\pi} D\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \int_{\mu_0}^{\alpha-\mu_0} C(\alpha-\beta) \rho\left(-i\frac{\alpha}{2}, \beta\right) d\beta = \\ &= -\frac{\alpha}{\pi} D\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{\pi^2} \int_{\mu_0}^{\alpha-\mu_0} D\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) D\left(\frac{\beta}{2}\right) d\beta. \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Очевидно, что такой процесс можно продолжать неограниченно, и это дает нам возможность вычислять функцию $C(\alpha)$ во все больших и больших интервалах по разрыву S -матрицы $D(\chi)$. В качестве побочного продукта мы получим также $\rho(k, \alpha)$, и мы можем теперь проверить, обращается ли в нуль функция

$$F(i\chi) = 1 + \int_{\mu_0}^{\infty} \rho(i\chi, \alpha) d\alpha \quad (7.2.3)$$

в полюсах S -матрицы на интервале $[0, \mu_0/2)$, соответствующих связанным состояниям. Если это так, то мы нашли решение нашей обратной задачи, которое является единственным. Естественно, вначале мы должны проверить, являются ли вычеты S -матрицы в этих полюсах в согласии с выражением (2.1.14') чисто мнимыми с отрицательной мнимой частью. Если мнимая часть положительна, то мы получим связанное состояние с отрицательной пормой, что недопустимо для реального потенциала.

Рассмотрим теперь случай, когда связанные состояния расположены на верхнем разрезе S -матрицы, т. е.

$$F(i\chi_0) = 0, \quad \chi_0 \geq \frac{\mu_0}{2}. \quad (7.2.4)$$

Поскольку это простой нуль, простым будет и полюс на разрезе. Если написать

$$\tilde{S}(k) = \frac{k - i\chi_0}{i} S(k), \quad (7.2.5)$$

то функция $\tilde{S}$ не будет иметь полюса на разрезе и мы можем найти ее разрыв:

$$\tilde{D}(\chi) = \frac{\chi - \chi_0}{F(i\chi_0)} (2i)^{-1} [F(-i\chi_0 - 0) - F(-i\chi_0 + 0)] = (\chi - \chi_0) D(\chi). \quad (7.2.6)$$

Легко показать, что функция $\tilde{D}(\chi)$ непрерывна, если непрерывна функция $C(\alpha)$. Сначала покажем, что функция $\tilde{D}(\chi)$ равна нулю при $\chi = \chi_0$. Вспомогая, что функция φ , даваемая выражением (7.1.29), принимает одинаковые значения на обеих сторонах верхнего разреза, с учетом равенства (7.2.3) сразу получаем, что

$$F(-i\chi_0 + 0) = F(-i\chi_0 - 0), \quad (7.2.7)$$

чем и доказывается наше утверждение. Следовательно, функция $D(\chi)$ конечна в точке χ_0 . Рассуждая так же, как и прежде, мы получаем соотношение

$$D(\chi) = \frac{\tilde{D}(\chi)}{\chi - \chi_0} = -\frac{\pi}{2\chi} \left(C(2\chi) + \int_{\mu_0}^{2\chi - \mu_0} C(2\chi - \beta) \rho(i\chi, \beta) d\beta \right), \quad (7.2.8)$$

аналогичное соотношению (7.1.33).

Пользуясь полученными соотношениями, можно снова решить обратную задачу, т. е., зная функцию $D(\chi)$, найти $C(\alpha)$. Мы снова получим формулы (7.2.1), (7.2.2) и т. д. И очевидно, что функция D непрерывна, когда непрерывна функция C , и наоборот. Случай, когда на разрезе имеется несколько связанных состояний, исследуется так же, и получаются такие же результаты. После того как найдена функция $C(\alpha)$, мы должны, конечно, проверить, обращается ли функция Йоста, даваемая формулой (7.2.3), в нуль в полюсах $S(k)$, соответствующих связанным состояниям.

Последний вопрос, который еще не рассмотрен, — это асимптотическое поведение функции $C(\alpha)$ при больших α . Этот вопрос имеет важное значение, так как с асимптотическим поведением функции $C(\alpha)$ при больших α тесно связано поведение потенциала вблизи начала координат. Рассмотрим сначала прямую задачу. Из неравенств (7.1.15) и (7.1.21) с учетом соотношений (7.1.8) и (7.1.33) легко получить, что если

$$|C(\alpha)| < B(\alpha) = A_1 \alpha^{1-\eta}, \quad \eta > 0, \quad (7.2.9a)$$

то

$$|D(\chi)| < A_2 \chi^{-\eta}. \quad (7.2.9b)$$

Можно даже показать, что при $\eta > 0$ основной вклад в $D(\chi)$ вносит первый член в правой части равенства, т. е.

$$D(\chi) \approx -\frac{\pi}{2\chi} C(2\chi), \quad \chi \rightarrow \infty. \quad (7.2.10)$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Чтобы получить (7.2.9а) из (7.2.9б), необходимы дополнительные предположения о свойствах функции D . В самом деле, из определения

$$D(\chi) = \frac{\Delta(\chi)}{F(i\chi)} \quad (7.2.11)$$

и предельного соотношения

$$F(i\chi) \rightarrow 1 \text{ при } \chi \rightarrow \infty \quad (7.2.12)$$

следует, что если выполняется неравенство (7.2.9а), то функция $\Delta(\chi)$ при больших значениях χ ограничена величиной χ^{-1} .

В силу своих аналитических свойств и равенства (7.1.27) функция F удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$F(k) = 1 + \frac{i}{\pi} \int_{\mu_0/2}^{\infty} \frac{\Delta(\chi)}{k + i\chi} d\chi. \quad (7.2.13)$$

Таким образом, имеем [293]

$$\Delta(\chi) = -D(\chi) \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_{\mu_0/2}^{\infty} \frac{\Delta(\chi')}{\chi' + \chi} d\chi' \right). \quad (7.2.14)$$

При заданной функции D это интегральное уравнение Фредгольма для Δ с ядром

$$K(\chi, \chi') = \frac{D(\chi)}{\chi + \chi'}.$$

Когда это ядро не слишком велико, т. е. когда все его собственные значения больше единицы, мы имеем, очевидно, единственное решение для Δ , которое, как обычно, получается методом последовательных приближений. Можно показать, что именно так обстоит дело, если выполняется неравенство

$$\int_{\mu_0/2}^{\infty} \chi^{-1} |D(\chi)| d\chi < 2\pi \ln 2. \quad (7.2.15)$$

Кроме того, при таком условии из неравенства (7.2.9б) следует неравенство (7.2.9а).

Все сказанное выше не зависело от знака функций D и $C(\alpha)$. Но чтобы идти дальше, нам нужно знать знак функции $C(\alpha)$. Предположим, что функция $C(\alpha)$ всюду отрицательна. Тогда из равенств, связывающих $C(\alpha)$ с $D(\chi)$, следует, что функция $D(\chi)$ всюду положительна. В таком случае можно показать,

что определитель Фредгольма для уравнения (7.2.14) положителен и что имеется единственное решение, если выполняется условие

$$\int_{\mu_0/2}^{\infty} \chi^{-1} D(\chi) d\chi < \infty. \quad (7.2.16)$$

Если функция $C(\alpha)$ положительна, то никаких заключений о знаке функции $D(\chi)$ сделать нельзя и у нас имеется только неравенство (7.2.15). Предположим теперь, что исходная функция $D(\chi)$ отрицательна. Тогда очевидно, что она не может принимать слишком больших значений. Действительно, если ввести функцию

$$\tilde{\Delta}(\chi) = \frac{\Delta(\chi)}{(-D(\chi))^{1/2}},$$

то уравнение (7.2.14) для K превратится в уравнение Фредгольма с положительным симметричным ядром, а такие уравнения, как известно, всегда имеют собственные значения. Поэтому если ядро слишком велико, то собственные значения не будут превышать единицы.

Детальное исследование уравнения (7.2.14) и его обобщение для решения Йоста $f(k, r)$ было выполнено Корнилем. Мы приведем здесь его основные результаты, так как они играют важную роль в релятивистском случае, когда приходится иметь дело с так называемыми N/D -уравнениями, подобными уравнению (7.2.14).

Будем исходить из потенциала (7.1.1), для которого $\alpha^{-2} C(\alpha) \in L^1(\mu_0, \infty)$. Этим обеспечивается условие $rV(r) \in L^1(0, \infty)$. Согласно определению (7.1.32), мы можем переписать интегральное уравнение (7.2.14) в виде

$$F(i\chi) \equiv \bar{F}(x) = 1 + \lambda \int_{\mu_0/2}^{\infty} \frac{\bar{F}(y) D(y)}{x + y_{i\infty}} dy, \quad (7.2.17)$$

где D — скачок S -матрицы на верхнем разрезе в плоскости переменной k . Мы добавили здесь параметр λ , характеризующий величину скачка D , и будем исследовать решение этого уравнения, варьируя параметр λ . Мы видим, что $x^{-1}D(x) \in L^1(\mu_0, \infty)$. Предположим теперь, что выполняются условия

$$\int_{\mu_0/2}^{\infty} x^{-1} |D(x)| dx < \infty, \quad (7.2.18a)$$

$$\int_{\mu_0/2}^{\infty} \int_{\mu_0/2}^{\infty} \left(\frac{D(x)}{x+y} \right)^2 dx dy < \infty; \quad (7.2.18b)$$

благодаря чему наше интегральное уравнение оказывается уравнением типа Гильберта—Шмидта.

Когда параметр λ мал, т. е. когда, например, произведение λD удовлетворяет неравенству (7.2.15), существует, как мы знаем, единственное решение, и, следовательно, мы имеем дело с «хорошим» потенциалом типа (7.1.1) при дополнительном условии (7.2.9а). Вопрос в том, что произойдет с потенциалом, когда параметр λ станет слишком большим, т. е. когда мы перейдем через собственное значение ядра λ_0 . Ответ на этот вопрос дается уравнением Марченко для обратной задачи, которое мы рассматривали в гл. 5. Согласно сказанному в гл. 5, если пренебречь возможными связанными состояниями, которые здесь не существенны, то можно найти потенциал, решив интегральное уравнение

$$A(r, t) = A_0(r + t) + \int_r^\infty A(r, s) A_0(s + t) ds, \quad (7.2.19a)$$

где

$$A_0(t) = (2\pi)^{-1} i \int_{-\infty}^{\infty} [1 - S(k)] e^{iht} dk. \quad (7.2.19b)$$

Тогда потенциал и решение Йоста даются выражениями

$$V(r) = -2 \frac{d}{dr} A(r, r), \quad (7.2.20)$$

$$\bar{F}(x, r) = f(ix, r) = e^{-xr} + \int_r^\infty A(r, t) e^{-xt} dt. \quad (7.2.21)$$

В случае потенциалов Юкавы мы можем, интегрируя по контуру, вычислить интеграл в формуле (7.2.19b) с учетом того обстоятельства, что функция $S(k)$ в данном случае голоморфна в верхней полуплоскости, имеющей разрез от $i\mu_0/2$ до $i\infty$, и стремится к единице, когда k стремится к бесконечности по всем направлениям, не параллельным мнимой оси. В результате получаем (снова вводя λ)

$$A_0(t) = \lambda \int_{\mu_0/2}^{\infty} e^{-xt} D(x) dx. \quad (7.2.22)$$

Подставив это выражение для $A_0(t)$ в формулу (7.2.19a), с учетом выражения (7.2.21) получаем [337, 100]

$$\bar{F}(x, r) = e^{-xr} + \lambda \int_{\mu_0/2}^{\infty} \frac{D(y)}{x+y} e^{-r'(x+y)} \bar{F}(y, r) dy. \quad (7.2.23)$$

Положив в этом уравнении $r = 0$, получим (7.2.17). Очевидно, что если выполняются условия (7.2.18а) и (7.2.18б), то интегральное уравнение (7.2.23) представляет собой уравнение Гильберта—Шмидта.

Если обозначить через $d(\lambda, r)$ определитель Фредгольма для уравнения (7.2.23), то можно показать, что потенциал, соответствующий разрыву λD , равен

$$V(\lambda, r) = -2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \ln d(\lambda, r). \quad (7.2.24)$$

Отсюда следует, что если при некотором значении r определитель $d(\lambda, r)$ обращается в нуль, то у потенциала, вообще говоря, появляется полюс второго порядка. Чтобы увидеть, как перемещается эта особая точка, когда мы варьируем параметр λ , нужно исследовать корни уравнения

$$d(\lambda, r) = 0, \quad (7.2.25)$$

непрерывно следя за собственными значениями $\lambda_{\pm}^{\pm}(r)$ (положительными или отрицательными) как функциями переменной r . Тогда оказывается, что, как только мы пройдем первое собственное значение и будем иметь $\lambda > \lambda_1^+(0)$ или $\lambda < \lambda_1^-(0)$, потенциал приобретает первую сингулярность типа r^{-2} в начале координат, а затем особая точка смещается в сторону $r > 0$, а иногда в направлении $\text{Re } r > 0$. Если увеличивать дальше λ , то новые сингулярности будут появляться при прохождении $\lambda_{\pm}^{\pm}(0)$, ... Такие особые точки часто представляют собой полюса второго порядка, но часто будут появляться и духовые состояния (состояния с квадратично-интегрируемой волновой функцией, но с отрицательной, а иногда даже комплексной нормой). Во всяком случае, если особенности появляются при $\text{Re } r > 0$, то у нас нет больше потенциала вида (7.1.1) с «хорошей» функцией $C(\alpha)$, так как «хорошие» потенциалы Юкавы голоморфны при $\text{Re } r > 0$. К тому же, когда полюс второго порядка потенциала лежит на действительной оси r , области, лежащие справа и слева от полюса, совершенно не связаны друг с другом с точки зрения квантовой механики (мы не можем более вводить гамильтониан как единственный самосопряженный оператор), а следовательно, и с точки зрения теории рассеяния. Стало быть, нет смысла говорить о духовых состояниях и других закономерностях, когда у нас столь сильные сингулярности. Модели теряют физический смысл и превращаются в математические курьезы. И, следовательно, всякая аналогия с релятивистскими дисперсионными соотношениями и так называемыми N/D - или F/F -уравнениями оказывается бессмысленной.

Сравнение с методом Гельфанда—Левитана

После такого отступления вернемся к «хорошему» потенциалу и имеющему физический смысл разрыву D . Предположим также, что имеется несколько полюсов, соответствующих связанным состояниям, но все они расположены вне разреза. Тогда методом Мартена мы найдем хорошо определенный и единственный потенциал V_0 , для которого нормировочные постоянные волновых функций связанных состояний определяются соотношением (2.1.14):

$$C_n^{-1} = \int_0^\infty \varphi_n^2 dr = \frac{2i\gamma_n F(-i\gamma_n)}{\dot{F}(i\gamma_n)}. \quad (7.2.26)$$

Из интегрального же уравнения (7.2.14) мы можем найти единственную функцию Δ — разрыв функции Йоста — по формуле (7.2.13) и саму функцию Йоста. Мы, конечно, знаем и расположение связанных состояний. Опираясь на все эти данные, мы можем найти, решив уравнения Гельфанда—Левитана (гл. 3 и 4), все фазово-эквивалентные потенциалы с произвольными нормировочными постоянными связанных состояний. Теперь можно задать вопрос: как выделить единственный потенциал, полученный Мартеном, в этом семействе фазово-эквивалентных потенциалов? Ответ дается результатами гл. 4, в частности формулами (4.2.9) и (4.2.10), в которых мы возьмем в качестве исходного потенциала именно потенциал Мартена. Согласно формуле (4.2.9) [см. также (4.1.30)], мы получим для любого потенциала данного семейства

$$V(r) = V_0(r) + a_1 e^{-2\gamma_1 r} + \dots, \quad r \rightarrow \infty, \quad (7.2.27)$$

где $-\gamma_1^2$ — состояние с наименьшей энергией связи. Так как по предположению $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \mu_0/2$, сразу же видно, что потенциал Мартена $V_0(r)$ — единственный член семейства, быстрее всего убывающий на больших расстояниях. Все другие имеют больший радиус действия, обусловленный энергиями связанных состояний.

Все сказанное выше справедливо и в том случае, когда имеется связанное состояние $i\gamma_0$, расположенное на разрезе. Вычет S -матрицы, т. е. нормировочная постоянная связанного состояния, снова дается выражением

$$\text{Res } S(i\gamma_0) = \frac{F(-i\gamma_0)}{\dot{F}(i\gamma_0)}, \quad (7.2.28)$$

и это тоже хорошо определенная величина. В самом деле, раньше было показано, что, хотя полюс $i\gamma_0$ лежит на разрезе функции $F(-k)$, выражение (7.2.23) остается справедливым, если γ_0

соответствует связанному состоянию. Следовательно, мы снова получим единственный потенциал Мартена с хорошо определенной нормировочной постоянной волновой функции. Но теперь потенциал Мартена нельзя выделить из фазово-эквивалентных потенциалов как потенциал с наименьшим радиусом действия. Это видно из выражения (7.2.27), из которого следует, что теперь все потенциалы, отличающиеся от потенциала Мартена вариациями единственной нормировочной постоянной C_0 , имеют один и тот же радиус действия, т. е. одинаковое асимптотическое поведение $\exp(-\mu_0 r)$. Точно так же обстоит дело и в случае, когда на разрезе имеется несколько полюсов, соответствующих связанным состояниям.

Из выражения (7.2.27) следует, что независимо от того, имеются или нет связанные состояния на разрезе, если потенциал Мартена соответствует обычной интегрируемой функции $C(\alpha)$, то все другие члены семейства фазово-эквивалентных потенциалов соответствуют обобщенным функциям

$$C(\alpha) + a_1 \delta(\alpha - 2\gamma_1) + \dots$$

Таким образом, потенциал Мартена при наличии связанных состояний — единственный потенциал семейства, соответствующий обычной функции $C(\alpha)$.

§ 3. Волны с $l \neq 0$, кулоновский потенциал

Для волн с $l \geq 1$ существуют два способа включения в потенциал центробежного члена $l(l+1)r^{-2}$. Первый тоже принадлежит Мартену. Он состоит в том, что записывают

$$r^{-2} = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha r} d\alpha \quad (7.3.1)$$

и снова принимают «гипотезу» (7.1.5). Тогда уравнение (7.1.6) сводится к виду

$$\alpha(\alpha - 2ik) \rho_l(k, \alpha) = C(\alpha) + l(l+1)\alpha + \int_0^\alpha [C(\alpha - \beta) + l(l+1)(\alpha - \beta)] \rho_l^{1/2}(k, \beta) d\beta. \quad (7.3.2)$$

Его нельзя преобразовать в уравнение (7.1.8), а следовательно, и нельзя решить методом итераций. Но если воспользоваться тем обстоятельством, что при $0 \leq \alpha < \mu_0$ выполняется равенство

$$\alpha(\alpha - 2ik) \rho_l(k, \alpha) = l(l+1) \left[\alpha + \int_0^\alpha (\alpha - \beta) \rho_l(k, \beta) d\beta \right], \quad (7.3.3)$$

и ввести функцию

$$Y_l(k, \alpha) = 1 + \int_0^{\alpha} \rho_l(k, \beta) d\beta,$$

то из уравнения (7.3.2) мы получим

$$\alpha(\alpha - 2ik) \rho_l(k, \alpha) - l(l+1) \left[\alpha + \int_0^{\alpha} (\alpha - \beta) \rho_l(k, \beta) d\beta \right] = \xi(\alpha), \quad (7.3.4a)$$

$$\xi(\alpha) \equiv C(\alpha) + \int_0^{\alpha - \mu_0} C(\alpha - \beta) Y_l'(k, \beta) d\beta, \quad (7.3.4b)$$

$$Y_l(k, \alpha) = P_l \left(1 - \frac{\alpha}{ik} \right) + \int_0^{\alpha} \left[P_l \left(1 - \frac{\alpha}{ik} \right) Q_l \left(1 - \frac{\beta}{ik} \right) - \right. \\ \left. - P_l \left(1 - \frac{\beta}{ik} \right) Q_l \left(1 - \frac{\alpha}{ik} \right) \right] \frac{d\xi}{d\beta} d\beta, \quad (7.3.5)$$

где P_l и Q_l — функции Лежандра первого и второго рода:

$$Q_l(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_l(t)}{z-t} dt. \quad (7.3.6)$$

Теперь легко видеть, что уравнения (7.3.4b) и (7.3.5) можно решить методом итераций, как было сделано раньше в случае $l=0$. Действительно, если мы знаем функцию Y_l при $\alpha < n\mu_0$, то мы можем подставить ее в уравнение (7.3.4b) и вычислить $\xi(\alpha)$ при $\alpha < (n+1)\mu_0$. Подставив затем эти величины в выражение (7.3.5), мы получим функцию Y_l при $\alpha < (n+1)\mu_0$. и такой процесс можно повторять далее. Поскольку при $0 \leq \alpha < \mu_0$ мы имеем

$$Y_l(k, \alpha) \equiv P_l \left(1 - \frac{\alpha}{ik} \right), \quad (7.3.7)$$

наше утверждение доказано.

Исходя из полученных результатов, можно прийти точно к таким же заключениям, как и раньше, относительно аналитичности функций $f_l(k, r)$ и $F_l(k)$ в плоскости переменной k , имеющей разрез $-i\mu_0/2$ до $-i\infty$, и о их асимптотических свойствах в этой плоскости с разрезом. Заметим, то здесь функция f_l , так же как

и свободное решение $w_l(k, r)$, имеет полюс порядка l при $r = 0$.

Что касается обратной задачи, то снова, зная разрыв S -матрицы D_l , мы путем итераций получим потенциал, как было сделано при $l = 0$. За недостатком места мы не будем вдаваться в подробности, но отметим, что результаты оказываются совершенно аналогичными тем, которые были получены в предыдущем параграфе.

Поскольку интегральное представление здесь, по существу, есть преобразование Лапласа, одинаковое для всех волн, можно показать, что рассмотренный метод легко обобщить на задачи, в которых мы имеем дело с системой уравнений для различных угловых моментов, например в случае тензорных сил и др.

Второй метод, предложенный де Альфаро и Росетти, основан не на преобразовании Лапласа, а на интегральном преобразовании, в котором используется свободное решение Йоста $w_l(i\alpha r)$. Такой выбор вполне логичен и позволяет исключить центробежный потенциал. Вместо (7.1.5) теперь напомним

$$f_l(k, r) = w_l(kr) + \int_{\mu_0}^{\infty} \rho_l(k, \alpha) w_l[(k + i\alpha)r] d\alpha. \quad (7.3.8)$$

Недостаток такого интегрального представления в том, что оно не имеет столь простых свойств свертки, какими обладает преобразование Лапласа, и поэтому совсем не очевидно, что можно представить образ произведения $V_r f_l(k, r)$ как свертку образов функций V и f_l . Эту трудность можно устранить, но получающиеся в результате уравнения оказываются несколько более сложными, нежели уравнение (7.1.8). Тем не менее они могут быть точно решены путем итераций, и решения, конечно, полностью совпадают с решениями уравнения (7.3.2).

В качестве последнего обобщения упомянем, что такой метод был применен для включения кулоновских потенциалов [106].

Некий вариант метода Мартена, более простой в случае обратной задачи, был предложен Калоджеро и Коксом. В методе Мартена мы имеем, по существу, два уравнения (7.1.8) и (7.1.33), которые можно записать символически в виде

$$\begin{aligned} \rho &= C + \int C \rho, \\ D &= C + \int C \rho. \end{aligned}$$

Эти два уравнения нужно решить совместно, чтобы определить D по C или наоборот. На любом этапе итераций функция ρ необходима как промежуточное звено.

Калоджеро и Коксу удалось из уравнения Марченко (7.2.23) вывести уравнения, которые символически можно записать в виде

$$\rho = D + \int D\rho,$$

$$C = D + \int D\rho.$$

У них такая же структура, как и у уравнения Мартена, и поэтому их также можно решить путем итераций. Но если уравнения Мартена проще в случае прямой задачи и позволяют сразу же определять функцию D по C , то уравнения Калоджеро и Кокса, очевидно, проще в случае обратной задачи, т. е. когда требуется определить C по D . В полной форме они имеют вид

$$\begin{aligned} \rho(ik, \alpha) = & \frac{\theta(\alpha - \mu_0)}{\alpha + \beta/2} D\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \\ & + \frac{\theta(\alpha - 2\mu_0)}{2} \int_{\mu_0}^{\alpha - \mu_0} \left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)^{-1} D\left(\frac{\gamma}{2}\right) \rho\left(\frac{i\gamma}{2}, \alpha - \gamma\right) d\gamma, \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

$$\begin{aligned} C(\alpha) = & \alpha \left[\theta(\alpha - \mu_0) D\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \theta(\alpha - 2\mu_0) \times \right. \\ & \times \left. \int_{\alpha}^{\alpha - \mu_0} D\left(\frac{\gamma}{2}\right) \rho\left(\frac{i\gamma}{2}, \alpha - \frac{\gamma}{2}\right) d\frac{\gamma}{2} \right]. \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

Решение этих уравнений, конечно, совпадает с результатами, полученными Мартеном. Имея дело с такими уравнениями, легко также ввести связанные состояния как часть исходных данных для обратной задачи. Для этого нужно произвести подстановку

$$D(\chi) \rightarrow D(\chi) + \sum_j \lambda_j \delta(\chi - \gamma_j),$$

где λ_j — вычеты S -матрицы, связанные, как мы знаем, с перенормировкой связанных состояний. Это позволяет нам построить все семейство фазово-эквивалентных потенциалов, о котором говорилось в гл. 4 и 6.

§ 4. Голоморфные потенциалы

Мы будем рассматривать потенциалы, не только удовлетворяющие условию (1.1.3) на бесконечности, но и голоморфные по переменной r вблизи нуля. Их можно разложить в ряд Тейлора

$$V(r) = \sum_n v_n \frac{r^n}{n!} \quad (7.4.1)$$

с конечным радиусом сходимости. Константы v_n — это производные от потенциала в начале координат, и задача состоит в том, чтобы определить их по данным рассеяния (фазовому сдвигу и энергиям связи при одном значении углового момента). Такая задача была решена постепенно в работах Ньютона, Фаддеева, Буслаева, Персиваля, Робертса и, наконец, Калоджеро и Дегаспериса, которые дали полное решение задачи в ее наиболее общем виде. Не имея возможности подробно изложить здесь методы и привести полученные общие формулы, мы ограничимся лишь некоторыми из самых простых результатов.

Общий вид величины v_0 — потенциала в начале координат — дается выражением

$$v_0 = \frac{8}{(2l+1)\pi} \int_0^\infty \left[-k \frac{d}{dk} k \delta_l(k) \right] dk + \frac{4}{(2l+1)} \sum_n E_{nl}, \quad (7.4.2)$$

где l — угловой момент, а суммирование проводится по всем соответствующим связанным состояниям.

Следующий член v_1 (первая производная потенциала в начале координат) в случае S -волны имеет вид

$$v_1 = -4 \left[\sum_j C_j - \frac{2}{3! \pi} \int_0^\infty k^3 \frac{d^3}{dk^3} (k^3 |F(k)|^{-2}) dk \right], \quad (7.4.3)$$

где C_j — нормировочные постоянные связанных состояний [формула (2.4.8)], а F — функция Йоста, которая также выражается через данные рассеяния [формула (2.2.4')]. Для последующих членов ряда получаются более сложные выражения, содержащие производные более высокого порядка от фазового сдвига и энергии связи связанных состояний. В весьма специальном случае, когда потенциал — четная функция, т. е.

$$v_1 = v_3 = \dots = v_{2n+1} = \dots = 0,$$

должны, очевидно, получаться соотношения между разными параметрами данных рассеяния. Например, если имеется только одно связанное состояние (обязательно S -волна), то его энергия связи и нормировочная постоянная даются выражениями

$$C_0 = \frac{1}{3\pi} \int_0^\infty k^3 \frac{d^3}{dk^3} [k^6 (k^2 - E_0)^{-2} e^{-2\Delta(k)}] dk, \quad (7.4.4a)$$

$$E_0 = \frac{1}{20} \left\{ \int_0^\infty k^5 \frac{d^5}{dk^5} [k^8 (k^2 - E_0)^{-2} e^{-2\Delta(k)}] dk \right\} \times \\ \times \left\{ \int_0^\infty k^3 \frac{d^3}{dk^3} [k^6 (k^2 - E_0)^{-2} e^{-2\Delta(k)}] dk \right\}^{-1}, \quad (7.4.4b)$$

где

$$\Delta(k) = -\frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{q \delta_0(q)}{q^2 - k^2} dq. \quad (7.4.4B)$$

Мы закончим эту главу выражением

$$E_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k \frac{d}{dk} \left[k \left(\delta_0 - \frac{1}{3} \delta_1 \right) \right] dk \quad (7.4.5)$$

для энергии связи связанного состояния (S -волны) в случае, когда потенциал не имеет других связанных состояний. Величины δ_0 и δ_1 — фазовый сдвиг для S - и P -волны.

§ 5. Замечания и литература

Методы и результаты, изложенные в двух первых параграфах, принадлежат Мартену [292—294]. Мы особенно рекомендуем последнюю статью [294], в которой дан полный обзор задачи. Случай, когда некоторые связанные состояния расположены на разрезе, был впервые рассмотрен Шадэном [84]. В этой же работе [84] было установлено, что потенциал Мартена характеризуется самым коротким радиусом действия среди всех членов семейства фазово-эквивалентных потенциалов, когда нет связанных состояний на разрезе. Причем вывод основывался на теореме Ньютона [315] о фазово-эквивалентных потенциалах. Метод, альтернативный методу Мартена [293] для случая $l > 0$, был получен де Альфаро, Редже и Росетти [132], которые использовали преобразование (7.3.8).

Детальный анализ интегрального уравнения (7.2.14) был проведен де Альфаро и Редже [130]. Они получили формулы (7.2.15) и (7.2.16). Интегральное уравнение (7.2.23) впервые опубликовано в статье Петраса [337]. Оно снова было выведено Корнилем, и его содержание было проанализировано в двух больших статьях последнего [100—102]. Корниль вывел и формулу (7.2.24). См. также работы [109, 416—419].

Выше мы дали ссылки на работы Мартена, де Альфаро, Редже и Росетти, посвященные случаю волн с $l > 0$. Случай, когда имеется также кулоновский потенциал, рассмотрен Корнилем и Мартеном [106]. Альтернативный метод Калоджеро и Кокса для потенциалов Юкавы изложен в их статье [73].

Результаты § 3 для случая голоморфных потенциалов были последовательно получены в работах Ньютона [315], Фаддеева [146], Буслаева и Фаддеева [70], Буслаева [67—69], Персиваля [335], Персиваля и Робертса [336] и Робертса [357—360]. В самом общем виде для случая S -волны задача была решена Калоджеро

и Дегасперисом [71, 74]. Формула (7.4.2) выведена Ньютоном [315] и Фаддеевым [146]. Математическая работа, связанная с этими вопросами, была опубликована Диким [134]. Заметим, что эти методы и результаты известны в литературе под названием «методы следов».

Об обобщении полученных результатов на случай уравнений Клейна—Гордона и Дирака см. работы [133, 96]. Обобщение на случай волн с $l > 0$ осуществлено Корбеллой [97]. Другие соотношения, связывающие непосредственно V с δ , например вариационные границы, были получены Калоджеро и др. [72].

НЕЛОКАЛЬНЫЕ СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

§ 1. Прямая задача

Нелокальные сепарабельные двухчастичные взаимодействия часто использовались ранее в ядерной физике и в проблеме многих тел. Дело в том, что в случае таких взаимодействий двухчастичное уравнение Шредингера легко решается и для большого класса таких потенциалов дает замкнутые выражения. Сепарабельные потенциалы также систематически использовались при решении уравнений Фаддеева в задаче трех тел. Основная особенность сепарабельных взаимодействий состоит в том, что парциальная t -матрица для них имеет очень простую форму и ее можно непосредственно продолжить на внеэнергетическую поверхность, — свойство, которое, как известно, особенно важно в ядерной физике и в уравнениях Фаддеева.

Трехмерное уравнение Шредингера для рассеяния частицы в поле с нелокальным потенциалом общего вида может быть записано в форме

$$(\Delta + E) \Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (8.1.1)$$

Сепарабельным называется взаимодействие, для которого возможно представление

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{N_l} \varepsilon_{nl} u_{nl}(r) u_{nl}(r') P_l(\cos \theta), \quad (8.1.2)$$

$$r = |\mathbf{r}|, \quad r' = |\mathbf{r}'|, \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rr'}, \quad \varepsilon_{nl} = \pm 1.$$

Сначала мы рассмотрим случай, когда каждому l соответствует только один сепарабельный член, т. е. сумма по n представляет собой только один член, а позже перейдем к более общему случаю.

Разложив волновую функцию по парциальным волнам:

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{\psi_l(k, r)}{kr} P_l(\cos \theta), \quad \theta = (\mathbf{k}, \mathbf{r}), \quad (8.1.3)$$

получим уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) \psi_l(k, r) = \varepsilon_l U_l(r) \int_0^\infty U_l(r') \psi_l(k, r') dr', \quad (8.1.4a)$$

где

$$U_l(r) = (4\pi)^{1/2} r u_l(r). \quad (8.1.4b)$$

Для простоты снова рассмотрим S -волну ($l = 0$). Позже мы увидим, как все результаты обобщаются на случай $l > 0$. Итак, нам нужно решить уравнение

$$\psi'' + k^2 \psi = \varepsilon N(k) U(r), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (8.1.5a)$$

в котором

$$N(k) = \int_0^\infty U(r) \psi(k, r) dr, \quad (8.1.5b)$$

с обычным граничным условием

$$\psi(k, 0) = 0. \quad (8.1.6)$$

Уравнение (8.1.5a) можно точно решить двумя методами: методом преобразования Фурье и методом Лагранжа. Оба метода, конечно, эквивалентны. Мы выберем первый из них. Учитывая граничное условие (8.1.6), мы должны использовать синус-преобразование Фурье, которое запишем в соответствии с обозначениями гл. 2, § 3:

$$\tilde{\psi}(k, p) = \int_0^\infty \psi(k, r) \frac{\sin pr}{p} dr \quad (8.1.7a)$$

$$\psi(k, r) = \int_0^\infty \tilde{\psi}(k, p) \frac{\sin pr}{p} d\rho_0(p^2), \quad (8.1.7b)$$

$$U(r) = \int_0^\infty \tilde{U}(p) \frac{\sin pr}{p} d\rho_0(p^2), \quad (8.1.7b)$$

$$\tilde{U}(p) = \int_0^\infty U(r) \frac{\sin pr}{p} dr, \quad (8.1.7r)$$

где

$$d\rho_0(p^2) = \frac{2}{\pi} p^2 dp, \quad (8.1.7d)$$

так что, например, равенство (8.1.7б) можно также записать в виде

$$\psi(k, r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\psi}(k, p) \frac{\sin p}{p} p^2 dp. \quad (8.1.76')$$

Очевидно, что $\tilde{\psi}$ — не обычная функция, а обобщенная. Но нам хорошо известно, как обращаться с такими функциями. Подставляя выражения (8.1.7б) и (8.1.7в) в уравнение (8.1.5а), получаем

$$(k^2 - p^2) \tilde{\psi}(k, p) = \varepsilon N(k) \tilde{U}(p), \quad (8.1.8а)$$

$$N(k) = \int_0^{\infty} \psi(k, r) U(r) dr = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\psi}(k, p) \tilde{U}(p) p^2 dp. \quad (8.1.8б)$$

Для доказательства существования решения уравнения (8.1.8а) необходимо наложить некоторые ограничения на функцию $U(r)$. Предположим, что она локально интегрируема и удовлетворяет следующим граничным условиям в начале координат и на бесконечности:

$$\int_0^{\infty} r^{1/2-\eta} |U(r)| dr < \infty, \quad \eta > 0, \quad (8.1.9а)$$

$$\int_0^{\infty} r^{1+\eta'} |U(r)| dr < \infty, \quad \eta' > 0, \quad (8.1.9б)$$

где величины η и η' могут быть очень малыми, но положительными. Ниже будет показано, что эти условия оказываются достаточными для существования и единственности решения. Легко убедиться, что неравенством (8.1.9а) обеспечивается выполнение граничного условия (8.1.6). Ограничения же (8.1.9а) и (8.1.9б) совместно гарантируют, что

$$rU(r) \in L^1(0, \infty). \quad (8.1.9в)$$

Это в свою очередь означает, что функция $\tilde{U}(p)$ всюду непрерывна, а функция $p\tilde{U}(p)$ дифференцируема при всех $p \geq 0$. Детальный анализ показывает также, что

$$p\tilde{U}(p) = O(1), \quad p \rightarrow \infty, \quad (8.1.10а)$$

$$\tilde{U}(p) = O(1), \quad p \rightarrow 0. \quad (8.1.10б)$$

Состояния рассеяния. В этом случае $E = k^2 \geq 0$, и поэтому решение уравнения (8.1.8а) имеет вид

$$\tilde{\psi}(k, p) = \frac{\delta(k^2 - p^2)}{d\rho_0(k)} + \varepsilon N(k) P \frac{\tilde{U}(p)}{k^2 - p^2}, \quad (8.1.11)$$

где P — символ главного значения. Нормировка волновой функции, т. е. множитель перед δ -функцией, выбрана таким образом, чтобы при $\varepsilon = 0$ (отсутствие взаимодействия) представление (8.1.7б) приводило к выражению $\psi(k, r) = (\sin kr)/k$. Подстановка выражения (8.1.11) в уравнение (8.1.8б) немедленно дает

$$N(k) = \tilde{U}(k) \left(1 + P \int_0^\infty \frac{\varepsilon \tilde{U}^2(p)}{p^2 - k^2} d\rho_0(p^2) \right)^{-1}, \quad (8.1.12)$$

$$\psi(k, r) = \frac{\sin kr}{k} + \varepsilon N(k) P \int_0^\infty \frac{\tilde{U}(p)}{k^2 - p^2} \frac{\sin pr}{p} d\rho_0(p^2). \quad (8.1.13)$$

Поскольку функция $\tilde{U}(p)$ дифференцируема, главное значение интегралов существует. В силу условий (8.1.10а) и (8.1.10б) все интегралы также сходятся на обоих пределах.

Асимптотическую форму функции ψ при больших значениях r легко получить, написав тождество

$$P \frac{1}{p^2 - k^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{p^2 - k^2 - i\varepsilon} + \frac{1}{p^2 - k^2 + i\varepsilon}.$$

Результат таков:

$$\psi(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{=} \frac{\sin kr}{k} + \frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta \sin(kr + \delta) + o(1), \quad (8.1.14)$$

где

$$-\frac{2k}{\pi} \operatorname{tg} \delta = A(k) \left(1 + P \int_0^\infty \frac{A(p)}{p^2 - k^2} dp \right)^{-1}, \quad (8.1.15а)$$

$$A(k) = \frac{2\varepsilon}{\pi} k^2 \tilde{U}^2(k). \quad (8.1.15б)$$

Заметим, что в силу оценки (8.1.10а) интеграл в формуле (8.1.15а) абсолютно сходится. Кроме того, имея в виду оценку (8.1.10б), заключаем, что фазовый сдвиг представляет собой хорошо определенную функцию при всех $k \geq 0$. При $k \rightarrow 0$ он стремится к нулю как k . Поскольку произведение $k\tilde{U}(k)$ дифференцируемо, функция $A(k)$ тоже дифференцируема. Из известных теорем о преобразованиях Гильберта непрерывных по Гёльдеру функций следует, что интеграл в действительности является непрерывной по Гёльдеру функцией с индексом $1 - \varepsilon$, где ε — сколь угодно малая положительная величина.

Связанные состояния. Мы покажем, что в отличие от локальных короткодействующих потенциалов, рассмотренных ранее, сепарабельные потенциалы могут приводить к связанным состояниям не только при отрицательных, но и при положительных значениях энергии. Рассмотрим сначала первый случай. Если существует связанное состояние с энергией $-X$ ($X > 0$), то формула (8.1.8a) дает

$$\tilde{\psi}(-X, p) = \frac{-\varepsilon N \tilde{U}(p)}{p^2 + X}. \quad (8.1.16)$$

Подставив это выражение в формулу (8.1.8б), получим уравнение для собственного значения

$$\Phi(X) \equiv \varepsilon + \frac{2}{\pi} \int \frac{\tilde{U}^2(p)}{p^2 + X} p^2 dp = 0. \quad (8.1.17)$$

Поскольку интеграл здесь есть убывающая функция переменной X при $X \geq 0$, для того чтобы иметь связанное состояние при отрицательной энергии, необходимо положить

$$\varepsilon = -1, \quad (8.1.18a)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{U}^2(p) dp > 1. \quad (8.1.18b)$$

Если эти условия выполняются, то единственное связанное состояние с отрицательной энергией определяется соотношением

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{U}^2(p)}{p^2 + X_0} p^2 dp = 1. \quad (8.1.19)$$

Найдя X_0 , волновую функцию вычислим по формуле (8.1.16). Как нетрудно убедиться, граничное условие (8.1.6) выполняется и асимптотическая форма волновой функции имеет вид

$$\psi(-X_0, r) \approx e^{(-X_0^{1/2})r}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (8.1.20)$$

Рассмотрим теперь возможные связанные состояния с положительной энергией. Таковыми являются квадратично-интегрируемые решения уравнения Шредингера, т. е. решения вида (8.1.11) с опущенным первым членом (δ -функцией). Теперь получаем уравнение для собственных значений

$$\varepsilon + \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\tilde{U}^2(p)}{p^2 - X_1} p^2 dp = 0, \quad X_1 > 0. \quad (8.1.21)$$

Здесь, конечно, возможны решения, соответствующие обоим знакам величины ε . Предположим, что такое решение существует

вует. Тогда асимптотическое поведение волновой функции дается выражением

$$\begin{aligned}\psi(X_1, r) &= -\frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\tilde{U}(p)}{p^2 - X_1} \frac{\sin pr}{p} p^2 dp = \\ &= \frac{i\pi}{2} \tilde{U}(X_1^{1/2}) \cos X_1^{1/2} r + o(1), \quad r \rightarrow \infty.\end{aligned}\quad (8.1.22)$$

Отсюда следует, что функция ψ асимптотически стремится к нулю в том и только в том случае, если

$$\tilde{U}(X_1^{1/2}) = \int_0^\infty U(r) \frac{\sin \sqrt{X_1} r}{\sqrt{X_1}} dr = 0. \quad (8.1.23)$$

Более детальный анализ показывает, что если данное условие выполняется, то ψ — функция, квадратично-интегрируемая при $r \geq 0$. Введем обозначение $k_1 = \sqrt{X_1}$. Поскольку $\tilde{U}(k_1) = 0$, у нас нет необходимости сохранять символ P перед интегралом в формуле (8.1.22). Теперь это регулярное, абсолютно сходящееся синус-преобразование Фурье. Хорошо известно, что при $r \rightarrow \infty$ поведение такого интеграла определяется поведением подынтегрального выражения вблизи точки $p = 0$, т. е.

$$p\tilde{U}(p) = p \int_{p \rightarrow 0}^\infty t U(t) dt = O(p). \quad (8.1.24)$$

Отсюда легко получаем

$$\psi(X_1, r) = O(r^{-2/3}). \quad (8.1.25)$$

Поскольку граничное условие (8.1.6) тоже выполняется, сделанное выше утверждение справедливо и X_1 соответствует связанному состоянию. Итак, связанные состояния с положительной энергией даются общими корнями уравнений (8.1.24) и (8.1.23).

Из соотношения (8.1.15а) следует, что при таких значениях энергии фаза рассеяния проходит через значение $n\pi$ (где n целое), убывая. Действительно, при $k_1 = \sqrt{X_1}$, например, и числитель, и знаменатель обращаются в нуль одновременно. Но, как следует из определения (8.1.15б), функция A имеет в точке k_1 по крайней мере нуль второго порядка, а знаменатель имеет только простой нуль, поскольку

$$\left. \frac{\partial}{\partial k} \left(1 + P \int \frac{A(p) - A(k_1)}{p^2 - k^2} dp \right) \right|_{k=k_1} = +2k_1 \int \frac{A(p)}{(p^2 - k_1^2)^2} dp > 0. \quad (8.1.26)$$

Отсюда мы заключаем, что $\operatorname{tg} \delta$ обращается в нуль в точке k_1 и меняет знак, т. е.

$$\delta(k_1) = n\pi, \quad (8.1.27a)$$

$$\left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{k_1} < 0. \quad (8.1.27б)$$

И обратно, предположим, что $\operatorname{tg} \delta$ обращается в нуль в точке $k = k_1$. Так как знаменатель в выражении (8.1.15а) всегда конечен, мы должны иметь нуль в числителе. Но в силу дифференцируемости функции $\tilde{U}$ нуль числителя должен быть нулем второго порядка. Возможны два случая. Если знаменатель не обращается в нуль при $k = k_1$, то фазовый сдвиг касается прямой $\delta = n\pi$ сверху или снизу, не пересекая ее. Если же знаменатель тоже обращается в нуль, то, как мы видели, этот нуль может быть только простым, причем первая производная знаменателя в нем положительна. Поэтому фазовый сдвиг пересекает прямую $\delta = n\pi$ сверху. Более того, теперь выполняются оба условия (8.1.21) и (8.1.23) и в соответствии с предыдущим анализом мы имеем связанное состояние. Все эти результаты можно резюмировать следующим образом.

Теорема. а) Связанные состояния при положительной энергии даются общими корнями уравнений (8.1.21) и (8.1.23); б) Связанные состояния с положительной энергией соответствуют также (что эквивалентно утверждению «а») значениям энергии, при которых фазовый сдвиг проходит через значение $n\pi$, $n = 0 \pm 1, \dots$ сверху вниз с отрицательной первой производной, и наоборот; в) фазовый сдвиг никогда не пересекает прямую $n\pi$ снизу вверх; г) фазовый сдвиг может касаться прямой $n\pi$ сверху или снизу.

Рассмотрим теперь поведение фазового сдвига при высоких энергиях. На основании оценки (8.1.10а) и определения (8.1.15а) заключаем, что $\operatorname{tg} \delta(\infty) = 0$. Поэтому можно выбрать функцию $\delta(k)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\delta(\infty) = 0. \quad (8.1.28)$$

Фазовый же сдвиг при конечных значениях k мы определим, опираясь на его непрерывности и исходя из его значения на бесконечности (8.1.28). Это, очевидно, можно сделать, так как, согласно формуле (8.1.15а), величина $\operatorname{tg} \delta$ есть непрерывная функция переменной k всюду, кроме тех точек, в которых знаменатель подынтегрального выражения обращается в нуль. Но мы знаем, что знаменатель — функция, непрерывная по Гёльдеру, а поэтому определение величины δ при всех k на основании условия непрерывности, начиная со значения (8.1.28), вполне возможно.

Теорема Левинсона, доказанная Мартеном и другими исследователями в общем случае нелокальных взаимодействий, теперь имеет вид

$$\delta(0) - \delta(\infty) = \delta(0) = (\nu + n)\pi, \quad (8.1.29)$$

где ν — число связанных состояний с положительной энергией, а n — число связанных состояний с отрицательной энергией ($n = 0, 1$).

В заключение заметим, что при больших k знак фазового сдвига обращен знаку величины ε . Поэтому, установив фазовый сдвиг при высоких энергиях, можно найти ε . Кроме того, в соответствии с условиями (8.1.10а) и (8.1.10б) функция $A(p)$ принадлежит к некоторому классу $L^p(0, \infty)$, а поэтому ее преобразование Гильберта принадлежит к некоторому классу $L^q(0, \infty)$. Так как это преобразование Гильберта является функцией, непрерывной по Гёльдеру с некоторым положительным индексом, фазовый сдвиг обладает этим же свойством, а поэтому

$$\delta(k) = O(k^{-\eta}), \quad \eta > 0. \quad (8.1.30)$$

$k \rightarrow \infty$

§ 2. Обратная задача

Чтобы найти функцию $U(r)$, зная фазовый сдвиг, нужно сначала предположить, что последний удовлетворяет всем требованиям, необходимым для решения задачи. Например, если при возрастании k фазовый сдвиг пересекает прямую $n\pi$, где n целое, снизу, то можно быть уверенным, что задача с одночленным сепарабельным потенциалом не имеет решения.

Вначале рассмотрим обратную задачу при $\varepsilon = 1$. Как было показано выше, величина $\delta(k)$ при больших значениях энергии должна быть малой, но отрицательной. Тогда возможные связанные состояния при положительных значениях энергии можно найти просто по значениям k , при которых функция $\delta(k)$ пересекает (снизу!) прямые $\delta = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ при уменьшении k от бесконечности. При $k = 0$ должно выполняться условие $\delta(0) = \nu\pi$. Чтобы найти потенциал, зная фазовый сдвиг, нужно решить интегральное уравнение (8.1.15а) для функции $A(k)$. Найдя эту величину, вычисляем функцию $\tilde{U}(k)$ по формуле (8.1.15б), после чего, выполнив фурье-преобразование (8.1.7в), находим $U(r)$. Для простоты рассмотрим случай $\nu = 1$. Уравнение (8.1.15а) можно записать в виде

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{k^*(y) \varphi(y)}{y - x - i0} dy, \quad (8.2.1a)$$

где $x = k^2$ и

$$\tilde{\delta}(x) \equiv \delta(\sqrt{x}), \quad (8.2.1a)$$

$$g(x) = -\frac{2\sqrt{x}}{\pi} \operatorname{tg} \tilde{\delta}(x), \quad (8.2.1b)$$

$$\varphi(x) = \frac{A(\sqrt{x})}{g(x)} \left(1 + i\pi \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} \right), \quad (8.2.1c)$$

$$h(x) = \frac{\pi g(x)}{2\sqrt{x}} \left(1 - i\pi \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} \right)^{-1} = -\sin \tilde{\delta} e^{-i\tilde{\delta}}. \quad (8.2.1d)$$

Предположим теперь в соответствии со сказанным ранее, что $\delta(k)$ — непрерывная по Гёльдеру функция с некоторым положительным индексом и что при $k \rightarrow \infty$ она ведет себя как $k^{-\eta}$, где η — некоторая положительная величина. Эти условия необходимы, если мы хотим найти потенциал, удовлетворяющий условиям (8.1.9a) и (8.1.9б). Как будет видно ниже, они являются также и достаточными.

Чтобы решить интегральное уравнение (8.2.1a), введем вспомогательную функцию

$$H(z) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{h^*(y) \varphi(y)}{y-z} dy. \quad (8.2.2)$$

Предполагая априори, что функция φ непрерывна по Гёльдеру и что интеграл достаточно хорошо сходится, видим, что функция $H(z)$ является аналитической в плоскости z с разрезом от 0 до ∞ . Кроме того,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 1 \quad (8.2.3)$$

во всех направлениях.

Очевидно, что решение интегрального уравнения (8.2.1a) должно иметь вид

$$\varphi(x) = H(x_+) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} H(x + i\varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \infty. \quad (8.2.4)$$

В то же время скачок функции $H(z)$ на разрезе дается выражением

$$H(x_+) - H(x_-) = -2i \sin \tilde{\delta}(x) e^{i\tilde{\delta}(x)} \varphi(x). \quad (8.2.5)$$

Подставляя сюда выражение (8.2.4) для функции φ , получаем уравнение

$$\exp[2i\tilde{\delta}(x)] H(x_+) - H(x_-) = 0, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad (8.2.6)$$

которое представляет собой однородное уравнение Римана — Гильберта. Как нетрудно убедиться, это уравнение имеет частное решение, удовлетворяющее условию (8.2.3), вида

$$H(z) = \exp[\omega(z)], \quad (8.2.7a)$$

где

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\delta}(y)}{y-z} dy. \quad (8.2.7b)$$

Действительно, из сделанных нами предположений о поведении фазового сдвига следует, что

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \omega(z) = 0 \quad (8.2.8)$$

во всех направлениях. Кроме того, функция $\omega(z)$ хорошо определена на разрезе всюду, кроме, быть может, точки $z = 0$, где ее поведение определяется выражением

$$\omega(z) = \frac{\tilde{\delta}(0)}{\pi} \ln z + \tilde{\omega}(z). \quad (8.2.9)$$

Здесь функция $\tilde{\omega}(z)$ конечна при $z \rightarrow 0$ и $\tilde{\delta}(0) = \delta(0) = \pi$ (имеется одно связанное состояние при положительной энергии). В силу этого функция $\exp[\omega(z)]$ имеет только простой нуль в точке $z = 0$. В соответствии с выражениями (8.2.7a) и (8.2.7b) функция $\varphi(x)$ имеет вид

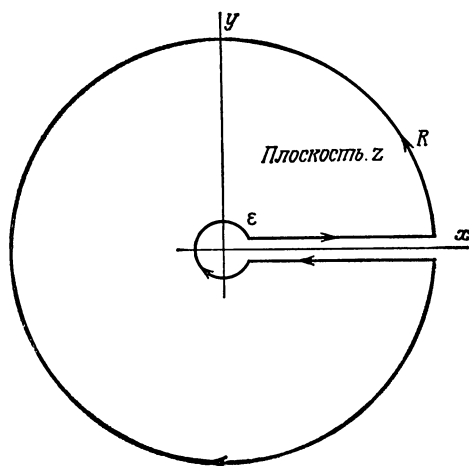
$$\varphi(x) = e^{\omega(x+)} = e^{\alpha(x)} e^{-i\delta(x)}, \quad (8.2.10)$$

$$\alpha(x) = -\frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\delta}(y)}{y-x} dy. \quad (8.2.11)$$

Необходимо удостовериться, что такая функция $\varphi(x)$ действительно удовлетворяет интегральному уравнению (8.2.1a). Это легко сделать, так как по теореме Коши

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\tilde{\delta}(y)} \sin \tilde{\delta}(y)}{y-x-i0} e^{\alpha(y)} e^{-i\tilde{\delta}(y)} dy = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\Gamma} \frac{e^{\omega(z)}}{z-x-i\varepsilon} dz - \int_R \dots \right) \right] = \\ & = e^{\omega(x+)} - 1 = \varphi(x) - 1, \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

где Γ — контур, показанный на рис. 1, причем R — окружность очень большого радиуса (очевидно, что если $H(z)$ — функция, регулярная в начале координат, то вклад малой окружности, охватывающей начало координат, стремится к нулю, когда ее

Рис. 1. Контур Γ .

радиус ε стремится к нулю). Заметим, что функция $\varphi(x)$ регулярна при $x = 0$. Она имеет простой нуль в этой точке. Из выражений (8.2.10) и (8.2.11) видно также, что функция $\varphi(x)$ непрерывна по Гёльдеру с тем же индексом, что и фазовый сдвиг, и ограничена при $x \rightarrow \infty$. Таким образом, априорные предположения о свойствах функции φ , которые мы сделали, чтобы решить интегральное уравнение, оказались правильными. Рассмотрим теперь однородное уравнение

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{h^*(y)}{y-x-i0} \varphi_0(y) dy \quad (8.2.13)$$

и введем функцию

$$H_0(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{h^*(y)}{y-z} \varphi_0(y) dy. \quad (8.2.14)$$

Предполагая априори, что функция φ_0 непрерывна по Гёльдеру ... и т. д., получаем

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} H_0(z) = 0 \quad (8.2.15)$$

во всех направлениях. Повторив те же выкладки, что и в случае H , получим

$$e^{2i\tilde{\delta}(x)} H_0(x_+) - H_0(x_-) = 0. \quad (8.2.16)$$

Примем "гипотезу"

$$H_0(z) = \sum_s A_s \frac{e^{\omega(z)}}{z^s}, \quad (8.2.17)$$

где $\omega(z)$ — функция (8.2.7б), а A_s — произвольные константы. Тогда

$$\varphi_0(z) = \frac{A_0}{x} e^{\omega(x_+)} \quad (8.2.18)$$

Путем контурного интегрирования можно снова убедиться, что функция (8.2.18) действительно является решением уравнения (8.2.13) и обладает всеми требуемыми свойствами.

В соответствии с полученными результатами общее решение интегрального уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{A_0}{x}\right) e^{\omega(x_+)} \quad (8.2.19)$$

Возвращаясь к прежним обозначениям, получаем

$$A(k) = -\frac{2k}{\pi} \sin \delta(k) e^{\alpha(k^2)} \left(1 + \frac{A_0}{k^2}\right), \quad (8.2.20)$$

$$\alpha(k^2) = -\frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\delta(p)}{p^2 - k^2} p dp. \quad (8.2.21)$$

Это решение содержит произвольную постоянную A_0 . Но по определению функция A должна сохранять свой знак при всех значениях k . В данном случае она должна быть положительной, так как $\varepsilon = 1$. В то же время мы знаем, то фазовый сдвиг δ меняет свой знак при энергии связанного состояния $E = k_0^2$. Следовательно, для того чтобы функция A [формула (8.2.20)] сохраняла свой знак (плюс), должно выполняться равенство

$$A_0 = -k_0^2. \quad (8.2.22)$$

Отсюда видно, что решение полностью определяется фазовым сдвигом, так как импульс k_0 также задается его поведением. Зная A , находим

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} k \tilde{U}(k) = [A(k)]^{1/2} \quad (8.2.23)$$

и затем по формуле (8.1.7в) вычисляем функцию $U(r)$. Нетрудно убедиться, что функция U удовлетворяет условиям (8.1.9а) и (8.1.9б), поскольку функция A непрерывна по Гёльдеру и убывает при $k \rightarrow \infty$ как $k^{-\eta}$, $\eta > 0$. Из выражений (8.2.20) и (8.2.21) явствует, что функция A обладает этими свойствами, если ими обладает фазовый сдвиг. В случае нескольких связанных состояний с положительной энергией, возникающих при $E_\alpha = k_\alpha^2$ ($\alpha = 1, 2, \dots$ и $\varepsilon = 1$), аналогичные рассуждения приводят к выражению

$$A(k) = -\frac{2k}{\pi} \sin \delta(k) e^{\alpha(k^2)} \prod_\alpha \left(1 - \frac{k_\alpha^2}{k^2}\right). \quad (8.2.24)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\varepsilon = -1$ и имеются два связанных состояния: одно с положительной энергией $E_0 = k_0^2$, а другое — истинное связанное состояние с отрицательной энергией $E = -\gamma^2$. Так как $\delta(0) = 2\pi$, мы получаем, что функция $H(z)$ в соответствии с формулой (8.2.9) имеет нуль второго порядка в начале координат. Действуя так же, как и раньше, и учитывая уравнение для собственного значения с $X = \gamma^2$, а также то обстоятельство, что решение $A(k)$ должно сохранять свой знак (минус) при всех значениях переменной k , получаем

$$A(k) = -\frac{2k}{\pi} \sin \delta(k) e^{\alpha(k^2)} \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2}\right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{k^2}\right). \quad (8.2.25)$$

Мы видим, что в этом случае потенциал однозначно определяется фазовым сдвигом и энергией истинного связанного состояния. Как обобщить изложенный метод на парциальные волны с $l > 0$, теперь ясно. Нужно лишь взять вместо синус-преобразования Фурье интегральное преобразование Ханкеля

$$\tilde{\psi}(k, \rho) = \int_0^\infty \psi(k, r) \frac{\sqrt{\rho r} J_{l+1/2}(\rho r)}{\rho^{l+1}} dr. \quad (8.2.26)$$

Тогда мы сможем исключить центробежный потенциал и получим уравнения, аналогичные тем, которые были получены в случае S -волн. Результаты тоже будут аналогичными.

§ 3. Взаимодействие более общего вида

Метод, изложенный выше, пригоден и в случае более общих нелокальных взаимодействий. Рассмотрим взаимодействие более общего вида:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = V(r) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \sum_l \varepsilon_l u_l(r) u_l(r') P_l(\cos \theta), \quad (8.3.1)$$

где V — локальный потенциал, который мы считаем известным. Радиальное уравнение теперь имеет вид

$$\psi_l'' + \left(E - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) \psi_l = V\psi_l + \varepsilon_l U_l(r) \int_0^\infty U_l(r') \psi_l(k, r') dr'. \quad (8.3.2)$$

Обратная задача состоит здесь в том, чтобы найти потенциал U_l , если известны фазовый сдвиг $\delta_l(k)$ и локальный потенциал V . Для ее решения предположим, что локальный потенциал удовлетворяет условию (1.1.3) при $b = 0$. Допустим, что мы решили радиальное уравнение с потенциалом, равным V , и нашли

ψ_l и спектральную плотность $d\rho_l(E)$. Тогда мы можем ввести интегральные преобразования

$$\tilde{U}_l(E) = \int_0^\infty U_l(r) \varphi_l(E, r) dr, \quad (8.3.3a)$$

$$U_l(r) = \int_0^\infty \tilde{U}_l(E) \varphi_l(E, r) d\rho_l(E). \quad (8.3.3b)$$

Эти интегральные преобразования обладают свойствами, близкими к свойствам преобразования Ханкеля, рассмотренного раньше. При $V = 0$ они, конечно, сводятся к преобразованию Ханкеля. Если записать фазовый сдвиг в виде (индекс l опущен)

$$\delta = \delta_v + \delta_u^v, \quad (8.3.4)$$

где δ_v — известный фазовый сдвиг, соответствующий одному потенциалу V , то для приращения δ_u^v получим уравнение, идентичное уравнению (8.1.15a), а именно

$$-\frac{2k}{\pi} \operatorname{tg} \delta_n^v(k) = \frac{A(k)}{1 + P \int_0^\infty \frac{A(\sqrt{s})}{s - k^2} d\sqrt{s}}, \quad (8.3.5a)$$

$$A(k) = \frac{2\varepsilon}{\pi} k^2 \tilde{U}^2(k) |F(k)|^{-2}, \quad (8.3.5b)$$

где $\tilde{U}$ — функция (8.3.3a), а $F(k)$ — функция Йоста для потенциала V . Предположив снова, что выполняются условия (8.1.9a) и (8.1.9б), мы найдем, исследуя (8.3.5a), что функция δ_u^v ведет себя так же, как фазовый сдвиг, соответствующий одному чисто сепарабельному члену. В частности, в этом случае к приращению фазового сдвига применимы теорема из предыдущего параграфа и ее утверждения о связанных состояниях при положительной энергии. Стало быть, исследуя поведение δ_u^v при изменении энергии, можно сразу же найти положительные значения энергии, при которых существуют связанные состояния. Точно так же знаком приращения фазового сдвига при высоких энергиях определяется ε .

Переходя к связанным состояниям, соответствующим отрицательным значениям энергии, рассмотрим общий случай, когда локальный потенциал имеет n связанных состояний. Тогда полный потенциал допускает $N = n$, $n + 1$ или $n - 1$ связанных состояний в зависимости от знака ε и величины сепарабельного потенциала. Если $\varepsilon = +1$ и сепарабельное взаимодействие не слишком сильное, то $N = n$. Если же это взаимодействие доста-

точно сильное, то получим $N = n - 1$, т. е. отталкивающий сепарабельный потенциал, если он достаточно сильный, может устранить одно связанное состояние (с наименьшей энергией связи) локального потенциала. Если $\varepsilon = -1$, то мы аналогично получим $N = n$ или $n + 1$ в зависимости от величины добавочного потенциала. К полному фазовому сдвигу применима, конечно, теорема Левинсона, которая в данном случае имеет вид

$$\delta(0) - \delta(\infty) = (N + \nu) \pi, \quad N = n - 1, \quad n \quad \text{или} \quad n + 1. \quad (8.3.6)$$

Обратная задача может быть решена здесь точно так же, как и в предыдущем случае. Мы должны снова решить уравнение Римана—Гильберта—Мусхелишвили. Если снова предположить, что функция δ_u^v непрерывна по Гёльдеру и ведет себя согласно равенству (8.1.30), то мы сможем однозначно решить обратную задачу (зная V , φ , $d\rho$, δ_v) тогда и только тогда, когда функция δ_u^v обладает требуемыми свойствами, т. е. в том и только в том случае, если к ней применима теорема из предыдущего параграфа. В этом случае получаемые результаты совершенно аналогичны формулам (8.2.24), (8.2.25) и т. д.

Мы не будем здесь вдаваться в подробности, а отошлем читателя к соответствующей литературе [82, 85, 304].

Другое обобщение состоит в использовании нескольких сепарабельных потенциалов в каждой парциальной волне:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = V(r) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \sum_l \sum_s \varepsilon_l u_{ls}(r) u_{ls}(r') P_l(\cos \theta). \quad (8.3.7)$$

В таком случае правая часть радиального уравнения (8.1.4а) имеет вид

$$V\psi_l + \sum_s \varepsilon_{ls} U_{ls}(r) \int_0^\infty U_{ls}(r') \psi_l(r') dr'. \quad (8.3.8)$$

Существуют два способа решения этого уравнения. Во-первых, мы можем решать его путем итераций, используя интегральные преобразования волновой функции, полученной в предыдущей итерации, точно так же, как в случае уравнения (8.3.2). Во-вторых, мы можем использовать всюду интегральное преобразование, определяемое функцией φ_l , получив систему алгебраических уравнений для нахождения связи между потенциалами U_{ls} и фазовым сдвигом. Мы снова придем к сингулярным интегральным уравнениям Гильберта—Мусхелишвили и в конце концов к результатам, совершенно аналогичным тем, которые были получены раньше для обратной задачи. В данном случае, какими бы ни были величины δ_l и связанные состояния при отрицательных значениях энергии, мы всегда можем найти подходящий набор потенциалов U_{ls} и тем самым решить задачу.

Другими словами, фазовый сдвиг δ_l может иметь любой вид, если мы выберем достаточно большой набор $\{s\}$.

§ 4. Применение

Поскольку обратная задача с сепарабельными потенциалами решается точно, во многих случаях можно получить решение в замкнутой форме, выраженное через элементарные функции. Простой пример — когда величина $\operatorname{tg} \delta$ задана в виде рациональной функции переменной k . Такие варианты детально исследованы в литературе. В простейшем из них предполагается, что приближение эффективного радиуса справедливо в случае S -волны при всех энергиях:

$$k \operatorname{ctg} \delta = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2. \quad (8.4.1)$$

В синглетном случае ($a < 0$) нет никаких связанных состояний. Если написать

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2}{r_0} \frac{k}{k^2 + \alpha^2}, \quad \alpha^2 = \frac{-2}{ar_0}, \quad (8.4.2)$$

то получим, что $\varepsilon = -1$ (взаимодействие притягивающее, но недостаточно сильное для того, чтобы возникло связанное состояние) и

$$\alpha(k^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{k^2 + \beta_2^2}{k^2 - \beta_1^2}, \quad (8.4.3)$$

где β_1 и β_2 — корни уравнения

$$\beta^2 - \frac{2}{r_0} \beta - \alpha^2 = 0. \quad (8.4.4)$$

У такого уравнения всегда имеются два действительных корня разных знаков; мы выберем

$$\beta_2 > |\beta_1|, \quad (8.4.5)$$

чтобы обеспечить выполнение условий регулярности потенциала. Приведенные выше выражения позволяют легко найти потенциал с помощью синус-преобразования Фурье, и результат таков:

$$U(r) = \sqrt{4\pi} r u(r) = \frac{2\sqrt{2}\beta_2}{\pi\sqrt{r_0}} K_1(\beta_2, r), \quad (8.4.6)$$

где K_1 — модифицированная функция Ханкеля первого рода с индексом, равным 1. Заметим, что здесь в противоположность локальному случаю (гл. 6) взаимодействие является притягивающим. Поскольку вблизи начала координат потенциал U ведет себя как r^{-1} , легко показать, что волновая функция ведет себя там как $r \ln r$.

В триплетном случае ($a > 0$) напомним

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2k}{r_0(k^2 - \gamma^2)}, \quad \gamma^2 = \frac{-2}{ar_0}. \quad (8.4.7)$$

Здесь мы снова имеем $\varepsilon = -1$, но имеется также связанное состояние, соответствующее отрицательному значению энергии. Путем таких же выкладок, как и в предыдущем случае, получим

$$\alpha(k^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{k^2}{(k^2 + \beta_1^2)(k^2 + \beta_2^2)}, \quad (8.4.8)$$

где β_1 и β_2 — действительные корни уравнения

$$\beta^2 - \frac{2}{r_0} \beta + \gamma^2 = 0. \quad (8.4.9)$$

Решение, соответствующее энергии связанного состояния, совпадающей с $k_0 = 0$, согласно формуле (8.2.25), имеет вид

$$A(k) = \frac{-4\pi}{r_0} \frac{k^2(k^2 + \gamma^2)}{(k^2 + \beta_1^2)(k^2 + \beta_2^2)}. \quad (8.4.10)$$

К сожалению, потенциал $U(r)$ нельзя выразить через элементарные функции.

В случае более сложных рациональных выражений для $\operatorname{tg} \delta$ получаются аналогичные формулы, но с большим числом членов. Такой же анализ проводится и в случае $l > 0$, если использовать преобразование Ханкеля (8.2.26) и пр., и в результате получаются совершенно аналогичные формулы.

В заключение отметим, что можно взять общую форму (8.3.7) с хорошим локальным потенциалом $V(r)$ и выбрать сепарабельные члены $\{U_{ls}(r)\}$ таким образом, чтобы полное взаимодействие было эквивалентно нулевому потенциалу при всех энергиях и при всех l , т. е. было взаимодействием, совершенно прозрачным при всех энергиях. Оказывается, что для любого V существует целый класс таких взаимодействий. Поскольку потенциал V тоже произвольный, в действительности получается очень большой класс полностью прозрачных потенциалов. Как это ни удивительно, но можно сделать так, что все эти взаимодействия будут всюду хорошо ведущими себя и конечными и даже будут иметь экспоненциально убывающие хвосты во всех направлениях, если V имеет такой хвост [85].

§ 5. Замечания и литература

Обратную задачу в случае одного сепарабельного потенциала впервые начали исследовать, а затем полностью решили Гурден и Мартен [186—188]. Через несколько лет эту задачу снова открыли и заново решили, хотя и не столь полно (в частности,

игнорируя связанные состояния при положительной энергии), Болстерли и Маккензи [49], а затем Табакин [401].

Обобщенная теорема Левинсона была доказана Мартеном [291] (см. также [57, 401]). (Некоторые дополнительные ссылки можно найти в книге Ньютона [319].)

Более общий случай обратной задачи, когда имеется также локальный потенциал, был впервые рассмотрен Шаданом [82]. Задача с несколькими сепарабельными потенциалами была решена Шаданом [85] и Милсом и Ридингом [304].

Полное исследование сингулярных интегральных уравнений можно найти в книге Мухелишвили [312], где детально рассмотрена непрерывность по Гёльдеру главных значений интегралов.

Общая теория интегралов Фурье изложена в книге Титчмарша [403], в которой тщательно исследованы свойства интегрируемости преобразований Фурье и их непрерывность по Гёльдеру и асимптотическое поведение. Там также рассмотрены непрерывность по Гёльдеру и асимптотические свойства главных значений интегралов.

Шаданом [83] была впервые рассмотрена обратная задача для случая спин-орбитальных и тензорных сил. Подобные силы исследовались также в работах Болстерли и Маккензи [49] и Табакина [401].

Большое число работ посвящено применениям сепарабельных потенциалов в теории нуклон-нуклонного рассеяния, в ядерной физике и при исследовании свойств ядерной материи, а также в связи с применением уравнений Фаддеева. Впервые сепарабельные потенциалы в нуклон-нуклонной задаче, учитывающей тензорные силы, были применены в работе [429, 430]. О работах более позднего времени, связанных с использованием таких потенциалов в различных областях, упомянутых выше, см. текущую литературу по ядерной физике.

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ПРИ ФИКСИРОВАННОМ l

Данная глава представляет собой обзор по дальнейшим обобщениям методов, изложенных в предыдущих главах, новым подходам и подходам к более сложным задачам. Рассматривается только радиальный случай (относительно «одномерных» задач см. гл. 12). Основная часть результатов данной главы приводится без доказательств, и читателю, которого заинтересуют доказательства, следует обратиться к литературе. В данной главе мы пользуемся теми же обозначениями, что и во всей книге, а также обозначениями, специально вводимыми в каждом параграфе.

§ 1. Обобщение на другие сферически-симметричные потенциалы

В гл. 3 мы столкнулись с простым обобщением метода Гельфанда—Левитана на случай, когда вместо нулевого исходного потенциала берется некоторый потенциал V_0 . На этот случай нетрудно обобщить и метод Марченко. Для этого достаточно сделать следующее.

1. Решения уравнения Шредингера с потенциалом $V \equiv 0$ заменить решениями, соответствующими выбранному начальному потенциалу V_0 .

2. Свободный оператор Шредингера в дифференциальных уравнениях заменить возмущенным оператором Шредингера с потенциалом V_0 .

3. Функцию $S(k)$ заменить разностью $S(k) - S_0(k)$, где индекс 0 соответствует потенциалу V_0 .

Такой метод внутренне непротиворечив лишь в том случае, если потенциал V_0 удовлетворяет тем условиям, которые накладываются в методе Марченко. Следовательно, в случае сингулярного потенциала V_0 метод неприменим.

Метод Гельфанда—Левитана для парциальных волн с $l > 0$ был изложен в гл. 3. Метод Марченко для парциальной волны $l > 0$ был разработан самим Марченко [6] на основе довольно сложного рекуррентного метода. Блажек [45, 46], взяв вместо преобразования Фурье преобразование Ханкеля, предложил более

простое обобщение метода Марченко на случай $l > 0$. Его результаты, являющиеся развитием метода для $l = 0$, состоят в следующем.

Если предположить, что первый и второй абсолютные моменты потенциала ограничены:

$$\int_0^{\infty} r^{1,2} |V(r)| dr < \infty,$$

то потенциал $V(r)$ дается выражением

$$V(r) = V_l(r) = -2 \frac{dK_l(r, r)}{dr}, \quad (9.1.1)$$

где $K_l(r, \rho)$ — решение линейного интегрального уравнения ($r \leq \rho$)

$$K_l(r, \rho) + \int_r^{\infty} K_l(r, t) F_l(t, \rho) dt + F_l(r, \rho) = 0. \quad (9.1.2)$$

В простейшем случае, когда нет связанных состояний, для ядра интегрального уравнения (9.1.2) возможно представление

$$F_l(r, \rho) = -(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dk [1 - S_l(k)] [-kr h_l^{(2)}(-kr)] [-k\rho h_l^{(2)}(-k\rho)], \quad (9.1.3)$$

где $h_l^{(2)}$ — сферические функции Ханкеля второго рода. При этом предполагается, что

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1 - S_l(k)}{k^{2l+1}} < \infty. \quad (9.1.4)$$

Очевидно, что условием (9.1.4) гарантируется сходимость интеграла в выражении (9.1.3) в точке $k = 0$. Если матрица рассеяния $S_l(k)$ известна при нескольких значениях l , то соотношение (9.1.4) можно рассматривать как условие совместности, поскольку потенциал $V_l(r)$ не должен зависеть от l .

Решение Йоста $f_l(k, r)$ для парциального волнового уравнения

$$u_l'' + (k^2 - l(l+1)r^{-2} - V(r)) u_l = 0 \quad (9.1.5)$$

можно определить как решение, которое при $r \rightarrow \infty$ переходит в $\exp(-ikr)$. Ядро $K_l(r, \rho)$ является ядром преобразования для решения Йоста:

$$f_l(k, r) = i^{-l-1} \left[kr h_l^{(2)}(kr) + \int_r^{\infty} K_l(r, t) k t h_l^{(2)}(kt) dt \right]. \quad (9.1.6)$$

Таким образом, изложенный метод аналогичен методу Марченко и совпадает с ним при $l = 0$.

Сингулярные потенциалы, для которых обычный аппарат теории рассеяния непригоден, насколько нам известно, никогда не исследовались точными методами с точки зрения обратной задачи. Единственное исключение — кулоновский потенциал. Для него некоторые результаты, в том числе теорема единственности, были получены еще в 1950 г. Жоо [217] и в 1951 г. Фрёбергом [462]. Чтобы продвинуться дальше в этой области, можно использовать подход, позволяющий непосредственно строить ядро преобразования при наличии дополнительного потенциала. Для этого удобно использовать функцию Римана—Грина дифференциального уравнения в частных производных, которому удовлетворяет ядро Марченко [190, 191] (см. также [122]). Авторы работ [190, 191] исследовали уравнение (9.1.5) с потенциалом V вида

$$V(r) = ar^{-1} + u(r), \quad (9.1.7)$$

где $u(r)$ — функция, ограниченная убывающей экспонентой. Они предложили метод решения обратной задачи, подобный методу Марченко, но с чисто кулоновским исходным потенциалом $V_0 = ar^{-1}$; поэтому функции Ханкеля должны быть заменены решениями Йоста с кулоновским потенциалом, оператор Шредингера свободного движения — возмущенным оператором, а разность $(1 - S_l(k))$ — разностью между $S_l(k)$ и кулоновской парциальной амплитудой рассеяния $S_l^{(0)}(k)$. Тогда ядро преобразования $K_l^C(r, r')$ должно быть решением дифференциального уравнения в частных производных

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{a}{r} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{a}{\rho} \right) \right] K_l^C(r, \rho) = u(r) K_l^C(r, \rho). \quad (9.1.8)$$

Пользуясь стандартным методом решения гиперболических уравнений с неоднородным членом [правая часть уравнения (9.1.8)] и учитывая граничные условия, уравнение (9.1.8) нетрудно преобразовать в интегральное уравнение

$$K_l^C(R, P) = K_l^B(R, P) - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{R}_l(R, P, r, \rho) u(r) K_l^C(r, \rho) d^2S, \quad (9.1.9)$$

где $\mathcal{R}_l$ — функция Римана, K_l^B — функция K_l^C в борновском приближении, а интегрирование ведется по области $\mathcal{D}(r, r')$, ограниченной характеристиками гиперболического уравнения. Исследуя это интегральное уравнение, можно установить свойства ядра преобразования. Такой метод, очевидно, дает возможность

исследовать обратные задачи, в которых ядра преобразования удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям с частными производными. Мы еще встретимся с этим методом, когда будем рассматривать обратную задачу при фиксированной энергии, в которой он был применен Сабатье [374]. В данной задаче этот метод позволил исследовать потенциалы, содержащие кулоновский член, и обобщить метод Марченко на случай нецелых l . Для той же цели было предложено использовать оператор обобщенного сдвига [422].

§ 2. Подход Крейна

Очень интересный альтернативный подход к решению обратной задачи рассеяния с $l = 0$ был предложен Крейном [256—258]. Такой подход применяется также в матричных обобщениях. Мы приведем лишь некоторые результаты, полученные Крейном. Уравнение Шредингера

$$-\frac{d^2 y}{dr^2} + V(r)y = k^2 y \quad (9.2.1)$$

заменяется эквивалентной системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dr} + A(r)y &= kz, \\ -\frac{dz}{dr} + A(r)z &= ky, \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

где $A(r)$ и $V(r)$ — функции, связанные между собой уравнением Риккати

$$V(r) = -\frac{dA}{dr} + A^2(r). \quad (9.2.3)$$

Заметим, что

$$\frac{d^2}{dr^2} - V(r) = \left(\frac{d}{dr} - A(r) \right) \left(\frac{d}{dr} + A(r) \right).$$

Из аналитических свойств регулярного решения $\varphi(k, r)$ уравнения (9.2.1) и теоремы Винера—Пели можно вывести следующее представление:

$$\varphi(k, r) = k^{-1} \operatorname{Im} \left[e^{ikr} \left(1 + \int_0^{2r} \Gamma_{2r}(t) e^{-ikt} dt \right) \right], \quad (9.2.4)$$

где

$$A(r) = 2\Gamma_{2r}(2r). \quad (9.2.5)$$

Кроме того, при любом фиксированном r функция $\Gamma_{2r}(t)$ является решением интегрального уравнения Фредгольма

$$\Gamma_{2r}(t) + H(t) + \int_0^{2r} \Gamma_{2r}(s) H(s-t) ds = 0, \quad (9.2.6)$$

где $H(t)$ следующим образом выражается через функцию $W(k) = |F(k)|^{-2}$ (в случае отсутствия связанных состояний):

$$H(t) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} [W(k) - 1] \cos kt \, dk. \quad (9.2.7)$$

Схема решения обратной задачи такова: по формуле (9.2.7) строят функцию H , затем решают уравнение (9.2.6), по формуле (9.2.5) вычисляют функцию $A(r)$ и, наконец, по формуле (9.2.3) определяют потенциал $V(r)$.

В заключение напомним, что в гл. 3, § 3, уравнение Крейна (9.2.6) было выведено из уравнения Гельфанда—Левитана.

§ 3. Система уравнений

В случае системы дифференциальных уравнений

$$y''_{\alpha}(E, r) + E y_{\alpha}(E, r) = \sum_{\beta=1}^N V_{\alpha\beta}(r) y_{\beta}(E, r) \quad (9.3.1)$$

с действительной матрицей взаимодействия $V_{\alpha\beta}(r)$ размерности $N \times N$ можно попытаться восстановить $V_{\alpha\beta}(r)$ по S -матрице $S(E)$, известной при всех значениях энергии E , и по связанным состояниям.

Впервые обобщение метода Гельфанда—Левитана на такую задачу в нефизическом случае ($V_{\alpha\beta}$ — регулярная в начале координат симметричная матрица) было предложено Ньютоном и Йостом [325] (см. также работу Крейна [258]). На более реальные случаи, в которых учитываются центробежный член, спин-орбитальные и тензорные силы, метод был обобщен Ньютоном [314] с обычными ограничениями на потенциал. В частности, ему удалось показать, что если короткодействующий потенциал воспроизводящий заданную S -матрицу, существует, то он однозначно определяется по S -матрице, энергиям связанных состояний и соответствующим им положительно полуопределенным матрицам. Система (9.3.1) с центробежным потенциалом, тензорным и спин-орбитальным членами была также исследована обобщенным методом Марченко в работах Аграновича и Марченко [3—5]. Основательно и достаточно полно эти результаты изложены в книге Аграновича и Марченко [6]. Отметим здесь лишь основной

результат. Эрмитова потенциальная матрица $V(x) = \{V_{\alpha\beta}(x)\}$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{\infty} x |V_{\alpha\beta}(x)| dx < \infty, \quad (9.3.2)$$

может быть построена по матрице рассеяния $S(k)$, набору отрицательных чисел k_n^2 ($n = 1, 2, \dots, p$) и эрмитовым матрицам M_n ($n = 1, 2, \dots, p$), если эти данные рассеяния удовлетворяют следующим пяти необходимым и достаточным условиям.

1. Матрица $I - S(\lambda)$ есть фурье-образ эрмитовой матрицы $F_s(t)$:

$$F_s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [I - S(\lambda)] e^{i\lambda t} d\lambda, \quad (9.3.3)$$

каждый элемент которой интегрируем в интервале $(0, \infty)$, а в интервале $(-\infty, 0)$ может быть представлен в виде суммы двух функций, одна из которых интегрируема, а вторая квадратично-интегрируема и ограничена.

2. Производная $F'_s(t)$ существует при всех $t > 0$ и

$$\int_0^{\infty} t |F'_s(t)| dt < \infty, \quad (9.3.4)$$

где

$$|A| = \sup_j \sum_k |A_{jk}|.$$

3. Уравнение

$$-x(t) + \int_{-\infty}^0 x(\xi) F_s(t + \xi) d\xi = 0 \quad (-\infty < t \leq 0) \quad (9.3.5)$$

не имеет нетривиальных векторных решений с компонентами, квадратично-интегрируемыми в интервале $(-\infty, 0)$.

4. Уравнение

$$x(t) + \int_0^{\infty} x(\xi) F(t + \xi) d\xi = 0 \quad (0 \leq t < \infty), \quad (9.3.6)$$

в котором

$$F(t) = \sum_{n=1}^p M_n^2 e^{-|k_n|t} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [I - S(\lambda)] e^{i\lambda t} d\lambda, \quad (9.3.7)$$

не имеет нетривиальных векторных решений с компонентами, квадратично-интегрируемыми в интервале $(0, \infty)$.

5. Число линейно-независимых решений уравнения

$$x(t) + \int_0^{\infty} x(\xi) F_s(t+\xi) d\xi = 0 \quad (0 \leq t < \infty) \quad (9.3.8)$$

равно сумме рангов нормировочных матриц $M_1, M_2, \dots, M_n$.

Если все эти условия выполняются, то потенциал $V(x)$ можно построить в три приема:

1) на основании данных рассеяния по формуле (9.3.7) строят функцию $F(t)$;

2) по функции F из интегрального уравнения

$$F(x+y) + K(x, y) + \int_x^{\infty} K(x, t) F(t+y) dt = 0 \quad (0 < x \leq y) \quad (9.3.9)$$

находят ядро преобразования $K(x, y)$;

3) через $K(x, x)$ выражают матрицу взаимодействия:

$$V(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) \quad (x > 0). \quad (9.3.10)$$

Все это формально представляет собой прямое обобщение метода Марченко. Выводы формул также аналогичны, и самый важный момент, как и там, — получение для решения уравнения Шредингера представления (5.1.5) с треугольным ядром.

Изложим теперь результаты Ньютона для потенциала вида

$$\mathcal{V}(r) = v_d(r) + v_s(r) \sigma_1 \sigma_2 + v_t(r) S_{1,2} + v^0(r) S \cdot L, \quad (9.3.11)$$

содержащего центральный, спин-спиновый, тензорный и спин-орбитальный члены взаимодействия. Такой потенциал используется для описания волновой функции триплетного состояния системы двух частиц со спинами $1/2$, две компоненты которой с орбитальными моментами l и $l+2$ могут быть объединены в вектор-столбец. Таким образом, уравнение Шредингера для радиальной части волновой функции, содержащей обе компоненты, можно записать в виде

$$\psi_c''(E, r) + E\psi(E, r) = [r^{-2}l(l+1)(1-P) + r^{-2}(l+2)(l+3)P + V(r)]\psi(E, r), \quad (9.3.12)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$V(r)$ — функция переменной r , представляющая собой симметричную матрицу размерности 2×2 , а $\psi(E, r)$ — матрица размерности 2×2 , отдельные столбцы которой являются векторами решений уравнения (9.3.1).

В этом случае также можно определить следующие величины.

1. Регулярное решение $\mathbf{G}(k, r)$, которое при $r = 0$ обращается в нуль, а при нулевом потенциале переходит в свободное решение

$$\mathbf{G}_0(k, r) = \begin{pmatrix} k^{-(l+1)} u_l(k, r) & 0 \\ 0 & k^{-(l+3)} u_{l+2}(k, r) \end{pmatrix}. \quad (9.3.13)$$

2. Решение Йоста $\mathbf{F}(k, r)$, удовлетворяющее граничному условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp \left[i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] \mathcal{E} \mathbf{F}(k, r) = \mathbf{1}, \quad (9.3.14)$$

где

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Функцию Йоста или, точнее, матрицу Йоста $\mathbf{F}(k)$, как вронскиан функций $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}(k) = [\mathbf{F}(k, r) \tilde{\mathbf{G}}'(k, r) - \mathbf{F}'(k, r) \tilde{\mathbf{G}}(k, r)] \mathcal{K}_l(k), \quad (9.3.15)$$

где

$$\mathcal{K}_l(k) = k^l (1 - \mathbf{P}) + k^{l+2} \mathbf{P}, \quad (9.3.16)$$

а тильдой обозначена транспонированная матрица. Функция Йоста $\mathbf{F}(k)$ аналитична в полуплоскости $\text{Im } k < 0$ и непрерывна в области $\text{Im } k \leq 0$ всюду, кроме, может быть, точки $k = 0$. Функция же

$$\mathbf{F}_l(k) \equiv \mathcal{K}_l(k) \mathbf{F}(k) \mathcal{K}_l(k^{-1}) \quad (9.3.17)$$

непрерывна в этой точке.

4. S -матрицу, которую можно представить в виде

$$\mathbf{S}(k) = \mathbf{F}(k) \mathbf{F}^{-1}(-k). \quad (9.3.18)$$

Справедливы также следующие утверждения.

5. Ненулевые собственные значения уравнения (9.3.12) строго соответствуют точкам нижней полуплоскости, где $\mathbf{F}(k)$ — сингулярная матрица (или $\det [\mathbf{F}(k)] = 0$). Таким образом, матрица $\mathbf{F}^{-1}(k)$ аналитична в области $\text{Im } k < 0$ всюду, кроме конечного числа точек $k = -iK_i$, $K_i > 0$, в которых она имеет простые полюса. Эти полюса соответствуют связанным состояниям. Некоторые трудности возникают в точке $k = 0$, являющейся для этой задачи особой [314]. Соотношение между фазой детерминанта $\det \mathbf{S}(k = 0)$ и числом связанных состояний аналогично теореме Левинсона.

6. Регулярные решения составляют полный набор. Соотношение полноты имеет вид

$$\int \tilde{\mathbf{G}}(\sqrt{E}, r) \mathbf{G}(\sqrt{E}, r') d\mathbf{P}(E) = \delta(r - r'), \quad (9.3.19)$$

где $P(E)$ — спектральная функция, которая определяется следующим образом:

$$P(-\infty) = 0, \quad (9.3.20)$$

$$\frac{dP(E)}{dE} = \begin{cases} \pi^{-1} E^{l+1/2} \mathcal{K}_0(\sqrt{E}) [F^T(\sqrt{E}) F(-\sqrt{E})]^{-1} \mathcal{K}_0(\sqrt{E}) & \text{при } E > 0, \\ \sum_{n=0}^L C_n \delta(E - E_n) & \text{при } E_0 = 0, E \leq 0. \end{cases}$$

Величины C_n — это нормировочные постоянные для связанных состояний с энергиями E_n . Таким образом, спектральная функция представляет собой действительную симметричную положительно полуопределенную матрицу, зависящую от энергии E .

7. Обычным путем из соотношения полноты можно вывести обобщенное уравнение Гельфанда—Левитана, связывающее спектральную функцию с потенциалом. Пусть

$$\mathcal{F}(s, r) = - \int \tilde{G}_0(\sqrt{E}, s) d[P_0(E) - P(E)] G_0(\sqrt{E}, r), \quad (9.3.21)$$

где индексом 0 отмечены величины, связанные с исходным потенциалом V_0 . Тогда существует матрица $\mathcal{K}(s, r)$, являющаяся единственным решением интегрального уравнения

$$\mathcal{K}(s, r) + \mathcal{F}(s, r) + \int_0^r \mathcal{F}(s, t) \mathcal{K}(t, r) dr = 0, \quad s \leq r, \quad (9.3.22)$$

и удовлетворяющая условию

$$2 \frac{d}{dr} \mathcal{K}(r, r) = V(r) - V_0(r). \quad (9.3.23)$$

Спектральную функцию можно также выразить через $S(k)$ [314].

§ 4. Связанные каналы

Рассмотрим систему радиальных уравнений

$$-\Psi''_{\alpha} + \sum_{\beta} V_{\alpha\beta} \Psi_{\beta} = K_{\alpha}^2 \Psi_{\alpha}, \quad (9.4.1)$$

где Ψ_{α} — соответствующие отдельным α -каналам компоненты волновой функции, не зависящей от времени. Потенциальная матрица симметрична ($V_{\alpha\beta} = V_{\beta\alpha}$) в силу инвариантности обращения времени. Величина K_{α} — волновое число α -канала. Для простоты предположим, что во всех каналах приведенная

масса μ одинакова. Тогда закон сохранения энергии во всех каналах запишется в виде

$$K_1^2 = K_i^2 + \Delta_i^2, \quad (9.4.2)$$

где $\hbar^2 \Delta_i^2 / 2\mu$ — постоянная энергия порога i -го канала. Энергия порога первого (входного) канала, разумеется, равна нулю. Из выражения (9.4.2) видно, что для открытого канала K_i — действительная величина, а для закрытого — мнимая.

Очевидно, что решение Ψ_α можно записать в виде векторного столбца. Для удобства объединим n таких столбцов-решений в одну квадратную матрицу. Каждый столбец решений отличается от остальных своим граничным условием. Таким образом, мы запишем решение Ψ в виде квадратной $n \times n$ -матрицы $\|\Psi_{\alpha\beta}\|$ и соответственно этому $V = \|V_{\alpha\beta}\|$, а $K = \|K_{\alpha\beta}\|$ в виде диагональной матрицы $K_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}$. Тогда уравнение (9.4.1) перепишется в матричной форме

$$-\Psi'' + V\Psi = K^2\Psi. \quad (9.4.3)$$

Предполагая, что потенциал V зависит только от r и что его пер-

вый и второй моменты $\int_0^\infty r^{1,2} \|V(r)\| dr$ ограничены, можно обоб-

щить на данный случай некоторые результаты теории потенциального рассеяния для s -волны.

1. Регулярное решение $\Phi(K, r)$, определяемое уравнением (9.4.3) и граничными условиями $\Phi(K, 0) = 0$, $\Phi'(K, 0) = 1$, является единственным решением интегрального уравнения Вольterra, совершенно аналогичного уравнению (1.2.2). Отсюда следует, что решение Φ есть аналитическая функция всех переменных $K_\alpha = K_1, \dots, K_n$, регулярная во всей комплексной плоскости этих переменных. Далее можно показать, что асимптотическая форма функции Φ при больших значениях K такова:

$$\Phi(K, r) \rightarrow K^{-1} \sin [K, r] + o(|K|^{-1}) \exp [|\operatorname{Im} K| r] \quad (9.4.4)$$

при

$$|K_1|, |K_2|, \dots, |K_n| \rightarrow \infty.$$

2. Решение Йоста $F(K, r)$, определяемое уравнением (9.4.3) и граничным условием

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp [iKr] F(K, r) = 1,$$

является единственным решением интегрального уравнения Вольterra, совершенно аналогичного уравнению (1.3.1). Отсюда следует, что $F_{\alpha\beta}(K_1, \dots, K_n, r)$ есть аналитическая функция переменных K_β , регулярная в нижней половине комплексной плоскости. Но как функция других переменных K_α решение $F_{\alpha\beta}$

не обладает хорошими аналитическими свойствами, если на потенциал не наложены более сильные ограничения. Дело в том, что при энергии E , лежащей ниже порога любого канала, в подынтегральных выражениях возникают растущие экспоненты, которые ведут к расходимости.

3. Матрица Йоста $F(K)$ определяется как вронскиан матриц $F(K, r)$ и $\Phi(K, r)$:

$$\tilde{F}(K) = \tilde{F}(K, r) \Phi'(K, r) - \tilde{F}'(K, r) \Phi(K, r), \quad (9.4.5)$$

где тильдой обозначена транспонированная матрица. Таким образом, $F(K)$ есть не что иное, как $F(K, 0)$. Хотя сама матрица Йоста $F(K)$, по-видимому, вообще не регулярна, если какая-либо переменная K_α перестает быть действительной величиной, Ньютои [488] показал, что детерминант матрицы $F(K)$ является аналитической функцией всех переменных K_α во всей верхней полуплоскости. Свойство аналитичности детерминанта $\det F(K)$ будет использовано позже.

4. Полная функция Грина $\mathcal{U}(K, r, r')$ такова:

$$\mathcal{U}(K, r, r') = \begin{cases} -\Phi(K, r) \tilde{F}^{-1}(-K) \tilde{F}(-K, r') & \text{при } r < r', \\ -F(-K, r) F^{-1}(-K) \tilde{\Phi}(K, r) & \text{при } r' < r. \end{cases} \quad (9.4.6)$$

Очевидно, что при $V = 0$ она сводится к функции

$$\mathcal{U}_0(K, r, r') = -K^{-1} \sin [K, r]_{<} \exp [iKr']_{>}, \quad (9.4.7)$$

которая представляет собой также асимптотический предел функции $\mathcal{U}(K, r, r')$ при $|K| \rightarrow \infty$. Можно показать, что $\mathcal{U}(K, r, r')$ — многозначная функция энергии с пороговыми точками разрывов на действительной оси. Кроме того, она является мероморфной функцией энергии в области $\text{Im } K_1, K_2, \dots, K_n \geq 0$ с простыми полюсами. Эти полюса соответствуют энергиям связанных состояний системы [488]. Так как энергии связанных состояний должны быть действительными, полюса функции $\mathcal{U}(K, r, r')$ в области $\text{Im } K > 0$ должны лежать на мнимой оси комплексной плоскости всех переменных K_α . Функция $\mathcal{U}(K, r, r')$ может также иметь полюса на действительной оси K_1 при действительных энергиях, не превышающих самый верхний порог. Такие полюса должны составлять пары, расположенные симметрично относительно мнимой оси K_1 . Они соответствуют связанным состояниям, «погруженным в непрерывный спектр» [489]. Вычет функции $\mathcal{U}(K, r, r')$ в полюсе, соответствующем j -му связанному состоянию, равен $i\Phi(K^{(j)}, r) C_j \tilde{\Phi}(K^{(j)}, r')$, где C_j — действительная симметричная числовая матрица, а энергия j -го связанного состояния $E_j = \hbar^2 [K_1^{(j)}]^2 / 2\mu$.

5. Функции $\Phi(\mathbf{K}, r)$ ($E > 0$) и $\Phi(\mathbf{K}^{(j)}, r)$ ($j = 1, \dots, N$) образуют полный набор. Соотношение полноты имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mathbf{K}, r) d\rho(E) \tilde{\Phi}(\mathbf{K}, r') = 1\delta(r - r'), \quad (9.4.8)$$

где

$$\frac{d\rho(E)}{dE} = \begin{cases} \frac{2\mu}{\pi\hbar^2} \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(-\mathbf{K}) \mathbf{K} \Theta \mathbf{F}^{*-1}(-\mathbf{K}) & \text{при } E > 0, \\ \sum_{j=1}^N \delta(E - E_j) \mathbf{C}_j(-2i\mathbf{K}_1^{(j)}) & \text{при } E \leq 0, \end{cases} \quad (9.4.9)$$

а Θ — диагональная матрица $|\mathbf{K}|^{-1} \text{Re} \mathbf{K}$, являющаяся матрицей проектирования на открытые каналы.

6. S -матрицу можно представить в виде

$$\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^{1/2} \mathbf{F}^{-1}(-\mathbf{K}) \mathbf{F}(\mathbf{K}) \mathbf{K}^{-1/2}. \quad (9.4.10)$$

7. Детерминант $\det \mathbf{F}(\mathbf{K})$ может иметь нули на мнимой оси K_1 , и тогда они соответствуют связанным состояниям. Он может также иметь нули на действительной оси K_1 в области $[-\Delta_n, \Delta_n]$, которые соответствуют «связанным состояниям, погруженным в непрерывный спектр». В последнем случае нули располагаются парами, симметричными относительно мнимой оси K_1 . Кроме того, $\det \mathbf{F}^*(-\mathbf{K}^*) = \det \mathbf{F}(\mathbf{K})$ и $\det \mathbf{F}(\mathbf{K}) \rightarrow 1$ при $|\mathbf{K}_1| \rightarrow \infty$ и $\text{Im } K_1, K_2, \dots, K_n \geq 0$.

На основе перечисленных результатов были решены три обратные задачи.

1. Построение потенциала $\mathbf{V}(r)$ по его спектральной функции $d\rho(E)/dE$. Это можно сделать обобщенным методом Гельфанда — Левитана, исходя из соотношения полноты [116]. Пусть $\Phi^0(\mathbf{K}, r)$ и $\rho^0(E)$ — волновая функция и спектральная функция, соответствующие нулевой потенциальной матрице. Тогда симметричное ядро Гельфанда — Левитана имеет вид

$$\mathcal{F}(r, r') = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{(0)}(\mathbf{K}, r) d[\rho^{(0)}(E) - \rho(E)] \Phi^{(0)}(\mathbf{K}, r'). \quad (9.4.11)$$

Ядро преобразования $\mathcal{K}(r, r')$ является решением интегрального уравнения Гельфанда — Левитана

$$\mathcal{K}(r, r') = \mathcal{F}(r, r') + \int_0^r \mathcal{K}(r, \rho) \mathcal{F}(\rho, r') d\rho, \quad (9.4.12)$$

а потенциал выражается через ядро $\mathcal{K}(r, r')$ следующим образом:

$$\mathbf{V}(r) = 2 \frac{d}{dr} \mathcal{K}(r, r). \quad (9.4.13)$$

Однако в настоящее время не существует метода построения спектральной функции лишь по той подматрице S -матрицы, которая отвечает открытым каналам, единственно доступным экспериментальному наблюдению¹⁾.

2. Построение потенциала $V(r)$ по заданной при всех положительных энергиях S -матрице и по связанным состояниям. Это можно сделать обобщенным методом Марченко, исходящим из соотношения полноты [116]. Именно, вводят симметричное ядро

$$F(r, r') = 1\delta(r - r') - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\infty}(K, r) d\rho(E) \tilde{\Phi}_{\infty}(K, r'). \quad (9.4.14)$$

Сначала показывают, что существует ядро преобразования $A(r, r')$, такое, что

$$\Phi(K, r) = \Phi_{\infty}(K, r) + \int_r^{\infty} A(r, r') \Phi_{\infty}(K, r') dr', \quad (9.4.15)$$

где $\Phi_{\infty}(K, r)$ — асимптотическая форма функции $\Phi(K, r)$ при $r \rightarrow \infty$. Это ядро преобразования является решением уравнения Марченко

$$A(r, r') = F(r, r') + \int_r^{\infty} A(r, \rho) F(\rho, r') d\rho \quad (r < r'). \quad (9.4.16)$$

Затем с помощью функции Грина ядро $F(r, r')$ выражают через S -матрицу и энергии связанных состояний. Точнее, в формулу (9.4.14) подставляют асимптотическую форму функции Грина $\mathcal{U}(K, r, r')$ в области больших значений r и r' , а для спектральной функции берут выражение (9.4.9). В результате, предположив для простоты, что связанные состояния в непрерывном спектре отсутствуют, получают

$$F(r, r') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1 dK_1 e^{iK_1 r} K^{-1/2} [S(K) - 1] K^{-1/2} e^{iK r'} - \\ - \sum_{j=1}^N e^{-|K^{(j)}|r} A_j e^{-|K^{(j)}|r'}, \quad (9.4.17)$$

¹⁾ О восстановлении потенциала взаимодействия по матрице рассеяния для одних только открытых каналов в случае конечно-разностного подхода к обратной задаче см. работу [455]. — *Прим. ред.*

где через $K^{(j)}$ обозначены мнимые величины, соответствующие обычным связанным состояниям, а через A_j — симметричная матрица, простым образом связанная с матрицей C_j . Потенциал $V(r)$ просто выражается через ядро $A(r, r')$:

$$V(r) = -2 \frac{d}{dr} A(r, r). \quad (9.4.18)$$

Такой метод, безусловно, очень интересен, но, к сожалению, для эксперимента доступна лишь подматрица открытых каналов. Хотя в принципе можно аналитически продолжить все элементы этой подматрицы в область энергий, где все каналы закрыты, и найти $S(K)$, насколько нам известно, не существует общего метода, позволяющего проделать это.

3. Построение потенциала $V(r)$ по известному детерминанту $\det F(K)$. Этот детерминант является также определителем Фредгольма уравнения Липмана—Швингера. Им удобнее всего характеризовать данные рассеяния, связанные состояния и резонансы системы связанных каналов. Если он задан в аналитическом виде, то по нему очень просто построить все элементы открытых каналов S -матрицы. Как показал Кокс [116], потенциал $V(r)$ также можно построить по $\det F(K)$. Но и этот изящный теоретический результат, к сожалению, не позволяет решать обратную задачу практически.

Кроме этих интересных, но не обладающих достаточностью результатов, известно лишь несколько других. Формальное обобщение многоканальных уравнений Марченко на случай волн с $l > 0$ было осуществлено Коксом [116, 117]. Кроме того, ему удалось построить потенциалы Баргмана для случаев $l = 0$ и $l = 1$ [118].

В литературе последнего времени иногда путают очень сложные неупругие задачи с «упругой», о которой речь шла в § 3. Упругий случай довольно тривиален и значительно менее существен с физической точки зрения.

§ 5. Релятивистские задачи

А. Замечания

Релятивистские обратные задачи носят, пожалуй, более «академический» характер, нежели нерелятивистские, по тем не менее им было посвящено много работ.

Попытки обобщить метод Гельфанда — Левитана на релятивистские уравнения, такие, как уравнение Дирака или Клейна — Гордона, наталкиваются на следующие трудности.

1. Трудно подходящим образом определить спектральную функцию, поскольку либо собственные функции не образуют полного ортонормированного набора в обычном смысле слова, либо приходится иметь дело с системой уравнений.

2. При энергии, стремящейся к бесконечности, фазовый сдвиг не обращается в нуль (в уравнении Клейна — Гордона потенциал умножается на энергию E).

3. Поскольку величина $E = \sqrt{k^2 + m^2}$ двузначна, решение релятивистского уравнения должно представлять собой функцию переменной k на двулистной поверхности Римана. Поэтому потенциал может быть построен только в том случае, если фазовый сдвиг известен при всех значениях k на обеих ее ветвях. Кроме того, должны быть заданы энергии связанных состояний, которые теперь лежат в интервале $(-m, m)$. Фазовый сдвиг, отвечающий отрицательной области E , и отрицательные собственные значения следует физически интерпретировать как величины, описывающие рассеяние и связанные состояния античастиц.

Первое обобщение метода Гельфанда — Левитана на уравнение Клейна — Гордона для S -волны было предложено Коринальдези [98]. Несколькими проще подобные же результаты были получены методом Йоста и Кона в работе де Альфаро [129] и на основе дисперсионных соотношений — в работе Верде [411] (см. также работу Мальченко [284]). Метод Верде применим также к уравнению Дирака, которое было исследовано Пратсом и Толлом [346]. Новые результаты и более строгое математическое обоснование ранее полученных результатов для уравнения Дирака были представлены в работах Гасимова и Левитана [169] и Гасимова [168] (см. также работу Левитана и Саргсяна [277])¹). Обобщение метода Марченко для уравнения Клейна — Гордона было дано в работе Вайса и Шарфа [420], а для уравнения Дирака — в работах Гасимова [167] и Вайса, Штахеля и Шарфа [421]²). Кроме того, Корниль [101, 102] предложил способ построения оператора Клейна — Гордона с экспоненциально убывающим потенциалом по величине скачка S -матрицы вдоль разреза в комплексной k -плоскости. Полученные им результаты весьма сложны. О работах, имеющих некоторое отношение к данному вопросу, см. гл. 7, § 5, и гл. 9, § 8. Мы изложим только результаты, полученные путем обобщения метода Марченко на релятивистский случай [169, 420, 421]. Они дадут читателю правильное представление о том, какого рода результаты получаются в релятивистских обратных задачах.

¹) Об обратной задаче для уравнений Дирака см. также [443]. Представляет интерес обратная задача в последовательном формализме релятивистской квантовой механики, предложенном С. Н. Соколовым [490]. — *Прим. ред.*

²) Обратная задача для релятивистских квазипотенциальных уравнений рассматривалась в работе [434]. Случай, когда эти уравнения очень близки к обычному уравнению Шредингера, см. в работе [435]. — *Прим. ред.*

Б. Уравнение Дирака

Радиальные компоненты $F(r)/r$ и $G(r)/r$ волновой функции Дирака для частицы с массой m в центральном поле $V(r)$ с заданными четностью и угловым моментом j ($j = 1/2, 3/2, \dots$) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\omega \frac{d\varphi}{dr} + \sigma_1 \frac{\lambda}{r} \varphi - \sigma_3 m \varphi + V \varphi = E \varphi, \quad (9.5.1a)$$

где

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (9.5.1b)$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix},$$

причем единицы измерения выбраны так, что $\hbar = c = 1$ и $\lambda = (j + 1/2)$.

Предположим, что

$$\int_0^\infty r^n |V(r)| dr < \infty, \quad n = 0, 1, 2. \quad (9.5.2)$$

Тогда совершенно аналогично тому, как это было сделано в предыдущих главах, можно показать, что при любом действительном значении E , таком, что $|E| > m$, существует решение Йоста $f(k, r)$, такое, что¹⁾

$$f(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} (-ik)^\lambda \begin{pmatrix} i(E-m)/k \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikr}, \quad (9.5.3)$$

где $k = (E^2 - m^2)^{1/2}$. Таким образом, это решение асимптотически стремится к расходящейся свободной сферической волне. Аналогично можно определить решение

$$f(-k, r) = [f(k, r)]^*, \quad (9.5.4)$$

асимптотически стремящееся к сходящейся свободной сферической волне. Оба эти решения ограничены при всех k и r ($r > 0$) и имеют в нуле сингулярность вида $r^{-\lambda}$. Они образуют фундаментальную систему решений уравнения (9.5.1). Это явствует из того, что определитель (напомним, что здесь мы имеем дело с системой дифференциальных уравнений первого порядка!)

$$\Delta(k) = \det \{ f(k, r), f(-k, r) \} = 2ik^{2\lambda-1} (E - m) \quad (9.5.5)$$

¹⁾ Для упрощения формул мы не будем выписывать точную зависимость волновых функций и других величин от переменной λ , поскольку мы рассматриваем обратную задачу рассеяния при фиксированном λ .

отличен от нуля. Отсюда следует, что регулярное решение $\varphi(E, r)$, определяемое граничным условием

$$r^{-\lambda} \varphi(E, r)|_{r=0} = \begin{pmatrix} [(2\lambda - 1)!!]^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.5.6)$$

может быть представлено в виде

$$\varphi(E, r) = \Delta^{-1}(k) [F(k) f(-k, r) - F(-k) f(k, r)], \quad (9.5.7)$$

где $F(k)$ — «функция Йоста»:

$$F(k) = [(2\lambda - 1)!!]^{-1} r^\lambda f_2(k, r)|_{r=0}, \quad (9.5.8)$$

а f_2 — вторая компонента функции f . Легко видеть, что эти формулы полностью аналогичны формулам, полученным в гл. 1 для уравнения Шредингера. Из асимптотического поведения функции $f(k, r)$ [формула (9.5.3)] следует, что

$$\varphi(E, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} k^{-\lambda} |F(k)| \begin{pmatrix} \cos[kr - \frac{1}{2}\pi + \delta(k)] \\ [k/(E - m)] \sin[kr - \frac{1}{2}\pi + \delta(k)] \end{pmatrix}, \quad (9.5.9)$$

где $\delta(k)$ — фазовый сдвиг, определяемый выражением

$$\delta(k) = -\text{Arg } F(k). \quad (9.5.10)$$

Случай $E \geq m$ соответствует рассеянию частицы, а случай $E \leq -m$ — рассеянию античастицы. Точно так же все связанные состояния, лежащие в области энергий $(-m, m)$, соответствуют частице или античастице в зависимости от знака их энергии. Как мы увидим ниже, чтобы решить обратную задачу, необходимо располагать данными рассеяния (фазовыми сдвигами, энергиями связанных состояний и их нормировочными постоянными) как для частиц, так и для античастиц.

На основании сделанного выше предположения о потенциале (9.5.2) можно исследовать свойства различных решений уравнений Дирака [регулярного решения, «решения Йоста» $f(k, r)$] подобно тому, как это было проделано в нерелятивистском случае. Чтобы исследовать дискретный спектр и его связь с функцией Йоста, необходимо расширить область определения решения Йоста $f(k, r)$ и функции Йоста $F(k)$ на комплексную k -плоскость. Поскольку $E = \pm(k^2 + m^2)^{1/2}$ есть двузначная функция, введем соответствующую риманову поверхность, разрезав k -плоскость вдоль мнимой оси от im до $i\infty$ и от $-im$ до $-i\infty$. Таким образом, имеем однозначную функцию, заданную на двулистной римановой поверхности, листы которой различаются знаком действительной части энергии E , постоянным на всем листе. Будем различать эти два листа по индексу $\sigma = \pm$ в зависимости от знака $\text{Re } E$. Со

вершенно аналогично тому, как это было сделано в случае уравнения Шредингера, можно показать, что функция $f(k, r)$ продолжается в комплексную k -плоскость как аналитическая функция в верхней полуплоскости на обоих листах ($\text{Im } k > 0, \sigma = \pm$). Кроме того, функция $f(k, r)$ непрерывна при $\text{Im } k = 0$ всюду, кроме, может быть, точки $k = 0$.

Затем можно показать, что существует взаимно-однозначное соответствие между связанными состояниями и нулями функции Йоста, которые лежат в верхних полуплоскостях на мнимой оси между точками 0 и im . С помощью контурного интегрирования в комплексной плоскости можно также вывести такие же формулы разложения по собственным функциям, как и в нерелятивистском случае, но содержащие вклады с обоих листов, т. е. и частиц, и античастиц.

Аналогично можно доказать существование интегральных представлений, подобных представлениям Повзнера — Левитана и Марченко (гл. 3 и 5). Добавив к ним соотношения полноты, мы получим интегральные уравнения типа Гельфанда — Левитана и Марченко, которые позволяют решить обратную задачу, исходя из данных рассеяния. В методе Марченко ядро $A(x, y)$ является теперь матрицей 2×2 :

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} A_{11}(x, y) & A_{12}(x, y) \\ A_{21}(x, y) & A_{22}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (9.5.11)$$

удовлетворяющей интегральному уравнению

$$A(x, y) + F(x, y) + \int_x^\infty dt A(x, t) F(t, y) = 0, \quad (9.5.12)$$

где ядро F берется в виде

$$\begin{aligned} F(x, y) = & \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{ \sum_{\sigma} \frac{E_{\sigma} + m}{2\pi E_{\sigma}} (1 - S_{\sigma}(k)) f_{\sigma}^0(k, x) \tilde{f}_{\sigma}^0(k, y) + \right. \\ & + \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 1 - 2 \cos \delta_{\infty} & \sin 2\delta_{\infty} \\ \sin 2\delta_{\infty} & -1 + \cos 2\delta_{\infty} \end{pmatrix} e^{ik(x+y) - i\pi\lambda} \Big\} + \\ & + \sum_{n, \sigma} C_{\sigma n}^{-1} f^0(i\gamma_{\sigma n}, x) \tilde{f}^0(i\gamma_{\sigma n}, y). \end{aligned} \quad (9.5.13)$$

Здесь $i\gamma_{\sigma n}$ — нули функции Йоста, соответствующие связанным состояниям с энергиями

$$E_{\sigma n} = \sigma (m^2 - \gamma_{\sigma n}^2)^{1/2}, \quad (9.5.14)$$

а S -матрица имеет вид

$$S_o(k) = e^{2i\delta_o(k)}, \quad (9.5.15)$$

$$\delta_\infty = \lim_{E \rightarrow \infty} \delta_+(E) = - \int_{-\infty}^{\infty} V(r) dr. \quad (9.5.16)$$

Через $f^0(k, r)$ обозначена свободная радиальная волновая функция

$$f_\sigma(\pm k, x) = \begin{pmatrix} (E_\sigma - m) h_{\lambda-1}^\pm(kx) \\ kx h_\lambda^\pm(kx) \end{pmatrix}, \quad (9.5.17)$$

где h_λ — функция Ханкеля.

Решая интегральное уравнение (9.5.12), находим потенциал $V(r)$:

$$V(r) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \arcsin 2 \frac{(\lambda/r) A_{12}(r, r) - m A_{11}(r, r)}{(\lambda^2/r^2) + m^2}, \quad (9.5.18)$$

или

$$V(r) = -\frac{d}{dr} \arctg \frac{A_{11}(r, r)}{A_{12}(r, r)} - \frac{d}{dr} \arctg \frac{mr}{\lambda}. \quad (9.5.19)$$

Таким образом, потенциал однозначно определяется данными рассеяния, если решение интегрального уравнения (9.5.12) единственно. Вопрос единственности решения интегрального уравнения был подробно рассмотрен Гасымовым и Левитаном. К сожалению, полученные ими результаты слишком сложны, и поэтому мы отсылаем читателя к их работе.

В. Уравнение Клейна — Гордона

Схема решения обратной задачи для уравнения Клейна — Гордона во многом аналогична схеме изложенного выше решения для уравнения Дирака. В этом случае также может быть получено интегральное уравнение типа Марченко, подобное уравнению (9.5.12), ядро которого равно сумме фурье-образа S -матрицы для частиц и античастиц и вкладов связанных состояний частиц и античастиц. Поскольку все формулы полностью аналогичны случаю уравнения Дирака, мы не будем здесь их выписывать а отошлем читателя к работе Вайса и Шарфа [420], в которой цитируются также более ранние работы Коринальдези и Верде.

§ 6. Дискретные формы обратной задачи

Дискретный аналог обратной задачи рассеяния был рассмотрен Кейзом и Кацем [79]¹⁾ в подходе Гельфанда — Левитана.

¹⁾ Обратная задача для конечно-разностных уравнений Шредингера (одноканальных, многоканальных, многомерных) рассматривалась в работах [453, 455, 456, 458]. — *Прим. ред.*

Вместо уравнения Шредингера

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \psi(E, x)}{dx^2} - q(x) \psi(E, x) = -E \psi(E, x), \quad (9.6.1)$$

$$\psi(E, 0) = 0, \quad \psi'(E, 0) = 1 \quad (9.6.2)$$

они брали разностное уравнение

$$\frac{1}{2} \psi(E; (n+1)\Delta) + \frac{1}{2} \psi(E; (n-1)\Delta) = \lambda \exp[v(n)] \psi(E; n\Delta), \quad (9.6.3)$$

где

$$\lambda = 1 - E\Delta^2, \quad v(n) = \Delta^2 q(n\Delta). \quad (9.6.4)$$

В пределе при $\Delta \rightarrow 0$ уравнение (9.6.3) переходит в уравнение Шредингера (9.6.1). Полагая

$$\varphi(\lambda, n) = \exp\left[\frac{1}{2}v(n)\right] \psi(E, n\Delta), \quad (9.6.5)$$

$$a_{m,n} = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{1}{2}[v(m) + v(n)]\right\} [\delta_{m,n+1} + \delta_{m,n-1}], \quad (9.6.6)$$

замечаем, что уравнение (9.6.3) можно переписать в эквивалентной форме:

$$A\varphi = \lambda\varphi, \quad (9.6.7)$$

где $A = \{a_{m,n}\}$ — симметричная тридиагональная матрица, а φ — вектор $\{\varphi(\lambda, n)\}$ [$m, n \geq 1$, так что граничное условие $\varphi(\lambda, 0) = 0$ выполняется автоматически]. В качестве второго граничного условия вместо $\varphi(\lambda, 1) = \Delta$ удобнее положить $\varphi(\lambda, 1) = 1$. Тогда при $v(n) \equiv 0$ имеем

$$\varphi(\lambda, n) = \frac{[\lambda + (\lambda^2 - 1)^{1/2}]^n - [\lambda - (\lambda^2 - 1)^{1/2}]^n}{2(\lambda^2 - 1)^{1/2}}, \quad (9.6.8)$$

а спектральная плотность $\sigma(\lambda)$ дается хорошо известной формулой

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda < -1, \\ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{\lambda} (1 - \mu^2)^{1/2} d\mu & \text{при } -1 < \lambda < 1, \\ 1 & \text{при } \lambda > 1. \end{cases} \quad (9.6.9)$$

Обозначим спектральную плотность матрицы A через $\rho(\lambda)$, так что

$$\int \varphi(\lambda; m) \varphi(\lambda; n) d\rho(\lambda) = \delta_{mn}, \quad (9.6.10)$$

$$\int \varphi(\lambda; m) \varphi(\lambda; n) \lambda d\rho(\lambda) = a_{m,n}. \quad (9.6.11)$$

Поскольку функции $\varphi(\lambda, n)$ — полиномы, они представляют собой полиномы (должным образом нормированные), ортогональные с весом $\rho(\lambda)$.

Первый шаг обратной задачи состоит в определении функции $v(n)$ по спектральной плотности $\rho(\lambda)$. Он почти тривиален, поскольку по заданной плотности $\rho(\lambda)$ можно определить ортогональные с весом ρ полиномы, а затем вычислить по формуле (9.6.11) значения $a_{n,n+1}$. Отметим два важных момента в этой задаче. Во-первых, поскольку величины $a_{n,n+1}$ положительны, должно выполняться неравенство

$$\int \lambda \varphi(\lambda; n) \varphi(\lambda; n+1) d\rho(\lambda) > 0. \quad (9.6.12)$$

Это следует из соотношения (9.6.22). Во-вторых, спектральная плотность $\rho(\lambda)$ не может быть произвольно заданной функцией, поскольку выполняется условие

$$a_{nn} = \int \lambda \varphi^2(\lambda; n) d\rho(\lambda) = 0. \quad (9.6.13)$$

Поэтому на функцию $\rho(\lambda)$ необходимо априори наложить условие, гарантирующее выполнение равенства (9.6.13). Простейшее такое условие имеет вид

$$\rho(-\lambda) = 1 - \rho(\lambda). \quad (9.6.14)$$

Тогда ортогональные полиномы будут либо четными, либо нечетными функциями, и, следовательно, равенство (9.6.13) выполняется. В дальнейшем предполагается, что условие (9.6.14) выполнено.

При заданной спектральной плотности ρ будем искать ортогональные полиномы в виде

$$\varphi(\lambda; n) = K(n, n) \dot{\varphi}(\lambda, n) + \sum_{m=1}^{n-1} K(n, m) \dot{\varphi}(\lambda, m). \quad (9.6.15)$$

Функция $\varphi(\lambda, n)$ представляет собой полином степени $n-1$, ортогональный всем полиномам меньшей, чем $n-1$, степени. Следовательно, она ортогональна всем функциям $\dot{\varphi}(\lambda, m)$ при $m < n$. Таким образом, условие ортогональности запишется в виде

$$\int \varphi(\lambda, n) \dot{\varphi}(\lambda, m) d\rho(\lambda) = 0, \quad m < n. \quad (9.6.16)$$

Полагая

$$q(m, l) = \int \dot{\varphi}(\lambda; m) \dot{\varphi}(\lambda, l) d[\rho(\lambda) - \sigma(\lambda)], \quad (9.6.17)$$

замечаем, что уравнение (9.6.16) можно переписать в следующей форме:

$$0 = K(n, n) q(n, m) + K(n, m) + \sum_{l=1}^{n-1} K(n, l) q(l, m), \quad n > m. \quad (9.6.18)$$

Ясно, что ядро $K(n, m)$ в соотношении (9.6.15) является ядром преобразования, переводящим функцию $\dot{\varphi}(\lambda, n)$ в функцию $\varphi(\lambda, n)$. Уравнение (9.6.18), связывающее ядро преобразования $K(n, m)$ с симметричным ядром $q(n, m)$, весьма сходно с уравнением Гельфанда — Левитана.

Чтобы вычислить величины $K(n, m)$ и $K(n, n)$, введем функцию

$$\mathcal{K}(n, m) = \frac{K(n, m)}{K(n, n)}, \quad m < n. \quad (9.6.19)$$

Тогда уравнение (9.6.18) можно переписать в виде

$$0 = q(n, m) + \mathcal{K}(n, m) + \sum_{l=1}^{n-1} \mathcal{K}(n, l) q(l, m), \quad (9.6.20)$$

а из условия нормировки $\int \varphi_i^2(\lambda, n) d\rho(\lambda) = 1$ сразу следует, что

$$K(n, n) = [1 + q(n, n) + \sum_{l=1}^{n-1} \mathcal{K}_i(n, l) q(l, n)]^{-1/2}. \quad (9.6.21)$$

Остается определить потенциал $v(n)$. Из соотношений (9.6.11) и (9.6.15) имеем

$$\begin{aligned} a_{n, n+1} &= \int \lambda \varphi(\lambda; n) \varphi(\lambda; n+1) d\rho(\lambda) = \\ &= \frac{1}{2} K(n, n) \int \dot{\varphi}(\lambda; n+1) \varphi(\lambda; n+1) d\rho(\lambda) = \\ &= \frac{1}{2} K(n, n) [K(n+1, n+1)]^{-1} \end{aligned} \quad (9.6.22)$$

или, что эквивалентно.

$$\frac{1}{2} [v(n) + v(n+1)] = \ln K(n+1, n+1) - \ln K(n, n). \quad (9.6.23)$$

Вообще говоря, уравнением (9.6.23) потенциал $v(n)$ не определяется, но если, например, известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = 0$, то тогда величина v определяется единственным образом:

$$\frac{1}{2} [v(1) + (-1)^{n+1} v(n+1)] = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \ln \frac{K(r+1, r+1)}{K(r, r)}. \quad (9.6.24)$$

Тем самым обратная задача $\rho \rightarrow v$ полностью решена. Решение получено в прямой аналогии с методом Гельфанда — Левитана. Интересно рассмотреть предельную форму уравнений при $\Delta \rightarrow 0$. Во-первых, заменим функции φ , $\dot{\varphi}$ функциями $\varphi' = \Delta\varphi$, $\varphi'_0 = \Delta\varphi$ и потребуем чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\lambda, n) \varphi'(\lambda, m) d\rho'(\lambda) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_0(\lambda, n) \varphi'_0(\lambda, m) d\sigma' = \Delta^{-1} \delta(m, n), \end{aligned} \quad (9.6.25)$$

где $\rho' = \rho\Delta^{-3}$, а $\sigma' = \sigma\Delta^{-3}$. Тем самым мы приходим к методу Гельфанда — Левитана и, в частности, получаем уравнение Гельфанда — Левитана

$$0 = q'(x, y) + \mathcal{K}'(x, y) + \int_0^{\infty} \mathcal{K}'(x, t) q'(t, y) dt, \quad (9.6.26)$$

где

$$q'(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_0(E, x) \varphi'_0(E, y) d(\rho' - \sigma'), \quad (9.6.27)$$

и выражение для $\varphi(E, x)$:

$$\varphi(E, x) = \frac{\sin \sqrt{2E} x}{\sqrt{2E}} \int_0^{\infty} \mathcal{K}'(x, y) \frac{\sin \sqrt{2E} y}{\sqrt{2E}} dy. \quad (9.6.28)$$

В дискретном случае можно также построить по сдвигу фазы спектральную плотность (преобразование $\delta \rightarrow \rho$), но это ничуть не проще, чем в непрерывном случае.

Дискретный вариант обратной задачи был также рассмотрен в подходе Марченко [75]. Кроме того, дискретный вариант обратной задачи был применен в теории ортогональных полиномов и в ряде сходных проблем (в частности, в уравнениях переноса) [76, 77, 387]. Будучи аналитически более простыми, дискретные варианты обратной задачи рассеяния обладают тем преимуществом перед непрерывным случаем, что дают более прозрачные результаты. Но мы думаем, что в педагогическом отношении наиболее интересен случай, рассмотренный выше.

§ 7. Подход, основанный на дисперсионных соотношениях

Методы Марченко и Гельфанда — Левитана основаны на очень специальных аналитических свойствах в k -плоскости различных решений (каждое определяется своим граничным условием) дифференциального уравнения, которое само аналитически зависит от k^2 . Очень красивый и интересный способ продемонстрировать важную роль этих аналитических свойств состоит в выводе уравнений Гельфанда — Левитана и Марченко из дисперсионных соотношений для решений уравнения Шредингера. Этими дисперсионными соотношениями выражаются аналитические свойства решений. Данный результат для радиального уравнения Шредингера был получен Карлсоном [234]. При фиксированном (r, l) дисперсионное соотношение для решений Йоста

$$f_{l\pm}(k; t) \underset{|k|t \rightarrow \infty}{\sim} e^{\pm ikt} \quad (\pm \operatorname{Im} k \geq 0)$$

приводит к уравнению Марченко, а дисперсионное соотношение для регулярного решения

$$\varphi_l(k^2; r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^{l+1}$$

приводит к уравнению Гельфанда — Левитана. Эти дисперсионные соотношения получаются довольно просто в два приема. Во-первых, пользуясь формулой Коши, справедливой в силу аналитических свойств, аналитически продолжают функции с действительной оси $k \in \mathbb{R}$ на область $\operatorname{Im} k \geq 0$. Во-вторых, представляя, как обычно, регулярное решение в виде суммы решений Йоста, которые при $k \in \mathbb{R}$ обладают свойствами симметрии

$$f_{l-}(k; r) = f_{l+}(-k; r) = f_{l+}^*(k, r),$$

в дисперсионное соотношение Коши вводят S -матрицу. Здесь мы кратко изложим результаты Карлсона для решений Йоста.

Дисперсионные соотношения служили также основой при решении обратной задачи для уравнений, отличных от радиального уравнения Шредингера. Важный пример такого рода — полученное Абловицем и др. [2] решение обратной задачи для (2×2) -матричного уравнения

$$\left(i \odot_3 \frac{d}{dx} - \begin{bmatrix} 0 & iq(x) \\ -ir(x) & 0 \end{bmatrix} \right) \Psi = k \Psi, \quad \odot_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (9.7.1)$$

с функциями $q(x)$ и $r(x)$, достаточно быстро стремящимися к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ и удовлетворяющими условиям (которые являю-

тся достаточными, но не необходимыми)

$$r(x) = \mp q^*(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx |q(x)| < 0,$$

Результаты Карлсона. Аналитические свойства функции $f_{l+}(k', r)$ ($\text{Im } k' \geq 0$) выражаются в том, что функция $f_{l+}(k'; r) \times \exp(-ik'r) - 1$ аналитична при $\text{Im } k' > 0$, непрерывна по k' при $\text{Im } k' \geq 0$ и стремится к нулю при $|k'| \rightarrow \infty$ ($\text{Im } k' > 0$). Это означает, что мы имеем следующее представление функции $f_{l+}(k'; r) \exp(-ik'r) - 1$ в виде интеграла Коши при $\text{Im } k' > 0$:

$$\begin{aligned} f_{l+}(k'; r) e^{-ik'r} - 1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{k - k' - io} \{f_{l+}(k; r) e^{-ikr} - 1\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{k - k' - io} \{f_{l+}(k; r) e^{-ikr} - 1\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk'' \frac{-1}{k + k' + io} \{f_{l+}(-k''; r) e^{ikh''r} - 1\}, \end{aligned} \quad (9.7.2)$$

где C — любой обходимый против часовой стрелки замкнутый контур в верхней части k -плоскости, охватывающий полюсную точку $k = k' + io$. Второй интеграл в выражении (9.7.2) есть частный случай первого, поскольку $\{ \} \rightarrow 0$ при $|k| \rightarrow \infty$ ($\text{Im } k \geq 0$). Формула (9.7.2) представляет собой дисперсионное соотношение в том смысле, что она связывает значения функции $f_{l+}(k'; r)$ ($\text{Im } k' \geq 0$) с ее значениями на действительной оси $f_{l+}(k; r)$ ($\text{Im } k = 0$). Предел при $\text{Im } k' \rightarrow 0_+$ можно найти, пользуясь соотношением

$$\int dk (k - k' - io)_0^{-1} \equiv \int dk P. V. (k - k')_0^{-1} + i\pi \int dk \delta(k - k')_0.$$

Третий интеграл в выражении (9.7.2) получается простой заменой переменной интегрирования на $k'' = -k$. При этом вводится функция

$$f_{l-}(+k''; r) = f_{l+}(-k''; r) = f_{l+}^*(k; r) \quad (k'' \in \mathbb{R}),$$

что в свою очередь подводит нас ко второму этапу, введению S -матрицы. Она вводится при помощи обычного разложения регулярного решения по решениям Йоста при $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2ik(-ik)^l \varphi_l(k^2; r) / (2l + 1)!! &= (-1)^l \mathcal{L}_{l-}(k) f_{l+}(k; r) - \\ &- \mathcal{L}_{l+}(k) f_{l-}(k; r), \end{aligned}$$

где отношением $\mathcal{L}_{l-}(k)/\mathcal{L}_{l+}(k) \equiv S_l(k)$ определяется S -матрица, а величинами

$$\mathcal{L}_{l\pm}(k) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} (-ikr)^l f_{l\pm}(k; r)/(2l+1)!!$$

определяются функции Йоста. Напомним, что: а) функция $\mathcal{L}_{l\pm}^{-1}(k)$ мероморфна при $\text{Im } k > 0$, стремится к единице при $|k| \rightarrow \infty$ и не имеет иных сингулярностей, кроме полюсов, соответствующих связанным состояниям; б) $\varphi_l(k^2; r)$ — целая функция переменной k^2 при фиксированных (r, l) , имеющая следующую асимптотическую форму:

$$\varphi_l(k^2; r) = (2l+1)!! k^{-l-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2} l\pi\right) + o(|k|^{-l-1} \exp(r|\text{Im } k|)) \quad (9.7.3)$$

при $|k|r \rightarrow \infty$. Таким образом, в верхней полуплоскости $\text{Im } k > 0$

$$2ik(-ik)^l e^{ikr} \varphi_l(k^2; r)/(2l+1)!! \rightarrow -1 \quad (9.7.4)$$

при $|k| \rightarrow \infty$.

Для простоты рассмотрим далее случай $l = 0$. Подставив в третий интеграл формулы (9.7.2) выражение для $f_{0+}(-k''; r)$

$$f_{0+}(-k''; r) = f_{0-}(k''; r) = S_0(k) f_{0+}(k; r) - 2ik\varphi_0(k^2; r)/\mathcal{L}_{0+}(k)$$

и преобразовав результат, получим следующее уравнение дисперсионного типа для решений Йоста $f_{0+}(k'; r)$ ($\text{Im } k' \geq 0$):

$$f_{0+}(k'; r) = e^{ik'r} - \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\exp(i(k' + k)r)}{k' + k + i0} \times \\ \times [S_0(k) - S_0^{BS}(k; r) - \tilde{S}_0(k; k')] f_{0+}(k; r), \quad (9.7.5)$$

где функция $S_0^{BS}(k; r)$ ($\text{Im } k \geq 0$) содержит вклады от связанных состояний и стремится к нулю при $|k| \rightarrow \infty$, а $\tilde{S}_0(k; k')$ ($\text{Im } k \geq 0$) — произвольная аналитическая по k функция, удовлетворяющая условию ограниченности, довольно слабо зависящему от r :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{2ikr} \tilde{S}_0(k; k') = 0.$$

Этим условием ограниченности и гарантируется отсутствие вклада в интеграл (9.7.5) от $\tilde{S}_0$, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk'' \left[\frac{\exp(ik''r)}{k'' + k' + i0} f_{0+}(k''; r) \tilde{S}_0(k''; k') \right] = \int_C dk [\dots] = 0. \quad (9.7.6)$$

Назовем уравнение (9.7.5) дисперсионным соотношением Карлсона. Карлсон рассматривал два случая при $r > 0$: когда $\tilde{S}_0(k''k') = 1$ и когда $\tilde{S}_0(k''; k') = S_0(+k') - S_0^{BS}(k'; r)$. Различный выбор функции $\tilde{S}_0$ приводит к различным уравнениям для решения обратной задачи при переходе к пределу $\text{Im } k' \rightarrow 0_+$.

Взяв $\tilde{S}(k; k') = 1$ и заменив функцию $f_{0+}(k'; r)$ ($\text{Im } k' \geq 0$) ее интегральным представлением с «треугольным ядром»

$$f_{0+}(k'; r) = e^{ik'r} + \int_r^\infty dr' A(r, r') e^{ik'r'}, \quad (9.7.7)$$

можно получить уравнение Марченко. Ядро представления (9.7.7) есть не что иное, как фурье-образ функции $\{f_{0+}(k'; r) \exp(-ik'r) - 1\}$:

$$\begin{aligned} \{f_{0+}(k'; r) e^{-ik'r} - 1\} &= \int_{-\infty}^\infty dr' A(r, r+r') e^{ik'r'} = \\ &= \int_0^\infty dr' A(r, r+r') e^{ik'r'}. \end{aligned} \quad (9.7.8)$$

Свойство треугольности: $A(r, r') = 0$ при $r' < r$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы функция $\{f_0(k'; r) \exp(-ik'r) - 1\}$ стремилась к нулю при $|k'| \rightarrow \infty$, $\text{Im } k' \geq 0$, и, таким образом, ядро $A(r, r+r')$ есть фурье-образ функции $\{f_{0+}(k'; r) \exp(-ik'r) - 1\}$ по переменной k' . Следовательно, уравнение Марченко, в сущности, представляет собой фурье-образ по k' дисперсионного соотношения Карлсона с $\tilde{S}(k; k') = 1$.

Аналогичным образом можно вывести уравнение Гельфанда — Левитана, если воспользоваться следующим дисперсионным соотношением для регулярного решения:

$$\begin{aligned} k' \varphi_0(k'^2; r) &= \sin k'r + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{\sin(k+k')r}{k+k'} \times \\ &\times [|\mathcal{L}_{0+}(k)|^{-2} - 1] k \varphi_0(k^2; r), \end{aligned} \quad (9.7.9)$$

которое получается из аналогичной формулы Коши для функции $[1 - f_{0+}(k; r) \exp(-ikr)/\mathcal{L}_{0+}(k)]$.

Обратная задача в импульсном представлении. Карлсон установил целесообразность других вариантов выбора функции $\tilde{S}(k; k')$, кроме $\tilde{S} = 1$. В частности, при $\tilde{S}(k; k') = S^*(+k')$ он рассмотрел преобразование Фурье дисперсионного соотношения

по переменной r . Это позволило записать дисперсионное соотношение в импульсном представлении. Таким путем ему удалось найти методы практического решения обратной задачи в импульсном представлении по крайней мере при $l = 0$. Один из подобных методов — суммирование ряда Фредгольма, который сходится для широкого класса потенциалов, даже имеющих связанные состояния. В случае простейшего потенциала Баргмана, для которого $\mathcal{L}_{0+}(k) = (k + i\alpha)/(k + i\beta)$, ряд Фредгольма состоит всего лишь из двух членов и дает точный результат.

В качестве побочного результата Карлсон получил простой способ продолжения двухчастичной амплитуды в область вне массовой поверхности, что первоначально было целью его исследований. Дело в том, что преобразование Фурье (по переменной r) волновой функции просто связано с продолжением амплитуды рассеяния (на половину области вне массовой поверхности), которую он хотел использовать в качестве исходной величины в уравнениях Фаддеева для трех тел.

§ 8. Потенциалы, зависящие от энергии

Если не считать некоторых замечаний Мальченко, то единственной рассмотренной обратной задачей рассеяния для потенциалов, зависящих от энергии, является случай S -волны для потенциала, линейно зависящего от $\sqrt{E}$. Эта задача решена практически полностью Жоланом и Жаном [221, 218, 219]¹⁾, которые пользовались модифицированным методом Марченко, подобным обобщенному методу Редже — Ньютона для спин-орбитальных потенциалов (гл. 15) (он и был построен по аналогии с последним).

Мы изложим вкратце этот метод в случае действительных потенциалов. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y^\pm}{dx^2} + [k^2 - V^\pm(k, x)] y^\pm = 0, \quad x \geq 0, \quad (9.8.1)$$

с потенциалом

$$V^\pm(k, x) = U(x) \pm 2kQ(x), \quad x \geq 0, \quad k \in \mathbb{C} \quad (9.8.2)$$

[величина k связана с энергией E соотношением $k = |E|^{1/2} \times \exp(i/2 \arg E)$, где $0 \leq \arg E \leq 2\pi$]. «Потенциалы» $U(x)$ и $Q(x)$ удовлетворяют обычным условиям ограниченности и, кроме того, подходящим условиям дифференцируемости [218]. Дифференциальным уравнениям (9.8.1) соответствуют амплитуды рассеяния $S^\pm(k)$. Если известна только амплитуда $S^+(k)$ при $k > 0$, то амплитуда $S^-(k)$ будет в некотором смысле свободным парамет-

¹⁾ Позднее появилась работа тех же авторов [485], обобщающая полученные результаты на случай всей оси ($-\infty < x < \infty$). — Прим. ред.

ром (см. ниже). Обратная задача состоит в восстановлении потенциалов U и Q по амплитудам $S^+(k)$ и $S^-(k)$. Показано, что в данном случае для решения Йоста справедливо модифицированное представление Марченко

$$f^\pm(k, x) = F^\pm(x) e^{-ikhx} + \int_x^\infty A^\pm(x, t) e^{-ikt} dt, \quad \text{Im } k \leq 0, x \geq 0, \quad (9.8.3)$$

где

$$F^\pm(x) = \exp \left[\mp i \int_x^\infty Q(t) dt \right], \quad (9.8.4)$$

$A^\pm(x, t)$ — такая функция, что

$$\begin{aligned} F^\pm(x) U(x) &= \frac{d^2 F^\pm(x)}{dx^2} - 2 \frac{d}{dx} A^\pm(x, x) + \\ &+ 2 \frac{(d/dx) F^\pm(x)}{F^\pm(x)} A^\pm(x, x), \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (9.8.5)$$

Тогда уравнение Марченко принимает вид

$$A^\pm(x, t) = F^\mp(x) s^\pm(x+t) + \int_x^\infty s^\pm(u+t) A^\mp(x, u) du, \quad (9.8.6)$$

где в отсутствие связанных состояний

$$s^\pm(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R [S^\pm(k) - (F^\pm(0))^2] e^{ikt} dk \quad (t > 0). \quad (9.8.7)$$

Поскольку потенциалы действительны, величины $F^\pm(x)$ и $A^\pm(x, t)$ попарно сопряжены и, следовательно, система интегральных уравнений (9.8.6) сводится к одному уравнению

$$A^+(x, t) = \overline{F^+(x)} s^+(x+t) + \int_x^\infty s^+(u+t) \overline{A^+(x, u)} du. \quad (9.8.8)$$

Обратная задача может быть решена, если амплитуда $S^\pm(k)$ удовлетворяет следующим условиям, вытекающим либо из унитарности, либо из асимптотических свойств, либо из действительности потенциалов:

$$1) |S^\pm(k)| = S^\pm(0) = 1, \quad (9.8.9)$$

$$2) S^\pm(\infty) = S^\pm(-\infty) = [F^\pm(0)]^2, \quad (9.8.10)$$

$$3) S^\pm(-k) = \overline{S^\mp(k)} = [S^\pm(k)]^{-1}, \quad (9.8.11)$$

$$4) \text{ функция } S^\pm(k) \text{ непрерывна при } k \in \mathbb{R},$$

5) разность $S^\pm(k) - (F_0^\pm)^2$ равна фурье-образу интегрируемой функции $s^\pm(t)$,

$$6) \arg S^\pm(k) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Если известны $S^+(k)$, и $S^+(-k)$, то величину $S^-(k)$ в силу условия (9.8.11) нельзя считать свободным параметром. Очевидно, что в качестве свободного параметра удобно взять функцию $S^+(-k)$. Если же функция $S^+(k)$ задана, а функция $S^+(-k)$ выбрана, то величина $[F^+(0)]^2$ находится из равенства (9.8.10), а функцию $s^+(t)$ можно определить по формуле (9.8.7). Можно дополнить уравнение (9.8.8) некоторыми свойствами функций F^+ и A^+ [самое очевидное из таких свойств — унимодулярность функции F^+ , следующая из выражения (9.8.4)] и решить полученную в результате систему. Тогда потенциал находится из соотношения (9.8.5). Задача может быть также решена в случае комплексного потенциала (задача со спин-орбитальным взаимодействием из гл. 15 аналогична случаю, когда U — действительный потенциал, а Q — мнимый).

Отметим, что задача с потенциалом, зависящим от энергии, существенно отличается от задачи с потенциалом, не зависящим от энергии, тем, что при замене $k \rightarrow -k$ уравнение с V^+ переходит в уравнение с V^- и аналитические свойства решений в k -плоскости оказываются уже не столь простыми.

§ 9. Другие результаты

Наряду с различными обобщениями методов Гельфанда — Левитана и Марченко нужно отметить работы по их применению к некоторым классам потенциалов (подобным классам, исследованным специальными методами в гл.7).

Так, детально исследовано уравнение Марченко для потенциалов, которые представляют собой конечную или бесконечную сумму экспонент. Первые отвечают функции Йоста с N полюсами, а вторые — функции Йоста со скачком вдоль разреза, и такие потенциалы могут быть восстановлены по их сингулярностям [337, 43, 44].

Были также разработаны методы восстановления взаимодействия по данным рассеяния на основе R -матричной теории, позволяющие определять потенциал по положению резонансов E_λ и их приведенным ширинам γ_λ^2 [88, 433]¹⁾.

В подходе Шадана и Монтеса [88] получены необходимые и достаточные условия для параметров R -матрицы, при которых ра-

¹⁾ См. также работу [450]. О R -матричном подходе в случае конечно-разностных уравнений Шредингера (одноканальных, многоканальных, многомерных) см. работы [455—458]. — Прим. ред.

диус действия потенциала конечен. При выполнении этих условий потенциал может быть построен.

Подход Захарьева [433] был развит в конечно-разностном приближении, что делает более прозрачной логику метода. Он также был применен к матричным уравнениям, рассмотренным в § 3.

Метод решения обратной задачи для уравнений Шредингера при фиксированном l или при фиксированном k с потенциалом, зависящим или не зависящим от k или l , был предложен Корнилем [104]; метод основан на свойствах детерминантов Фредгольма. Отметим, что уравнения Гельфанда — Левитана встречаются не только в задачах рассеяния, связанных с дифференциальными уравнениями второго порядка, но иногда и в довольно неожиданных случаях, например при проектировании оптических систем, компенсирующих влияние атмосферных флуктуаций на интенсивность падающего света [138]. Кроме того, хотя в данной книге приводится много вариантов вывода уравнений Гельфанда — Левитана, существуют еще два интересных вывода: вывод вариационным методом [139] и более удивительный вывод методом случайных блужданий (М. Кац, неопубликованная лекция, прочитанная в летней школе по обратной задаче, Лос-Анджелес, 1974 г.).

В заключение главы отметим, что обратная задача при фиксированном l в некоторых случаях может оказаться корректной и это, конечно, представляет большой интерес. Достаточным условием для этого является отсутствие дискретного спектра (связанных состояний). Существует ряд неравенств, накладываемых на потенциал, выполнением которых гарантируется отсутствие связанных состояний (см., например, работы [25, 176]). Отсутствие дискретного спектра следует из вполне естественных физических условий также в некоторых задачах, эквивалентных задаче рассеяния ([379, 380, 383, 297])¹.

¹) Дисперсионный подход в обратной задаче рассеяния (как релятивистской, так и нерелятивистской) развит в работах [460, 461, 476, 482]. Нестационарная обратная задача рассеяния разработана Л. П. Никшиком [477]. Численное решение обратной задачи методами «проб и ошибок» (с помощью прямой) см. в работах [444, 447, 448]. В работе [449] показано, как можно учесть влияние погрешностей в данных рассеяния на неопределенность формы восстанавливаемого потенциала статистическим методом. Обратная задача для периодических потенциалов (оператор Хилла) рассмотрена в работе [502]. Восстановление поля вращающейся мишени исследовалось в работе [459] — *Прим. ред.*

ПОСТРОЕНИЕ АМПЛИТУДЫ ПО СЕЧЕНИЯМ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

§ 1. Введение

Задачу построения амплитуды рассеяния по сечениям рассеяния в принципе можно не решать, если вместо этого измерить корреляции интенсивности рассеянных частиц в разных пространственно-временных точках. Важное значение таких измерений отметили в своих работах Гольдбергер и др. [177—181], продолжившие работы Хенбери-Брауна и Туисса [192, 193]. Названные авторы показали, что таким путем можно прямо измерить фазу амплитуды рассеяния (в частности, амплитуду рассеяния γ -квантов). Однако при тех интенсивностях пучков, которые возможны в настоящее время в физике частиц, нельзя получить коррелированные скорости счета двух детекторов. К тому же вовсе не очевидно, что преодоление и этой трудности сразу же даст решение задачи. Дело в том, что фаза рассеяния обычно входит в очень сложные формулы. Поэтому математические методы построения амплитуды рассеяния по сечениям рассеяния будут представлять интерес еще долгие годы.

Правда, исследования такой обратной задачи пока что не находили применения в фазовом анализе. В большинстве случаев принимают для взаимодействия некую модель, содержащую небольшое число параметров, и рассчитывают сечения рассеяния при разных значениях этих параметров, пока не достигнут удовлетворительного согласия с экспериментальными данными. При таком подходе вопрос о единственности (и в некоторой степени вопрос о существовании) просто не рассматривается. В других случаях предполагается, что отличны от нуля лишь несколько значений фазового сдвига, и производится подгонка методами оптимизации. Таким путем может быть найдено единственное решение, но не обязательно в классе потенциалов, имеющих физический смысл.

Как сказал Мартен [296]: «Удивительно, но факт, что, хотя насчитываются сотни выполненных и опубликованных фазовых анализов, эта проблема остается нерешенной даже в принципе, т. е. если исходить из абсолютно точных данных измерения».

Уже давно было показано [38, 7], что если во всей физической области известен модуль амплитуды $|F|$, то и сама амплитуда F определена однозначно (см. также [66]). Однако при таком способе определения амплитуды результат не очень устойчив по отношению к ошибкам измерения [296]. В дальнейшем мы будем рассматривать только случай фиксированной энергии. Для простоты рассмотрим сначала случай упругого рассеяния бесспиновых частиц ($A + B \rightarrow A + B$ при энергии, лежащей ниже первого порога неупругого рассеяния). Предположим, что мы знаем точные значения дифференциальных сечений при всех углах рассеяния, соответствующие одному фиксированному значению энергии. Следовательно, при $0 \leq \theta \leq \pi$ задана функция

$$\sigma(\theta) = |F(\cos \theta)|^2, \quad (10.1.1)$$

где $F(\cos \theta)$ — «амплитуда рассеяния», которая выражается через «фазовые сдвиги» δ_l разложением по полиномам Лежандра:

$$F(x) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) F_l P_l(x), \quad (10.1.2)$$

где

$$F_l = \exp[i\delta_l] \sin[\delta_l]. \quad (10.1.3)$$

В силу условия унитарности в случае упругого рассеяния фазовые сдвиги δ_l действительны, и наоборот, условием $\text{Im } \delta_l = 0$ гарантируется унитарность амплитуды $F(x)$, если сходится разложение (10.1.2). Условие действительности фазового сдвига δ_l эквивалентно равенству

$$\text{Im } F_l = |F_l|^2. \quad (10.1.4)$$

Пусть $F(1, 2)$ — амплитуда рассеяния, причем 1 и 2 — единичные векторы в направлении падения и вылета частиц ($x = \widehat{\cos[1, 2]}$). Условие унитарности может быть также записано в виде

$$\text{Im } F(1, 2) = (4\pi)^{-1} \int F(1, 3) F^*(2, 3) d\Omega_3, \quad (10.1.5)$$

где интегрирование ведется по всем значениям телесного угла Ω_3 .

Пусть $y = \widehat{\cos[1, 3]}$, $z = \widehat{\cos[2, 3]}$. Тогда формула (10.1.5) запишется в виде

$$\text{Im } F(x) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(y) F^*(z) S(x, y, z) dy dz, \quad (10.1.6)$$

где

$$S(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} [1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz]^{-1/2} \times \\ \times \theta [1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz]. \quad (10.1.7)$$

Здесь через θ обозначена функция Хевисайда. Формулу (10.1.6) можно также получить непосредственно из соотношения (10.1.2) в предположении, что фазы δ_l действительны [заметим, что

$$S(x, y, z) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(x) P_l(y) P_l(z)]. \text{ Пусть } \varphi(x) \text{ (или}$$

$\varphi(1, 2)$) — фаза амплитуды $F(x)$ (или $F(1, 2)$). На основании соотношений (10.1.5) и (10.1.6) задачу фазового анализа можно свести к решению следующего интегрального уравнения для функции $\varphi(x)$ в соответствующем классе функций:

$$\sin \varphi(x) = \iint Q(x, y, z) \cos [\varphi(y) - \varphi(z)] dy dz. \quad (10.1.8)$$

Ядро $Q(x, y, z)$ — неотрицательная функция:

$$Q(x, y, z) = |F(x)|^{-1} |F(y)| |F(z)| S(x, y, z). \quad (10.1.9)$$

При подходящем выборе множества функций, на котором ищется решение, задачу можно свести к нахождению неподвижных точек оператора T , даваемого формулой

$$\sin [(T\varphi)_x] = \iint Q(x, y, z) \cos [\varphi(y) - \varphi(z)] dy dz. \quad (10.1.10)$$

При любой схеме решения такой обратной задачи в полном исследовании должны быть следующие моменты:

1) выбор множества $\mathcal{E}$, в котором задаются сечения σ , или множества $\mathcal{F}$, в котором задается $|F|$, а также выбор множества Φ , в котором ищется решение $\varphi(x)$, или множества $\mathcal{C}$, в котором ищется амплитуда $F(x)$;

2) доказательство существования, единственности или неединственности решения, а также возможности его построения и его устойчивости по отношению к ошибкам измерения.

В физических приложениях представляют интерес следующие два способа выбора множеств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{C}$.

1. Множества $\mathcal{E}$ и $\mathcal{C}$ — это множества $\mathcal{E}_Q$ и $\mathcal{C}_Q$, содержащие функции, аналитические внутри определенных эллипсов с фокусами $+1$ и -1 , что согласуется с основными результатами аксиоматической квантовой теории.

2. Множества $\mathcal{E}$ и $\mathcal{C}$ — это множества $\mathcal{E}_c$ и $\mathcal{C}_c$ (или Φ_c , если это относится к фазам) функций, лишь непрерывных в области $-1 \leq x \leq 1$. Это более широкие множества, нежели множества $\mathcal{E}_Q$ и $\mathcal{C}_Q$, и вопрос устойчивости решения по отношению

к случайным ошибкам измерения в данном случае оказывается более простым.

Есть еще третий способ выбора, который может оказаться ценным для фазового анализа, проводимого в настоящее время, — это выбор взаимно-согласованных множеств полиномов. В качестве множества $\mathcal{C}$ берется множество функций $\mathcal{C}_N$, которые можно представить в виде разложений типа (10.1.2) по *конечному* числу полиномов Лежандра степени $\leq N$. Таким образом, мы обозначаем через $\mathcal{C}_N$ множество унитарных полиномов степени $\leq N$. Тогда множество $\mathcal{E}$ будет множеством $\mathcal{E}_{2N}$, содержащим квадраты модулей всех унитарных полиномов степени $\leq N$, и, следовательно, оно будет подмножеством множества полиномов степени $\leq 2N$.

Если не считать рассматриваемого ниже случая подмножества $\mathcal{L}$ множества $\mathcal{E}_c$, то все полученные к настоящему времени результаты нельзя признать удовлетворительными, ибо они не дают ответа одновременно на все вопросы.

Прежде всего имеется общая неоднозначность, соответствующая комплексному сопряжению амплитуды

$$F(x) \rightarrow -F^*(x). \quad (10.1.11)$$

Иначе говоря, если уравнению (10.1.8) удовлетворяет функция $\varphi(x)$, заданная на интервале $-1 \leq x \leq 1$, то ему удовлетворяет и функция $\pi - \varphi(x)$. Эта так называемая «тривиальная неоднозначность» всегда имеется в задаче фазового анализа, и она может быть учтена подходящим выбором подмножеств $\mathcal{C}_c$ или Φ_c , в которых ищется решение. В дальнейшем мы не будем упоминать о ней и все наши утверждения следует понимать с учетом этой тривиальной неоднозначности.

Что касается *существования* решения, то, как следует из оптической теоремы

$$\sin \varphi(1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{|F(x)|^2}{|F(1)|} dx, \quad (10.1.12)$$

к которой сводится выражение (10.1.8) при $x = 1$, на амплитуду непосредственно накладывается ограничение

$$|F(1)| \geq \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |F(x)|^2 dx. \quad (10.1.13)$$

В противном случае уравнение (10.1.8) может не иметь (действительного) решения $\varphi(x)$.

Имеются ли какие-либо другие ограничения на дифференциальное сечение, вытекающие из требования унитарности? Такие ограничения, вероятно, должны быть [324]. В самом деле, предпо-

жим, что функция $\varphi(x)$ является решением уравнения (10.1.8) при заданном модуле амплитуды $|F(x)|$. Уменьшим величину $|F(x)|$ на отрезке $x \in \Delta: |x - x_0|, \leq \varepsilon$, а вне этого отрезка оставим ее без изменения. Ясно, что можно взять величину ε настолько малой, что, сколь велика ни была бы функция $|F(x)|$ в интервале Δ , изменение правой части уравнения (10.1.8) будет сколь угодно малым. Следовательно, достаточно «бесконечно мало» изменить исходное решение $\varphi(x)$, чтобы оно стало решением уравнения (10.1.8) с измененной величиной $|F|$ всюду, кроме интервала Δ . Внутри же интервала Δ нам нужно сделать величину $|F(x)|$ лишь настолько малой, чтобы функция $\varphi(x)$ ($|\sin \varphi(x)| \leq 1$) не могла быть решением уравнения (10.1.8).

Из сказанного явствует, что в любой точке x интервала $-1 \leq x \leq 1$ уравнение (10.1.8) дает для величины $|F|$ границу, которая меньше ее значения в любой другой точке интервала. Но отсюда не следует, что положительная функция

$$M(x) = \int \int Q(x, y, z) dy dz \quad (10.1.14)$$

не должна быть очень большой. Возьмем случай, когда амплитуда F содержит лишь одну парциальную волну l . Легко видеть, что тогда функция $M(x)$ обращается в бесконечность в нулях функции $P_l(x)$.

После ряда частных исследований, относящихся к предыстории проблемы фазового анализа [159, 160, 494, 249], было доказано [321, 295, 173, 172, 12, 405—407] (см. также [493]), что если модуль амплитуды $|F(x)|$ таков, что положительная функция $M(x)$ равномерно ограничена числом 0,79 (*подпространство сечений* $\mathcal{D}$), то T — оператор сжатия в пространстве Φ_c . Поэтому в подпространстве $\mathcal{D}$ существует единственное решение и существует метод его построения; но это подпространство не представляет особого интереса, поскольку оно не содержит резонансных амплитуд. Те же авторы исследовали предположение о существовании решения в подпространстве $\mathcal{D}' (M(x) < 1)$. При этом для сечений $\sigma \in \mathcal{E}_Q$ и амплитуд $F \in \mathcal{C}_Q$ было доказано локальное существование решения [11, 14]: если для сечения σ_0 известно решение $F_0(x)$, то в пространстве $\mathcal{E}_c$ существует открытый шар с центром в точке σ_0 , внутри которого могут быть построены одно или несколько решений. В конце концов для амплитуд, являющихся унитарными полиномами, в случае достаточно малого полного сечения $\int_{-1}^1 \sigma(x) dx$ (область Γ) была доказана теорема существования и единственности [296].

Кроме указанного выше случая подпространства сечений $\mathcal{D}$, единственность решения была доказана только для специаль-

ных классов функций. Было доказано, что если сечение $\sigma \in \mathcal{E}_Q$, а амплитуда $F \in \mathcal{E}_Q$, то число ветвей в точке бифуркации конечно [11, 14]. При этом, однако, ничего не было установлено относительно разделения пространства $\mathcal{E}_Q$ ветвями решений. Таким образом, полученный результат носит чисто локальный характер. Глобальные же результаты были получены в пространстве $\mathcal{E}_E$ целых функций конечного порядка [215]: было доказано, что в этом случае не может быть более двух решений (или, если учитывать тривиальную неоднозначность, то не более четырех). То же самое было доказано в пространствах $\mathcal{E}_N$ унитарных полиномов степени $N \leq 4$ [125, 11, 30, 31, 105]. Были также приведены примеры неоднозначности решения (типа найденных в работе [125]) в неполиномиальном случае [15]. И наконец, напомним еще раз, что решение в полиномиальном случае в области Γ единственно.

Вот и все, что известно нам в области проблемы фазового анализа! Мало результатов, в частности, было получено по вопросу устойчивости (в подпространстве $\mathcal{L}$ этот вопрос, конечно, тривиален). Кроме того, результаты разных авторов по вопросам существования (локального и глобального) и единственности в большинстве случаев относятся к весьма разрозненным пространствам!

Для иллюстрации мы докажем в § 5 следующее утверждение [379]: если в классе $\mathcal{E}_c$ существуют три разных решения, то можно найти три различные последовательности «унитарных» целых функций F конечного порядка, таких, что соответствующие последовательности функций σ будут иметь один и тот же предел. Таким образом, если удастся доказать устойчивость решения в классе целых функций, то на этом основании можно будет обобщить теорему о существовании не более чем двух решений в пространстве $\mathcal{E}_E$ и на пространство $\mathcal{E}_Q$ или $\mathcal{E}_c$. Но при нынешнем состоянии наших знаний доказательства существования не более чем двух решений в специальных классах функций мало что дают экспериментатору для практического отыскания этих решений даже в таких классах.

Мы не будем проводить здесь полное исследование перечисленных выше результатов, а лишь изложим некоторые детали и доказательства тех результатов, которые мы выбрали либо из-за их общности, либо из-за их простоты.

В § 2 излагаются два единственно имеющих метода построения решения: метод итераций, сходящийся в области $\mathcal{L}$, и метод последовательного построения, который дает единственное решение в области Γ . В § 3 исследуются вопросы единственности решения в классе целых функций порядка $\rho \in]0, 4[$ и в классе унитарных полиномов степени ≤ 2 . В § 4 кратко излагается доказательство локального существования и единственности решения для амплитуды F как неявной функции сечения σ в окрестности пары соответствующих друг другу точек σ_0, F_0 . В § 5 приводится ряд заме-

чаний относительно единственности и устойчивости решения в попытке установить связь между различными вопросами, которые предстоит еще решить. В § 6 дается обзор обратных задач (фазового анализа), более общих, нежели рассмотренная.

§ 2. Методы построения решения

А. Метод последовательных приближений

Попытаемся решить уравнение (10.1.8), путем итераций.

Определение множеств $\mathcal{E}$ и Φ . Предположим, что функция $M(x)$ [формула (10.1.14)] всюду меньше единицы, и пусть

$$\sin \mu = \sup_{x \in [-1, +1]} M(x) < 1. \quad (10.2.1)$$

Этого условия, очевидно, достаточно для того, чтобы, какова бы ни была функция φ из множества Φ , правая часть уравнения (10.1.8) принадлежала интервалу $]-1, +1[$.

Поскольку функция φ определяется с точностью до 2π , а также имеется «тривиальная» неоднозначность [т. е. если φ — решение уравнения (10.1.8), то и функция $\pi - \varphi$ тоже его решение], можно выбрать такое решение, значение которого в данной точке принадлежало бы интервалу $[-(\pi/2), (\pi/2)]$.

Если решение $\varphi(x)$ — непрерывная функция, то, как следует из условия (10.2.1), область его значений должна принадлежать интервалу $[-\mu, \mu]$. Предположим теперь, что $\sup \varphi(x) \in [0, \mu]$. Тогда и все значения функции $\varphi(x)$ принадлежат интервалу $[0, \mu]$.

Доказательство. Возможны два случая:

- а) $0 \leq \sup \varphi - \inf \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,
- б) $\frac{\pi}{2} < \sup \varphi - \inf \varphi \leq 2\mu < \pi$.

В случае «а» мы имеем $\cos[\varphi(y) - \varphi(z)] \geq 0$ и, следовательно, $\sin \varphi \geq 0$. В случае «б» получаем одно за другим неравенства

$$\sin[\inf \varphi] > \sin \mu \cos[\sup \varphi - \inf \varphi],$$

$$\operatorname{tg}[\inf \varphi] > \frac{\sin \mu \cos[\sup \varphi]}{1 - \sin \mu \sin[\sup \varphi]} > 0.$$

Последнее неравенство противоречит неравенству «б», так что случай «б» исключается. Если предположить, что $\sup \varphi(x) \in [-\mu, 0]$, а $\sup \varphi - \inf \varphi < \pi/2$, то получаем, что функция φ положительна, а это противоречит предположению.

Таким образом, мы должны определить множество $\mathcal{E}$ как множество непрерывных действительных функций $\sigma(x)$, заданных на

интервале $[-1, +1]$, для которых выполняется условие (10.2.1), а множество Φ — как множество Φ_μ^+ непрерывных на интервале $[-1, +1]$ функций с областью значений $[0, \mu]$. Для всякого решения уравнения (10.1.8), принадлежащего множеству Φ_μ^+ , имеется решение уравнения (10.1.8), связанное с ним тривиальной неоднозначностью, и не существует других непрерывных решений, для которых выполнялось бы условие (10.2.1).

Алгоритм. В методе последовательных приближений решение уравнения (10.1.8) находится путем следующих итераций:

$$\varphi_0(x) = 0,$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \arcsin \left\{ \iint Q(x, y, z) \cos [\varphi_n(y) - \varphi_n(z)] dy dz \right\}. \quad (10.2.2)$$

Ясно, что все функции φ_n принадлежат множеству Φ_μ^+ . Для двух функций φ и ψ из множества Φ_μ^+ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |(T\varphi)_x - (T\psi)_x| &< (\cos \mu)^{-1} \left| \iint Q(x, y, z) \{ \cos [\varphi(y) - \varphi(z)] - \right. \\ &\quad \left. - \cos [\psi(y) - \psi(z)] \} dy dz \right| < \\ &< 2 \operatorname{tg} \mu \iint Q(x, y, z) \left| \sin \left[\frac{\varphi(y) - \psi(y)}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\varphi(z) - \psi(z)}{2} \right] \right| dy dz < \\ &< 2 \operatorname{tg} \mu \iint Q(x, y, z) |\varphi(y) - \psi(y)| dy dz, \end{aligned} \quad (10.2.3)$$

в которых учтено свойство симметрии $Q(x, y, z) = Q(x, z, y)$. Введем теперь в пространстве Φ_μ^+ норму

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in [-1, +1]} |\varphi(x)|. \quad (10.2.4)$$

Тогда Φ_μ^+ — банахово пространство и, как прямо следует из неравенств (10.2.3), при условии

$$0 \leq 2 \sin \mu \operatorname{tg} \mu < 1 \quad (\Leftrightarrow 0 \leq \sin \mu < 0,62 \dots) \quad (10.2.5)$$

величина T есть оператор сжатия в пространстве Φ_μ^+ с единственной неподвижной точкой, определяемой итерациями (10.2.2). Путем более сложного анализа можно показать, что данный алгоритм сходится при

$$\sin \mu < 0,79 \dots \quad (10.2.6)$$

Замечание. Обычно принимают, что при любом $\sin \mu < 1$ существует единственное решение уравнения (10.1.8). Это условие (см., например, работу Мартена [296]) выполняется при энер-

гиях, достаточно близких к энергии порога (если амплитуда нормально ведет себя вблизи порога и длина рассеяния не равна нулю). Отметим, однако, что, даже если такое предположение доказано, результат относится к очень специальному выбору амплитуды рассеяния. В самом деле, если $\varphi \in [0, \mu]$, то величины $\operatorname{Re} F$ и $\operatorname{Im} F$ положительны. Следовательно, при $l \geq 1$ имеем

$$\operatorname{Re} F_0 \pm \operatorname{Re} F_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \operatorname{Re} F(x) [1 \pm P_l(x)] dx > 0$$

и аналогично $\operatorname{Im} F_0 \pm \operatorname{Im} F_l > 0$. Но F_0 и F_l лежат на «унитарной» окружности $B(1/2 i, 1/2)$ (рис. 2 и 3). При $\operatorname{Im} F_0 > \operatorname{Im} F_l > 1/2$ из условия $|\operatorname{Re} F_0| > |\operatorname{Re} F_l|$ следует соотношение $|\operatorname{Im} F_0| <$

Рис. 2.

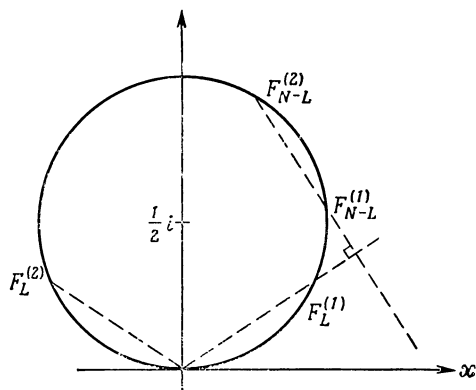
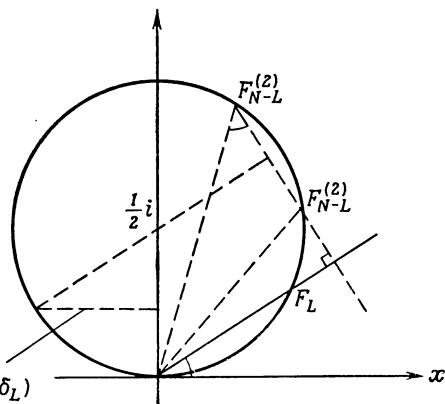


Рис. 3.

 $\frac{1}{2}(1 - \sin \delta_L)$


$< |\operatorname{Im} F_l|$, противоречащее второму неравенству ($\operatorname{Im} F_l > 1/2$). Следовательно, $\operatorname{Im} F_l < 1/2$. При условии $-(\pi/2) < \delta_l < (\pi/2)$ (фазовые сдвиги определены с точностью до 2π) из неравенства

$\sin \mu < 1$ следует, что

$$|\delta_l| < \frac{\pi}{4} \quad (l \geq 1). \quad (10.2.7)$$

Более точный анализ дает более сильное неравенство

$$|\delta_l| < \frac{\pi}{6} \quad (l \geq 1). \quad (10.2.8)$$

Б. Последовательное построение [215]

Пусть $\sigma_{2L}(x)$ — квадрат модуля унитарного полинома степени L :

$$\sigma_{2L}(x) = \left| \sum_0^L (2l+1) F_l P_l(x) \right|^2 = \sum_0^{2L} (2l+1) \sigma_l P_l(x). \quad (10.2.9)$$

Попытаемся восстановить амплитуды F_l по коэффициентам σ_l . Разложение по полиномам Лежандра произведения $P_l P_n$ содержит полиномы Лежандра степени $|l-n|, \dots, l+n$. Следовательно, выражения для коэффициентов разложения порядка $\geq L$ образуют треугольную систему уравнений относительно $F_0, F_1, \dots, F_L$:

$$\sigma_N = \sum_{l=E}^L \sum_{l'=(l/2)(N+1)}^l A_N^{ll'} \operatorname{Re} [F_l^* F_{l'}] \quad (10.2.10)$$

$$(N = L, L+1, \dots, 2L),$$

где при $l+l' < N$ мы имеем $A_N^{ll'} = 0$. Эту систему можно решать последовательно:

$$\begin{aligned} \sigma_{2L} &= A_{2L}^{LL} [F_L^* F_L], \\ &\vdots \\ \sigma_N &= A_N^{L(N-L)} \operatorname{Re} [F_L^* F_{N-L}] + [\text{найденные ранее } \sigma_i] \quad (10.2.11) \\ &(N = L, L+1, \dots, 2L-1). \end{aligned}$$

На первом шаге определяется модуль функции F_L . Окружность $B(0, |F_L|)$ пересекается с унитарной окружностью $B(1/2i, 1/2)$ в двух точках $F_L^{(1)}$ и $F_L^{(2)}$. Тривиальная неоднозначность устраняется выбором одной из этих величин, скажем $F_L^{(1)}$ ($0 \leq \delta_L \leq \pi/2$). На каждом следующем шаге находится $\operatorname{Re} (F_L^* F_{N-L})$ и в комплексной плоскости строится прямая линия, пересекающаяся с единичной окружностью $B(1/2i, 1/2)$ в двух точках. Таким путем можно построить 2^L унитарных амплитуд, но нужно еще вычислить сечения $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{L-1}$ для различных наборов $\{F_L\}$ и выбрать амплитуды, которые согласуются с этими сечениями.

Данный метод позволяет однозначно определить амплитуду в двух случаях. Первых случай:

$$\sin \mu < 1.$$

Предположим, что существуют два разных решения с одинаковыми значениями F_l при $l = L, L - 1, \dots, N - L + 1$. При $l = N - L$ существуют два решения, которым соответствуют значения $F_{N-L}^{(1)}$ и $F_{N-L}^{(2)}$, представленные на фиг. 2 и 3. Из геометрических соображений можно написать

$$\delta_{N-L}^1 + \delta_{N-L}^2 = \delta_L + \frac{1}{2} \pi. \quad (10.2.12)$$

Ясно, что условие (10.2.8) не может быть выполнено одновременно и для δ_{N-L}^1 и для γ_{N-L}^2 , так что одно из решений должно быть отброшено. Такие рассуждения неверны для δ_0 , но легко видеть, что величина $|F_0|$ однозначно определяется из равенства

$$\sigma_T = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma(x) dx = |F_0|^2 + \sum_{l=1}^N (2l+1) |F_l|^2. \quad (10.2.13)$$

Окружность $B(0, |F_0|)$ пересекается с унитарной окружностью $B(1/2i, 1/2)$ в двух точках. Лишь одна из них может совпадать с каким-либо из значений $F_0^{(1)}$ или $F_0^{(2)}$, поскольку $\delta_L < \pi/2$. Следовательно, решение единственно. Можно даже показать [296], что решение единственно, если $\operatorname{Re} F > 0$ и $\operatorname{Im} F > 0$ (требование, более слабое, нежели условие $\sin \mu < 1$) и если конечно число отличных от нуля значений F_l .

Второй случай:

$$\text{Полное сечение } \sigma_T \text{ мало.}$$

Из выражения (10.2.13) для полного сечения σ_T следует, что если существуют две различные амплитуды, такие, что их компоненты F_n совпадают при $n = N - L + 1, \dots, L$ и различаются при $n = N - L$, то

$$\sigma_T > (2L+1) \sin^2 \delta_L + [2(N-L)+1] \left[\frac{|F_{N-L}^{(1)}|^2 + |F_{N-L}^{(2)}|^2}{2} \right]. \quad (10.2.14)$$

Из геометрического построения явствует, что

$$\frac{1}{2} [\operatorname{Im} F_{N-L}^{(1)} + \operatorname{Im} F_{N-L}^{(2)}] > \frac{1}{2} [1 - \sin \delta_L].$$

Тогда, учитывая соотношение (10.1.3), получаем при наличии двух разных амплитуд

$$\sigma_T > (2L + 1) \sin^2 \delta_L + \frac{1}{2} [2(N - L) + 1] (1 - \sin \delta_L). \quad (10.2.15)$$

При $L = 2$, $N = 3$ и $\sin \delta_l = {}^{3/2}_0$ правая часть неравенства (10.2.15) принимает наименьшее значение, так что $\sigma_T > 1,38$. Следовательно, условием

$$\sigma_T < 1,38 \quad (10.2.16)$$

гарантируется единственность решения. Это условие весьма отличается от условия $\sin \mu < 1$.

§ 3. Другие исследования вопроса единственности

А. Аппроксимация полиномами

Пусть амплитуда $F_L(z)$ — полином степени L . Чтобы устранить тривиальную неоднозначность, примем, что $0 \leq \delta_L \leq {}^{1/2}\pi$. Амплитуду $F_L(z)$ можно представить в виде произведения сомножителей, соответствующих ее нулям:

$$F_L(z) = \alpha (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_L), \quad (10.3.1)$$

где

$$\alpha = \exp(i\delta_L) \sin \delta_L 2^{L+1} \frac{\Gamma(L + {}^{3/2}_2)}{\Gamma(L + 1)}. \quad (10.3.2)$$

Предположим теперь, что $|F_L(z)|^2$ — известный полином степени $2L$ с нулями, образующими пары [попарно сопряженные величины в z -плоскости, так что возможны 2^L полиномов вида (10.3.1)]. Из этого множества необходимо выбрать унитарные полиномы, имеющие вид (10.3.1).

Рассмотрим сначала случай $L = 2$. Существуют четыре полинома с одинаковыми модулями и множителями α :

$$\begin{aligned} F_2^{++} &= \alpha (z - z_1) (z - z_2), \\ F_2^{+-} &= \alpha (z - z_1) (z - z_2^*), \\ F_2^{-+} &= \alpha (z - z_1^*) (z - z_2), \\ F_2^{--} &= \alpha (z - z_1^*) (z - z_2^*). \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

Коэффициенты разложения по полиномам Лежандра функций F_2^{++} и F_2^{--} совпадают по модулю. Легко видеть, что F_2^{++} и F_2^{--} не могут быть унитарными одновременно. Точно так же не могут быть одновременно унитарными F_2^{+-} и F_2^{-+} . Таким образом, существует не более двух унитарных полиномов степени 2 с одинаковыми модулями. Замечательно, что эти два решения в действительности существуют при определенных условиях, представляющих фи-

зический интерес. Первый пример такого двузначного решения был дан Кричтоном [125] в 1966 г. С тех пор эта двузначность

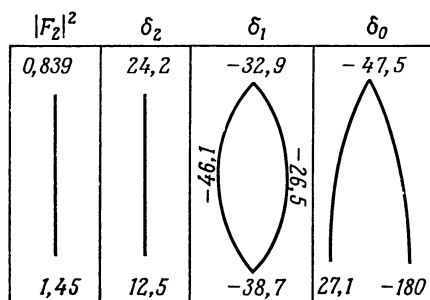


Рис. 4. Неоднозначность Кричтона.

и область, в которой она возникает, были достаточно хорошо изучены (рис. 4 и 5).

Функция

$$F(\cos \theta) = F(1) \prod_{i=1}^2 \frac{\cos \theta - F_i}{1 - F_i}$$

при заданном $|F(\cos \theta)|^2$ определяется двузначно. Приведенные на фиг. 4 значения фазовых сдвигов как функций параметра

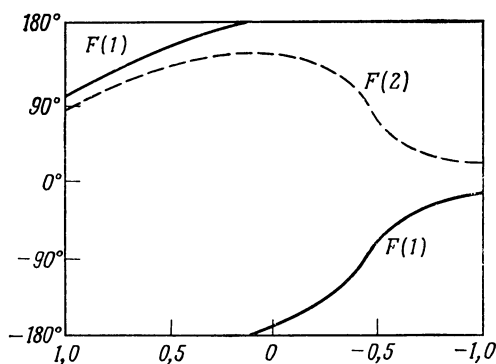


Рис. 5. Два эквивалентных решения $F(1)$ и $F(2)$.

$|F_2|^2$ показывают, что эта неоднозначность не является изолированной [30, 31]. На рис. 5 представлена зависимость амплитуды $F(\cos \theta)$ от величины θ при определенном выборе функции $|F(\cos \theta)|^2$ [125]. Кроме того, был исследован случай полиномов третьей степени [30, 32] и полиномов четвертой степени [105]. В этих случаях также было показано, что число решений, не считая тривиальной неоднозначности, не может быть больше двух. Одна-

ко доказательство этого утверждения сильно усложняется с увеличением L (например, в случае $L = 4$ пришлось проверять выполнение неравенств с помощью ЭВМ) и методы, которыми проводятся доказательства, нельзя обобщить на случай произвольного L .

При $L > 4$ возможны эвристические рассуждения, которые подтверждают результат, полученный при $L \leq 4$. Они состоят в следующем. Априори возможны 2^L значений амплитуды. Предположим, что из них N амплитуд F^k унитарны. Они зависят от $(2L + 1)$ параметров: действительных частей и модулей мнимых частей L корней z_i полинома (10.3.1), а также коэффициента α . Условия унитарности имеют вид

$$\operatorname{Im} F_l^k = |F_l^k|^2, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L - 1. \quad (10.3.4)$$

Уравнения (10.3.4) образуют систему NL нелинейных алгебраических уравнений. Если эти уравнения независимы, то должно выполняться неравенство

$$NL < 2L + 1, \quad \text{т. е. } N \leq 2. \quad (10.3.5)$$

При $N = 2$ неопределенным остается один параметр. Следовательно, в случае однопараметрического семейства дифференциальных сечений амплитуда рассеяния может оказаться двузначной. Это действительно происходит в рассмотренных случаях $L = 2, 3, 4$. К сожалению, остается недоказанным существенное предположение о независимости системы уравнений (10.3.4).

Г. Целые функции

В случае когда амплитуда рассеяния представляет собой полином, разложение в ряд по парциальным волнам обрывается. Более близок к физической реальности, по-видимому, случай бесконечного числа парциальных волн. Тогда о единственности можно судить по асимптотическому поведению коэффициентов F_l : для сходимости разложения (10.1.2) необходимо, чтобы выполнялось условие $F_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. При больших значениях l условие унитарности имеет вид

$$\operatorname{Im} F_l = |F_l|^2 \sim (\operatorname{Re} F_l)^2. \quad (10.3.6)$$

Предположим теперь, что $F(x)$ — «подлинно» целая функция, т. е. целая функция, не являющаяся полиномом. Обозначим аналитическое продолжение амплитуды $F(x)$ на всю комплексную плоскость через $F(z)$. Поведение функции $F(z)$ при больших $|z|$ определяется ее «рассеивающей» частью

$$D(z) = \sum_{\gamma}^{\infty} (2l+1) \operatorname{Re} F_l P_l(z). \quad (10.3.7)$$

Следовательно, если продолжить в комплексную область сечение $\sigma(z)$

$$\sigma(z) = F(z) F^*(z^*), \quad (10.3.8)$$

то его поведение при больших $|z|$ будет определяться выражением

$$[\sum (2l+1) \operatorname{Re} F_l P_l(z)]^2. \quad (10.3.9)$$

Это упрощает проблему единственности, поскольку асимптотическое поведение амплитуды F с точностью до знака может быть найдено по асимптотическому поведению сечения σ .

Далее введем «абсорбционную часть» A амплитуды рассеяния в соответствии с формулой (10.1.5):

$$A(1, 2) = (4\pi)^{-1} \int F(1, 3) F^*(2, 3) d\Omega_3, \quad (10.3.10)$$

или

$$A(\cos \widehat{(1, 2)}) = \sum_0^\infty (2l+1) \operatorname{Im} F_l P_l(\cos \widehat{[1, 2]}). \quad (10.3.11)$$

Пусть амплитуда F унитарна и является целой функцией. Тогда, согласно формулам (10.3.6) и (10.3.11), функцию $A(y)$ можно продолжить в комплексную плоскость как целую функцию:

$$A(y) = \sum_0^\infty (2l+1) \operatorname{Im} F_l P_l(y). \quad (10.3.12)$$

Функцию $A(y)$ можно аналитически продолжить другим способом:

выбрав в качестве оси z биссектрису угла $\widehat{1, 2}$, запишем выражение (10.3.10) в виде

$$\begin{aligned} A(\cos \widehat{[1, 2]}) &= A(\cos [2\theta_0]) = \\ &= (4\pi)^{-1} \int d\varphi d(\cos \theta) F(\cos \theta_0 \cos \theta + \\ &+ \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi) F^*(\cos^* \theta_0 \cos \theta - \sin^* \theta_0 \sin \theta \cos \varphi). \end{aligned} \quad (10.3.13)$$

Пусть E_{θ_0} — эллипс в комплексной плоскости с фокусами $-1, +1$, проходящий через точку $\cos \theta_0$. Как явствует из выражения (10.3.13), аргумент функции F лежит на отрезке, соединяющем точки $\cos(\theta_0 + \theta)$ и $\cos(\theta_0 - \theta)$, принадлежащие эллипсу E_{θ_0} . То же самое справедливо и для аргумента функции F^* , так что выражением (10.3.13) дается аналитическое продолжение функции A в комплексную плоскость. В частности, при действи-

тельном ψ имеем

$$A(\cos h2\psi) = (4\pi)^{-1} \int d\varphi d(\cos \theta) |F(\cos \theta \cos h\psi + i \sin \theta \sin h\psi \cos \varphi)|^2. \quad (10.3.14)$$

Если f — аналитическая функция, то пусть $M_f(x)$ будет точная верхняя граница ее модуля $|f|$ внутри эллипса с большой осью $2x$ и фокусами $-1, +1$. Из соотношений (10.3.12) и (10.3.6) следует, что функция A равна сумме полиномов Лежандра с положительными коэффициентами: она достигает своего максимального значения в крайней правой точке эллипса. Поэтому из выражения (10.3.14) получаем неравенство

$$M_A(2x^2 - 1) \leq |M_F(x)|^2. \quad (10.3.15)$$

Если F — целая функция порядка ρ , то, как следует из неравенства (10.3.15), при $x \rightarrow \infty$ и при любом $\varepsilon > 0$

$$M_A(y) \leq \exp \left[\left(\frac{1+y}{2} \right)^{1/2\rho+\varepsilon} \right], \quad (10.3.16)$$

так что A — целая функция порядка $1/2\rho$.

Предположим теперь, что две унитарные амплитуды F и F' , являющиеся целыми функциями, дают одинаковое сечение:

$$\begin{aligned} F &= D + iA, \\ F' &= D' + iA', \\ D^2(z) + A^2(z) &\equiv D'^2(z) + A'^2(z). \end{aligned} \quad (10.3.17)$$

Исключим из дальнейшего рассмотрения случай $A^2 - A'^2 = 0$, допускающий в качестве решения тривиальную неоднозначность с $D' = -D$. Если F — функция порядка $\rho > 0$, то A — функция порядка $1/2\rho$, а D — порядка ρ . Это означает, что D' — функция порядка ρ , а A' — порядка $1/2\rho$. Следовательно, F и F' должны быть функциями одного порядка. Последнее равенство в формуле (10.3.17) можно переписать в виде

$$(D + D')(D - D') = -(A + A')(A - A'). \quad (10.3.18)$$

Ясно, что обе части этого равенства должны быть функциями порядка $1/2\rho$.

Предположим теперь, что $\rho < 1$. Величины $(D - D')$ и $(D + D')$ будут целыми функциями порядка $\rho < 1$, и поэтому их можно представить в виде абсолютно сходящегося произведения корневых сомножителей. Нули функции $D - D'$ образуют подмножество нулей функции $(A - A')(A + A')$. Поэтому $(D - D')$ должна быть функцией порядка $1/2\rho$. То же самое можно сказать и о функции $(D + D')$. Следовательно, и D , и D' — функции порядка $1/2\rho$, что противоречит исходному предположению, если

только $\rho \neq 0$. Таким образом, существует не более одной амплитуды порядка $\rho \in (0, 1)$, воспроизводящей заданное сечение.

Данный результат был обобщен [296] на случай функций произвольного конечного нецелого порядка $\rho > 0$. В случае целого порядка возможно не более двух решений. Результат был также распространен на случай подлинно целых функций нулевого порядка, при котором тоже возможно не более двух решений. С физической точки зрения важен следующий вывод из этих исследований: если известно, что амплитуда рассеяния дается уравнением Шредингера с обрезанным потенциалом, так что она — целая функция порядка $1/2$, то существует единственное решение нашей задачи.

§ 4. Локальная задача

Локальная задача исследовалась в следующей постановке. Предположим, что нам известна унитарная амплитуда $F_0(z)$, аналитическая в малом эллипсе Мартена $\varepsilon(z_0)$, т. е. в эллипсе с фокусами $-1, +1$, проходящем через точку z_0 . Пусть $\sigma_0(z)$ — соответствующее дифференциальное сечение, определенное таким образом, что оно может быть аналитически продолжено в комплексную плоскость:

$$\sigma_0(z) = F_0(z) F_0^*(z^*) = D_0^2(z) + A_0^2(z), \quad (10.4.1)$$

где D_0 и A_0 — рассеивающая и поглощающая части амплитуды F_0 . Какие условия необходимы и достаточны для того, чтобы при переходе от $\sigma_0(z)$ к $\sigma_0(z) + \delta\sigma(z)$ можно было найти соответствующую унитарную амплитуду $F_0(z) + \delta F(z)$?

Чтобы решить такую задачу, сделаем следующее:

1) определим гильбертово пространство функций, аналитических в подходящем эллипсе с фокусами -1 и $+1$;

2) на основе своего рода «теоремы о неявной функции», справедливой в некоторой «окрестности» преобразования $\sigma_0 \rightarrow F_0$, определим оператор $\sigma(z) \rightarrow F(z)$.

1. Сначала определим совокупность гильбертовых пространств $\mathcal{H}(\xi)$, параметризованных действительным числом $\xi > 1$, как множество действительных функций, аналитических внутри эллипсов $\varepsilon(\xi + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) с заданным скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_\xi = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l g_l |Q_l(\xi)|^{-2}, \quad (10.4.2)$$

где f_l и g_l — коэффициенты разложения по полиномам Лежандра функций f и g :

$$f_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(z) P_l(z) dz, \quad (10.4.3)$$

а P_l и Q_l — функции Лежандра первого и второго рода. Можно подобрать такие числа ξ_0'' , ξ_1' , ξ_0 , ξ_1 (рис. 6), чтобы выполнялось соотношение

$$\xi_0 < \xi_0' < \xi_0'' < z_0 < \xi_1 = 2\xi_0^2 - 1, \quad (10.4.4)$$

а также условия: а) $A(z)$ — действительная функция, аналитическая внутри эллипса $\varepsilon(\xi_1)$; б) сечение $\sigma_0(z)$ [действительная

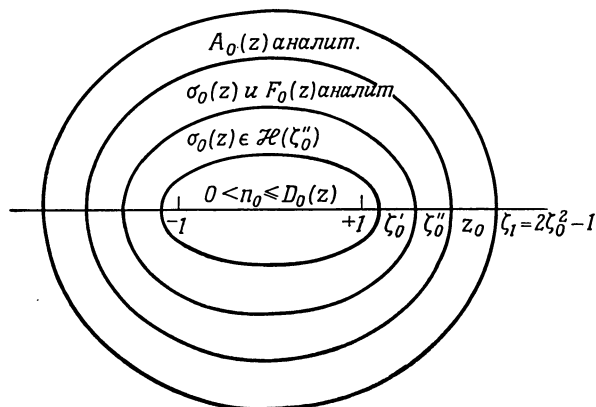


Рис. 6.

функция, аналитическая внутри эллипса $\varepsilon(z_0)$] и функция $D_0(z)$ принадлежат пространству $\mathcal{H}(\xi_0'')$; в) на границе $\partial\varepsilon(\xi_0')$ эллипса $\varepsilon(\xi_0')$ функция $D_0(z)$ ограничена снизу величиной $n_0 > 0$:

$$n_0 = \inf_{z \in \partial\varepsilon(\xi_0')} |D_0(z)|. \quad (10.4.5)$$

2. Теперь для любой пары

$$(A, \sigma) \in \mathcal{H}(\xi_1) \times \mathcal{H}(\xi_0'') \quad (10.4.6)$$

можно определить следующие две последовательности:

$$D_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\sigma(x) - A^2(x)]^{1/2} P_l(x) dx, \quad (10.4.7)$$

$$\overline{D}_l = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\varepsilon(\xi_0')} [\sigma(z) - A^2(z)]^{1/2} Q_l(z) dz.$$

Нулями нечетного порядка функции $\sigma(z) - A^2(z)$ задаются точки ветвления в подынтегральном выражении в формуле (10.4.7). Если число их внутри эллипсов $\varepsilon(\xi_0')$ четное, то соответствующие разрезы можно провести так, что подынтегральное выражение будет непрерывным в окрестности границы эллипса $\partial\varepsilon(\xi_0')$. В про-

тивном случае проводим разрез вдоль действительной оси, и контур интегрирования оказывается незамкнутым.

В обоих случаях, как легко видеть, величина $\bar{D}_l^2$ определена и является действительной. Величины D_l и $\bar{D}_l$ совпадают в том и только в том случае, когда внутри эллипса $\varepsilon(\zeta'_0)$ отсутствуют нули нечетного порядка разности $\sigma(z) - A^2(z)$. Как следует из предположений, функция $D_0(z)$ аналитична внутри эллипса $\varepsilon(\zeta'_0)$ и равна $[\sigma_0(z) - A_0^2(z)]^{1/2}$, так что несомненно

$$D_{0l} = \bar{D}_{0l}. \quad (10.4.8)$$

Таким образом, можно определить оператор

$$S(A, \sigma; z) = A(z) - \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (A_l^2 + \bar{D}_l^2) P_l(z). \quad (10.4.9)$$

В силу унитарности амплитуды $F_0(z)$ и равенства (10.4.8) имеем

$$S(A_0, \sigma_0) = 0. \quad (10.4.10)$$

На основании теоремы Хильдебрандта — Грейвса можно показать, что равенством

$$S(A, \sigma) = 0 \quad (10.4.11)$$

определяется величина $A(\sigma)$ как неявная функция переменной σ в некоторой окрестности точки σ_0 , причем

$$A(\sigma_0) = A_0. \quad (10.4.12)$$

Кроме того, можно доказать, что существует бесконечномерное подмножество сечений в окрестности σ_0 , для которых $\bar{D}_l = D_l$, так что условие унитарности выполнено [10].

Здесь мы лишь набросаем схему доказательства этих результатов, состоящую из пяти пунктов.

1. Оператор S переводит пары $(A, \sigma) \in \mathcal{H}(\zeta_1) \times \mathcal{H}(\zeta''_0)$ в пространство $\mathcal{H}(\zeta_1)$. Это можно показать, подставив в выражение (10.4.9) вместо $\bar{D}_l$ мажоранту, получаемую из выражения (10.4.7) и оценки $\sup_{z \in \partial\varepsilon(\zeta'_0)} |\sigma(z) - A^2(z)|$, а вместо A_l — мажоранту, анало-

гичным образом получаемую из оценки величины $\|A\|_{\zeta}$.

2. Существует окрестность Ξ точки (A_0, σ_0) , такая, что функция $\sigma(z) - A^2(z)$ ни в одной из точек границы эллипса $\partial\varepsilon(\zeta'_0)$ не обращается в нуль. Тогда по теореме Руше число нулей функции $\sigma(z) - A^2(z)$ внутри эллипса $\partial\varepsilon(\zeta'_0)$ равно числу нулей функции $\sigma_0(z) - A_0^2(z)$.

Чтобы доказать это, заметим, что для любой функции $f(z) \in \mathcal{H}(\zeta''_0)$, согласно неравенству Шварца, можно написать при $z \in$

$\in \varepsilon(\zeta'_0)$

$$|f(z)|^2 = \left| \sum_l (2l+1) P_l(z) f_l \right|^2 \leq \left\{ \sum_l (2l+1) \frac{|f_l|^2}{|Q_l(\zeta'_0)|^2} \right\} \left\{ \sum_l (2l+1) |P_l(\zeta'_0) Q_l(\zeta''_0)|^2 \right\}. \quad (10.4.13)$$

Это позволяет ограничить

$$\sup_{z \in \varepsilon(\zeta'_0)} |\sigma(z) - \sigma_0(z)|$$

величиной $C \|\sigma - \sigma_0\|_{\zeta'_0}$ и получить аналогичную оценку для разности $A(z) - A_0(z)$. Следовательно, выбрав достаточно малыми величины $\|\sigma - \sigma_0\|_{\zeta'_0}$ и $\|A - A_0\|_{\zeta_1}$, можно добиться, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{z \in \varepsilon(\zeta'_0)} |[\sigma(z) - A^2(z)] - [\sigma_0(z) - A_0^2(z)]| < n_0^2 - n \quad (0 < n < n_0),$$

что и требовалось доказать.

3. Производная Фреше $S_A(A, \sigma)$ оператора S по «переменной» A существует и представляет собой ограниченный линейный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}(\zeta_1)$, а операторы $S(A, \sigma)$ и $S_A(A, \sigma)$ непрерывны по переменным (A, σ) в окрестности точки (A_{σ_0}, σ_0) .

Для этого напомним

$$S_A(A, \sigma) = 1 - M_A(A, \sigma), \quad (10.4.14)$$

$$M_A(A, \sigma) \delta A = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(z) \varphi_l, \quad (10.4.15)$$

где

$$\varphi_l = \frac{1}{i\pi} \oint_{\partial \varepsilon(\zeta'_0)} Q_l(t) \left\{ A_l - \frac{\bar{D}_l A(t)}{[\sigma(t) - A^2(t)]^{1/2}} \right\} \delta A(t) dt. \quad (10.4.16)$$

Из выражения (10.4.16) получаем ограничения на $|\varphi_l|$, с помощью которых доказывается сходимость разложения (10.4.15), так что $M_A(A, \sigma)$ — ограниченный линейный оператор. Остальные результаты могут быть получены аналогичным образом (хотя и путем несколько более длительных выкладок).

4. Оператор $M_A(A_0, \sigma_0)$ — компактный. Это доказывается тем, что шар $B(0, r)$ с центром в точке 0 и радиусом r в пространстве $\mathcal{H}(\zeta_1)$ преобразуется под действием $M_A(A_0, \sigma_0)$ в предкомпактное множество. Действительно, при любом $\varepsilon > 0$ можно най-

ти такое L , что $\sum_{l=L}^{\infty} (2l+1) |\varphi_l|^2 |Q_l(\zeta_1)|^{-2} < \varepsilon$. Следовательно

можно сначала покрыть множество в R^L конечной ε -сетью, которая будет также служить конечной сетью для $M(A_0, \sigma_0) \cap B(0, r)$.

5. Таким образом, если единица не принадлежит спектру оператора $M_A(A_0, \sigma_0)$, то существует ограниченный обратный оператор $S_A^{-1}(A_0, \sigma_0)$ и применима теорема Хильдебранта — Грейвса, что и дает нужный результат. Кроме того, тем самым обходится проблема расщепления нулей разности $\sigma(z) - A^2(z)$ (из-за чего может нарушаться равенство $\bar{D}_l = D_l$).

Случай бифуркации. Предположим теперь, что единица является собственным значением оператора $M_A(A_0, \sigma_0)$, и введем оператор

$$U(\delta A, \delta \sigma) = S(A, \sigma) - S_A(A_0, \sigma_0) \delta A, \quad (10.4.17)$$

где

$$\begin{aligned} \delta A &= A - A_0, \\ \delta \sigma &= \sigma - \sigma_0. \end{aligned} \quad (10.4.18)$$

Если $A(\sigma)$ — решение уравнения (10.4.11), то

$$S_A(A_0, \sigma_0) \delta A = -U(\delta A, \delta \sigma). \quad (10.4.19)$$

Для оператора $S_A(A_0, \sigma_0)$ не существует обратного оператора. Но можно показать, что существует так называемый обобщенный обратный оператор. Действительно, поскольку $M_A(A_0, \sigma_0)$ есть компактный оператор, справедливо следующее: а) ядро (нулевое множество) N отображения $S_A(A_0, \sigma_0)$ является конечномерным линейным подпространством пространства $\mathcal{H}(\xi_1)$ (пусть его размерность будет равна n); б) область изменения R оператора $S_A(A_0, \sigma_0)$ замкнута. Тогда можно определить фактор-пространство $\mathcal{H}_N(\xi_1) = \mathcal{H}(\xi_1)/N$ как банахово пространство, задав в нем норму

$$\|\delta A_N\|_N = \inf_{\alpha \in N} \|\delta A + \alpha\|_{\xi_1}, \quad (10.4.20)$$

где δA_N — класс эквивалентности с модулем N , содержащий элемент δA . Существует непрерывное линейное взаимно-однозначное отображение S_N пространства $\mathcal{H}_N(\xi_1)$ в R , такое, что

$$S_N \delta A_N = S_A(A_0, \sigma_0) \delta A. \quad (10.4.21)$$

Тогда по теореме об обратном отображении для S_N существует непрерывное линейное обратное отображение S_N^{-1} пространства R в $\mathcal{H}_N(\xi_1)$. Пусть Π_N и Π_R — ортогональные проекционные операторы, проектирующие пространство $\mathcal{H}(\xi_1)$ на подпространства N и R (рис. 7). Обобщенный обратный оператор $\tilde{S}_A^{-1}(A_0, \sigma_0)$ определяется как ограниченный линейный оператор $\mathcal{H}(\xi_1) \rightarrow N^\perp [N^\perp$ — подпространство пространства $\mathcal{H}(\xi_1)$, ортогональное подпростран-

λ_m и с параметром $\delta\sigma$ из бесконечномерного пространства. Ясно, что интерес представляют только действительные решения $\{\lambda_m\}$, комплексные же не следует принимать во внимание. Любому действительному решению $\{\lambda_m\}$ соответствует решение $u(\delta\sigma)$ бифуркационного уравнения (10.4.27), и при этом решении функция $\delta A(\delta\sigma, u(\delta\sigma))$ удовлетворяет не только уравнению (10.4.24) с $u = u(\delta\sigma)$, но и исходному уравнению (10.4.19).

Как и в регулярном случае, с помощью отображения сжатия можно перейти от линейной теории к нелинейным уравнениям типа (10.4.27), что доказывается путем несложных, но довольно трудоемких мажораций. Кроме того, так же, как в регулярном случае, может быть решена задача со сдвигом нулей.

Таким образом, из существования решения $(\sigma_0 \rightarrow F_0)$ следует существование одного или конечного числа решений $(\sigma \rightarrow F)$ при условии, что сечение σ достаточно близко к исходному сечению в пространстве $\mathcal{H}(\xi_0)$. К сожалению, в литературе пока еще, по-видимому, нет ни результатов относительно максимальной размерности подпространства N , ни результатов глобального характера о линиях бифуркации в банаховом пространстве $\mathcal{H}$.

Кроме того, был предложен численный метод построения новой амплитуды A (типа метода Ньютона — Канторовича) и с его помощью было доказано, что неоднозначность решения, замеченная Кривичоном, не является изолированной [14, 15].

§ 5. Вопросы единственности и устойчивости решения (уточнение утверждений)

Далее мы, как и прежде, не будем упоминать о тривиальной неоднозначности восстановления амплитуды по сечению. Как явствует из представленного выше обзора, предположение о существовании не более двух решений задачи восстановления амплитуды справедливо в широких классах функций. Физик может заметить для себя следующее:

1. Предположение о существовании не более двух решений справедливо в том случае, если амплитуда F принадлежит классу целых функций конечного порядка.

2. При любом $\varepsilon > 0$, какова бы ни была функция $f(x)$, непрерывная на интервале $[-1, +1]$, можно подобрать целую функцию конечного порядка $\varphi(x)$, которая будет аппроксимировать функцию $f(x)$ с погрешностью, меньшей ε , по норме

$$\|f - \varphi\| = \sup_{[-1, +1]} |f(x) - \varphi(x)|.$$

3. С физической точки зрения интерес представляют лишь те решения, которые устойчивы по отношению к ошибкам измерений,

т. е. отображения $\sigma \rightarrow F$ должны быть непрерывными при определенном выборе норм в пространствах $\mathcal{E}$ ($\sigma \in \mathcal{E}$) и $\mathcal{C}$ ($F \in \mathcal{C}$).

После этого физик может задать вопрос.

Вопрос 0. Следует ли из сделанных замечаний, что предположение о существовании не более двух решений справедливо во всех случаях, представляющих интерес с физической точки зрения?

Замечания физика и поставленный им вопрос неточны и на самом деле не имеют отношения к тому, что больше всего должно интересовать физиков. Во-первых, из замечаний 1 и 2 просто следует, что если заданы сечение $\sigma_0 \in \mathcal{E}$, равное $|F_0|^2$ ($F_0 \in \mathcal{C}$), и шар $B(F_0, \varepsilon)$ в пространстве $\mathcal{C}$, то в этом шаре имеется по меньшей мере одна точка F , в которой существует не более двух решений задачи $|F|^2 \rightarrow F$. Во-вторых, замечание 3 вообще не имеет смысла, если его не уточнить. В частности, говорить об устойчивости по отношению к ошибкам измерений можно лишь в том случае, если должным образом определены метрические пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{C}$. Кроме того, лучше всего, чтобы структура пространства $\mathcal{E}$ определялась «сама собой»; например, можно взять в качестве $\mathcal{E}$ пространство целых функций, или полиномов, или аналитических функций, или непрерывных функций с той или иной нормой. Структура пространства $\mathcal{E}$ не должна находиться в каком-либо специальном соответствии со свойствами пространства $\mathcal{C}$, в котором *должно быть найдено* решение F . Точно так же и метрическое пространство $\mathcal{C}$ должно определяться «само собой». Только тогда требование устойчивости по отношению к ошибкам измерения будет действительно эквивалентно требованию непрерывности отображения $\sigma \rightarrow F$. К сожалению, тогда приходится определить пространства $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$ довольно слабым условием: «пространства непрерывных функций» — вот, по-видимому, самые узкие пространства $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$, в которых анализ устойчивости еще может дать *практически ценные* результаты. В самом деле, нетрудно видеть, что некоторые полиномы σ никак не могут соответствовать полиномиальной унитарной амплитуде (взять, к примеру, сечение σ в виде полинома нечетной степени!). То же самое относится и к подлинно целым функциям: в качестве примера можно взять унитарную целую функцию F_0 первого порядка, соответствующую сечению $\sigma_0 = |F_0|^2$ и функциям D_0 порядка 1 и A_0 порядка $1/2$, и пытаться найти в классе $\mathcal{C}$ целых функций первого порядка решение задачи $\sigma \rightarrow F$ с $\sigma = D_0^2 + A^2$, где A — функция порядка $3/4$. Подобные примеры могут быть построены также в классе аналитических функций путем внесения такого абсорбционного возмущения в σ , которое не выводит сечение σ из данного пространства $\mathcal{H}$, но само при этом не является аналитическим в достаточно большом эллипсе.

Мы утверждаем, что с физической точки зрения интерес представляет следующий вопрос.

Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{C}$ — метрические пространства, определения которых *удобны* для физических исследований. Пусть $\sigma \in \mathcal{E}$, а $B(\sigma, \delta)$ — шар с центром в точке σ и с радиусом $\delta > 0$ (сколь угодно малым). Рассмотрим образы всех точек шара B при всевозможных отображениях ($\sigma \rightarrow$ унитарная амплитуда) пространства $\mathcal{E}$ в пространство $\mathcal{C}$.

Вопрос 1. Состоит ли образ шара $B(\sigma, \delta)$ из одного, двух или иного конечного числа непересекающихся множеств и во что переходят эти множества при $\delta \rightarrow 0$?

Возвращаясь к предположению о существовании не более двух решений, сформулируем ответ, который нам *хотелось бы* получить.

Ответ 1. «Всюду, кроме, может быть, изолированных точек, не представляющих физического интереса, образ шара $B(\sigma, \delta)$ содержится в одном или двух (но не более двух) непересекающихся шарах. Причем при $\delta \rightarrow 0$ диаметры этих шаров стремятся к нулю, а расстояние между ними остается конечным и в каждом шаре имеется по крайней мере одна точка решения».

Только такой ответ был бы вполне удовлетворительным для физика, который тогда мог бы по любому заданному сечению σ находить одну или две (действительно «разные») унитарные амплитуды $F_{1,2}$, такие, что разность $|F_{1,2}|^2 - \sigma$ сколь угодно мала. Мы утверждаем, что, поскольку проблема единственности рассматривается в одних пространствах в глобальном смысле, а в других — в локальном, положение, высказанное в «ответе 1», к сожалению, ничем не подтверждается.

Чтобы доказать это, предположим, что вблизи точки бифуркации в пространстве $\mathcal{E}_D$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, заданных на интервале $[-1, +1]$, могут существовать три разных решения. Следовательно, существуют три разные унитарные амплитуды $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F_3(x)$ с одним и тем же квадратом модуля $\sigma(x)$, принадлежащим пространству функций, непрерывных на отрезке $[-1, +1]$:

$$\sigma(x) = |F_1(x)|^2 = |F_2(x)|^2 = |F_3(x)|^2, \quad (10.5.1)$$

$$F_j(x) = \sum_0^{\infty} (2l+1) (\exp[2i\delta_l^j] - 1) P_l(x), \quad j = 1, 2, 3. \quad (10.5.2)$$

Введем в пространствах $\mathcal{E}_D$ и $\mathcal{E}_D$ одну и ту же норму

$$\|f\| = \sup_{x \in [-1, +1]} |f(x)|. \quad (10.5.3)$$

Пусть теперь унитарная амплитуда $F_0(x)$ будет подлинно целой функцией порядка ρ типа τ :

$$F_0(x) = \sum_0^{\infty} (2l+1) (\exp[2i\delta_l^0] - 1) P_l(x). \quad (10.5.4)$$

Условия дифференцируемости позволяют получить при $j = 0, 1, 2, 3$ неравенство

$$|\delta_l^j| < c \left(l + \frac{1}{2}\right)^{-5/2} \sup_{x \in [-1, +1]} [|F_j(x)|, |F_j'(x)|, |F_j''(x)|], \quad (10.5.5)$$

где c — числовой множитель. Пусть ε — положительная величина, меньшая чем

$$\frac{1}{2} \inf_{i \neq j=1, 2, 3} \|F_i - F_j\|.$$

Из равенства (10.5.5) следует, что существует набор чисел N_j ($j = 0, 1, 2, 3$), таких, что

$$\left\| F_j - \sum_0^{N_j} (2l+1) \exp[2i\delta_l^j] - 1) P_l \right\| < \frac{1}{2} \varepsilon, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (10.5.6)$$

Введем теперь при $j = 1, 2, 3$ функции

$$F_j^{\varepsilon}(x) = \sum_0^{N_j} (2l+1) (\exp[2i\delta_l^j] - 1) P_l(x) + \\ + \sum_{l=\sup(N_j, N_0)}^{\infty} (2l+1) (\exp[2i\delta_l^0] - 1) P_l(x). \quad (10.5.7)$$

Функция $F_j^{\varepsilon}(x)$ отличается от амплитуды F_0 полиномом конечной степени, и, следовательно, она тоже является подлинно целой функцией порядка ρ типа τ . Кроме того, из неравенства (10.5.6) следует, что

$$\|F_j^{\varepsilon} - F_j\| < \varepsilon. \quad (10.5.8)$$

Тогда из соотношений (10.5.1) и (10.5.8) получаем неравенство

$$\| |F_j^{\varepsilon}|^2 - \sigma \| < \varepsilon^2 + 2\varepsilon \|F_j\|. \quad (10.5.9)$$

Каково бы ни было положительное число δ , можно, очевидно, найти положительное число $\varepsilon(\delta)$, такое, что

$$\varepsilon^2(\delta) + 2\varepsilon(\delta) \sup_{j=1, 2, 3} \|F_j\| = \delta. \quad (10.5.10)$$

Следовательно, каково бы ни было сколь угодно малое положительное число δ , образ шара $B(\sigma, \delta)$ содержит по крайней мере три целые функции $F_1^{\varepsilon}, F_2^{\varepsilon}, F_3^{\varepsilon}$ порядка ρ типа τ , «действительно

разные» в том смысле, что расстояние между ними не обращается в нуль при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\|F_i - F_j\| - 2\varepsilon \leq \|F_i^\varepsilon - F_j^\varepsilon\| \leq \|F_i - F_j\| + 2\varepsilon$$

$$(j = 1, 2, 3). \quad (10.5.11)$$

Отсюда следует, что выводы о глобальной единственности решения, сделанные лишь для одного специального класса функций, вообще говоря, не представляют физического интереса. В частности, это относится и к теореме о существовании не более двух решений, доказанной в классе функций, аналитических внутри эллипса, или в классе функций, непрерывных на отрезке $[-1, +1]$, или в любом пространстве $\mathcal{C}$, коль скоро могут существовать более двух решений в пространстве $\mathcal{C}'$, в котором пространство $\mathcal{C}$ при определенной норме и при x , изменяющемся лишь на интервале $[-1, +1]$, является плотным! Таким образом, нам нужно посмотреть, как следует дополнить теорему о глобальной единственности, чтобы она давала ответ, подобный ответу 1. Возможно несколько вариантов.

1. Единственность + устойчивость. Предположим, что мы можем доказать следующее:

а) существует не более N разных решений, что соответствует N отображениям шара $B(\sigma_0, \delta)$, принадлежащего некоторому нормированному пространству $\mathcal{E}'$, в нормированное пространство $\mathcal{E}'$;

б) существует плотный в пространстве $\mathcal{E}'$ класс $\mathcal{C}$, образ которого $\mathcal{E}$ принадлежит пространству $\mathcal{E}'$;

в) для отображений $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ справедливо предположение о существовании не более двух решений;

г) отображения $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ непрерывны при нормах $\|\cdot\|_{\mathcal{E}'}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$.

Тогда для существования и устойчивости решений необходимо, чтобы выполнялось условие $N \leq 2$.

Доказательство. Согласно утверждению «а», существует не более N унитарных амплитуд $F_N(x)$, соответствующих сечению $\sigma(x)$. В силу утверждения «б» для заданного шара $B(\sigma, \delta)$ подобно тому, как это было сделано выше, можно построить N функций F_j^ε , принадлежащих пространству $\mathcal{C}$ и соответствующих N функциям σ_j , принадлежащим пространству $\mathcal{E}$ и шару $B(\sigma, \delta)$. Как следует из утверждений «в» и «г», функции F_j^ε могут быть расположены в пространстве $\mathcal{C}$ внутри не более чем двух шаров, диаметры которых стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Это противоречит утверждению «а», если только не выполняется условие $N \leq 2$.

Следовательно, для физиков было бы действительно интересно доказать в некотором классе функций единственность (или суще-

ствование не более двух решений) *наряду с устойчивостью* решения.

2. Единственность + «S-устойчивость». Предположим снова, что верны утверждения «а» — «в», а утверждение «г» заменим следующим утверждением:

д) пусть M_1 и M_2 — два отображения $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$; назовем эти отображения *S-устойчивыми* (от слова shift — сдвиг) при заданных нормах в пространствах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}$, если для любых двух унитарных амплитуд F_1^e и F_2^e , таких, что $\|\sigma_1^e - \sigma_2^e\| < \delta$ при достаточно малом δ , в пространстве $\mathcal{E}$ существуют две унитарные амплитуды $\tilde{F}_1^e$ и $\tilde{F}_2^e$, такие, что

$$\begin{aligned} |\tilde{F}_1^e|^2 &= |\tilde{F}_2^e|^2, \\ \|F_1^e - \tilde{F}_1^e\| &< \varepsilon, \quad \|F_2^e - \tilde{F}_2^e\| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (10.5.12)$$

Очевидно, что если выполняется условие «д», то в пространстве $\mathcal{E}$ по N функциям F_j^e можно построить N функций $\tilde{F}_j^e$, соответствующих одному и тому же «сечению σ ». Это противоречит предположению «а», если только не выполняется условие $N \leq 2$. Кроме того, ясно, что условие «д» выполняется, если решение устойчиво в обычном смысле. Интерес же к *S-устойчивости* объясняется тем, что имеются эвристические соображения в пользу ее существования даже в узком множестве полиномов [379], так что можно надеяться найти класс функций, в котором *S-устойчивость* может быть доказана.

§ 6. Обобщения

Изложенные выше исследования по проблеме фазового анализа в случае упругого рассеяния бесспиновых частиц ниже порога неупругих процессов были обобщены по трем направлениям.

А. Область неупругого рассеяния

В случае неупругого рассеяния соотношение унитарности между мнимой частью и модулем парциальной амплитуды рассеяния заменяют более слабым условием: либо ограничивают амплитуду F_l внутренностью круга Арганда, либо вводят свободный «параметр неупругости»:

$$|F_l|^2 - \operatorname{Im} F_l + I_l = 0, \quad (10.6.1)$$

где

$$I_l = \frac{1}{4} (1 - |\eta_l|^2) \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \quad (10.6.2)$$

причем для величин I_l справедлива оптическая теорема

$$\frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) I_l = \frac{q^2}{4\pi} (\sigma_{\text{полн}} - \sigma_{\text{упр}}). \quad (10.6.3)$$

Таким образом, возникает континуальная неоднозначность восстановления амплитуды по сечению. Чтобы выяснить, откуда берется эта неоднозначность, воспользуемся обозначениями § 4 и напомним вместо равенства (10.4.9)

$$S(A, I) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) S_l P_l(z), \quad (10.6.4)$$

где

$$S_l = A_l - A_l^2 - D_l^2 - I_l. \quad (10.6.5)$$

Пусть теперь A^0 и I^0 — первый набор (соответствующий первой аппроксимации), для которого $S(A^0, I^0) = 0$, и пусть $\{p_j^{(0)}\}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) — нули функции

$$R(A^0; z) = \sigma(z) - [A^0(z)]^2. \quad (10.6.6)$$

Поскольку дисперсивная часть амплитуды рассеяния $R^{1/2}(A^0; z)$ является аналитической функцией внутри эллипса $\varepsilon(\xi_0)$, эти нули должны быть нулями четного порядка. Для простоты предположим, что их порядок равен двум. Выберем величину ξ_0 так, чтобы граница эллипса $\partial\varepsilon(\xi_0)$ не содержала нулей. Тогда, как мы знаем,

$$R(A^0; p_j^{(0)}) = R'(A^0; p_j^{(0)}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (10.6.7)$$

Мы хотим, исходя из A^0 , I^0 и $p_j^{(0)}$, найти близкое решение A , I , p_j уравнений

$$S(A, I) = P, \quad (10.6.8)$$

$$R(A, p_j) = R'(A, p_j) = 0,$$

где все величины $\|A - A^0\|$, $\|I - I^0\|$ и $|p_j - p_j^{(0)}|$ малы. Это типичная задача нахождения неявной функции. Аткинсон и др. [10] исследовали такую задачу и предложили итерационный метод решения уравнений (10.6.8). Они применили свой метод в случае упругого $\alpha - \alpha$ -рассеяния при 35 МэВ. Полученные ими результаты для двух волн представлены на рис. 8, где показано лишь небольшое число точек. Следует иметь в виду, что это только отдельные точки из континуума, соответствующие определенному частному выбору значений δI_l . Сразу же видно, что неоднозначность решения велика: для S -волны — примерно треть круга, а для волн с более высокими значениями l несколько меньше. Другие исследования проводились теми же авторами

[11, 13, 16, 17], а также Буркхардтом [64], Бартом и др. [26, 27], Питариненом [339]. По вопросам единственности восстановления

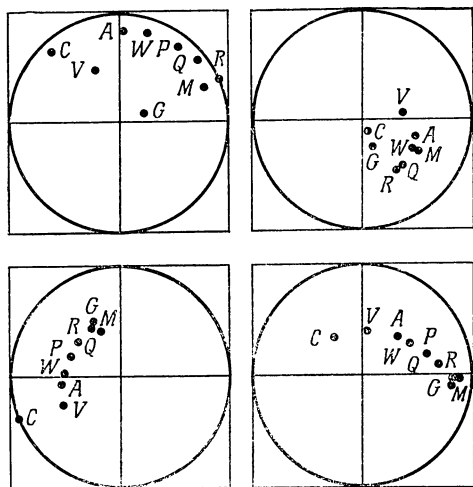


Рис. 8.

амплитуды можно рекомендовать хорошие обзорные работы Буркхардта [65] и Буркхардта и Мартена [66]¹⁾.

Б. Волны со спином

Случай частиц, обладающих спином и изоспином (спин 0 — спин $\frac{1}{2}$), исследовался как в области упругого, так и в области неупругого рассеяния [17] (см. также [8, 31]). При энергиях, не превышающих порог неупругого рассеяния, задача восстановления амплитуды рассеяния по полному набору экспериментальных данных (дифференциальные сечения рассеяния, поляризации и параметры Вольфенштейна при всех зарядовых состояниях) оказывается переопределенной. В благоприятном случае для определения всех амплитуд рассеяния, а следовательно, и всех остальных наблюдаемых величин достаточно подходящего подмножества независимых экспериментальных данных. При энергиях же, лежащих выше порога неупругих каналов, несмотря на осложнения из-за спина и изоспина, вообще говоря, имеется такая же континуальная неоднозначность амплитуды, как и в случае скалярных частиц. Таким образом, амплитуды рассеяния или фазовые сдвиги в общем случае не могут быть однозначно определены просто по экспериментальным данным при фиксированной энергии.

¹⁾ См. также [497].— *Прим. ред.*

В. Несферический случай

Соотношение унитарности (10.1.5) справедливо в отсутствие сферической симметрии (мы по-прежнему предполагаем инвариантность относительно обращения времени). Таким образом,

$$F(1, 2) - F^*(1, 2) = \frac{i}{2\pi} \int F(1, 3) F^*(2, 3) d\Omega_3. \quad (10.6.9)$$

Легко видеть, что сохраняется тривиальная неоднозначность, связанная с заменой

$$F(1, 2) \rightarrow -F^*(1, 2). \quad (10.6.10)$$

Чтобы исследовать вопрос о существовании и единственности решения, введем следующие величины:

$$H(1, 2, 3) = \frac{|F(1, 3)| |F(2, 3)|}{4\pi |F(1, 2)|}, \quad (10.6.11)$$

$$Q(1, 2) = \int_S H(1, 2, 3) d\Omega(3), \quad (10.6.12)$$

$$M = \sup_{1, 2} Q(1, 2). \quad (10.6.13)$$

Задача фазового анализа состоит в построении амплитуды $F(1, 2)$ по ее модулю $|F(1, 2)|$. Таким образом, H , Q и M можно считать известными величинами. Условие $M < 1$ представляет собой очень сильное ограничение, но оно весьма упрощает исследование задачи, подобно тому как это было в сферически-симметричном случае.

Если это условие выполняется, то будет сходиться последовательность итераций

$$F^{(0)}(1, 2) = |F(1, 2)|,$$

$$\text{Im } F^{(n+1)}(1, 2) = \frac{1}{4\pi} \int_S F^{(n)}(1, 3) F^{(n)*}(2, 3) d\Omega(3),$$

$$F^{(n+1)}(1, 2) = \{|F(1, 2)|^2 - [\text{Im } F^{(n+1)}(1, 2)]^2\}^{1/2} + i \text{Im } F^{(n+1)}(1, 2), \quad (10.6.14)$$

где для устранения тривиальной неоднозначности фиксировано определение квадратного корня. Сходимость этого алгоритма можно показать на основании теорем о неподвижной точке. Достаточным условием сходимости является ограничение $M < 0,6248$ [406]. Этим неравенством гарантируется существование и единственность решения, но сильно ограничивается применимость последнего к случаям, представляющим интерес для физиков.

Замечания исторического характера. Некоторые подробности, касающиеся истории развития проблемы фазового анализа, вместе с соответствующими литературными ссылками мы давали вступу по ходу изложения, а здесь нам хотелось бы сделать лишь несколько дополнительных замечаний. Историю данной проблемы можно разделить на три этапа. Со времени первого фазового анализа до 1946 г. проблемой не занимались совсем. За период с 1946 по 1967 г. появилось всего лишь несколько работ, содержащих некоторые интересные результаты, однако эти работы не привлекали особого внимания. Затем с 1956 г. Мартен в своих нескольких лекциях пытался привлечь внимание физиков к этой проблеме. В значительной степени благодаря его усилиям за период с декабря 1968 г. до 1974 г. по проблеме фазового анализа появилось 35 статей. Однако состояние проблемы на сегодняшний день нельзя признать удовлетворительным. Хотя единственность решения была доказана для широких классов функций, до сих пор не известно, далеко ли до решения проблемы в общем случае или нет. Что касается глобальных условий существования, то в физически интересных случаях они пока не известны.

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ
ПО АМПЛИТУДЕ РАССЕЯНИЯ
ПРИ ФИКСИРОВАННОЙ ЭНЕРГИИ
(ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ)**

§ 1. Введение

В следующих трех главах мы будем рассматривать только случай сферической симметрии. Предположим, что амплитуда рассеяния $F(k, \cos \theta)$ уже построена по дифференциальным сечениям. Следующий шаг в изучении взаимодействия — введение математической модели, в которой взаимодействие было бы неким параметром, и вычисление этого параметра по амплитуде рассеяния $F(k, \cos \theta)$. Такой моделью может служить уравнение Шредингера со сферически-симметричным потенциалом $V(r)$ в случае двух сталкивающихся частиц с энергией ниже первого порога неупругого рассеяния и в области нерелятивистских энергий:

$$\nabla^2 \Psi + [k^2 - V(r)] \Psi = 0, \quad (11.1.1)$$

где r — расстояние между двумя частицами, а k^2 и $V(r)$ — величины, пропорциональные: первая — полной, а вторая — потенциальной энергии:

$$k^2 = 2mE/\hbar^2, \quad V(r) = 2mV(r)/\hbar^2,$$

причем m — приведенная масса. Хорошо известное разложение по парциальным волнам приводит к уравнениям для парциальных волн

$$\frac{d^2 \varphi_l}{dr^2} + [k^2 - V(r) - l(l+1)r^{-2}] \varphi_l = 0, \quad (11.1.2)$$

где φ_l — решение, которое при $r \rightarrow 0$ ведет себя следующим образом:

$$\varphi_l(r) \sim u_l(r) = \left(\frac{\pi k r}{2} \right)^{1/2} J_{l+1/2}(kr) \sim \frac{\pi^{1/2} (l/2 k r)^{l+1}}{\Gamma(l+3/2)}. \quad (11.1.3)$$

Предположим, что $V(r)$ — потенциал некоего класса $\mathcal{P}$, для которого φ_l и $d\varphi_l/dr$ существуют и имеют следующую асимптоти-

ку при $r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\varphi_l(r) &= A_l \sin \left(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l \right) + o(1), \\ \frac{d\varphi_l(r)}{dr} &= kA_l \cos \left(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l \right) + o(1).\end{aligned}\quad (11.1.4)$$

Такая математическая модель пригодна для описания упругого рассеяния двух частиц. Амплитуда рассеяния связана с фазовыми сдвигами формулой

$$F_l^{\pm}(k, \cos \theta) = k^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta). \quad (11.1.5)$$

Следовательно, задание функции $F(k, \cos \theta)$ эквивалентно заданию фазовых сдвигов при всех l . Предположим теперь, что известна амплитуда $F(k, \cos \theta)$ при определенной энергии E_0 . Величина k_0^{-1} , соответствующая энергии E_0 , будет служить нам единицей длины. Тогда формулы (11.1.2) — (11.1.4) примут простой вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + [1 - V(r) - l(l+1)r^{-2}] \varphi = 0, \quad (11.1.6)$$

$$u_l(r) = \left(\frac{\pi r}{2} \right)^{1/2} J_{l+1/2}(r), \quad (11.1.7)$$

$$\left. \begin{aligned}\varphi_l &= A_l \sin \left(r - l \frac{\pi}{2} + \delta_l \right) + o(1) \\ \frac{d\varphi_l}{dr} &= A_l \cos \left(r - l \frac{\pi}{2} + \delta_l \right) + o(1)\end{aligned} \right\}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (11.1.8)$$

По этим формулам мы должны вычислить $V(r)$, исходя из последовательности $\{\delta_l\}$. В ходе решения такой задачи, как и в большинстве обратных задач, интерес исследователей переключался с одних вопросов на другие. В первых исследованиях авторы стремились к тому, чтобы методом «проб и ошибок» найти приближенные решения задачи. Их анализ и разработанные позже точные методы показали, что такие решения не единственны, и в связи с этим встали новые вопросы. Перечислим шесть главных пунктов, составляющих основу обратной задачи при фиксированной энергии:

А. Существование. Дана последовательность $\{\delta_l\}$. Существует ли в классе $\mathcal{P}$ такой потенциал V , который давал бы при решении уравнения Шредингера фазовые сдвиги $\{\delta_l\}$? Такой потенциал называется «решением» обратной задачи.

Б. Единственность. Пусть задан класс функций $\mathcal{W}$ ($\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}$), содержащий решение V . Является ли V единственным решением в классе $\mathcal{W}$?

Поскольку ответ на вопрос А, вообще говоря, утвердителен, а на вопрос В отрицателен, возникают следующие вопросы.

В. Возможность построения. Каков способ нахождения некоторых решений задачи?

Г. Возможность полного построения в классе $\mathcal{W}$. Пусть $\{v\}$ — множество всех потенциалов класса $\mathcal{W}$, которые соответствуют последовательности $\{\delta_l\}$ (при данной энергии). Как построить множество $\{v\}$? Далее мы называем два потенциала «эквивалентными», если они дают одинаковые амплитуды рассеяния.

Д. Степень приближения. Какова разница между всеми эквивалентными потенциалами в классе $\mathcal{W}$? Если $\mathcal{W}$ — метрическое пространство, то мерой их различия является, очевидно, расстояние между элементами множества $\{v\}$. Если эта величина мала, то фазовые сдвиги дают физический потенциал в хорошем приближении.

Е. Устойчивость. Как изменяется множество фазово-эквивалентных потенциалов при малых возмущениях амплитуды рассеяния?

Ясно, что вопросы А—Е должны быть решены, прежде чем приступить к численному исследованию задачи, и что их решение в какой-то мере проясняет все математические стороны задачи, интересующие физика. *Но физику этого мало.* Если имеется бесконечное число решений, то ему нужно знать, какая дополнительная информация требуется для выбора лишь одного из этих решений и какие эксперименты могут дать эту дополнительную информацию. Иными словами, он желает придать однозначности какой-то *физический смысл*. Такая цель почти достигнута в имеющихся решениях первой обратной задачи (при фиксированном l), где неоднозначность соответствует возможному существованию связанных состояний. Хотелось бы здесь получить аналогичный результат. Как мы увидим, его еще нет. Другой интересный физический вопрос: имеются ли какие-либо физические свойства, которые были бы общими для всех «решений» обратной задачи (подобно числу дырок в барабане в соответствующей обратной задаче)?

Обратная задача при фиксированной энергии имеет историю развития, подобную другим обратным задачам. В ранних работах делались попытки решить вопросы А и В методом «проб и ошибок» или приближенными методами. Общие методы начали появляться в 1959 г., но они оставались формальными до 1966 г., когда их систематическое развитие дало определенные ответы на вопросы А—В. Позднее были найдены решения проблем Г—Е или сделаны попытки решить их, но предмет исследования еще не исчерпан.

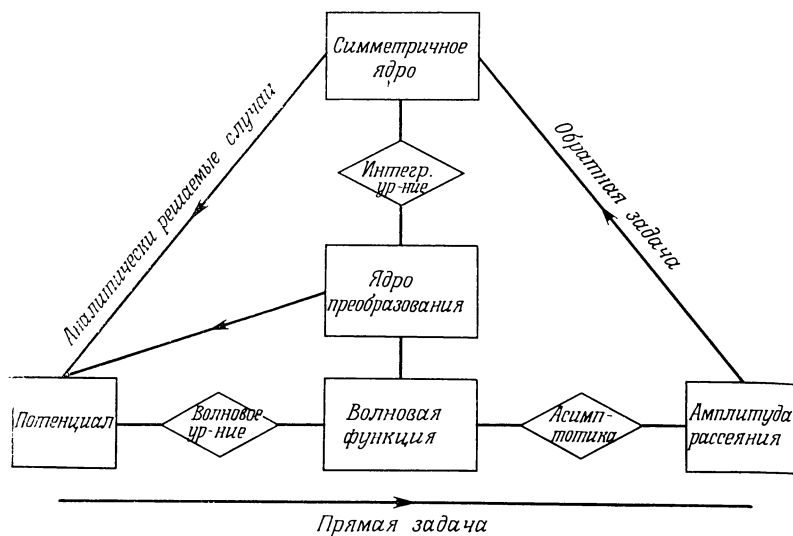


Рис. 9.

Ряд методов в обратной задаче при фиксированной энергии был построен по аналогии с обратной задачей при фиксированном угловом моменте. Другие были найдены независимо, и было бы интересно посмотреть, применимы ли они в других обратных задачах.

В данной главе мы вводим простым способом ряд уравнений, которые, как оказывается, могут быть использованы во многих обратных задачах.

Чтобы полностью усвоить всю методику, рекомендуем читателю на каждом этапе обращаться к диаграмме (рис. 9), демонстрирующей связь между всеми элементами решения.

§ 2. Ядро преобразования

Пусть D_r^V — дифференциальный оператор

$$D_r^V = r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + 1 - V(r) \right), \quad (11.2.1)$$

где $V \in \mathcal{F}$, и пусть $\varphi_l^V(r)$ — решение уравнения

$$D_r^V \varphi_l^V(r) = l(l+1) \varphi_l^V(r), \quad (11.2.2)$$

такое, что

$$\frac{\varphi_l^V(r)}{u_l(r)} \rightarrow 1 \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (11.2.3)$$

Ясно, что уравнение (11.2.2) эквивалентно уравнению (11.1.6). Введем таким же образом оператор $D_r^{V_0}(r)$ и функцию $\phi_l^{V_0}(r)$, где V_0 — некий «хорошо известный» потенциал, для которого мы знаем решения уравнения (11.2.2). Мы определяем «ядро преобразования от V_0 к V » как непрерывную, не зависящую от l функцию $K_{V_0}^V(r, r')$, которая преобразует $\phi_l^{V_0}(r)$ в $\phi_l^V(r)$ при любых l и r следующим образом:

$$\phi_l^V(r) = \phi_l^{V_0}(r) - \int_0^r K_{V_0}^V(r, \rho) \phi_l^{V_0}(\rho) \rho^{-2} d\rho. \quad (11.2.4)$$

Тогда, зная функцию $\phi_l^{V_0}$ и ядро преобразования $K_{V_0}^V$, получаем полное решение уравнения Шредингера. Оператор, определяемый ядром преобразования в формуле (11.2.4), относится к так называемым «операторам обобщенного сдвига». Такие операторы весьма полно исследованы в математике, но мы обойдемся без их общей теории.

Докажем теперь, что дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения в частных производных

$$(D_r^V - D_r^{V_0}) K_{V_0}^V(r, r') = 0 \quad (11.2.5)$$

с граничными условиями

$$K_{V_0}^V(r, 0) = 0, \quad (11.2.6a)$$

$$K_{V_0}^V(r, r) = -\frac{1}{2} \int_0^r \rho [V(\rho) - V_0(\rho)] d\rho \quad (11.2.7)$$

действительно является «ядром преобразования от V_0 к V ». Позже нам понадобится продолжить $K_{V_0}^V(r, r')$ в область $r' \geq r$. Это будет сделано путем наложения дополнительного граничного условия

$$K_{V_0}^V(0, r') = 0. \quad (11.2.6b)$$

Доказательство. Из уравнения (11.2.2) и соотношения (11.2.4) сразу получаем

$$\begin{aligned} D_r^V \phi_l^V(r) &= D_r^{V_0} \phi_l^{V_0}(r) - r^2 [V(r) - V_0(r)] \phi_l^{V_0}(r) - \\ &- r^2 \frac{d}{dr} [K_{V_0}^V(r, r) r^{-2} \phi_l^{V_0}(r)] - \phi_l^{V_0}(r) \left[\frac{\partial}{\partial r} K_{V_0}^V(r, \rho) \right]_{\rho=r} - \\ &- \int_0^r D_r^V K_{V_0}^V(r, \rho) \phi_l^{V_0}(\rho) \rho^{-2} d\rho. \end{aligned} \quad (11.2.8)$$

Преобразовав последний член выражения (11.2.8) с учетом равенства (11.2.5), интегрируем дважды по частям и, учитывая равенства (11.2.6) и

(11.2.7), убеждаемся в справедливости уравнения (11.2.2). Условие (11.2.3) сразу следует из соотношения (11.2.4), граничного условия для функции $\phi_l^{V_0}(r)$ и ограниченности функций $K_{V_0}^V(r, \rho)$. Так как решение уравнения (11.2.2) с граничным условием (11.2.3) единственно, функция $K_{V_0}^V$ является ядром преобразования от V_0 к V .

Ясно, что уравнение в частных производных (11.2.5) исследовать не легче, чем уравнение Шредингера, поскольку оно тоже содержит V . Чтобы идти дальше, нам нужно ввести еще одну функцию — «симметричное ядро».

§ 3. Симметричное ядро и интегральное уравнение

Пусть $f_{V_0}^V(r, r')$ при любых $r, r' \geq 0$ есть трижды непрерывно дифференцируемое решение уравнения в частных производных

$$(D_r^{V_0} - D_{r'}^{V_0}) f_{V_0}^V(r, r') = 0 \quad (11.3.1)$$

с граничным условием

$$f_{V_0}^V(r, 0) = f_{V_0}^V(0, r') = 0. \quad (11.3.2)$$

Каким образом $f_{V_0}^V$ зависит от V , вскоре станет ясно. Введем по аналогии с уравнением Гельфанда — Левитана интегральное уравнение

$$K_{V_0}^V(r, r') = f_{V_0}^V(r, r') - \int_0^r K_{V_0}^V(r, \rho) f_{V_0}^V(\rho, r') \rho^{-2} d\rho \quad (11.3.3)$$

и докажем, что если решение уравнения (11.3.3) существует и единственно, то оно является ядром преобразования от V_0 к V (величина V_0 введена в формуле (11.3.1), а разность $V - V_0$ определяется из соотношения (11.2.7) через $K_{V_0}^V$).

Доказательство. Во-первых, заметим, что соотношение (11.3.3) при любом фиксированном r представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма, которое удобнее записать следующим образом:

$$k_{V_0}^V(r, r') = \phi_{V_0}^V(r, r') - \int_0^r k_{V_0}^V(r, \rho) \phi_{V_0}^V(\rho, r') d\rho, \quad (11.3.4)$$

где k и ϕ выражаются через K и f :

$$k_{V_0}^V(r, r') = (rr')^{-1} K_{V_0}^V(r, r'), \quad (11.3.5)$$

$$\phi_{V_0}^V(r, r') = (rr')^{-1} f_{V_0}^V(r, r'). \quad (11.3.6)$$

Так как функция $f_{V_0}^V(r, r')$ трижды непрерывно дифференцируема, из соотношений (11.3.2) и (11.3.6) следует, что функция $\phi_{V_0}^V(r, r')$ дважды непрерывно дифференцируема (трижды при $rr' \neq 0$). Следовательно, ядро уравнения (11.3.4) непрерывно и справедлива альтернатива Фредгольма:

либо решение уравнения (11.3.4) существует и единственно, либо однородное уравнение

$$\xi_{V_0}^V(r, r') = - \int_0^r \xi_{V_0}^V(r, \rho) \phi_{V_0}^V(\rho, r') d\rho \quad (11.3.7)$$

имеет нетривиальное решение. Пусть Ω — множество значений r , при которых уравнение (11.3.7) имеет нетривиальное решение. Множество Ω не может покрывать всю полуось $r \geq 0$; в самом деле, поскольку функция $\phi_{V_0}^V(r, r')$ непрерывна, норма ядра в уравнении (11.3.4) стремится к нулю при $r \rightarrow 0$, так что существует такое значение r , до которого ряд Неймана сходится. При любом r , не принадлежащем множеству Ω , можно построить решение уравнения (11.3.4) методом детерминантов Фредгольма:

$$\mathbf{K}_{V_0}^V(r, r') = [\mathcal{Z}(r)]^{-1} \mathcal{Z}_r(r, r'), \quad (11.3.8)$$

где

$$\mathcal{Z}(r) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (m!) \int_0^r \dots \int_0^r \Phi \left(\begin{matrix} r_1, r_2, \dots, r_m \\ r_1, r_2, \dots, r_m \end{matrix} \right) dr_1 \dots dr_m, \quad (11.3.9)$$

$$\mathcal{Z}_r(r, r') = - \sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{-1} \int_0^r \dots \int_0^r \Phi \left(\begin{matrix} r, r_1, r_2, \dots, r_m \\ r', r_1, r_2, \dots, r_m \end{matrix} \right) dr_1 \dots dr_m, \quad (11.3.10)$$

причем $\Phi(r, r')$ — член с $m = 0$, который сводится к $\phi(r, r')$.

Функции Φ представляют собой хорошо известные детерминанты Фредгольма:

$$\Phi \left(\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_m \\ y_1, y_2, \dots, y_m \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} \phi(x_1, y_1) & \phi(x_1, y_2) & \dots & \phi(x_1, y_m) \\ \phi(x_2, y_1) & \phi(x_2, y_2) & \dots & \phi(x_2, y_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(x_m, y_1) & \phi(x_m, y_2) & \dots & \phi(x_m, y_m) \end{vmatrix}. \quad (11.3.11)$$

Множество Ω представляет собой множество нулей функции $\mathcal{Z}(r)$. При $r \notin \Omega$ непрерывность частных производных первого и второго порядка от функции $\mathbf{K}_{V_0}^V(r, r')$ легко показать на основании равенства (11.3.8), пользуясь теоремой Адамара для ограниченных рядов, точно так же, как обычно поступают при доказательстве сходимости выражений (11.3.9) и (11.3.10) [согласно этой теореме величина $|\Phi|$ в формуле (11.3.11) ограничена выражением $(\sup |\phi|)^m m^{1/2m}$]. Следовательно, при $r \notin \Omega$ функция $\mathbf{K}_{V_0}^V(r, r')$ дважды непрерывно дифференцируема и уравнение (11.3.7) имеет только нулевое решение.

Теперь при $r \in \Omega$ воспользуемся уравнением (11.3.3), чтобы вычислить функцию

$$\chi_{V_0}^V(r, r') = (rr')^{-1} (D_r^V - D_{r'}^{V_0}) \mathbf{K}_{V_0}^V(r, r'). \quad (11.3.12)$$

Получаем

$$\begin{aligned} D_r^V \mathbf{K}_{V_0}^V(r, r') &= D_r^{V_0} f_{V_0}^V(r, r') - \mathbf{K}_{V_0}^V(r, r) \frac{\partial}{\partial r} f_{V_0}^V(r, r') - \\ &- \int_0^r [D_r^V \mathbf{K}_{V_0}^V(r, \rho)] f_{V_0}^V(\rho, r') \rho^{-2} d\rho - \end{aligned}$$

$$-f_{V_0}^V(r, r') \left\{ r^2 (V(r) - V_0(r)) + r^2 \frac{d}{dr} (r^{-2} K_{V_0}^V(r, r')) + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial r} K_{V_0}^V(r, \rho) \right]_{\rho=r}^0 \right\}, \quad (11.3.13)$$

$$D_{r'}^V K_{V_0}^V(r, r') = D_{r'}^V f_{V_0}^V(r, r') - K_{V_0}^V(r, r) \frac{\partial}{\partial r} f(r, r') - \\ - \int_0^r \left[D_0(\rho) K_{V_0}^V(r, \rho) \right] f_{V_0}^V(\rho, r') \rho^{-2} d\rho - \\ - f_{V_0}^V(r, r') \left[\frac{\partial}{\partial \rho} K_{V_0}^V(r, \rho) \right]_{\rho=r}, \quad (11.3.14)$$

где мы дважды проинтегрировали по частям и использовали уравнение (11.3.1), Вычитая соотношение (11.3.14) из выражения (11.3.13) и *выражая* потенциал $V(r)$ через $K_{V_0}^V(r, r')$ на основании равенства (11.2.7), получаем, что функция $\chi_{V_0}^V(r, r')$ является решением уравнения (11.3.7) и, следовательно, тождественно равна нулю. Поэтому функция $K_{V_0}^V(r, r')$ действительно является решением уравнения (11.2.5) с граничными условиями (11.2.6) и (11.2.7).

Физический смысл множества Ω , в котором не существует функции $K_{V_0}^V(r, r')$ как решения уравнения (11.3.3), нетрудно выяснить. Из выражений (11.3.9) и (11.3.10) следует, что

$$\mathcal{L}_r(r, r') = -\mathcal{L}'(r), \quad (11.3.15)$$

а из равенства (11.2.7) следует, что

$$r \mathcal{L}_r(r, r) = -\frac{1}{2} \mathcal{L}(r) \int_0^r \rho [V(\rho) - V_0(\rho)] d\rho. \quad (11.3.16)$$

Из уравнения (11.3.16) видно, что разность $V(r) - V_0(r)$ не интегрируема при $r \in \Omega$. Из соотношений (11.3.15) и (11.3.16) следует, что если функция $\mathcal{L}(r)$ имеет изолированные нули, то функция $V(r)$ имеет полюса второго порядка в этих нулях. В любом случае точка $r \in \Omega$ соответствует неинтегрируемой особенности разности $rV(r) - rV_0(r)$.

§ 4. Общая схема решения задачи

Изложенный выше математический аппарат может быть использован в соответствии с несколькими направлениями общей схемы, представленной на рис. 9. Остановимся вкратце на этих направлениях.

1. Построение примеров. Заметим, что любое произведение вида $\varphi_{\mu^0}^V(r) \varphi_{\mu^0}^V(r')$ удовлетворяет уравнению (11.3.1). Кроме

того, поскольку $V_0 \in \mathcal{F}$, оно удовлетворяет граничному условию (11.3.2) при $\operatorname{Re} \mu > -1/2$.

Пусть $\mathcal{F}$ — множество кривых в полуплоскости $\operatorname{Re} \mu > -1/2$, симметричных относительно действительной оси, а $\rho'(\mu)$ — производная кусочно-дифференцируемой действительной функции, определенной на $\mathcal{F}$ и принимающей одинаковые значения в точках, симметричных относительно действительной оси. Введем действительную функцию

$$f_{V_0}^V(r, r') = \int_{\mu \in \mathcal{F}} \varphi_{\mu}^{V_0}(r) \varphi_{\mu}^{V_0}(r') d\rho(\mu). \quad (11.4.1)$$

Мы предполагаем, что функция $\rho(\mu)$ удовлетворяет условиям, необходимым и достаточным для существования интеграла в выражении (11.4.1), а также его первых трех производных. Тогда функцию $f_{V_0}^V(r, r')$ можно взять в качестве исходной функции. Если нам известно аналитическое решение интегрального уравнения (11.3.3), то мы можем построить потенциал $V - V_0$, для которого уравнение Шредингера также решается аналитически. Так будет обстоять дело, когда функция $\rho(\mu)$ сводится к конечному набору δ -функций. В этом случае оказывается вырожденным ядро $f_{V_0}^V(r, r')$ уравнения (11.3.3) и его решение легко находится в виде отношения двух детерминантов.

Особенно прост случай с действительным μ :

$$f_{V_0}^V(r, r') = c_{\mu} \varphi_{\mu}^{V_0}(r) \varphi_{\mu}^{V_0}(r'). \quad (11.4.2)$$

Из уравнения (11.3.3) и соотношения (11.2.4) легко получить

$$K_{V_0}^V(r, r') = c_{\mu} \varphi_{\mu}^{V_0}(r) \varphi_{\mu}^{V_0}(r'), \quad (11.4.3)$$

$$\varphi_{\mu}^V(r) = \varphi_{\mu}^{V_0}(r) [1 + c_{\mu} L_{\mu\mu}^{V_0}(r)]^{-1}, \quad (11.4.4)$$

$$V(r) = V_0(r) - 2c_{\mu} r^{-1} \frac{d}{dr} \{r^{-1} [\varphi_{\mu}^{V_0}(r)]^2 (1 + c_{\mu} L_{\mu\mu}^{V_0}(r))^{-1}\},$$

где

$$L_{ll}^{V_0}(r) = \int_0^r \varphi_l^{V_0}(\rho) \varphi_l^{V_0}(\rho) \rho^{-2} d\rho, \quad (11.4.5)$$

причем

$$\varphi_l^V(r) = \varphi_l^{V_0}(r) - c_{\mu} \varphi_{\mu}^V(r) L_{\mu l}^V(r). \quad (11.4.6)$$

Введем более общие обозначения типа (11.1.8):

$$\begin{aligned} \varphi_l^V &\sim A_l^V \sin \left(r - l \frac{\pi}{2} + \delta_l^V \right), \\ \frac{d}{dr} \varphi_l^V(r) &\sim A_l^V \cos \left(r - l \frac{\pi}{2} + \delta_l^V \right). \end{aligned} \quad (11.4.7)$$

Из равенств (11.4.4) и (11.4.6) легко найти величины A_l^V и δ_l^V . В нашем специальном случае имеем

$$\begin{aligned} A_l^V e^{i\delta_l^V} &= A_l^{V_0} e^{i\delta_l^{V_0}} - L_{l\mu}^{V_0}(\infty) c_\mu A_\mu^V e^{i[\delta_\mu^V + (l-\mu)\pi/2]} A_\mu^V e^{i\delta_\mu^V} = \\ &= [1 + L_{\mu\mu}^{V_0}(\infty) c_\mu]^{-1} A_\mu^{V_0} e^{i\delta_\mu^{V_0}}. \end{aligned} \quad (11.4.8)$$

Пользуясь формулами (11.4.4) и (11.4.8), можно показать «нефизичность» множества Ω . При положительных c_μ оно комплексное. Если же величина c_μ отрицательна и меньше $-[L_{\mu\mu}^{V_0}(\infty)]^{-1}$, то существует такое значение $r = R$, при котором $L_{\mu\mu}^{V_0}(R) c_\mu = -1$. Как следует из формулы (11.4.4), при этом значении r потенциал $V(r) - V_0(r)$ имеет полюс второго порядка:

$$V(r) - V_0(r) \underset{r \rightarrow R}{\sim} 2(c_\mu)^2 r^{-4} |\varphi_\mu(V_0)|^4 [1 + c_\mu L_{\mu\mu}^{V_0}(r)]^{-2}. \quad (11.4.9)$$

Предположим теперь, что $V_0(r)$ — «хороший потенциал», «хороший» в том смысле, что $A_l^{V_0} \exp(i\delta_l^{V_0}) \rightarrow 1$ при $l \rightarrow \infty$, а $c_\mu L_{\mu\mu}^{V_0}(\infty) = -1$. Тогда, как следует из соотношения (11.4.8), величина A_l^V не ограничена. Кроме того, из равенства (11.4.4) следует, что потенциал $V(r)$ асимптотически ведет себя как $16 r^{-1} \sin(2r - 2\delta_\mu^{V_0})$ и, следовательно, не является «регулярным потенциалом». Интересно, что эта сингулярность столь отрицательно сказывается лишь на асимптотическом поведении амплитуды, но не сказывается на фазовых сдвигах и они остаются ограниченными.

2. Исследование обратной задачи. Если нам известно, как построить функцию $f_{V_0}^V(r, r')$ по набору фазовых сдвигов $\{\delta_l^V\}$, то мы сможем решить обратную задачу. Во-первых, нужно выбрать функцию $f_{V_0}^V(r, r')$ из класса функций, зависящих от набора параметров $\{c_\mu^V\}$, однозначно связанного с фазовыми сдвигами $\{\delta_l^V\}$. На этом основаны матричные методы, которые будут изложены в гл. 12. Во-вторых, следует показать, какой класс функций $f_{V_0}^V(r, r')$ соответствует заданному классу потенциалов. Оказывается, что функцию $f_{V_0}^V(r, r')$ можно представить в виде суммы двух функций: первой — зависящей от набора $\{c_l\}$, который в свою очередь определяется по фазовым сдвигам $\{\delta_l^V\}$, а второй — произвольно выбранной в определенном классе. На этом основан полный матричный метод, излагаемый в гл. 13. Кроме того, функцию $f_{V_0}^V(r, r')$ можно связать со спектром дифференциального оператора $D_{V_0}^V$. На этом основаны спектральные методы, излагаемые в гл. 13. Но указанный спектр не включает в себя физических (полученных)

значений l . Следовательно, функция $f_{V_0}^V(r, r')$ фактически связана не с фазовыми сдвигами $\{\delta_l\}$, а с некой интерполяцией фазовых сдвигов, которая должна быть выполнена отдельно.

В любой задаче, связанной с интерполяцией функции в комплексной плоскости l , удобнее обозначения, в которых основной переменной служит не l , а $l + 1/2$, для чего нужно произвести следующую замену:

$$\begin{aligned} u_l &\rightarrow u_{l+1/2}, & \Phi_{\lambda-1/2}^V &\rightarrow \Phi_\lambda^V, \\ \delta_{\lambda-1/2} &\rightarrow \delta(\lambda), & c_{\mu-1/2} &\rightarrow \gamma_\mu. \end{aligned} \quad (11.4.10)$$

Тогда, если

$$f_{V_0}^V(r, r') = \int_{\lambda \in \mathcal{F}} \Phi_\lambda^V(r) \Phi_\lambda^{V_0}(r') d\rho_{V_0}^V(\lambda), \quad (11.4.11)$$

то из соотношения (11.2.4) и уравнения (11.3.3) легко получить соответствующие разложения функций $K_{V_0}^V(r, r')$ и $\Phi_\mu^V(r)$:

$$K_{V_0}^V(r, r') = \int_{\lambda \in \mathcal{F}} \Phi_\lambda^V(r) \Phi_\lambda^{V_0}(r') d\rho_{V_0}^V(\lambda), \quad (11.4.12)$$

$$\Phi_\lambda^V(r) = \Phi_\lambda^{V_0}(r) - \int_{\mu \in \mathcal{F}} \Lambda_{\lambda\mu}^{V_0}(r) \Phi_\mu^V(r) d\rho_{V_0}^V(\mu), \quad (11.4.13)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{\lambda\mu}^{V_0}(r) &= \int_0^r \Phi_\lambda^{V_0}(\rho) \Phi_\mu^{V_0}(\rho) \rho^{-2} d\rho = \\ &= (\mu^2 - \lambda^2)^{-1} \left[\Phi_\lambda^{V_0}(r) \frac{d}{dr} \Phi_\mu^{V_0}(r) - \Phi_\mu^{V_0}(r) \frac{d}{dr} \Phi_\lambda^{V_0}(r) \right], \end{aligned} \quad (11.4.14)$$

и решение обратной задачи всегда будет состоять в отыскании спектральной функции $d\rho_{V_0}^V(\mu)$ по асимптотическому поведению функции $\Phi_\lambda^V(r)$. Для этой цели наиболее очевидным представляется использовать, если можно, соотношение (11.4.13)

§ 5. Дальнейшее исследование интегрального уравнения

Резольвента интегрального уравнения (11.3.3) является решением следующего интегрального уравнения:

$$S_{V_0r}^V(r_1, r_2) = f_{V_0}^V(r_1, r_2) - \int_0^r S_{V_0r}^V(r_1, \rho) f_{V_0}^V(\rho, r_2) \rho^{-2} d\rho. \quad (11.5.1)$$

Решение $S_{V_0r}^V(r_1, r_2)$ существует при $r \notin \Omega$. Его можно построить с помощью детерминантов Фредгольма, и тогда легко показать, что

при $r \notin \Omega$ функция $S_{V_0 r}^V(r_1, r_2)$ является непрерывно дифференцируемой функцией аргумента r . При $r_1 = r$ уравнение (11.5.1) сводится к уравнению (11.3.3), имеющему единственное решение $K_{V_0}^V(r, r')$. Следовательно,

$$S_{V_0 r}^V(r, r') = K_{V_0}^V(r, r'). \quad (11.5.2)$$

Докажем теперь, что при любом r , удовлетворяющем условию $[0, r] \cap \Omega = \emptyset$, справедливо соотношение

$$S_{V_0 r}^V(r_1, r_2) = f_{V_0}^V(r_1, r_2) - \int_0^r K_{V_0}^V(\rho, r_1) K_{V_0}^V(\rho, r_2) \rho^{-2} d\rho, \quad (11.5.3)$$

где функция $K_{V_0}^V(r, r')$ определена при $r' \geq r$ как решение уравнения (11.2.5) с граничными условиями (11.2.6б) и (11.2.7).

Доказательство. Введем функцию

$$\chi_r(r_1, r_2) = S_{V_0 r}^V(r_1, r_2) - f_{V_0}^V(r_1, r_2) + \int_0^r K_{V_0}^V(\rho, r_1) K_{V_0}^V(\rho, r_2) \frac{d\rho}{\rho^2}, \quad (11.5.4)$$

где $S_{V_0 r}^V$ — решение уравнения (11.5.1). Функция $\chi_r(r_1, r_2)$ дифференцируема по r и обращается в нуль при $r \rightarrow 0$. На основании уравнения (11.5.1) легко показать, что

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_r(r_1, r_2)}{dr} &= [K_{V_0}^V(r, r_1) K_{V_0}^V(r, r_2) - K_{V_0}^V(r, r_1) f_{V_0}^V(r, r_2)] r^{-2} - \\ &- \int_0^r \frac{d}{dr} [\chi_r(r_1, \rho)] f_{V_0}^V(\rho, r_2) \rho^{-2} d\rho + \\ &+ r^{-2} \int_0^r K_{V_0}^V(r, r_1) K_{V_0}^V(r, \rho) f_{V_0}^V(\rho, r_2) \rho^{-2} d\rho. \end{aligned} \quad (11.5.5)$$

Если учесть уравнение (11.3.3), то в правой части равенства (11.5.5) останется только второе слагаемое; следовательно, функция $[(\partial/\partial r) \chi_r(r_1, r_2)]$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению, соответствующему неоднородному уравнению (11.5.1). Таким образом, $(d/dr) \chi_r(r, r_2) = 0$ при любом $r \notin \Omega$. Интегрируя от 0 до r , получаем аналогичный результат для функции $\chi_r(r_1, r_2)$.

Из соотношений (11.5.2) и (11.5.3) следует, что функция $f_{V_0}^V(r, r')$ однозначно определяется функцией $K_{V_0}^V(r, r')$:

$$f_{V_0}^V(r, r') = K_{V_0}^V(r, r') + \int_0^r K_{V_0}^V(\rho, r) K_{V_0}^V(\rho, r') \rho^{-2} d\rho. \quad (11.5.6)$$

Вариации исходного потенциала. Рассмотрим величины $d\rho_{V_0}^V(\lambda)$ и $d\rho_V^W(\lambda)$ и построим с помощью соотношений (11.4.11), (11.3.3) функции $K_{V_0}^V(r, r')$ и $K_V^W(r, r')$. Обозначим через $\mathcal{F}$ объединение множеств, расположенных в правой полуплоскости λ , на которых определены функции $\rho_{V_0}^V$ и ρ_V^W . Согласно равенству (11.2.4),

$$\Phi_\lambda^V(r) = \Phi_\lambda^{V_0}(r) - \int_0^r K_{V_0}^V(r, \rho) \Phi_\lambda^{V_0}(\rho) \rho^{-2} d\rho, \quad (11.5.7)$$

$$\Phi_\lambda^W(r) = \Phi_\lambda^V(r) - \int_0^r K_V^W(r, \rho) \Phi_\lambda^V(\rho) \rho^{-2} d\rho. \quad (11.5.8)$$

Подставляя в соотношение (11.5.8) выражение (11.5.7), после алгебраических преобразований получаем

$$\Phi_\lambda^W(r) = \Phi_\lambda^{V_0}(r) - \int_0^r K_{V_0}^W(r, \rho) \Phi_\lambda^{V_0}(\rho) \rho^{-2} d\rho, \quad (11.5.9)$$

где мы *определили* функцию $K_{V_0}^W(r, r')$ следующим образом:

$$\begin{aligned} K_{V_0}^W(r, r') &= K_{V_0}^V(r, r') \div K_V^W(r, r') - \\ &- \int_{r'}^r K_V^W(r, \tau) K_{V_0}^V(\tau, r') \tau^{-2} d\tau. \end{aligned} \quad (11.5.10)$$

Функция $K_{V_0}^W(r, r')$ является ядром преобразования от V_0 к W . Это справедливо и в случае $V_0 = W$. Пусть $\mathcal{F}'$ — множество всех непрерывных ядер $K_V^W(r, r')$, которые могут быть получены из заданных на множестве $\mathcal{F}$ функций $\rho(\mu)$. При $V_0 \equiv W$ ядро преобразования $K_{V_0}^W \in \mathcal{F}'$ равно нулю. В самом деле, умножив обе части равенства (11.5.9) на $\Phi_\lambda^{V_0}(r)$ и проинтегрировав по $d\rho_{V_0}^W(\lambda)$ в области $\mathcal{F}$, получаем

$$0 = \int_0^r [K_{V_0}^{V_0}(r, \rho)]^2 \rho^{-2} d\rho$$

(причем K — непрерывная функция). В этом доказательстве и в самом результате предполагается, что при любых λ из множества $\mathcal{F}$ функция Φ_λ может быть построена с помощью ядра преобразования. Из этого следует, что ядро $K_{V_0}^W(r, r')$, принадлежащее множеству $\mathcal{F}'$, единственно. Таким образом, из уравнения (11.2.5)

и граничных условий (11.2.6) и (11.2.7) получаем

$$\mathbf{K}_{V_0}^V(r, r') = -\mathbf{K}_{V_0}^{V_0}(r', r). \quad (11.5.11)$$

Применив здесь сначала равенство (11.4.12), а затем равенства (11.5.8), легко показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{V_0}^V(r, r') - \int_0^r \mathbf{K}_V^W(r, \tau) \mathbf{K}_{V_0}^V(\tau, r') \tau^{-2} d\tau = \\ = \int_{\mathcal{F}} \Phi_{\lambda}^{V_0}(r') \left(\Phi_{\lambda}^V(r) - \int_0^r \mathbf{K}_V^W(r, \tau) \Phi_{\lambda}^V(\tau) \tau^{-2} d\tau \right) d\rho_{V_0}^V(\lambda) = \\ = \int_{\mathcal{F}} \Phi_{\lambda}^{V_0}(r') \Phi_{\lambda}^W(r) d\rho_{V_0}^V(\lambda). \end{aligned} \quad (11.5.12)$$

Аналогичным образом с учетом равенства (11.5.11) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_V^W(r, r') + \int_0^{r'} \mathbf{K}_V^W(r, \tau) \mathbf{K}_{V_0}^V(\tau, r') \tau^{-2} d\tau = \\ = \int_{\mathcal{F}} \Phi_{\lambda}^W(r) \Phi_{\lambda}^{V_0}(r') d\rho_V^W(\lambda). \end{aligned} \quad (11.5.13)$$

Из соотношений (11.5.12) и (11.5.13) с учетом выражения (11.4.12) следует замечательная формула сложения

$$d\rho_{V_0}^V(\lambda) + d\rho_V^W(\lambda) = d\rho_{V_0}^W(\lambda). \quad (11.5.14)$$

В частном случае

$$d\rho_V^W(\lambda) = -d\rho_{V_0}^V(\lambda). \quad (11.5.15)$$

§ 6. Некоторые замечания

1. В данной главе для упрощения вывода уравнений мы накладывали на функцию $f_{V_0}^V(r, r')$ сильное условие дифференцируемости. В следующих главах, в частности в гл. 13, это предположение не будет выполняться, но метод останется применимым, хотя мы не будем этого доказывать.

2. Введенное в § 5 продолжение функции $\mathbf{K}_{V_0}^V(r, r')$ в область $r' \geq r$ не является необходимым и не всегда используется. Поскольку функция $\mathbf{K}_{V_0}^V(r, r')$ нужна лишь при $r' \leq r$, иногда (например, в методе Лёффеля) удобнее продолжить ее определение в область $r' > r$, положив равной нулю. Тогда при $r' \geq r$ ядро $\mathbf{K}_{V_0}^V(r, r')$ заменяется неким «смещенным ядром», определение которого весьма удобно.

§ 7. Связь между задачами при фиксированной энергии E и при фиксированном l

Уравнение Шредингера для S -волны имеет вид

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \varphi(k, \rho) - V(\rho) \varphi(k, \rho) = -k^2 \varphi(k, \rho), \quad (11.7.1)$$

$$\varphi(k, 0) = 0, \quad (11.7.2)$$

причем здесь нас интересует зависимость от переменной k . Уравнение же Шредингера для парциальной волны λ имеет вид

$$\left[r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + 1 - V(r) \right) + \frac{1}{4} \right] \varphi(\lambda, r) = \lambda^2 \varphi(\lambda, r), \quad (11.7.3)$$

$$\varphi(\lambda, 0) = 0, \quad (11.7.4)$$

и здесь нас интересует зависимость от переменной λ . Следуя Лангеру [263], произведем в уравнении (11.7.3) замену переменных

$$r = \exp[\rho], \quad \varphi(\lambda, r) = \exp\left(\frac{1}{2}\rho\right) \varphi(\lambda, \rho). \quad (11.7.5)$$

В результате получим

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \varphi(\lambda, \rho) + \exp(2\rho) [1 - V(\exp(\rho))] \varphi(\lambda, \rho) = \lambda^2 \varphi(\lambda, \rho). \quad (11.7.6)$$

Очевидно, что уравнение (11.7.6) аналогично уравнению (11.7.1), а, следовательно, обратная задача при фиксированной энергии E аналогична обратной задаче при фиксированном угловом моменте $l = 0$ с аргументом $\ln r$ и переменной $i\lambda$ вместо k . Однако граничное условие (11.7.4) при $r = 0$ переходит в граничное условие при $\rho = -\infty$, а не при $\rho = 0$. При таком изменении граничного условия и замене действительных собственных значений комплексными возникают некоторые трудности. Таким образом, хотя указанная аналогия полезна при выборе схемы решения задачи, исследование каждой задачи должно проводиться отдельно.

Исторические замечания. Общий метод решения обратной задачи при фиксированной энергии постепенно выкристаллизовался в ряде работ. Здесь он изложен в самой общей, отчасти новой форме, охватывающей большинство подходов. Детали, касающиеся истории этих подходов, будут изложены в следующих главах. Отметим здесь лишь некоторые этапы развития общего метода решения обратной задачи, ссылаясь на те работы, в которых результаты были получены впервые (хотя обычно в более простом виде). Уравнение Редже — Ньютона (11.3.3) и метод, изложенный в § 2 и 3, были введены довольно формально Редже [354] и впер-

вые были применены при построении решения Ньютоном [318]¹⁾, который нашел первый аналитически решаемый пример [формулы (11.4.1) — (11.4.8)]. Затем исследование интегрального уравнения было проведено Сабатье [371] [формулы (11.3.8) — (11.5.16)], а также § 5, в частности формула сложения (11.5.14)]. Вопросы, поставленные в § 1, и диаграмма, представленная на фиг. 9, взяты из работы Сабатье [374].

¹⁾ Более строго та же задача была рассмотрена Б. М. Левитаном [463]. —
Прим. ред.

МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ПО АМПЛИТУДЕ РАССЕЯНИЯ ПРИ ФИКСИРОВАННОЙ ЭНЕРГИИ

§ 1. Введение

Простейший способ введения функции $f_{V_0}^V(r, r')$, удовлетворяющей уравнению (11.3.1) и зависящей от набора параметров $\{c_\mu\}$, — взять линейную комбинацию произведений $\varphi_\mu^{V_0}(r) \varphi_\mu^{V_0}(r')$ с коэффициентами c_μ . Можно также взять функцию $f_{V_0}^V(r, r')$ в виде линейной комбинации произведений $\varphi_{-\mu}^{V_0}(r) \varphi_\mu^{V_0}(r')$ с сильными условиями совместности.

В обоих случаях требуется, исходя из асимптотического поведения функции $\varphi_l^{V_0}(r)$, найти соотношение между набором параметров $\{c_\mu\}$ и фазовыми сдвигами $\{\delta_\mu\}$. Это можно сделать матричными методами, излагаемыми в данной главе. Такие методы дают потенциалы специальных классов, которые определяются выбором $\{\mu\}$. Мы будем рассматривать только действительные потенциалы.

Всюду в данной главе исходный потенциал V_0 равен нулю. Следовательно, регулярная волновая функция $\varphi_l^{V_0}(r)$ сводится к функции $u_l(r)$, определенной выражением (11.1.7). Для сокращения записи мы будем опускать индексы V_0 и V в большинстве формул, так что основное соотношение (11.2.4) будет иметь вид

$$\varphi_l(r) = u_l(r) - \int_0^r K(r, \rho) u_l(\rho) \rho^{-2} d\rho, \quad (12.1.1)$$

а интегральное уравнение (11.3.3) примет вид

$$K(r, r') = f(r, r') - \int_0^r K(r, \rho) f(\rho, r') \rho^{-2} d\rho. \quad (12.1.2)$$

§ 2. Метод целых значений индекса μ

Введем функции $f(r, r')$ следующего вида [318]:

$$f(r, r') = \sum_0^\infty c_l u_l(r) u_l(r'), \quad (12.2.1)$$

где $\{c_l\}$ — последовательность действительных чисел. Чтобы в рамках этого метода найти асимптотическую формулу функции ψ_l , необходимо наложить некое сильное условие на коэффициенты c_l [367], не менее сильное, чем условие

$$\sum_1^{\infty} l^{-2} |c_l| < \infty. \quad (12.2.2)$$

Если подставить выражение (12.2.1) в формулу (12.1.2) и учесть соотношение (12.1.1), то мы получим

$$K(r, r') = \sum_0^{\infty} c_l \varphi_l(r) u_l(r'). \quad (12.2.3)$$

Подставляя выражение (12.2.3) в уравнение (12.1.2), получаем

$$\varphi_l(r) = u_l(r) - \sum_{l'} L_{ll'}(r) c_{l'} \varphi_{l'}(r), \quad (12.2.4)$$

где $L_{ll'}(r)$ — функции, которые определяются соотношением (11.4.5) (с потенциалом $V_0 = 0$). Полагая $r \rightarrow \infty$ в выражении (12.2.4) и используя асимптотическое соотношение (11.4.7), получаем бесконечную систему уравнений

$$A_l e^{i\delta_l} = 1 - \frac{1}{2} \pi \frac{c_l A_l e^{i\delta_l}}{2l+1} + i \sum_{l'} M_{ll'} c_{l'} A_{l'} e^{i\delta_{l'}}, \quad (12.2.5a)$$

или

$$A_l \left(1 + \frac{1}{2} \pi \frac{c_l}{2l+1} \right) = e^{-i\delta_l} + i \sum_{l'} M_{ll'} c_{l'} A_{l'} e^{i(\delta_{l'} - \delta_l)}, \quad (12.2.5b)$$

где

$$M_{ll'} = \begin{cases} \left[\left(l' + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-1} & \text{при нечетных } |l - l'|, \\ 0 & \text{при четных } |l - l'|. \end{cases} \quad (12.2.6)$$

Рассматривая отдельно действительную и мнимую части системы уравнений (12.2.5b) и полагая

$$a_l = c_l A_l \cos \delta_l,$$

получаем две системы уравнений:

$$\operatorname{tg} \delta_l = \sum_{l'} M_{ll'} a_{l'} (1 + \operatorname{tg} \delta_l \operatorname{tg} \delta_{l'}), \quad (12.2.7)$$

$$c_l = a_l (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_l) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \pi \frac{a_l}{2l+1} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_l) - \sum_{l'} M_{ll'} a_{l'} (\operatorname{tg} \delta_{l'} - \operatorname{tg} \delta_l) \right\}^{-1}. \quad (12.2.8)$$

В матричных обозначениях система (12.2.7) приобретает вид [318]

$$\operatorname{tg} \Delta e = M (1 + R) a, \quad (12.2.9)$$

где M — обратимая (по предположению) матрица, a — вектор $\{a_i\}$, e — вектор $\{1\}$, $\operatorname{tg} \Delta$ — диагональная матрица $\{\operatorname{tg} \delta_i\}$, а R — матрица вида

$$R = M^{-1} \operatorname{tg} \Delta M \operatorname{tg} \Delta. \quad (12.2.10)$$

На этом заканчивается формальная процедура решения обратной задачи. Ясно, что если можно найти обратные матрицы M^{-1} и $(1 + R)^{-1}$, то из систем уравнений (12.2.7) и (12.2.8) может быть найден и набор коэффициентов c_l . Таким образом можно построить функцию $f(r, r')$, а затем, решив интегральное уравнение (12.1.2), найти ядро преобразования $K(r, r')$. Функция $\varphi_l(r)$ дается соотношением (12.1.4), а потенциал $V(r)$ определяется из равенства (11.2.7), которое при $V_0 = 0$ дает

$$V(r) = -2r^{-1} \frac{d}{dr} r^{-1} K(r, r). \quad (12.2.11)$$

§ 3. Обратимость матрицы M и другие свойства

Сначала мы докажем, что для матрицы M , заданной соотношением (12.2.6), существует обратная матрица вида

$$M^{-1} = -\mu M \mu, \quad (12.3.1)$$

где μ — диагональная матрица с элементами

$$\begin{aligned} \mu_{2n} &= \frac{2}{\pi} (4n+1) \left(\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \right)^2, \\ \mu_{2n+1} &= \frac{2}{\pi} (4n+3) \left(\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)} \right)^2. \end{aligned} \quad (12.3.2)$$

Затем мы покажем, что существует вектор v , такой, что $Mv = 0$. Элементы этого вектора:

$$v_{2n} = \mu_{2n}, \quad v_{2n+1} = 0. \quad (12.3.3)$$

Эти результаты, первоначально полученные методом индукции [367], справедливы и для более широких классов матриц. Мы дадим здесь менее общее, но зато более простое доказательство.

Доказательство.

1. Введем матрицы M и m :

$$M = i\mu^{1/2} M \mu^{1/2} = im. \quad (12.3.4)$$

Требуется доказать, что

$$MM = -mm = 1. \quad (12.3.5)$$

Пользуясь хорошо известной формулой [452]

$$\int_0^1 P_{2n}(x) P_{2q+1}(x) dx = \frac{2}{\pi} (-1)^{q+n} \left[\left(2q + \frac{3}{2} \right)^2 - \left(2n + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-1} \frac{\Gamma(1/2+n) \Gamma(3/2+q)}{\Gamma(1+n) \Gamma(1+q)}, \quad (12.3.6)$$

можем написать

$$M_{ll'} = -M_{l'l} = i^{l'-1} \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) p_l(x) p_{l'}(x) dx, \quad (12.3.7)$$

где $\operatorname{sgn} x$ — сигнатура величины x , а $p_l(x)$ — нормированный полином Лежандра

$$p_l(x) = \left(l + \frac{1}{2} \right)^{1/2} P_l(x). \quad (12.3.8)$$

Члены с четным $|l - l'|$, очевидно, обращаются в нуль в силу свойств полиномов Лежандра. Используя теорему Бесселя — Парсеваля, можно прямым путем показать, что матрица M унитарна:

$$\begin{aligned} \sum_{l''=0}^{\infty} M_{ll''} M_{l'l''} &= i^{l'-l} \sum_{l''=0}^{\infty} \int_{-1}^1 [p_l(x) \operatorname{sgn} x] p_{l''}(x) dx \int_{-1}^1 [p_{l'}(y) \operatorname{sgn} y] p_{l''}(y) dy = \\ &= i^{l'-l} \int_{-1}^1 p_l(x) p_{l'}(x) (\operatorname{sgn} x)^2 dx = \delta_{ll'}, \end{aligned} \quad (12.3.9)$$

где $\delta_{ll'}$ — символ Кронекера.

2. Пусть $\mathbf{v}$ — ненулевой вектор, такой, что

$$M\mathbf{v} = 0 = i^{-l} \int_{-1}^1 p_l(x) \operatorname{sgn} x \sum_0^{\infty} i^{l'} v_{l'} p_{l'}(x). \quad (12.3.10)$$

Последовательность $\{v_l\}$ не может принадлежать пространству l^2 , так как тогда сумма

$$\sum_{l=0}^{\infty} i^l v_l p_l(x)$$

и произведение этой суммы на $\operatorname{sgn} x$ принадлежали бы пространству $L^2(-1, +1)$. Тогда, согласно теореме Бесселя — Парсеваля, это произведение было бы равно нулю, а следовательно, и элементы v_l были бы равны нулю. В таком случае предположим, что последовательность $\{(l + 1/2)^{-2} v_l\}$ принадлежит пространству l^2 , и рассмотрим последовательность

$$\mathbf{v}_0 = \{v_{2l}\}. \quad (12.3.11)$$

Вычитая $\sum_{q=0}^{\infty} M_{2n+1}^{2q} v_{2q}$ из $\sum_{q=0}^{\infty} M_1^{2q} v_{2q}$, получаем

$$\begin{aligned} &\sum_0^{\infty} \left[\left(2q + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(2n + \frac{3}{2} \right)^2 \right]^{-1} \frac{\Gamma(q+1/2)}{\Gamma(q+1)} \times \\ &\times \sqrt{2q + \frac{1}{2}} \left[\left(2q + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right]^{-1} v_{2q} = 0 \end{aligned} \quad (12.3.12)$$

при любом $n \neq 0$. Это равенство можно записать следующим образом:

$$\int_{-1}^1 p_{2n+1}(x) \sum_{q=0}^{\infty} \operatorname{sgn}(x) p_{2q}(x) \frac{v_{2q}(-1)^q}{(2q+1/2)^2 - (3/2)^2} = 0. \quad (12.3.13)$$

Так как последовательность $(-1)^q v_{2q} [(2q+1/2)^2 - (3/2)^2]^{-1}$ принадлежит пространству l^2 , из равенства (12.3.13) следует, что

$$\sum_{q=0}^{\infty} p_{2q}(x) \frac{v_{2q}(-1)^q}{(2q+1/2)^2 - (3/2)^2} = C \operatorname{sgn} x p_1(x). \quad (12.3.14)$$

Полагая $\mathbf{v} = \mu^{1/2} \mathbf{v}$, убеждаемся в справедливости соотношений (12.3.3). Кроме того, проведя аналогичные рассуждения для нечетных компонент векторов в случае быстрее сходящихся последовательностей, легко показать, что единственный вектор $\mathbf{v}$, для которого $\mathbf{M}\mathbf{v} = 0$, есть вектор, определяемый равенством (12.3.3) (заметим, что *необходимое* условие сходимости имеет вид

$$v_{2q} = o(q), \quad v_{2q+1} = o(1) \text{ при } q \rightarrow \infty).$$

Математические тождества для матрицы M и асимптотическое поведение некоторых сумм *¹⁾. Существуют два способа представления матрицы M , удобных для исследования асимптотических свойств. Введем матрицы

$$P_{ll'} = \frac{1}{2} \{ \delta_{ll'} + (-1)^l \delta_{ll'} \}, \quad (12.3.15)$$

$$K_{ll'} = \begin{cases} 1 & \text{при четных } |l-l'|, \\ 0 & \text{при нечетных } |l-l'|, \end{cases} \quad (12.3.16)$$

$$L_{ll'} = \left(l + \frac{1}{2} \right)^{-2} \delta_{ll'}. \quad (12.3.17)$$

Тогда из тождества

$$\frac{1}{(l'+1/2)^2 - (l+1/2)^2} = \left\{ \frac{1}{(l'+1/2)^2} + \frac{1}{(l'+1/2)^2} \frac{(l+1/2)^2}{[(l'+1/2)^2 - (l+1/2)^2]} \right\} \quad (12.3.18)$$

получаем

$$M = KL + L^{-1}ML. \quad (12.3.19)$$

А из тождества

$$\frac{1}{(l'+1/2)^2 - (l+1/2)^2} = \left\{ -\frac{1}{(l+1/2)^2} + \frac{(l'+1/2)^2}{(l+1/2)^2 [(l'+1/2)^2 - (l+1/2)^2]} \right\} \quad (12.3.20)$$

получаем

$$M = -LK + LML^{-1}. \quad (12.3.21)$$

Эти тождества можно итерировать и умножать на матрицы P и $(1-P)$. Их можно использовать, например, для вычисления

¹⁾ Разделы, отмеченные звездочкой, можно пропустить при первом чтении.

асимптотического поведения функции

$$g_l = \sum_{l'=0}^{\infty} m_{ll'} \operatorname{tg} \delta_{l'} f_{l'}, \quad (12.3.22)$$

где ¹⁾

$$|f_{2l}| = O(1), \quad |f_{2l+1}| = O(l) \quad (l \rightarrow \infty) \text{ и } |\operatorname{tg} \delta_l| \leqslant Cl^{-3+\varepsilon}. \quad (12.3.23)$$

Используя справедливую при $\alpha \neq \gamma$ и $-1 < \beta \leqslant 1$ оценку

$$\sum_0^{\infty} \frac{(q+1/2)^{-\beta}}{(r+\alpha)^2 - (q+\gamma)^2} = O[r^{-\beta-1} \ln r + r^{-2}], \quad r \rightarrow \infty, \quad (12.3.24)$$

которую можно доказать сравнением с интегралами [367], получаем из равенства (12.3.21) тождество

$$\begin{aligned} \mu^{1/2} M \mu^{1/2} \operatorname{tg} \Delta f = & -\mu^{1/2} L K \mu^{1/2} \operatorname{tg} \Delta P f - \mu^{1/2} L K \mu^{1/2} \operatorname{tg} \Delta (1-P) f + \\ & + \mu^{1/2} L M L^{-1} \mu^{1/2} \operatorname{tg} \Delta (1-P) f + \\ & + \mu^{1/2} L^2 M L^{-2} \mu^{1/2} \operatorname{tg} \Delta P f + \\ & + \mu^{1/2} L^2 K L^{-1} \mu^{1/2} \operatorname{tg} \Delta P f. \end{aligned} \quad (12.3.25)$$

Согласно формуле (12.3.2), величина $(\mu_l)^{1/2}$ есть $O(1)$ при четных l и $O(l)$ при нечетных l , когда $l \rightarrow \infty$. Подставляя в систему уравнений (12.2.5) равенство (12.2.6) и оценку (12.3.24), получаем искомое асимптотическое поведение функции g :

$$\begin{aligned} g_{2l} = & -(\mu_{2l})^{1/2} \left(2l + \frac{1}{2}\right)^{-2} \sum_{p=0}^{\infty} (\mu_{2p+1})^{1/2} \operatorname{tg} \delta_{2p+1} f_{2p+1} + \\ & + O(l^{-3-\varepsilon} \ln l) \quad (l \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (12.3.26)$$

$$\begin{aligned} g_{2l+1} = & -(\mu_{2l+1})^{1/2} \left(2l + \frac{1}{2}\right)^{-2} \sum_{p=0}^{\infty} (\mu_{2p})^{1/2} \operatorname{tg} \delta_{2p} f_{2p} - \\ & - (\mu_{2l+1})^{1/2} \left(2l + \frac{1}{2}\right)^{-4} \sum_{p=0}^{\infty} \left(2p + \frac{1}{2}\right)^2 (\mu_{2p})^{1/2} \operatorname{tg} \delta_{2p} f_{2p} + \\ & + O(l^{-5-\varepsilon} \ln l) \quad (l \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (12.3.27)$$

§ 4. Построение коэффициентов $\{c_l\}$ по $\{\operatorname{tg} \delta_l\}$

Из равенств (12.3.4) и (12.2.9), используя результаты § 3, получаем

$$\frac{1}{2} \alpha v - m \operatorname{tg} \Delta f = [1 - m \operatorname{tg} \Delta] [1 + m \operatorname{tg}^* \Delta] b, \quad (12.4.1)$$

¹⁾ Если специально не оговаривается, то C и ε — положительные числа, точные значения которых либо не заданы, либо произвольны.

где

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mu^{1/2} \mathbf{e}, \\ \mathbf{v} &= \mu^{-1/2} \mathbf{v}, \\ \mathbf{b} &= \mu^{-1/2} \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (12.4.2)$$

Исследуем теперь уравнение

$$\mathbf{w} - \mathbf{u} = \pm m \operatorname{tg} \Delta \mathbf{w}. \quad (12.4.3)$$

С учетом равенства (12.3.4) и формулы (12.3.7) уравнение (12.4.3) можно переписать в виде

$$\sum_0^\infty i^l (w_l - u_l) p_l(x) = \pm \int_{-1}^1 T(x, y) \left(\sum_0^\infty i^l w_l p_l(y) \right) dy, \quad (12.4.4)$$

где

$$T(x, y) = i \operatorname{sgn} x \sum_0^\infty \operatorname{tg} \delta_{l'} p_{l'}(x) p_{l'}(y). \quad (12.4.5)$$

Предположим, что последовательность $\{u_l\}$ принадлежит пространству l^2 , так что величина $\sum i^l u_l p_l(x)$ принадлежит пространству $L^2(-1, +1)$. Кроме того, предположим, что существуют такие положительные числа C и ε , для которых справедливо неравенство

$$|\operatorname{tg} \delta_l| < Cl^{-3-\varepsilon}. \quad (12.4.6)$$

Тогда $T(x, y)$ — кусочно-непрерывная и равномерно ограниченная в квадрате $[-1, +1] \times [-1, +1]$ функция:

$$|T(x, y)| \leq \sum_0^\infty |\operatorname{tg} \delta_l| \left(l + \frac{1}{2} \right) \quad (12.4.7)$$

Исключительные наборы фазовых сдвигов. Уравнения (12.4.4) относятся к интегральным уравнениям Фредгольма. Они имеют решения, если соответствующие однородные уравнения не имеют нетривиальных решений. Наборы фазовых сдвигов, для которых по крайней мере одно из однородных уравнений

$$\mathbf{w} = \pm m \operatorname{tg} \Delta \mathbf{w} \quad (12.4.8)$$

имеет нетривиальное решение, назовем «исключительными». Для таких наборов фазовых сдвигов детерминанты Фредгольма $\mathcal{D}^\pm$ уравнения (12.4.4) равны нулю. Из равенства (12.4.5) следует, что норма функции $T(x, y)$ в пространстве L^2 есть не что иное, как

$$\left(\sum_0^\infty \operatorname{tg}^2 \delta_l \right)^{1/2}.$$

Следовательно, условие

$$\sum_0^{\infty} \operatorname{tg}^2 \delta_l < 1 \quad (12.4.9)$$

гарантирует, что набор фазовых сдвигов не является исключительным, так как при этом ряд Неймана для резольвенты уравнения (12.4.4) сходится. Исключительные наборы фазовых сдвигов можно построить путем специального выбора величины w в уравнении

$$\operatorname{tg} \Delta w = \pm m^{-1} w, \quad (12.4.10)$$

которое легко получить из равенства (12.4.8). В качестве упражнения читатель может самостоятельно показать, что если все фазовые сдвиги, кроме δ_0 и δ_1 , равны нулю и выполняется равенство

$$\operatorname{tg} \delta_0 \operatorname{tg} \delta_1 m_0^1 m_1^0 = 1, \quad (12.4.11)$$

то такой набор фазовых сдвигов является исключительным и четные компоненты вектора w пропорциональны произведению $m_1^0 m_{2p}^1$, а нечетные — произведению $m_{2p+1}^0 \operatorname{ctg} \Delta_1$.

Свойства последовательности $\{a_l\}$ *. Если набор фазовых сдвигов $\{\delta_l\}$ не является исключительным, то уравнение (12.4.3) можно решить методом Фредгольма:

$$\sum_0^{\infty} i^l [w_l - u_l] p_l(x) = \int_{-1}^1 \frac{\mathcal{D}^{\pm}(x, y)}{\mathcal{D}^{\pm}} \left(\sum_0^{\infty} i^l u_l p_l(y) \right) dy, \quad (12.4.12)$$

где

$$\mathcal{D}^{\pm} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\mp 1)^m}{m!} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} T(\xi_1, \xi_1) & \dots & T(\xi_1, \xi_m) \\ \vdots & & \\ T(\xi_m, \xi_1) & \dots & T(\xi_m, \xi_m) \end{bmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_m, \quad (12.4.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\pm}(x, y) = & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mp 1)^m}{m!} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 d\xi_1 \dots d\xi_m \times \\ & \times \begin{bmatrix} T(x, y) & T(x, \xi_1) & \dots & T(x, \xi_m) \\ T(\xi_1, y) & T(\xi_1, \xi_1) & \dots & T(\xi_1, \xi_m) \\ \vdots & & & \\ T(\xi_m, y) & T(\xi_m, \xi_1) & \dots & T(\xi_m, \xi_m) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.4.14)$$

Подставляя разложение (12.4.5) для функции $T(x, y)$ в формулу (12.4.14) и выполняя интегрирование по y в формуле (12.4.12),

получаем

$$\sum_0^{\infty} i^l (w_l - u_l) p_l(x) = \mp i \operatorname{sgn} x \sum_0^{\infty} \operatorname{tg} \delta_{l'} p_{l'}(x) i^{l'} d_l^{\pm}, \quad (12.4.15)$$

где

$$\mathcal{D}^{\pm} d_l^{\pm} = -i^{-l} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mp 1)^m}{m!} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 d\xi_1 \dots d\xi_m \times \\ \times \begin{bmatrix} i^l u_l & p_l(\xi_1) & \dots & p_l(\xi_m) \\ T(\xi_1) & T(\xi_1, \xi_1) & \dots & T(\xi_1, \xi_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T(\xi_m) & T(\xi_m, \xi_1) & \dots & T(\xi_m, \xi_m) \end{bmatrix}. \quad (12.4.16)$$

Здесь

$$T(\xi) = i \operatorname{sgn}(\xi) \sum_0^{\infty} \operatorname{tg} \delta_{l'} i^{l'} u_{l'} p_{l'}(\xi).$$

Если фазовые сдвиги удовлетворяют условию (12.4.6), то $T(\xi)$ — абсолютно и равномерно ограниченная функция. Пусть

$$T = \sup_{x, y, \xi} (|T(\xi)|, |T(x, y)|).$$

Разложим детерминант в формуле (12.4.16) по элементам первой строки, оценим сомножители по теореме Адамара и учтем, что если $|F(\xi)|$ меньше некоторой величины F , то

$$\left| \int_{-1}^1 p_l(\xi) F(\xi) d\xi \right| < F \sqrt{2}.$$

Отсюда получаем оценку

$$|d_l^{\pm}| \leq |\mathcal{D}^{\pm}|^{-1} \sum_0^{\infty} (m!)^{-1} (m \sqrt{2} + |u_l|) m^{1/2m} (2T)^m. \quad (12.4.17)$$

Из этого неравенства видно, что последовательность $|d_l|$ равномерно ограничена, если равномерно ограничена последовательность $|u_l|$. Следовательно, из равенств (12.4.15) и (12.3.7) получаем

$$w - u = m \operatorname{tg} \Delta d^{\pm}, \quad (12.4.18)$$

откуда находим решение уравнения (12.4.3) для любого неисклнучительного набора фазовых сдвигов. Кроме того, если $\{u_l\}$ — ограниченная последовательность, то, как следует из асимптотических формул (12.3.26) и (12.3.27), последовательность $\{m \operatorname{tg} \delta_l u_l\}$ принадлежит пространству l^2 . Тогда, записав уравнение (12.4.3)

в эквивалентной форме

$$(w - u) - (\pm m \operatorname{tg} \Delta u) = \pm m \operatorname{tg} \Delta (w - u), \quad (12.4.19)$$

замечаем, что для ограниченной последовательности $\{u_l\}$ справедлив результат (12.4.18) с должным образом определенным $d^\pm$. Последовательность в левой части уравнения (12.4.1) ограничена.

Дважды применяя результат (12.4.18), легко получить

$$b_l = \frac{1}{2} \alpha v_{2l} - \sum_{l'=0}^{\infty} m_{ll'} \operatorname{tg} \delta_{l'} h_{l'} \quad (12.4.20)$$

где

$$h_l = \begin{cases} O(1) & \text{при четных } l, \\ O(l) & \text{при нечетных } l, \end{cases}$$

когда $l \rightarrow \infty$. Из асимптотических формул (12.3.26) и (12.3.27) и равенств (12.3.2) и (12.4.2) получаем асимптотическое поведение величины a_l при $l \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} a_{2l} &= \frac{1}{2} \alpha \mu_{2l} + \beta_1 \left(2l + \frac{1}{2}\right)^{-2} + O(l^{-3-\varepsilon} \ln l), \\ a_{2l+1} &= \frac{1}{2} \beta \left(l + \frac{3}{4}\right)^{-2} \mu_{2l+1} + \beta_2 \left(2l + \frac{3}{2}\right)^{-2} + O(l^{-2-\varepsilon} \ln l), \end{aligned} \quad (12.4.21)$$

где β , β_1 , β_2 — известные сходящиеся разложения в ряд по $\operatorname{tg} \delta_l$ [367]. Отметим, что величины $1/2 \mu_{2l}$ и $1/2 (l + 3/4)^{-2} \mu_{2l+1}$ при $l \rightarrow \infty$ равны $4\pi^{-1} + O(l^{-2})$.

Асимптотическое поведение коэффициентов c_l . Из системы уравнений (12.2.8) и неравенства (12.4.6) находим с точностью до членов порядка l^{-2} асимптотическое поведение коэффициентов c_l :

$$c_l = a_l \left(1 - \frac{\pi}{2} \frac{a_l}{2l+1}\right)^{-1} + O_{\frac{\pi}{2}}(l^{-2}) = 4\pi^{-1} + O(l^{-1}). \quad (12.4.22)$$

Отсюда получаем, что множество коэффициентов c_l ограничено.

§ 5. Метод построения потенциала $V(r)$ и применимость такого метода

Регулярное решение свободного ($V = 0$) уравнения Шредингера $u_l(r)$ при любом комплексном r удовлетворяет неравенству

$$|u_l(r)| < C \left(\frac{1}{2} |r|\right)^{l+1} \exp \frac{|r|^2}{4l+1} (l!)^{-1}, \quad (12.5.1)$$

где C — не зависящая от l и r постоянная величина. Таким образом, при условии (12.2.2) ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l u_l(r) u_l(r')$$

и все его частные производные сходятся к целым функциям переменных r и r' . Фактически для этого было бы достаточно, чтобы при некотором значении p была справедлива оценка $|c_l| = O(l^p)$ при $l \rightarrow \infty$. Таким образом, функция $f(r, r')$ удовлетворяет уравнению (11.3.1) и граничным условиям (11.3.2). Ядро $K(r, r')$, определенное уравнением (11.3.3), можно построить с помощью соотношения (11.3.8). По теореме Адамара можно получить ограничения для выражения (11.3.11) в любой ограниченной области комплексных плоскостей r и r' так, что $\mathcal{D}_r(r, r')$ и $\mathcal{D}(r)$ могут быть аналитически продолжены как целые функции переменных r и r' . Из уравнения (11.3.16) следует, что построенный по коэффициентам c_l потенциал $V(r)$ является мероморфной функцией в комплексной плоскости r с изолированными полюсами второго порядка. На действительной оси потенциал $V(r)$ — действительная функция. Кроме того, всегда существует ненулевой круг с центром в начале координат, внутри которого функция $V(r)$ аналитична. Способ нахождения асимптотического поведения функции $V(r)$ очень сложен, и здесь мы лишь набросаем схему. Во-первых, отметим, что асимптотическое поведение функций $f(r, r)$ и $r^{-1} (d/dr) [r^{-1} f(r, r)]$ при $r \rightarrow \infty$ и $\alpha \neq \beta$ определяется вкладами основных членов в выражении (12.4.21):

$$f(r, r) = \frac{1}{2} (\alpha + \beta) r \int_0^{2r} J_0(t) dt + \beta r J_1(2r) + O(1), \quad (12.5.2)$$

$$r^{-1} \frac{d}{dr} r^{-1} f(r, r) = (\alpha - \beta) r^{-1} J_0(2r) + O(r^{-2}). \quad (12.5.3)$$

Следовательно, если справедлива некая линейная аппроксимация, при которой $K(r, r') \approx f(r, r')$, потенциал будет спадать при $r \rightarrow \infty$ не быстрее, чем $(\alpha - \beta) r^{-3/2}$. Но если бы α и β были одновременно равны нулю, то функция $f(r, r')$ и ее производные были бы равномерно ограничены, а функция $\mathcal{D}(r)$ при $r \rightarrow \infty$, очевидно, имела бы конечный предел $\mathcal{D}(\infty)$ и при $\mathcal{D}(\infty) \neq 0$ решением уравнения

$$\gamma(r, r') = \phi(r, r') - \int_0^{\infty} \gamma(r, \rho) \phi(\rho, r') d\rho \quad (12.5.4)$$

аппроксимировалось (равномерно ограничивалось) бы решение уравнения (11.3.4). Таким образом, в этом случае можно было бы легко показать, что $V(r) = O(r^{-2})$ при $r \rightarrow \infty$.

В общем случае необходимо сначала доказать разрешимость уравнения (12.5.4). Для этого нужно точно решить уравнение (12.5.4) с некоторой частью ядра $\phi(r, r')$, а затем оценить остаток обычным приемом теории интегральных уравнений [он пригоден только в том случае, если единица не является собственным значением ядра $\phi(r, r')$, что, очевидно, эквивалентно условию $\mathcal{D}(\infty) \neq 0$].

Затем уравнение (12.5.4) сравнивается с уравнением (11.3.4), и оценка остатка дает асимптотическое поведение функции $K(r, r')$. Аналогичным путем находится асимптотическое поведение производных функции $K(r, r')$. Результат совпадает с выводами, полученными при линейной аппроксимации. В работе Сабатье [366] было доказано, что, какова бы ни была положительная величина ε' , справедливо выражение

$$V(r) = -2\pi^{-1/2}(\alpha - \beta)r^{-3/2} \cos\left(2r - \frac{\pi}{4}\right) + O(r^{\varepsilon'-2}). \quad (12.5.5)$$

Волновая функция для такого потенциала имеет асимптотическую форму (11.4.7), необходимую для определения фазового сдвига. Кроме того, асимптотические амплитуды A'_l ограничены некоторым не зависящим от l числом, а фазовый сдвиг δ'_l стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$. Таким образом, справедливы формулы (12.2.5) — (12.2.7) и из системы (12.2.5) получаем

$$A'_l - 1 = O(l^{-1}), \quad \delta'_l = O(l^{-1}). \quad (12.5.6)$$

Остается доказать, что $A'_l = A_l$, а $\delta'_l = \delta_l$.

Доказательство. Если величины A'_l и δ'_l не равны A_l и δ_l , то из уравнений (12.2.5) следует, что

$$\Gamma_l e^{i\gamma_l} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\pi c_l}{2l+1}\right) = i \sum_{l'} M_{ll', c_l, \Gamma_{l'}} e^{i\gamma_{l'}}, \quad (12.5.7)$$

где

$$\Gamma_l e^{i\gamma_l} = A_l e^{i\delta_l} - A'_l e^{i\delta_{l'}}. \quad (12.5.8)$$

Поскольку для величин A_l и δ_l справедлива оценка (12.5.6), величины Γ_l и γ_l ведут себя как l^{-1} при $l \rightarrow \infty$. Из уравнения (12.5.7) следует, что

$$\sum_{l'} M_{ll', c_l, \Gamma_{l'}} \cos \gamma_{l'} (1 + \operatorname{tg} \gamma_l \operatorname{tg} \gamma_{l'}) = 0. \quad (12.5.9)$$

Согласно результатам § 3, это равенство может выполняться только при $\Gamma_l = 0$. Следовательно, $A_l = A'_l$ и $\delta_l = \delta_{l'}$.

Таким образом, метод внутренне непротиворечив при условии, что набор фазовых сдвигов $\{\delta_l\}$ не есть «исключительный» и « $\mathcal{D}(\infty) \neq 0$ ». Поскольку последнее условие может выполняться только для «исключительного набора параметров $\{c_l\}$ » (что аналогично условию для фазовых сдвигов), *метод применим почти*

к любому набору фазовых сдвигов, удовлетворяющих условию (12.4.6). Для всякого набора фазовых сдвигов этот метод дает один (и только один) потенциал, убывающий быстрее, чем $r^{-3/2}$ (потенциал с $\alpha = \beta$).

§ 6. Обобщенные матричные методы

Прямые обобщения. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое множество чисел из правой полуплоскости $\operatorname{Re} \mu > -1/2$, расположенных симметрично относительно действительной оси (чтобы на последней получались действительные функции). Если ряд

$$\sum_{\mu \in \mathcal{M}} c_{\mu} u_{\mu}(r) u_{\mu}(r')$$

сходится, то он может служить исходной функцией $f(r, r')$ (предполагается, что суммирование на определенных подмножествах может быть заменено интегрированием). Тогда получается система уравнений типа (12.2.4). Затем функции $\varphi_{\mu}(r)$ и $L_{\lambda, \mu}(r)$ заменяются их асимптотическими выражениями

$$\varphi_{\mu}(r) \sim (2i)^{-1} (f_{1, \mu} e^{ir} - f_{2, \mu} e^{-ir}), \quad (12.6.1)$$

$$L_{\lambda, \mu}(r) \rightarrow L_{\lambda, \mu}(\infty) = \frac{\sin [(\lambda - \mu) \pi / 2]}{(\lambda + 1/2)^2 - (\mu + 1/2)^2}. \quad (12.6.2)$$

В случае когда множество $\mathcal{M}$ содержит бесконечную подпоследовательность действительных чисел $\{\mu_n\}$, «матричный метод» состоит в выборе коэффициентов c_{μ} для $\mu \in \mathcal{M}$, $\mu \notin \{\mu_n\}$ и в решении бесконечной системы уравнений

$$A_l e^{i\delta_l} = 1 - \sum_{\mu \in \mathcal{M}} L_{l, \mu} c_{\mu} f_{1, \mu} e^{il(\pi/2)} - \sum_{n=0}^{\infty} L_{l, \mu_n} c_{\mu_n} A_{\mu_n} e^{i[\delta_{\mu_n} + (l - \mu_n)\pi/2]}. \quad (12.6.3)$$

Некоторый интерес представляют два следующих обобщения матричного метода [370]. В первом из них множество $\mathcal{M}$ содержит целые и полужелые числа. Полагая $\mu_n = n$, умножая обе части уравнения (12.6.3) на $\exp(-i\delta_l)$ и выделяя мнимую часть, получаем систему уравнений, которую можно решить подобно аналогичной системе в § 2. Во втором обобщении множество содержит только полужелые числа, поэтому полагая $\mu_n = n + 1/2$. При достаточно малых фазовых сдвигах соответствующая система уравнений может быть решена. Чтобы показать, чем интересно это обобщение матричного метода, примем, что функция $rV(r)$ аналитична в области $|r| \leq R$. Получив методом Фробениуса ограничения на ряд Тэйлора для функции $r^{-l-1} \varphi_l(r)$, можно показать, что для функции $K(r, r)$ существует *единственное* раз-

ложение

$$K(r, r) = \sum_0^{\infty} c_l \varphi_l(r) u_l(r) + \sum_0^{\infty} c_{l+1/2} \varphi_{l+1/2}(r) u_{l+1/2}(r), \quad (12.6.4)$$

равномерно сходящееся в области $|r| < R$. Кроме того, если $V(r)$ — четная функция, то $c_l = 0$ при всех значениях l , а функция $r^{-1/2} \varphi_{l+1/2}(r)$ так же, как и функция $r^{-1/2} u_{l+1/2}(r)$, четна. Таким образом, матричный метод, изложенный в § 2—5, не может дать четный потенциал, тогда как метод, использующий только коэффициенты вида $c_{l+1/2}$, дает исключительно четные потенциалы. Но это не означает, что матричный метод, использующий и коэффициенты c_l , и коэффициенты $c_{l+1/2}$, давал бы все аналитические потенциалы. В самом деле, из условия «аналитичности функции $rV(r)$ » никоим образом не следует, что выполняется условие (12.2.2) и что асимптотическая система уравнений типа (12.6.3) вообще имеет смысл (§ 9). Таким образом, существует бесконечное число эквивалентных потенциалов. Аналогичным образом исследуются обобщения матричного метода, приводящие к аналитическим потенциалам как функциям переменной r^α .

Дальнейшие обобщения. Из сказанного в § 3 следует, что «исходная функция» $f(r, r')$ обладает существенным свойством: она удовлетворяет уравнению (11.3.1) с граничными условиями (11.3.2). Кокс и Томпсон [119—121] предложили включить в функцию $f(r, r')$ члены вида

$$g(r, r') = \sum_{l \in S} \gamma_l u_l(r <) v_l(r >), \quad (12.6.5)$$

где $v_l(r)$ — сингулярная сферическая функция Бесселя $(1/2\pi r)^{1/2} Y_{l+1/2}(r)$, а значение индексов $>$ и $<$ такое же, как и в формуле (2.1.9). Здесь S — конечное множество действительных чисел, превышающих $-1/2$, а γ_l — действительные коэффициенты. Очевидно, что функция $q(r, r')$ имеет бесконечное число производных всюду, кроме, может быть, области $r = r'$, в которой возможен разрыв производной и в которой необходимо детально исследовать уравнения (11.3.1) и (11.3.2). В наиболее сложном случае, когда исходная функция $f(r, r') = g(r, r')$, это было проделано [119—121]. Было показано, что уравнение (12.1.2) имеет решение $K(r, r')$ вида

$$K(r, r') = \sum_{L \in T} A_L(r) u_L(r'), \quad (12.6.6)$$

где T — множество действительных чисел ($T \cap S = \emptyset$). Множества T и $\{\gamma_l\}$ удовлетворяют условию совместности

$$\sum_{l \in S_l} [l(l+1) - L(L+1)]^{-1} \gamma_l = 1 \quad (L \in T). \quad (12.6.7)$$

Функции $A_L(r)$ в выражении (12.6.6) находятся путем решения системы уравнений

$$\sum_{L \in T} \frac{W[u_L(r), v_l(r)]}{l(l+1) - L(L+1)} = v_l(r) \quad (l \in S), \quad (12.6.8)$$

где W — вронскиан.

Можно показать, что функция $\varphi_l(r)$, построенная с помощью соотношения (12.1.1) по функции $K(r, r')$, действительно является регулярным решением уравнения Шредингера с особой нормировкой.

Функцию $g(r, r')$ можно взять для построения потенциалов, с которыми уравнение Шредингера решается точно (при фиксированной энергии). Ее также можно использовать в качестве добавки к функции $f(r, r')$. Интересно, что величина

$$\int_0^\infty \rho V(\rho) d\rho$$

может быть отличной от нуля даже в случае конечного числа членов в исходной функции $f(r, r')$ (чего не может быть, как было отмечено выше, в методах, связанных с прямыми обобщениями). Правда, это достигнуто ценой усложнения метода.

Некоторый обобщенный матричный метод представляет собой полное решение, излагаемое в гл. 13.

7. Другие результаты

Прозрачные потенциалы. Методы решения обратной задачи, изложенные в предыдущих параграфах, дают для набора фазовых сдвигов $\{\delta_l\} = \{0\}$ потенциал $V = 0$ и другие потенциалы, отличные от нуля. Они называются «прозрачными потенциалами» [367]. Положим, например, $\operatorname{tg} \Delta = 0$ в формуле (12.4.1). Решая систему уравнений, легко получаем, что $c_{2l+1} = 0$, а

$$c_{2l} = \frac{1}{2} \alpha v_{2l} \left(1 - \frac{1}{4} \pi \alpha^* \frac{v_{2l}}{4l+1} \right)^{-1}. \quad (12.7.1)$$

Согласно формуле (12.5.5), соответствующий «прозрачный потенциал» имеет хвост, асимптотически спадающий как $r^{-3/2}$.

Случай одного члена. В гл. 11, § 4 показано, как построить точно решаемые примеры в случае функции $f(r, r')$, которая представляет собой единственный член $c_\mu u_\mu(r) u_\mu(r')$ [318, 366, 368, 370]. Аналогичные исследования можно провести [119, 120] с исходной функцией

$$f(r, r') = \gamma_\nu u_\nu(r<) v_\nu(r>).$$

Замечательно, что в обоих случаях [367, 119, 120] амплитуда рассеяния может быть вычислена явно. Эти два способа дают сходные, но неодинаковые результаты [120]. Мы приведем только один простой пример

$$f(r, r') = c_L u_L(r) u_L(r')$$

с целым значением L . Для амплитуды рассеяния имеем выражение

$$f(\theta) = \frac{a\pi}{2 \cos \pi b} [P_{b-1/2}(\cos \theta) - P_{b-1/2}(-\cos \theta)], \quad (12.7.2)$$

где

$$\begin{aligned} a &= c_L [1 + \pi c_L (4L + 2)^{-1}]^{-1}, \\ b &= \left[\left(L + \frac{1}{2} \right)^2 - ia \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (12.7.3)$$

Первый момент потенциала. В методе, изложенном в § 2—5, асимптотическое поведение функции $K(r, r)$ при $r \rightarrow \infty$ совпадает с асимптотическим поведением функции $f(r, r)$, даваемым формулой (12.5.2). На основании равенства (12.2.7) получаем формулу [370]

$$\int_0^\infty r V(r) dr = -(\alpha + \beta). \quad (12.7.4)$$

Следовательно, если величины α и β равны нулю, то первый момент потенциала также равен нулю. Но величины α и β входят в асимптотическое выражение (12.4.22) для коэффициентов c_l . Ньютон [320] доказал (более сильное утверждение), что первый момент потенциала равен нулю, если коэффициенты c_μ в обобщенном разложении

$$f(r, r') = \sum_\mu c_\mu u_\mu(r) u_\mu(r')$$

достаточно быстро стремятся к нулю при $\mu \rightarrow \infty$. Это целесообразно учитывать в численных расчетах, выбирая, например, из бесконечной последовательности $\{c_l\}$ подпоследовательность $\{c_l^0\}$ значений c_{2l} и c_{2l+1} , стремящихся к определенным пределам $\lim c_{2l}$ и $\lim c_{2l+1}$, а остальные члены выбрасывая.

Разложения функций Йоста. Примем обозначения (11.4.1⁽¹⁾) и введем функции Йоста $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$, нормированные так, что

$$\Phi_\lambda^Y(r) \sim (2i)^{-1} [f_1(\lambda) e^{ir} - f_2(\lambda) e^{-ir}]. \quad (12.7.5)$$

Пусть S — множество положительных действительных чисел, и пусть

$$f(r, r') = \sum_{\mu \in S} \gamma_{\mu}(V, 0) u_{\mu}(r) u_{\mu}(r').$$

Из системы уравнений (12.6.3) легко получить следующее разложение функции Йоста [368, 370, 320]:

$$f_{1,2}(\lambda) = \exp \left[\pm i\pi \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \right] - \sum_{\mu \in S} \frac{\sin [(\lambda - \mu) \pi / 2]}{\lambda^2 - \mu^2} \gamma_{\mu}(V, 0) f_{1,2}(\mu). \quad (12.7.6)$$

Как показал Ньютон [320], выбор множества S и сингулярность разложения (12.7.6) можно связать с множеством сингулярностей

в преобразованиях Меллина для потенциала $\int_0^1 x^{\sigma-1} V(x) dx$. Кроме того, он интерпретировал разложение (12.7.6) как особое дисперсионное соотношение и получил достаточное условие, гарантирующее его выполнение. В обобщениях Кокса и Томпсона [120] функции Йоста обладают аналогичными свойствами.

Методы с исходным потенциалом $V_0 \neq 0$. Пусть начальный потенциал V_0 отличен от нуля. Используя обозначения (11.4.10), возьмем исходную функцию $f_{V_0}^V(r, r')$ в виде ряда

$$f_{V_0}^V(r, r') = \sum_{\mu \in S} \gamma_{\mu}(V, V_0) \Phi_{\mu}^{V_0}(r) \Phi_{\mu}^{V_0}(r'). \quad (12.7.7)$$

Если коэффициенты $\gamma_{\mu}(V, V_0)$ ограничены условием

$$\gamma_{\mu}(V, V_0) = o(\mu) \quad (\mu \rightarrow \infty) \quad (12.7.8)$$

и если волновая функция, соответствующая начальному потенциалу V_0 , имеет асимптотическое поведение (11.4.7) с фазовым сдвигом $\delta_{\mu}^{V_0} \rightarrow 0$ и амплитудой рассеяния $|A_{\mu}^{V_0}| = O(1)$ при $\mu \rightarrow \infty$, то, положив $r \rightarrow \infty$ в равенстве (12.2.4), можно получить систему уравнений [320]. Решение этой системы сводится к обращению матрицы M и некоторых других бесконечных матриц, зависящих от фазовых сдвигов при начальном потенциале. Ясно, что если фазовые сдвиги $\{\delta_{\mu}^{V_0}\}$ и $\{\delta_{\mu}^V\}$ представляют собой величины порядка $O(\mu^{-3-\varepsilon})$, то не должно быть трудностей в обращении матриц, поскольку задачу можно решить изложенным выше методом непосредственно в два приема (тогда получается потенциал, эквивалентный сумме потенциалов $V_0 + V$). Наиболее интересным был бы случай с чисто кулоновским потенциалом V_0 . Как показано ниже [формула (12.8.13)], такой потенциал

соответствует набору коэффициентов $\{\gamma_\mu\}$ с целыми и полужелыми индексами μ , так что матричные методы могли бы быть введены совершенно естественным образом. Но, к сожалению, эти коэффициенты γ_μ не ограничены (они растут как μ при $\mu \rightarrow \infty$), а фазовые сдвиги при $l \rightarrow \infty$ стремятся к нулю медленно (как l^{-1}), так что существование соответствующих обратных матриц должно быть тщательно проверено. Соображения, высказанные в работе [111] относительно эффективного учета кулоновского потенциала, неубедительны.

§ 8. Интерполяционные свойства

Интерполяционные формулы, полученные Сабатье [369, 371], позволяют разложить волновые функции и функции Йоста при любом λ в ряд по значениям этих функций при $\lambda \in S$, где S — некоторая последовательность действительных чисел $\{s_n\}$. Оказывается, что коэффициенты разложения просто связаны с величинами γ_μ . Интерполяционные формулы могут быть получены для любого потенциала, удовлетворяющего условию, что $r V(r)$ — аналитическая функция переменной r^α (α — положительное число) в некотором круге с центром в начале координат.

Замечательные аналитические свойства волновых функций в плоскости λ . Пользуясь обозначениями (11.4.10), рассмотрим случай, когда $\alpha = 1$. Предположим, что функции $rV(r)$ и $rV_0(r)$ аналитичны в области $|r| \leq R$. Согласно формуле (12.6.4), имеем

$$K_V^W(r, \lambda) = \sum_{\mu \in S} \gamma_\mu (V, V_0) \Phi_\mu^V(\bar{r}) \bar{\Phi}_\mu^V(r), \quad (12.8.1)$$

где S — множество целых и полужелых положительных чисел. Пользуясь методом Фробениуса для решения уравнения Шредингера, можно показать, что и для потенциала V , и для потенциала V_0 при любых $r < R$ функция $r^{-\mu-1/2} \Phi_\mu(r)$ является аналитической, причем для коэффициентов Тейлора Φ_μ^V справедливо ограничение [370]

$$|\Phi_\mu^V / \Phi_\mu^0| \leq M (\mu + p)^{-1} R^{-p}, \quad (12.8.2)$$

где M — константа, зависящая только от R . Следовательно

$$\left| \left(\frac{1}{2} r \right)^{-\mu-1/2} \Phi_\mu(r) \Gamma(1+\mu) - \pi^{1/2} \right| = o(1) \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty. \quad (12.8.3)$$

Коэффициенты $\gamma_\mu(V, V_0)$ находятся путем сравнения рядов Тейлора в обеих частях разложения (12.8.1). Следовательно, они определяются единственным образом; кстати, легко видеть, что $\gamma_\mu(V, V_0) = -\gamma_\mu(V_0, V)$ [формула (11.5.15)], и из условия

(12.8.2) следует, что

$$|\gamma_\mu(V, V_0)| = O\left(|(\Gamma(1+\mu))^2 \left(\frac{1}{2} R'\right)^{-2\mu}|\right) \quad (\mu \rightarrow \infty), \quad (12.8.4)$$

где R' — величина, которая может быть произвольно выбрана в области $]0, R[$.

Соотношение (11.4.13) принимает вид

$$\Phi_\lambda^V(r) = \Phi_\lambda^{V_0}(r) - \sum_{\mu \in S} \Lambda_{\lambda\mu}^{V_0}(r) \Phi_\mu^V(r) \gamma_\mu(V, V_0). \quad (12.8.5)$$

Предположим теперь, что $V_0 = 1$. Из уравнения (11.1.6) и выражения (11.1.7) получаем

$$\Phi_\lambda^1(r) = \left(\frac{1}{2} \pi r\right)^{1/2} [\Gamma(1+\lambda)]^{-1} \left(\frac{1}{2} r\right)^\lambda. \quad (12.8.6)$$

Выражая с помощью соотношения (11.4.14) функцию $\Lambda_{\lambda\mu}^1(r)$ и подставляя ее в равенство (12.8.5), получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} & [\Gamma(-\lambda)]^{-1} \left(\frac{r}{2}\right)^{-\lambda} \left(\frac{1}{2} \pi r\right)^{-1/2} \Phi_\lambda^V(r) = \\ & = \frac{\sin \pi \lambda}{\pi} \left\{ -1 + \sum_{\mu \in S} \left(\frac{1}{2} \pi\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} r\right)^\mu [\Gamma(1+\mu)]^{-1} \times \right. \\ & \quad \left. \times (\lambda + \mu)^{-1} \gamma_\mu(V, 1) \Phi_\mu^V(r) \right\}. \end{aligned} \quad (12.8.7)$$

Как следует из асимптотических формул (12.8.3) — (12.8.4), соотношение (12.8.7) можно использовать для аналитического продолжения в комплексную плоскость λ функции $\Phi_\lambda^V(r)$ как мероморфной функции, имеющей простые полюса во всех точках $-s_n$, кроме целых значений s_n . С помощью функций $\Lambda_{-q, q}^0(r)$ и $\Lambda_{-q, q}^1(r)$ [последняя равна $-(\pi/2q)(-1)^q$], используя соотношение (12.8.5), легко также получить формулы «отражения»:

$$\begin{aligned} \Phi_{-q}^V(r) &= (-1)^q \frac{\pi}{2q} \gamma_q(V, 1) \Phi_q^V(r) = \\ &= (-1)^q \left[1 + \frac{\pi}{2q} \gamma_q(V, 0) \right] \Phi_q^V(r). \end{aligned} \quad (12.8.8)$$

Интерполяционные формулы. Отметим два основных момента в построении интерполяционных формул.

1. Теорема Лагранжа—Валирона [48].

Теорема. *Всякую ограниченную на действительной оси целую функцию $f(z)$ первого порядка τ -типа можно представить в виде*

$$f(z) = \left\{ \frac{f'(0)}{\tau} + \frac{f(0)}{\tau z} + \tau z \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n f[n\pi/\tau]}{n\pi(\tau z - n\pi)} \right\} \sin[\tau z]. \quad (12.8.9)$$

2. Из полученных выше результатов вытекает следующее: если потенциал $V(r)$ аналитичен в области $|r| < R$, то величина $\Phi_\lambda^V(r) = \cos[\pi\lambda] \Phi_\lambda^V(r)$ есть целая функция, удовлетворяющая условиям отражения

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_q^V(r) &= (-1)^q \gamma_q(V, 1) \bar{\Phi}_q^V(r), \quad \bar{\Phi}_{q+1/2}^V(r) = 0, \\ \bar{\Phi}_{-q-1/2}^V(r) &= - \left[\frac{1}{2} \pi \left(q + \frac{1}{2} \right)^{-1} \right] \gamma_{q+1/2}(V, 0) \Phi_{q+1/2}^V(r). \end{aligned} \quad (12.8.10)$$

На основании равенства (12.8.7)₁ и ограничений (12.8.3) и (12.8.4) легко заключить, что величина $\lambda \cos(\pi\lambda) \Phi_\lambda^V(r) \Phi_{-\lambda}^V(r)$ есть целая функция первого порядка 2π -типа, ограниченная на действительной оси. Тогда, используя равенства (12.8.8) и (12.8.10), получаем интерполяционную формулу

$$\begin{aligned} \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda} \Phi_\lambda^V(r) \Phi_{-\lambda}^V(r) &= \Phi_0^V(r) \Phi_0^V(r) + \\ &+ \sum_1^\infty \Phi_n^V(r) \Phi_n^V(r) \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\lambda}{\lambda-n} \gamma_n(V_0, 1) + \frac{\lambda}{\lambda+n} \gamma_n(V, 1) \right] + \\ &+ \sum_1^\infty \Phi_{n-1/2}^V(r) \Phi_{n-1/2}^V(r) \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\lambda}{\lambda-n+1/2} \gamma_{n-1/2}(V_0, 1) + \right. \\ &\left. + \frac{\lambda}{\lambda+n-1/2} \gamma_{n-1/2}(V, 1) \right]. \end{aligned} \quad (12.8.11)$$

Эта формула представляет особый интерес в случаях, когда волновые функции известны аналитически (например, $V = 0, 1, 1 - k^2, 2\eta r^{-1}$). Вместе с формулой сложения (11.5.14), которая впервые была доказана [371] на основании равенства (12.8.11), она, например, позволяет вычислить величину $\gamma_\mu(0, 1)$:

$$\gamma_\mu(0, 1) = \begin{cases} \frac{2\mu}{\pi} & \text{при целых положительных } \mu, \\ 0 & \text{при всех других } \mu. \end{cases} \quad (12.8.12)$$

Так, заметим мимоходом, что

$$\gamma_{n-1/2}(V_0, 1) = \gamma_{n-1/2}(V_0, 0).$$

Кроме того, при $V = 2\eta r^{-1}$ получаем

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\pi}{2p} \gamma_p(2\eta r^{-1}, 0) &= \frac{\Gamma(p + 1/2 - i\eta) \Gamma(p + 1/2 + i\eta)}{\Gamma(p + 1/2) \Gamma(p + 1/2)} \operatorname{ch}(\pi\eta), \\ \frac{\pi}{2p-1} \gamma_{p-1/2}(2\eta r^{-1}, 0) &= -\frac{\Gamma(p + i\eta) \Gamma(p - i\eta)}{\Gamma(p + 1/2) \Gamma(p + 1/2)} \operatorname{sh}(\pi\eta). \end{aligned} \quad (12.8.13)$$

Как следует из ограничений (12.8.2) и (12.8.3), коэффициенты c_μ , которые в «матричном методе» приводили бы либо к кулоновскому потенциалу, либо к константе, при $l \rightarrow \infty$ стремятся к бесконечности, как l . Следствием соотношения (12.8.11) являются интерполяционные формулы для функций Бесселя и Лагерра, например:

$$J_\lambda(r) J_{-\lambda}(r) = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda} \left\{ J_0^2(r) + \sum_1^\infty J_n^2(r) (\lambda^2 - n^2)^{-1} \lambda^2 \right\} \quad (12.8.14)$$

и их обобщения. Кроме того, формула (12.8.7) и в частных случаях величина $K_1^V(r, r')$, являющаяся производящей функцией для $\phi_l^V(r)$, тоже могут быть получены как следствия соотношения (12.8.11).

Предположим не только, что потенциал аналитичен внутри некоторого круга, но и что коэффициенты $\gamma_\mu(V, 0)$ удовлетворяют условиям, гарантирующим сходимость ряда $\sum \mu^{-2} |\gamma_\mu|$. Тогда для функции Йоста справедливо разложение (12.7.6). Из этого соотношения следует, что величина

$$\bar{f}_1(\lambda) = \cos[\pi\lambda] f_1(\lambda)$$

есть целая функция первого порядка $3/2\pi$ -типа, ограниченная на действительной оси и обладающая следующими дополнительными свойствами:

а) если функция $t(\lambda)$ есть отношение $\bar{f}_1(-\lambda)/f_1(\lambda)$, то при любых целых $q > 0$ выражения $t(q) - 1$ и $t(q + 1/2)$ принимают действительные значения и при $q \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, обеспечивая сходимость рядов

$$\sum_q q^{-1} |t(q) - 1| \quad \text{и} \quad \sum_q q^{-1} \left| t\left(q + \frac{1}{2}\right) \right|;$$

б)

$$\lim_{|\operatorname{Im} \lambda| \rightarrow \infty} \frac{f_1(\lambda) + f_1(-\lambda)}{2 \cos(\lambda\pi/2)} = i \lim_{|\operatorname{Im} \lambda| \rightarrow \infty} \frac{f_1(\lambda) - f_1(-\lambda)}{2 \sin(\lambda\pi/2)} = e^{i\pi/4}.$$

На основании теоремы Лагранжа — Валирона с помощью ряда алгебраических выкладок можно показать, что если функция $f_1(\lambda)$ удовлетворяет свойству «б», то справедлива формула типа (12.7.6). Поскольку обоснованность матричных методов гаранти-

руется условием (12.2.2) для коэффициентов γ_μ , приходим к очень важному заключению:

В классе аналитических потенциалов матричные методы применимы для тех потенциалов, для которых (динамическая) интерполяция функции Йоста является целой функцией экспоненциального типа.

Все интерполяционные формулы легко обобщаются на случай, когда потенциалы являются аналитическими функциями переменной r^α (с рациональными α). Кроме того, проводились исследования по обобщенному ВКБ-приближению в обратной задаче и существует элементарный вывод интерполяционных формул (гл. 15) [371].

§ 9. Ограниченность матричных методов

Матричные методы замечательны тем, что позволяют легко построить потенциал, который точно воспроизводит дифференциальное сечение. Ограничения их применимости уже отмечались в разных местах данной главы. Перечислим их.

1. Во всех матричных методах коэффициенты c_μ должны удовлетворять ограничениям типа (12.2.2). Следовательно, $f(r, r)$ — функция, голоморфная в любой конечной точке комплексной плоскости, кроме, может быть, точки ветвления при $r = 0$. Кроме того, функция $|f(r, r)|$ не может иметь произвольное асимптотическое поведение в плоскости r . При $|r| \rightarrow \infty$ функции $u_\mu(r)$ растут не быстрее $\exp |r|$. Используя рекуррентные соотношения (типа $J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = 2\nu r^{-1} J_\nu$), легко показать, что если ряд $\sum \mu^{-2} |c_\mu|$ сходится, то $|f(r, r)| = O(|r|^2 \exp [2|r|])$. Таким образом, если все μ — целые и полуцелые числа, то $f(r, r)$ есть целая функция экспоненциального типа с показателем 2.

2. Функции Йоста имеют особые динамические интерполяции. Как было показано в случае аналитического потенциала, такая интерполяция дает целую функцию экспоненциального типа, деленную на $\cos \pi l$. Можно показать [371], что такое продолжение фактически исключает потенциалы Юкавы

$$\int_{\mu_0}^{\infty} C(\mu) \exp[-\mu r] d\mu,$$

хотя они и представляют большой физический интерес.

3. Если ограничиться методом, в котором l принимает только целые значения, то станет видно, что этот метод не может дать даже четные аналитические потенциалы.

Недостатки этих методов обусловлены, очевидно, тем, что они возникли как методы «построения» потенциалов, а классы, в ко-

торых могут быть построены потенциалы, были обнаружены после. Это приводит нас к исследованиям, которым посвящена следующая глава.

Исторические замечания. Методы, основанные на разложении по произведениям $s_\mu u_\mu(r)$ $u_\mu(r')$, иногда называются в литературе методами Ньютона — Сабатье, поскольку Ньютон [318]¹⁾ ввел основную схему решения обратной задачи, изложенную в § 2, и доказал, что матрица M имеет обратную матрицу M^{-1} , а Сабатье [366—368, 370] построил матрицу M^{-1} и вектор v (§ 3), исследовал свойства потенциалов и функций Йоста (§ 4, 5), доказал правомерность метода (§ 5) и дал некоторые его обобщения (§ 6). Другие обобщения были предложены Коксом и Томпсоном [120, 121]. Результаты § 7, 8 были получены в основном этими четырьмя авторами (на них даны соответствующие ссылки). Кроме того, Редмонд [352] исследовал математические свойства матрицы M .

¹⁾ См. также [463]. — *Прим. ред.*

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ПО АМПЛИТУДЕ РАССЕЯНИЯ ПРИ ФИКСИРОВАННОЙ ЭНЕРГИИ

§ 1. Введение

В матричных методах сначала строят потенциалы в широком классе параметрических функций, а затем идентифицируют эти классы. Но возможен другой подход: сначала априори определить некоторый широкий класс функций, а затем искать ответа на вопросы, поставленные в гл. 11, § 1 (существование, единственность, способ построения и т. д.), в этом классе. При первом подходе можно получить потенциалы, не удовлетворяющие физическим требованиям. Во втором же подходе не всегда можно найти полный или хотя бы «достаточно полный» ответ на вопрос В, а также на следующие за ним вопросы (возможность построения, устойчивость и т. д.). Это относится к первым двум методам, излагаемым в данной главе. Третий метод, в котором сочетаются оба подхода, позволяет ответить на все вопросы, но классы фазово-эквивалентных потенциалов оказываются широкими и остается проблемой идентификация специальных физических классов.

У всех трех методов одинаковая математическая основа: вводится функция (первый и третий методы), или некоторый набор величин (второй и третий методы), связь которых с оператором Шредингера и амплитудой рассеяния установлена. Таким образом, суть всех трех методов сводится к выбору и описанию этих математических объектов для оператора Шредингера с потенциалом V из определенного класса.

§ 2. Метод построения потенциалов Юкавы

Мартен и Таргонский [298] рассмотрели обратную задачу для класса потенциалов Юкавы

$$V(r) = r^{-1} \int_{\mu}^{\infty} C(\alpha) \exp[-\alpha r] d\alpha, \quad (13.2.1)$$

где $\mu > 0$, а $C(\alpha) \in L^1(\mu, \infty)$. Они доказали, что если потенциал $V(r)$ принадлежит этому классу, то амплитуда рассеяния одно-

значно аналитически продолжается в область комплексных углов и имеет единственный скачок вдоль разреза в комплексной плоскости $\cos \theta$, по которому можно построить потенциал.

Математическим средством метода является аналитическое продолжение амплитуды рассеяния $T(t)$ в комплексную плоскость переданного импульса t :

$$t = -2(1 - \cos \theta). \quad (13.2.2)$$

(Единицы выбраны таким образом, что $k = 1$.) Физические значения переменной t принадлежат отрезку $[-4, 0]$. В случае, удовлетворяющем условию (13.2.1), амплитуда рассеяния $T(t)$ является

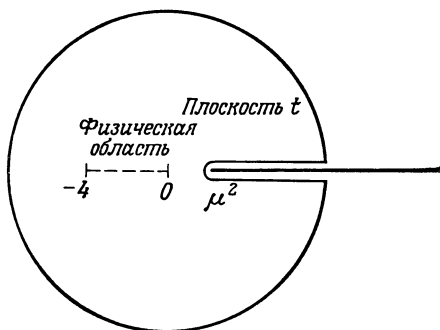


Рис. 10.

аналитической функцией в комплексной плоскости всюду, кроме разреза вдоль действительной оси от точки $t = \mu^2$ до бесконечности (рис. 10). Таким образом, амплитуда рассеяния $T(t)$ может быть однозначно аналитически продолжена во всю комплексную плоскость t . Следовательно, величина μ и скачок амплитуды $T(t)$ вдоль разреза определены *однозначно*, если амплитуда $T(t)$ известна в физической области. Этот скачок $2i\pi D(t)$ можно найти, решив следующие уравнения Фредгольма I рода:

$$T(t) = \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{D(t') dt'}{t' - t},$$

$$T_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + \quad (13.2.3)$$

$$+ t^n \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{D(t') dt'}{(t' - t) t'^n} \quad \text{при } -4 \leq t \leq 0,$$

где n , как показал Редже, должно быть конечным числом. Если одно из этих уравнений имеет решение, то уравнения с большим числом n дают точно такое же решение. Чтобы сделать такое заключение, необходимо, очевидно, знать функцию $T(t)$ сколь угодно точно. Но при $D(t) = 0$, когда известны значения функции

$T(t)$ только в n точках, ее всегда можно аппроксимировать полиномами по t .

Если скачок амплитуды рассеяния известен, то можно восстановить потенциал. Запишем амплитуду рассеяния следующим образом:

$$T = T_1 + \dots + T_n + R_n, \quad (13.2.4)$$

где T_n — n -й борновский член. Можно показать, что скачок вдоль разреза в области $\mu^2 < t < (n+1)^2\mu^2$ обусловлен только первыми n борновскими членами. При заданном n представим потенциал в виде суммы:

$$V = \sum_{l=1}^n V_l + V_{n+1}, \quad (13.2.5)$$

где

$$V_l = r^{-1} \int_{i\mu}^{(l+1)\mu} C(\alpha) \exp[-\alpha r] d\alpha, \quad l \leq n, \quad (13.2.6)$$

$$V_{n+1} = r^{-1} \int_{(n+1)\mu}^{\infty} C(\alpha) \exp[-\alpha r] d\alpha.$$

Можно показать, что в области $\mu^2 < t < (n+1)^2\mu^2$ справедливо следующее:

1) потенциал V_{n+1} не дает вклада в скачок амплитуды рассеяния;

2) потенциал V_n дает вклад в скачок амплитуды рассеяния только в первом борновском члене, скачок функции T_1 связан с величиной $C(\alpha)$ формулой

$$T_1(t) = \frac{C(\alpha) d\alpha}{t - \alpha^2}; \quad T_1(t + i\varepsilon) - T_1(t - i\varepsilon) = i\pi \frac{C(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}. \quad (13.2.7)$$

Таким образом, функцию $C(\alpha)$ можно построить итерациями. Предположим, что функция $C(\alpha)$ известна в интервале от $\alpha = \mu$ до $\alpha = n\mu$. Следовательно, известны величины $V_1, \dots, V_{n-1}$, и в области $n^2\mu^2 < t < (n+1)^2\mu^2$ мы имеем

$$\pi i \frac{C(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = 2\pi i D(t) - \text{скачок суммы } (T_2 + \dots + T_n).$$

Скачок суммы $T_2 + \dots + T_n$ известен, поскольку известны потенциалы $V_1, \dots, V_{n-1}$. Тем самым определяется потенциал V_n , и итерации можно продолжать далее.

Мартен и Таргонский указали необходимые (хотя и не обязательно достаточные) условия для амплитуды рассеяния, при которых она воспроизводится потенциалом из класса Юкавы (13.2.1).

Эти условия были получены путем конформного отображения области аналитичности амплитуды рассеяния в круг. Они позволяют также распространить метод на случай обменных сил. Метод, по-видимому, может быть также распространен на экспоненциально убывающие потенциалы ¹⁾.

Ясно, что численные расчеты при таком методе невозможны. Кроме того, поскольку метод основан на аналитическом продолжении [или решении уравнения (13.2.3)], он, вообще говоря, неустойчив по отношению к ошибкам измерения и ошибкам округления [412].

В связи с подходом Мартена и Таргонского следует отметить работы Шарапа и Фубини [89, 90].

§ 3. Методы, использующие спектр оператора Шредингера

А. Подход Редже — Лёффеля

Метод, предложенный Редже [354] и исчерпывающе исследованный Лёффелем [281], соответствует схеме, изложенной в гл. 11, при $V_0 = 1$. Это означает, что невозмущенное уравнение имеет вид

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} \phi_l^+(r) = l(l+1) \phi_l^+(r), \quad (13.3.1)$$

а функция ϕ_l^+ есть просто величина r^{l+1} с постоянным множителем. Пусть $r\phi_V(l + 1/2, r)$ — решение уравнения (11.1.2), которое при $r \rightarrow 0$ ведет себя как r^{l+1} :

$$\phi_V(l + 1/2, r) = \pi^{-1/2} \Gamma(l + 3/2) 2^{l+1} r^{-1} \phi_{l+1/2}^V(r). \quad (13.3.2)$$

Пусть $\mathcal{O}$ — класс локально-интегрируемых функций, для которых существует такое положительное число ε , что

$$\|V\|_{\mathcal{O}} = \int_0^1 r^{1-\varepsilon} |V(r)| dr + \int_1^\infty |V(r)| dr < \infty. \quad (13.3.3)$$

Ядро преобразования. Пользуясь методами функционального анализа, Лёффель [281] установил аналитические свойства и ограничения для функции ϕ , такой, что функции $f_{r_0}(\lambda + \varepsilon)$ и $f_r(\lambda + \varepsilon)$, соответствующие потенциалу V из класса $\mathcal{O}$,

$$f_{r_0}(\lambda + \varepsilon) = (2\lambda)^{-1} \int_0^r u [V(u) - 1] \left[1 - \left(\frac{u}{r} \right)^{2\lambda} \right] du, \quad (13.3.4)$$

$$f_r(\lambda + \varepsilon) = r^{-\lambda+1/2} \phi_V(\lambda, r) - 1 - f_{r_0}(\lambda + \varepsilon) \quad (r > 0, \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \varepsilon > 0)$$

¹⁾ Мартен, частное сообщение.

принадлежат классу $\mathcal{H}$ всех аналитических при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ функций f , для которых существует число M (зависящее от f), такое, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + i\tau)|^2 d\tau \leq M \text{ при любом } \sigma > 0. \quad (13.3.5)$$

По теореме Пели — Винера [330] класс $\mathcal{H}$ тождествен множеству преобразований Лапласа $\int_0^{\infty} \exp(-\rho\lambda) g(\rho) d\rho$ функций g , принадлежащих пространству $L^2(0, \infty)$. Следовательно, если функции g_{r0} и g_r связаны с функциями f_{r0} и f_r преобразованием Лапласа и если

$$h_r(\rho) = g_{r0}(\rho) + g_r(\rho), \quad (13.3.6)$$

то при $\operatorname{Re} \lambda > -\varepsilon$ имеем

$$\phi_V(\lambda, r) = r^{\lambda-1/2} + r^{\lambda-1/2} \int_0^{\infty} h_r(\rho) e^{-\rho(\lambda+\varepsilon)} d\rho, \quad (13.3.7)$$

откуда, положив

$$k_1^V(r, r') = -(rr')^{-1/2} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\varepsilon} h_r \left[\ln \left(\frac{r}{r'} \right) \right], \quad (13.3.8)$$

получаем при $0 < r' \leq r$

$$\phi_V(\lambda, r) = \phi_1(\lambda, r) - \int_0^r k_1^V(r, \rho) \phi_1(\lambda, \rho) d\rho. \quad (13.3.9)$$

Можно показать, что величина $(rr')^{-1/2} |k_1^V(r, r')|$ ограничена величиной $(rr')^{\varepsilon} C(r)$, где $C(r)$ — функция, конечная при конечных r , так что

$$\text{а) при любых } \sigma > -\varepsilon: \int_0^r |k_1^V(r, \rho)| \rho^{\sigma-1/2} d\rho < \infty, \quad (13.3.10)$$

$$\text{б) при любых } a > 0: k_1^V(r, \rho) \in L_2[(0, a) \times (0, a)]. \quad (13.3.11)$$

Очевидно, что $k_1^V(r, r')$ — независимое от λ искомое ядро преобразования.

Симметричное ядро. Соотношение (13.3.9) можно рассматривать как уравнение Вольтерра относительно функции $\phi_1(\lambda, \rho)$. Его решение дает «обратное» ядро преобразования $k_V^1(r, r')$, такое, что

$$\phi_1(\lambda, r) = \phi_V(\lambda, r) - \int_0^r k_V^1(r, \rho) \phi_V(\lambda, \rho) d\rho. \quad (13.3.12)$$

Из условия (13.3.11) легко следует (см., например, работу Трикоми [409]), что при любых положительных a функция $k_V^V(r, \rho)$ также принадлежит пространству $L^2[(0, a) \times (0, a)]$, а ядра $k_V^V(r, r')$ и $k_1^V(r, r')$ связаны соотношением

$$k_V^V(r, r') + k_1^V(r, r') = \int_{r'}^r k_1^V(r, \rho) k_V^V(\rho, r') d\rho \quad (0 < r' \leq r). \quad (13.3.13)$$

Введем симметричный оператор $\phi_1^V(r, r')$:

$$\phi_1^V(r, r') = \begin{cases} -k_V^V(r, r') + \int_0^{r'} k_V^V(r, \rho) k_V^V(\rho, r') d\rho & \text{при } 0 < r' \leq r, \\ \phi_1^V(r', r) & \text{при } 0 < r \leq r'. \end{cases} \quad (13.3.14)$$

На основании условий (13.3.10) и (13.3.11) и равенств (13.3.13) и (13.3.14) легко доказать, что при любых положительных a функция $\phi_1^V(r, r')$ принадлежит пространству $L^2[(0, a) \times (0, a)]$ и что при $r \geq r'$ выполняется соотношение

$$(rr')^{1/2} |\phi_1^V(r, r')| \leq (r, r')^\varepsilon k(r) [1 + (rr')^\varepsilon k(r')], \quad (13.3.15)$$

в котором $k(r)$ — функция, ограниченная при любых конечных r .

Основное уравнение. Путем простых алгебраических выкладок из определения (13.3.14), используя соотношение (13.3.13) (и теорему Фубини, чтобы изменить порядок интегрирования), можно получить следующее уравнение ($0 < r' \leq r$):

$$k_1^V(r, r') = \phi_1^V(r, r') - \int_0^r k_1^V(r, \rho) \phi_1^V(\rho, r') d\rho. \quad (13.3.16)$$

Очевидно, что уравнение (13.3.16) есть не что иное, как уравнение Редже—Ньютона (11.3.4). В то же время, поскольку оно было формально получено для самосопряженного дифференциального оператора

$$\tau = -\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{1}{4} + r^2 [V(r) - 1], \quad (13.3.17)$$

его можно назвать и уравнением Гельфанда—Левитана.

Связь между функцией ϕ_1^V и асимптотическим поведением функции $\phi(\lambda, r)$. Пусть $\psi_V^\pm(\lambda, r)$ и $\psi_{\bar{V}}(\lambda, r)$ — решения Йоста уравне-

при (11.1.2), такие, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{r \exp[\mp ir] \psi_V^\pm(\lambda, r)\} = 1, \quad (13.3.18)$$

и пусть $\psi_V^-(\lambda)$ и $\psi_V^+(\lambda)$ — функции Йоста, определенные таким образом, что при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} \phi_V(\lambda, r) = \psi_V^-(\lambda) \psi_V^+(\lambda, r) + \psi_V^+(\lambda) \psi_V^-(\lambda, r) + o(r^{-1}), \\ \frac{d}{dr} \phi_V(\lambda, r) = \psi_V^-(\lambda) \frac{d}{dr} \psi_V^+(\lambda, r) + \psi_V^+(\lambda) \frac{d}{dr} \psi_V^-(\lambda, r) + o(r^{-1}). \end{cases} \quad (13.3.19)$$

Обозначим через $\mathcal{D}_1$ пространство функций f , таких, что

$$f \in C_2(0, \infty) \cap L^2(0, \infty), \quad \tau(f) \in L^2(0, \infty), \quad (13.3.20)$$

и пусть $\mathcal{L} = \mathcal{D}(\theta)$ — подпространство функций f из пространства $\mathcal{D}_1$, таких, что при некотором действительном числе θ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W(f, r^{-1} \cos(r + \theta)) = 0. \quad (13.3.21)$$

Определим оператор $T (=T(\theta))$ на множестве $\mathcal{D}$ как $T(f) = \tau(f)$.

Лёффелю [281] удалось доказать, что для любого потенциала V , принадлежащего классу $\mathcal{O}$, определенному условием (13.3.3), оператор T является самосопряженным и имеет счетное множество отрицательных собственных значений. Затем, пользуясь методом Крейна, он доказал теорему о разложении функции $\phi_1^V(r, r')$ по регулярным решениям уравнения (11.1.2).

Теорема о разложении. *Каково бы ни было положительное число a и какова бы ни была функция $f \in L^2(0, a)$,*

$$\begin{aligned} \int_0^a f(\rho) \phi_1^V(r, \rho) d\rho &= \int_0^a f(\rho) \sum_{k=1}^{\infty} d_k^V \phi_1(\lambda_k^V, r) \phi_1(\lambda_k^V, \rho) d\rho - \\ &- (2\pi)^{-1} \text{l. i. m.}_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^{\omega} d\tau \gamma_V(i\tau) \phi_1(i\tau, r) \text{l. i. m.}_{b \rightarrow 0} \int_b^a f(\rho) \phi_1(i\tau, \rho) d\rho, \end{aligned} \quad (13.3.22)$$

где ¹⁾

$$a) \quad d_k^V = \left(\int_0^{\infty} |\phi_V(\lambda_k^V, \rho)|^2 d\rho \right)^{-1}, \quad (13.3.23)$$

¹⁾ Символ l.i.m. (limit in mean) означает «предел в среднем».

$$б) \quad \gamma_V(\lambda) = \frac{\psi_V^-(-\lambda) \exp [-i\theta] - \psi_V^+ (-\lambda) \exp [i\theta]}{\psi_V^-(\lambda) \exp [-i\theta] - \psi_V^+ (\lambda) \exp [i\theta]}. \quad (13.3.24)$$

Ряды в формуле (13.3.22) сходятся равномерно на любом компактном подмножестве множества $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Непрерывная функция $\gamma_V(i\tau)$ и последовательности d_k^V и λ_k^V , просто связанные со спектром оператора T , называются «спектральными данными». Разумеется, они соответствуют «спектральной функции», используемой в методе Гельфанда — Левитана, который рассматривался в первой части книги. Как и спектральной функцией, спектральными данными полностью и однозначно определяется потенциал в классе Θ . Таким образом, они могут служить тем существенным звеном между потенциалом V и асимптотическим поведением функции ϕ , которое мы искали.

Теоремы единственности. Для потенциалов из определенного выше класса Θ Лёффель [281] методами теории функций доказал следующие две теоремы единственности.

1. Пусть V_1 и V_2 — потенциалы из класса Θ , а ψ_1 и ψ_2 — соответствующие функции Йоста. Если при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ выполняется равенство $\psi_1^-(\lambda) = \psi_2^-(\lambda)$, то $V_1(r) = V_2(r)$ почти при всех положительных r .

2. Пусть $s_l = \exp [2i\delta_l]$, а $\sigma(\lambda)$ — функция, полученная интерполяцией величины s_l ($s_l = \sigma(l + 1/2)$) с помощью функций Йоста (так называемой интерполяцией Редже). И пусть V_1 и V_2 — потенциалы из класса Θ . Если для соответствующих интерполяций Редже σ_1 и σ_2 выполняется равенство $\sigma_1(\lambda) = \sigma_2(\lambda)$ при всех λ из области $\operatorname{Re} \lambda > 0$, в которой обе эти функции являются аналитическими, то $V_1(x) = V_2(x)$ почти при всех положительных x .

Таким образом, проблема единственности сводится к задаче интерполяции $s_l \rightarrow \sigma(l + 1/2)$. Тогда требование единственности может выполняться только для потенциалов из специальных классов, допускающих единственную интерполяцию величины s_l . Так обстоит дело, если аналитические свойства функций Йоста позволяют применить теорему единственности, например теорему Карлсона (для потенциалов Юкавы) или теорему Лагранжа — Валирона (для потенциалов, используемых в матричных методах).

Проблемы существования и построения. Если решение единственно в некотором выбранном подклассе класса Θ и если интерполяция Редже известна, то в некоторых случаях на вопрос о существовании решения можно дать утвердительный ответ [281], а также можно дать формальный ответ на вопрос В.

Самый известный пример — потенциал, обрезанный в точке $r = b > 0$:

$$V \in \mathcal{O}, \quad V(r) = 0 \text{ при } r > b > 0. \quad (13.3.25)$$

Обозначим через $\xi(\lambda)$ логарифмическую производную в точке $r = b$ от регулярного решения:

$$\xi_V(\lambda) = [\phi_V(\lambda, b)]^{-1} \left[\frac{d}{dr} \phi_V(\lambda, r) \right]_{r=b}. \quad (13.3.26)$$

Ясно, что функция $\xi_V(\lambda)$ взаимно-однозначно связана с функцией $\sigma(\lambda)$. Кроме того, легко видеть, что функция $\xi_V(\lambda)$ принадлежит классу аналитических при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ функций и допускает представление

$$\xi(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) b^{-1} - \sum_0^m b_j (\lambda - \lambda_j)^{-1} + \int_0^1 m(r) r^{\lambda-1/2} dr, \quad (13.3.27)$$

где $b_j \geq 0$, ($j = 0, 1, \dots, m$), $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m$, а $\operatorname{Im} \xi(i\tau) > 0$ при $\tau > 0$. Пусть $\mathcal{B}_b$ — класс таких функций. В этом классе есть подкласс, состоящий из множества функций $\xi(\lambda)$ следующего вида:

$$\xi(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) b^{-1} + \frac{P_{n-1}(\lambda)}{Q_n(\lambda)}, \quad (13.3.28)$$

где P_{n-1} — полином не более высокой степени, чем $n - 1$, а Q_n — полином степени n , причем P_{n-1} и Q_n не имеют общего делителя. В случае обрезанных потенциалов из соотношений (13.3.23), (13.3.24), (13.3.19) и (13.3.26) нетрудно получить, что спектральные данные непосредственно связаны с функцией $\xi(\lambda)$. Таким образом, если функция $\xi(\lambda)$ принадлежит классу (13.3.28), то спектральные данные задаются нулями и полюсами функций $\xi(\lambda)$ и $\operatorname{Im} \xi(i\tau)$. Кроме того, в этом случае уравнение Редже — Ньютона становится сепарабельным.

Хейнигер и Лёффель [198] вновь привлекли внимание к этим результатам и предложили алгоритмы, основанные на рациональных аппроксимациях $\xi^{(n)}$ функции ξ . Сходимость этих алгоритмов не доказана.

Б. Подход, основанный на полном наборе решений Йоста

Подход Редже — Лёффеля в значительной степени подобен подходу к обратной задаче рассеяния при фиксированном угловом моменте l , изложенному в первой части книги. Еще более сходен с ним и еще более формален следующий подход, который был предложен Бурде, Жиффоном и Предаззи [63].

Обозначим через $\mathcal{O}_1$ класс функций, первые два абсолютных момента которых на полупрямой $(0, \infty)$ ограничены. Для потенциала из класса $\mathcal{O}_1$ введем функцию Грина $G(\lambda, r, r')$, которая позволяет строить истинную радиальную волновую функцию по свободной радиальной волновой функции. Функцию Грина $G(\lambda, r, r')$ можно следующим образом выразить через функции, определенные в п. «А»:

$$(rr')^{-1} G(\lambda, r, r') = - \frac{\phi_V(\lambda, r_{<}) \psi_V^+(\lambda, r_{>})}{\psi_V^+(\lambda)}. \quad (13.3.29)$$

Пусть $h(r)$ — произвольная функция из пространства $L^2(0, \infty)$. Если $V \in \mathcal{O}_1$, то, как мы знаем, $\psi_V^+(\lambda, r)$ — целая функция аргумента λ^2 , а $\phi_V(\lambda, r)$ и $\psi_V^+(\lambda)$ — аналитические функции переменной λ при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Такие аналитические свойства позволяют вычислить интеграл

$$I(r) = \int \lambda d\lambda \int_0^\infty h(\rho) [-(r\rho)^{-1} G(\lambda, r, \rho)] d\rho \quad (13.3.30)$$

двумя способами, что в результате дает

$$h(r) = \int_0^\infty h(r') dr' \left\{ \sum_i \psi_V^+(\alpha_i, r) \psi_V^-(\alpha_i, r) M^{-2}(\alpha_i) + \right. \\ \left. + \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi_V^+(\lambda, r) \psi_V^-(\lambda, r)}{\psi_V^+(\lambda) \psi_V^+(-\lambda)} \lambda^2 d\lambda \right\}, \quad (13.3.31)$$

где $\{\alpha_i\}$ — последовательность нулей функции $\psi_V^+(\lambda)$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, а

$$M^2(\alpha_i) = \int_0^\infty |\psi_V^+(\alpha_i, r)|^2 dr. \quad (13.3.32)$$

Очевидно, что соотношением полноты (13.3.31) определяется «спектральная функция» $\rho_V(\lambda)$, такая, что в соотношении (13.3.31) $d\rho_V(\lambda)$ играет роль весового множителя при произведении $\psi_V^+(\lambda, r) \psi_V^-(\lambda, r)$. Пользуясь этим так же, как это делалось в методе Марченко, получаем формулу преобразования для решения Йоста:

$$\psi_V^+(\lambda, r) = \psi_{V_0}^+(\lambda, r) + \int_r^\infty \psi_{V_0}^+(\lambda, \rho) B(r, \rho) d\rho, \quad (13.3.33)$$

где ядро преобразования $B(r, r')$ не зависит от λ :

$$B(r, r') = \int \psi_{V_0}^+(\mu, r) \psi_V^+(\mu, r') d[\rho_{V_0}(\mu) - \rho_V(\mu)]. \quad (13.3.34)$$

Нетрудно показать, что ядро преобразования $B(r, r')$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных, такому же, как в гл. 11, и что потенциал $V(r)$ связан с функцией $B(r, r)$ соотношением

$$[V_0(r) - V(r)] = 2r^{-1} \frac{d}{dr} [rB(r, r)]. \quad (13.3.35)$$

Кроме того, можно ввести симметричное ядро

$$j(r, r') = \int \psi_{V_0}^+(\mu, r) \psi_{V_0}^+(\mu, r') d[\rho_{V_0}(\mu) - \rho_V(\mu)] \quad (13.3.36)$$

и связать его с ядром преобразования «уравнением Марченко»

$$B(r, r') = j(r, r') + \int_r^\infty B(r, \rho) j(\rho, r') d\rho. \quad (13.3.37)$$

Таким образом, если задана спектральная функция, ядро преобразования $B(r, r')$ определяется соотношением (13.3.36) и уравнением (13.3.37). Сама же спектральная функция в принципе определяется по функции Йоста как аналитическая функция в полуплоскости $\text{Re } \lambda \geq 0$. Стало быть, при таком подходе открываются пути исследования проблемы единственности, а если задано некоторое продолжение функции Йоста, то и проблемы существования. Но этот метод не дает способа построения решения. Метод Марченко в обратной задаче при фиксированном l был интересен тем, что симметричное ядро $f(r, r')$ легко определялось по амплитуде рассеяния. Здесь же ничего подобного нет, поскольку зависимость спектральной функции от амплитуды рассеяния очень сложна.

Изложенный подход был распространен [62] на случай сингулярных потенциалов с более высокой степенью сингулярности в начале координат, чем у центробежного члена.

§ 4. Полное решение

А. Схема полного решения

Как и в методе Редже — Лёффеля, здесь основой служат некоторые свойства функций $K(r, r')$ и $f(r, r')$, соответствующих некоторому классу потенциалов V . Функцию $f(r, r')$ оказывается возможным разбить на две части $f_I(r, r')$ и $f_E(r, r')$ так, что функция $f_I(r, r')$ имеет вид $\sum_{l=0}^{\infty} c_l u_l(r) u_l(r')$, а функция $f_E(r, r')$ принадлежит определенному классу функций. Функция $f(r, r')$ берется в качестве исходной функции в общей схеме гл. 11. Чтобы перейти к асимптотике при $r \rightarrow \infty$ и найти связь между величина-

ми $\{c_l\}$, f_E и $\{\delta_l\}$, необходимо исследовать асимптотическое поведение функций $K(r, r')$ и $f(r, r')$. Это возможно благодаря специальному представлению функций $K(r, r')$ и $f(r, r')$ при $r \rightarrow \infty$. Таким путем получают бесконечную систему уравнений, связывающую значения $\{c_l\}$, $\{\operatorname{tg} \delta_l\}$ и асимптотические величины, получающиеся из функции $f_E(r, r')$. Чтобы решить обратную задачу, нужно из определенного класса произвольно выбрать функцию $f_E(r, r')$, вычислить соответствующие асимптотические величины, затем подставить их в бесконечную систему уравнений и, наконец, решить эту задачу подобно тому, как это делается в первом матричном методе гл. 12. Таким образом, данный метод является конструктивным. Кроме того, поскольку функция, которая может быть выбрана произвольной, фигурирует в явном виде, легко ответить на все вопросы, поставленные в гл. 11.

В данном параграфе мы будем в точности следовать изложенной схеме. Мы полагаем исходный потенциал V_0 равным нулю и для простоты опускаем индексы 0 и V у символа K_0^V и других символов в тех случаях, когда это не будет приводить к путанице.

Б. Обоснование метода полного решения

Исторически полное решение было основано на свойствах функции $K(r, r')$, которые можно установить [374] интегрированием дифференциального уравнения в частных производных (11.2.5) с граничными условиями (11.2.6) и (11.2.7). На основе представления Римана для его решения оказалось возможным преобразовать это уравнение в эквивалентное ему интегральное уравнение

$$K(r, r') = K_0(r, r') \pm \int \int_{D^\pm} N(r, r', \rho, \rho') \times \\ \times \rho^2 V(\rho) K(\rho, \rho') d\rho d\rho', \quad (13.4.1)$$

где

$$K_0(r, r') = \\ = -\frac{1}{2} (rr')^{1/2} \int_0^{(rr')^{1/2}} J_0 \left[(r-r') \left(\frac{1-\rho^2}{rr'} \right)^{1/2} \right] \rho V(\rho) d\rho, \quad (13.4.2)$$

$$N(r, r', \rho, \rho') = \frac{1}{2} (rr')^{1/2} \times \\ \times (\rho\rho')^{-3/2} y' J_0 \left(V \sqrt{(rr' - \rho\rho')(r/r' + r'/r - \rho/\rho' - \rho'/\rho)} \right), \quad (13.4.3)$$

причем при $r \geq r'$ выбирается область интегрирования D^+ , а при $r \leq r'$ — область D^- (рис. 11). Таким образом, $K_0(r, r')$ — вполне определенное линейное преобразование потенциала; ядро интегрального уравнения (13.4.1) — простая функция потенциала

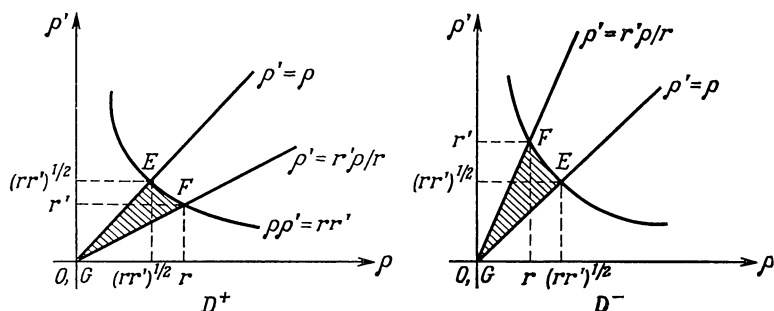


Рис. 14.

$V(\rho)$; уравнение (13.4.1) представляет собой уравнение Вольтерра и может быть решено методом последовательных приближений.

Пусть $\mathcal{E}$ — класс дважды дифференцируемых функций $V(r)$ ($0 < r < \infty$), таких, что при любом положительном ε величины $|V(r)|$, $r|V'(r)|$ и $r^2|V''(r)|$ есть $O(r^{\varepsilon-1})$ при $r \rightarrow 0$ и $O(r^{-\varepsilon-3})$ при $r \rightarrow \infty$. Заметим, что данное требование дифференцируемости удобно для установления формул типа (13.4.4), но, по-видимому, не является необходимым, если приемлема очень слабая сходимость. Полное исследование свойств решений уравнений (13.4.1) для потенциалов $V \in \mathcal{E}$ дало следующие результаты [374].

Свойства функции $K(r, r')$. Мы отметим здесь только те свойства, которые имеются при $r \rightarrow \infty$. Оказывается, что для функции $K(r, r')$ и ее производной по r справедливо соотношение

$$\left(1 - i \frac{\partial}{\partial r}\right) K(r, r') = -ir' \mathcal{K}(r') \exp[ir] + K_N(r, r'), \quad (13.4.4)$$

где $\mathcal{K}(r)$ — функция, ограниченная по абсолютной величине величиной $C(1+r)^{-1/2}$, а $K_N(r, r')$ — функция, «пренебрежимо малая» при $r \rightarrow \infty$ в том смысле, что при $r \rightarrow \infty$ имеем

$$K_N(r, r') \rightarrow 0, \quad (13.4.5)$$

$$\int_0^r |K_N(r, r')| [r'(1+r')]^{-1} dr' \rightarrow 0.$$

Чем интересен этот результат, можно видеть из формулы (11.2.4) при $V_0 = 0$. Полагая в соотношении (11.2.4) $r \rightarrow \infty$, с учетом равенства (13.4.4) и асимптотических выражений (13.4.5) и (11.1.8) легко получаем замечательную формулу

$$\int_0^\infty \mathcal{K}(\rho) u_l(\rho) \rho^{-1} d\rho = \exp\left[-il \frac{\pi}{2}\right] (1 - A_l \exp[i\delta_l]). \quad (13.4.6)$$

Таким образом, нам удалось связать функцию одной переменной с последовательностью $\{\delta_l\}$, и мы можем надеяться, что обратная задача сведется к решению уравнения (13.4.6) относительно функции $\mathcal{K}(\rho)$ и построению по этой функции потенциала $V(\rho)$. Хотя «в принципе» такой подход и возможен, он очень сложен, и мы не будем его излагать подробно.

Свойства функции $f(r, r')$. Свойства функции $f(r, r')$ можно установить аналогичным образом. Из дифференциального уравнения в частных производных (11.3.1) следует, что

$$f(r, r') = -\frac{1}{2}(rr')^{1/2} \times \\ \times \int_0^{(rr')^{1/2}} J_0\left[(r-r')\left(\frac{1-\rho^2}{rr'}\right)^{1/2}\right] \rho \omega(\rho) d\rho, \quad (13.4.7)$$

где

$$\omega(r) = -2r^{-1} \frac{d}{dr} [r^{-1} f(r, r)]. \quad (13.4.8)$$

Таким образом, функция $f(r, r')$ точно так же связана с функцией $\omega(r)$, как и функция $K_0(r, r')$ связана с потенциалом $V(r)$ [функция $K_0(r, r')$ удовлетворяет симметричному дифференциальному уравнению в частных производных]. Если бы борновское приближение было точным, то потенциал $V(r)$ сразу бы находился по функции $K_0(r, r')$, которая в этом случае равна $f(r, r')$ (аналогичные результаты см. в гл. 16, § 2). Свойства функции $f(r, r')$ можно также определить по свойствам функции $K(r, r')$, пользуясь соотношением (11.5.6):

$$f(r, r') = K(r, r') + \int_0^r K(\tau, r) K(\tau, r') \tau^{-2} d\tau. \quad (13.4.9)$$

В частности, исходя из ограничений на функцию $K(r, r')$ при $r' \rightarrow \infty$, легко показать, что величина $r^{-1} [f(r, r) - K(r, r)]$ стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\int_0^\infty \rho \omega(\rho) d\rho = \int_0^\infty \rho V(\rho) d\rho = V_0. \quad (13.4.10)$$

Из соотношения (13.4.9) следуют также другие свойства функции $\omega(r)$:

- а) функция $r\omega(r)$ непрерывна при любых r ;
- б) $r\omega(r) = O(r^\varepsilon)$ при $r \rightarrow 0$;
- в) существуют действительные числа α , β и A , определяющие функцию

$$\Omega(r) = 4r^{-2} (\alpha \cos 2r + \beta \sin 2r) \theta(r - A),$$

такую, что

$$\int_0^{\infty} \rho \Omega(\rho) d\rho = 0$$

и, каково бы ни было положительное число ε' ,

$$\omega(r) + \Omega(r) = O(r^{-3+\varepsilon'}) \text{ при } r \rightarrow \infty;$$

г) функция $r\omega'(r)$ существует и непрерывна при любом $r \geq 0$, а $r\omega'(r) = O(r^{-1+\varepsilon'})$ при $r \rightarrow \infty$.

Пусть Ω — класс функций $\omega(r)$, обладающих такими свойствами. Теперь виден путь к исследованию обратной задачи. Известно, что матричный метод, изложенный в гл. 12, § 2, требует, чтобы произведение $r\omega(r)$ принадлежало особому подклассу класса Ω (подклассу четных целых функций экспоненциального типа с показателем 2), так что оно полностью определяется последовательностью $\{c_l\}$. Поэтому можно попытаться разбить функцию $r\omega(r)$ на две части, одна из которых будет принадлежать этому особому подклассу, а другая — выбираться как дополнение к ней.

Для этого удобно ввести синус-преобразование Фурье функции $r^{-1}f(r, r)$. По теореме Парсеваля выражение (13.4.7) легко преобразуется к виду

$$f(r, r') = 4rr' \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} w^{-1} \sin wu F(u) du, \quad (13.4.11)$$

где

$$w = [(r - r')^2 + 4rr'u^2]^{1/2}, \quad (13.4.12)$$

так что

$$\frac{1}{2} r^{-1} f(r, r) = \text{l. i. m.} \int_0^{\infty} \sin[2ru] F(u) du. \quad (13.4.13)$$

На основании равенств (13.4.10) и (13.4.13) и свойств «а»—«в» функции $\omega(r)$ легко показать, что функция $F(u)$ имеет вид

$$F(u) = -(2\pi)^{-1} V_0 (u^{-1} - 1) \theta(1 - u) + \psi(u), \quad (13.4.14)$$

где θ — функция Хевисайда, а $\psi(u)$ — функция, обладающая следующими свойствами:

а') функции $\psi(u)$ и $u\psi(u)$ принадлежат пространству $L^2(0, \infty)$;
б') функция $u\psi(u)$ непрерывна всюду, кроме, может быть, точки $u = 1$ (в которой возможна логарифмическая сингулярность), и стремится к нулю при $u \rightarrow \infty$;

в') существует число γ (которое связано с числами α и β для функции $\Omega(r)$), такое, что функция $[u\psi'(u) - \gamma(1 - u)^{-1}]$ принадлежит пространству $L^{1/\varepsilon'}(0, \infty)$ при любых $\varepsilon' \in (0, 1)$.

Кроме того, на основании свойства «г» функции $\omega(r)$ легко доказать, что

$g')$ каково бы ни было число $\varepsilon' \in]0, 1[$, и $\psi(u) = O(u^{-1+\varepsilon'})$ при $u \rightarrow \infty$.

Другие свойства функции $f(r, r')$ могут быть выведены из соответствующих свойств функции $K(r, r')$ с помощью соотношения (13.4.9). В частности, получается формула, подобная формуле (13.4.4):

$$\left(1 - i \frac{\partial}{\partial r}\right) f(r, r') = -ir' \mathcal{F}(r') \exp[ir] + f_N(r, r'), \quad (13.4.15)$$

где $f_N(r, r')$ — функция, «пренебрежимо малая» при $r \rightarrow \infty$.

В. Прямая задача в случае $V \in \bar{\mathcal{E}}$

Если потенциал V принадлежит классу $\mathcal{E}$, то применима вся схема гл. 11 и потенциал V можно взаимно-однозначно связать с функцией $f(r, r)$, т. е. [благодаря равенству (13.4.11) и обратному соотношению] с функцией $F(u)$. Таким образом, в силу равенства (13.4.14) величины V_0 и $\psi(u)$ полностью определяют потенциал V в классе $\mathcal{E}$. В дальнейшем предположим, что потенциал V принадлежит некоторому классу $\bar{\mathcal{E}}$ потенциалов, удовлетворяющих следующим условиям:

а") схема гл. 11 применима почти при всех положительных r и r' ;

б") справедливы соотношения (13.4.4) — (13.4.10) с функцией $\omega(r)$, удовлетворяющей условиям «а»—«г»;

в") потенциал $V_0 = \int_0^\infty \rho |V(\rho)| d\rho$ — конечная величина, но не обязательно ограничен.

Очевидно, что $\mathcal{E} \subset \bar{\mathcal{E}}$. Наряду с этим для потенциала из класса $\bar{\mathcal{E}}$ справедливы равенства (13.4.10) — (13.4.15), а функция $\psi(u)$ удовлетворяет условиям «а'» — «г'». Из соотношений (13.4.4), (13.4.15) и уравнения (11.3.4) получаем

$$\mathcal{K}(r') = \mathcal{F}(r') - \int_0^\infty \mathcal{K}(\rho) \phi(\rho, r') d\rho, \quad (13.4.16)$$

где $\phi(r, r')$ — функция, даваемая выражением (11.3.6).

Данное уравнение представляет собой асимптотическую форму уравнения Редже — Ньютона. Следовательно, это аналог уравнения (12.2.5а) для потенциалов $V \in \bar{\mathcal{E}}$. Покажем, что соотношение (12.2.5а) можно получить как следствие уравнения (13.4.16). Для этого разобьем функции $F(u)$ на две части:

$$F(u) = F_I(u) + F_E(u), \quad (13.4.17)$$

где

$$F_I(u) = F(u) \theta(1 - u). \quad (13.4.18)$$

В силу условия «г'» интеграл в формуле (13.4.13) сходится равномерно. С учетом разбиения функции $F(u)$ можно ввести две функции:

$$\overline{\phi}_I(r, r') = 4 \int_0^1 w^{-1} \sin(w) u F(u) du + \delta (rr')^{-1} \sin r \sin r', \quad (13.4.19)$$

$$\overline{\phi}_E(r, r') = 4 \int_1^\infty w^{-1} \sin(w) u F(u) du - \delta (rr')^{-1} \sin r \sin r', \quad (13.4.20)$$

где

$$F(u) = 2\pi^{-1} \int_0^\infty \sin(2ru) r^{-1} \phi(r, r) dr, \quad (13.4.21)$$

а δ — константа, выбранная так, чтобы для потенциала из класса $\mathcal{E}$ функции $\overline{\phi}_I(r, r)$ и $\overline{\phi}_E(r, r)$ подобно функции $\phi(r, r)$ вели себя как r^e при $r \rightarrow 0$:

$$\delta = 2 \lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} \int_0^\infty \sin(2ru) F(u) du = -4 \int_0^1 u F(u) du. \quad (13.4.22)$$

Так же как функция $\mathcal{F}(r)$ находилась по функции $\phi(r, r')$ на основании соотношения (13.4.15), функции $\overline{\mathcal{F}}_I(r)$ и $\overline{\mathcal{F}}_E(r)$ определяются по функциям $\overline{\phi}_I(r, r')$ и $\overline{\phi}_E(r, r')$.

Введем величины $\mathcal{K}_I(r)$ и $\mathcal{K}_E(r)$:

$$\mathcal{K}_I(r) = \overline{\mathcal{F}}_I(r) - \int_0^\infty \mathcal{K}(\rho) \phi_I(\rho, r) d\rho, \quad (13.4.23)$$

$$\mathcal{K}_E(r) = \overline{\mathcal{F}}_E(r) - \int_0^\infty \mathcal{K}(\rho) \phi_E(\rho, r) d\rho. \quad (13.4.24)$$

Очевидно, что равенство (13.4.16) выполняется в том и только в том случае, если

$$\mathcal{K}_E(r) + \mathcal{K}_I(r) = \mathcal{K}(r). \quad (13.4.25)$$

Исследуем теперь свойства функции $\mathcal{K}_I(r)$. Из равенства (13.4.19) и хорошо известной формулы сложения легко получаем

$$\overline{\phi}_I(r, r') = (rr')^{-1} \sum_0^\infty c_l u_l(r) u_l(r'), \quad (13.4.26)$$

где

$$c_l = 4(2l+1) \int_0^1 F(u) P_l(1-2u^2) u du + \delta \delta_0^l, \quad (13.4.27)$$

причем δ_0^l — символ Кронекера. Коэффициент c_0 равен нулю, поскольку число δ удовлетворяет равенству (13.4.22). Аналогичное выражение получается для функции $\bar{\mathcal{F}}_I(r)$. Подставляя эти выражения в формулу (13.4.23) и учитывая равенство (13.4.6), получаем

$$\mathcal{K}_I(r) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l A_l \exp \left[i \left(\delta_l - l \frac{\pi}{2} \right) \right] r^{-1} u_l(r). \quad (13.4.28)$$

Подставив это выражение в формулу (13.4.6), получаем бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned} A_l \exp \left[i \left(\delta_l - l \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ = \exp \left[-il \frac{\pi}{2} \right] - \int_0^{\infty} \mathcal{K}_E(\rho) u_l(\rho) \rho^{-1} d\rho - \\ - \sum_{l'} c_{l'} L_{ll'}(\infty) A_{l'} \exp \left[i \left(\delta_{l'} - l' \frac{\pi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (13.4.29)$$

соответствующую системе (12.2.5а) в этом общем случае. Из выражения (13.4.27) с учетом формулы (13.4.14) и свойств «а»—«в'» легко показать, что для потенциала из класса $\bar{\mathcal{E}}$ существует положительное число ε'' , такое, что

$$c_l - (2\pi)^{-1} V_0 = O(l^{-1-\varepsilon''}) \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

Предположим теперь, что нам задана функция $\bar{\phi}_E(r, r')$. Ее можно, например, построить по формулам (13.4.21) и (13.4.20), произвольно выбрав функцию $\omega(r)$, удовлетворяющую условиям «а»—«г».

Пусть $\mathcal{Y}_E(r, r')$ — резольвента функции $\bar{\phi}_E(r, r')$:

$$\mathcal{Y}_E(r, r') = \bar{\phi}_E(r, r') - \int_0^{\infty} \mathcal{Y}_E(r, \rho) \bar{\phi}_E(\rho, r') d\rho. \quad (13.4.30)$$

Тогда из равенств (13.4.24) и (13.4.25) можно вывести формулу, связывающую функции $\mathcal{K}_E(r)$ и $\bar{\phi}_E(r, r')$:

$$\mathcal{K}_E(r) = \mathcal{Y}_E(r) - \int_0^{\infty} \mathcal{K}_I(\rho) \mathcal{Y}_E(\rho, r) d\rho, \quad (13.4.31)$$

где

$$\mathcal{Y}_E(r) = \overline{\mathcal{F}}_E(r) - \int_0^\infty \overline{\mathcal{F}}_E(\rho) \mathcal{Y}_E(\rho, r) d\rho. \quad (13.4.32)$$

Если величина $\overline{\phi}_E(r, r')$ выбрана, то функцию $\mathcal{Y}_E(r, r')$ почти всегда можно построить как решение уравнения Фредгольма (13.4.30) с ядром Гильберта — Шмидта [375, 376] и, следовательно, найти функцию $\mathcal{Y}_E(r)$. Подставляя выражение (13.4.31) в уравнение (13.4.29), получаем бесконечную систему линейных уравнений

$$A_l \exp \left[i \left(\delta_l - l \frac{\pi}{2} \right) \right] = (1 - B_l \exp [i \delta_l]) \exp \left[i \left(l \frac{\pi}{2} \right) \right] - \sum_{l'} c_{l'} (L_{ll'}(\infty) - g_{ll'}) A_{l'} \exp \left[i \left(\delta_{l'} - l' \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (13.4.33)$$

где величины B_l , σ_l и $g_{ll'}$ определены следующим образом:

$$B_l \exp \left[i \left(\sigma_l - l \frac{\pi}{2} \right) \right] = \int_0^\infty \mathcal{Y}_E(\rho) u_l(\rho) \rho^{-1} d\rho, \quad (13.4.34)$$

$$g_{ll'} = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{Y}_E(x, y) u_l(x) u_{l'}(y) x^{-1} y^{-1} dx dy. \quad (13.4.35)$$

Величину $g_{ll'}$ можно также выразить через величины B_l и σ_l :

$$g_{ll'} = [l(l+1) - l'(l'+1)]^{-1} \left\{ B_{l'} \sin \left[\sigma_{l'} + \frac{1}{2} \pi (l - l') \right] - B_l \sin \left[\sigma_l + \frac{1}{2} \pi (l' - l) \right] + B_l B_{l'} \sin \left[\sigma_l - \sigma_{l'} - \frac{1}{2} \pi (l - l') \right] \right\}. \quad (13.4.36)$$

Кроме того, можно показать, что существует положительное число ε'' , такое, что $B_l = O(l^{-1-\varepsilon''})$ при $l \rightarrow \infty$ [375, 376].

Г. Обратная задача в классе $\overline{\Theta}$

Пусть Θ_E — класс функций $\overline{\phi}_E(r, r')$, которые по формулам (13.4.24) и (13.4.20) выражаются через функцию $\omega(r)$, удовлетворяющую условиям «а»—«г». Обозначим через $\overline{\Theta}$ класс потенциалов, для которых выполняются следующие условия:

- а''') коэффициенты c_l равномерно ограничены,
- б''') функция $\overline{\phi}_E(r, r')$ принадлежит классу Θ_E ,
- в''') применима рассматриваемая схема решения.

Очевидно, что $\mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{E}} \subset \overline{\Theta}$. Поскольку коэффициент c_0 может быть отличным от нуля, класс $\overline{\Theta}$ содержит потенциалы,

которые ведут себя как r^{-1} при $r \rightarrow 0$. Так как на асимптотическое поведение коэффициентов c_l не было наложено ограничений, класс $\bar{\mathcal{O}}$ содержит также потенциалы, которые на бесконечности убывают лишь как $r^{-3/2}$ (или еще медленнее). Таким образом, класс $\bar{\mathcal{O}}$ определенно шире класса $\mathcal{E}$ (табл. 1).

Таблица 1

Операторные методы (определение множеств)

Множество $\mathcal{E}$	Множество $\bar{\mathcal{E}}$	Множество $\bar{\mathcal{O}}$
Определяется	Определяется следующими условиями:	Определяется следующими условиями:
1) простыми свойствами функции $V(r)$ [или $K(r, r')$], гарантирующими, что выполняются следующие условия:	1) $\int_0^r V(\rho) d\rho < \infty$ при любом r	2) применима рассматриваемая схема решения
2) применима рассматриваемая схема решения	2) применима рассматриваемая схема решения	5) $\bar{\varphi}_E(r, r') \in \mathcal{O}_E$
3) функция $\omega(r)$ [или $f(r, r')$] обладает свойствами «а» — «г»	3) функция $\omega(r)$ обладает свойствами «а» — «г», так что	6) величина c_l равномерно ограничена
4) функция $\psi(u)$ обладает свойствами «а'» — «г'»	5) $\bar{\varphi}_E(r, r') \in \mathcal{O}_E$ 6) $c_0 = 0, c_l \rightarrow \lim (l \rightarrow \infty)$	

$$|\mathcal{E} \subset \bar{\mathcal{E}} \subset \bar{\mathcal{O}}|$$

Предположим теперь, что нам задан набор фазовых сдвигов $\{\delta_l\}$. Выберем функцию $\bar{\varphi}_E(r, r')$ из класса $\mathcal{O}_E$ и с помощью уравнения (13.4.30) построим функцию $\mathcal{Y}_E(r, r')$, а с помощью уравнения (13.4.31) — функцию $\mathcal{Y}_E(r)$. Таким образом, величины B_l , σ_l и $g_{ll'}$ находятся из соотношений (13.4.34) — (13.4.36). Тогда, как и в гл. 12, положим $a_l = c_l A_l \cos \delta_l$ и введем обозначения

$$\eta_l = B_l (\sin \sigma_l - \cos \sigma_l \operatorname{tg} \delta_l),$$

$$\bar{h}_{ll'} = \begin{cases} (-1)^{1/2(l-l')} g_{ll'} & \text{при четных } (l-l') \neq 0, \\ 0 & \text{при нечетных } (l-l') \\ & \text{и при } l-l' = 0, \end{cases} \quad (13.4.37)$$

$$h_{ll'} = \begin{cases} (-1)^{1/2(l-l'-1)} g_{ll'} & \text{при нечетных } (l-l'), \\ 0 & \text{при четных } (l-l'). \end{cases}$$

Умножив обе части уравнений (13.4.33) на $\exp [-i (\delta_l - l (\pi/2))]$, получим эквивалентную систему уравнений

$$A_l [1 + c_l (L_{ll}(\infty) - g_{ll})] = \exp [-i \delta_l] - B_l \exp [i (\sigma_l - \delta_l)] - \\ - \sum_{l' \neq l} c_{l'} (L_{ll'}(\infty) - g_{ll'}) A_{l'} \exp \left[i (\delta_{l'} - \delta_l) + i (l - l') \frac{\pi}{2} \right]. \quad (13.4.38)$$

Мнимая часть системы (13.4.38) дает фундаментальную систему уравнений

$$\operatorname{tg} \delta_l + \eta_l = \sum_{l'} M_{ll'} a_{l'} (1 + \operatorname{tg} \delta_l \operatorname{tg} \delta_{l'}) + \\ + \sum_{l'} a_{l'} [h_{ll'} (1 + \operatorname{tg} \delta_l \operatorname{tg} \delta_{l'}) + \bar{h}_{ll'} (\operatorname{tg} \delta_{l'} - \operatorname{tg} \delta_l)] \quad (13.4.39)$$

или, в матричных обозначениях,

$$(\eta + \operatorname{tg} \Delta) \mathbf{e} = M (1 + S) \mathbf{a}, \quad (13.4.40)$$

где

$$S = M^{-1} \operatorname{tg} \Delta M \operatorname{tg} \Delta + M^{-1} \operatorname{tg} \Delta h \operatorname{tg} \Delta + \\ + M^{-1} h + M^{-1} \bar{h} \operatorname{tg} \Delta - M^{-1} \operatorname{tg} \Delta \bar{h}. \quad (13.4.41)$$

Очевидно, что это — обобщение системы (12.2.9).

Предположим теперь, что фазовый сдвиг ведет себя как $l^{-3-\varepsilon}$ при $l \rightarrow \infty$. С учетом ограничения, полученного для величин B_l , можно доказать [375, 376], что S -матрица такова, что почти для любого набора фазовых сдвигов существует матрица, обратная матрице $(1 + S)$, и вектор $\mathbf{a}$ дается формулой

$$\mathbf{a} = (1 + S)^{-1} \{ M^{-1} (\eta + \operatorname{tg} \Delta) \mathbf{e} + \alpha \mathbf{v} \}, \quad (13.4.42)$$

где α — произвольный параметр, а $\mathbf{v}$ — вектор, заданный формулами (12.3.3). После того как найдены величины a_l , амплитуды A_l легко найти, решив действительную часть системы (13.4.38), а по значениям A_l и a_l можно вычислить коэффициенты c_l .

Результаты можно проанализировать так, как это было сделано в гл. 12, § 4 и 5. Если функция $\phi_E(r, r')$ выбрана так, что $B_l = O(l^{-3-\varepsilon})$ при $l \rightarrow \infty$, то почти все сказанное там остается справедливым. Но в самом общем случае не доказано, что все потенциалы, которые могут быть получены таким путем, имеют физический смысл, хотя это весьма правдоподобно.

Д. Применение метода полного решения

Изложенный метод дает для потенциалов из класса $\mathcal{E}$ ответ на все вопросы, сформулированные в гл. 11. На вопросы А — Г ответ утвердительный, а на вопрос Б — отрицательный. Более

того, метод показывает, что с помощью функции $F(u)$ при $1 \leq u < \infty$ можно исследовать различия между всеми фазово-эквивалентными потенциалами. Если выбрать в классе $\mathcal{E}$ подкласс потенциалов, характеризуемых, например, заданными ограничениями на производные, то значение функции $F(u)$ ($1 \leq u < \infty$) уменьшается с усилением ограничений, а в случае не зависящих от энергии потенциалов вообще стремится к нулю при $E \rightarrow \infty$. Таким образом, различия между фазово-эквивалентными потенциалами меньше, если потенциалы гладкие, и уменьшаются с увеличением энергии E . Этот вывод был намечен и проверен путем численных расчетов в работе Сабатье и Нгуен Ван Фу [383]. Влияние параметров на область разброса фазово-эквивалентных потенциалов показано на рис. 12 — 17. Если не считать одной попытки предварительного характера Сабатье [372], то процитированная работа — единственное имеющееся исследование по вопросу расхождений между фазово-эквивалентными потенциалами. В ней дается единственный имеющийся ответ на вопрос Д, и она открывает путь к практическому применению теории обратной задачи ¹⁾.

Полного ответа на вопрос Д пока еще нет. Но при изложенном выше методе построения решения нетрудно проверить непрерывность полученного отображения $\{\delta_i\} \rightarrow V(r)$, если набор фазовых сдвигов не является «исключительным», и тем самым показать устойчивость метода в тех случаях, которые представляют интерес.

Е. Более общее обоснование метода полного решения

Наше исследование метода полного решения основывалось на предположении о существовании уравнений (13.4.4) — (13.4.10) и о том, что функция $\omega(r)$ обладает свойствами «а»—«г». Это

¹⁾ Результаты Сабатье и Нгуена Ван Фу воспроизведены на рис. 12—17 лишь частично. Для упрощения численных расчетов эти авторы пользовались асимптотическими выражениями для некоторых функций и ограничивались сравнительно грубой дискретизацией. Как показали более точные вычисления, проведенные недавно Кудрэ на более мощной ЭВМ, такие приближения, сделанные Сабатье и Нгуеном Ван Фу, частично ответственны за общую тенденцию полученных результатов — занижение по сравнению с исходным потенциалом. В случаях, представленных на рис. 13, 16 и 17, различия между старыми и новыми результатами весьма невелики. Но на рис. 12, 14 и 15 эти различия существенны и к тому же значительно сильнее осциллируют. Кроме того, выполненные недавно вычисления показали, что усредненная кривая не чувствительна к ошибкам округления (или эксперимента), но к этим ошибкам чувствительно положение осцилляций. Любопытно, что эти более точные результаты лучше согласуются с теоретическими выводами Сабатье и Нгуена Ван Фу, чем их первоначальные результаты. Мы благодарны г-же Кудрэ за то, что она обратила на это наше внимание и предоставила свои результаты до их опубликования. Мы также благодарны Нгуену Ван Фу за то, что он повторно выполнил численные расчеты для данных рисунков.

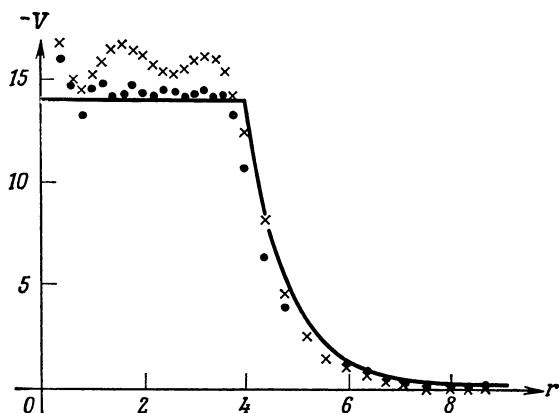


Рис. 12. Восстановление по фазовым сдвигам потенциала

$$V_I = \begin{cases} -14 \text{ МэВ при } r \leq 4 \text{ ферми,} \\ -14e^{(4-r)/0,85} \text{ МэВ при } r > 4 \text{ ферми (сплошная линия).} \end{cases}$$

Крестики — при $E = 50$ МэВ, кружки — при $E = 400$ МэВ.

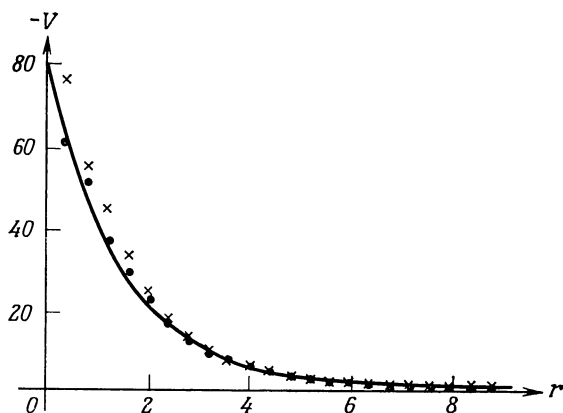


Рис. 13. Восстановление по фазовым сдвигам потенциала $V_I = -80e^{-r/1,50}$ МэВ (сплошная линия).

Крестики — при $E = 30$ МэВ, кружки — при $E = 200$ МэВ.

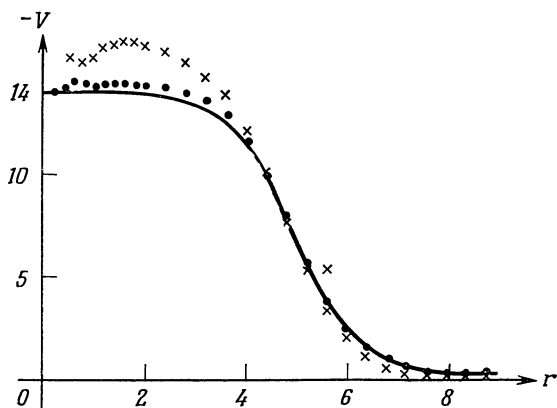


Рис. 14. Восстановление по фазовым сдвигам потенциала $V_I = -14 \times (1 + e^{(r-5)/0,65})^{-1}$ МэВ (сплошная линия).

Крестики — при $E = 50$ МэВ, кружки — при $E = 400$ МэВ.

Рис. 15. Восстановление по фазовым сдвигам потенциала формы прямоугольной ямы глубиной 14 МэВ и радиусом 5 ферми (сплошная линия).

Крестики — при $E = 50$ МэВ, кружки — при $E = 400$ МэВ.

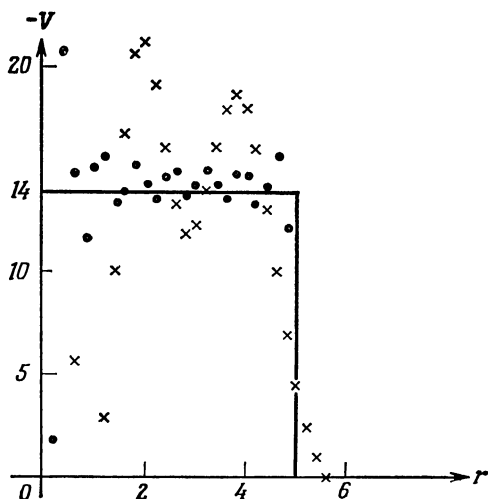


Рис. 16. Восстановление по фазовым сдвигам потенциала $V_I = -14e^{-(r/3,5)^2}$ МэВ (сплошная линия).

Крестики — при $E = 7,5$ МэВ, кружки — при $E = 10$ МэВ.

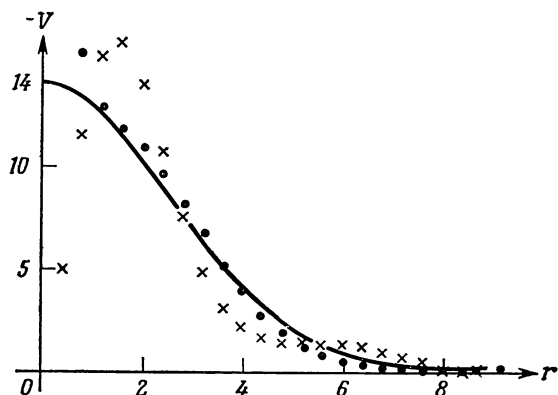
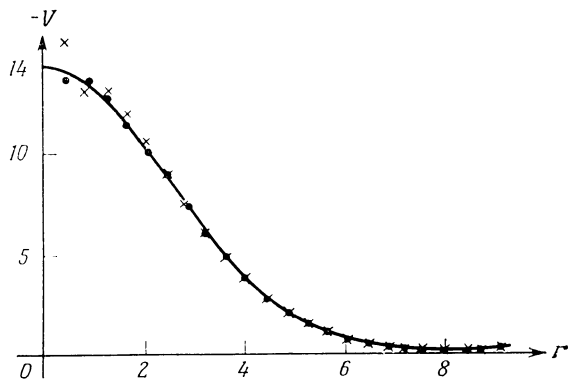


Рис. 17. Восстановление по фазовым сдвигам потенциала $V_I = -14e^{-(r/3,5)^2}$ МэВ (сплошная линия).

Крестики — при $E = 50$ МэВ, кружки — при $E = 200$ МэВ.



предположение выполняется для $V \in \mathcal{E}$. Но из свойств «а»—«г» были получены свойства «а'»—«г'» функции $F(u)$, являющиеся более слабыми. Чтобы вывести уравнения (13.4.4) — (13.4.10) и свойства функции $\omega(r)$ непосредственно из свойств функции $F(u)$, достаточно следующего, более жесткого требования к асимптотическому поведению функций $F(u)$ и $F'(u)$: $F(u)$, $F'(u) = O(u^{-3-\varepsilon})$. Но в обратной задаче мы работали в классе потенциалов $\bar{\mathcal{O}}$, более широком, чем класс $\mathcal{E}$. Предположим, что для определенного класса потенциалов нам удалось доказать существование функции $F(u)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) ее свойства при $u \in [0, 1]$ гарантируют существование коэффициентов $\{c_l\}$;

2) при $u \rightarrow \infty$ она убывает достаточно быстро для того, чтобы она могла давать оценку различий между фазово-эквивалентными потенциалами.

Тогда обратную задачу можно было бы исследовать изложенным выше методом полного решения (правда, мы не могли бы быть уверены априори в непротиворечивости такого метода для всех потенциалов, которые можно было бы построить, но этот недостаток можно было бы устранить апостериори).

Было бы интересно на основании результатов Лёффеля доказать, что класс потенциалов $\mathcal{O}$ обладает указанными выше свойствами. Это было сделано Жаном и Сабатье [224]. Исходя из теоремы Редже — Лёффеля о разложении [формула (13.3.22)], они доказали справедливость равенства (11.5.14) даже при слабых предположениях данной теории и получили следующее разложение функции $f_0^V(r, r')$ [которое сходится так же, как и разложение (13.3.22), поскольку речь идет о функции из пространства L^2]:

$$(rr')^{-1} f(r, r') \sim \sum_{k=1}^{\infty} d_k \phi_0(\lambda_k, r) \phi(\lambda_k, r') - \\ - (2\pi)^{-1} \text{l.i.m.}_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^{\omega} \gamma(i\tau)_0(i\tau, r) \phi_0(i\tau, r') d\tau, \quad (13.4.43)$$

где $k \rightarrow \lambda_k$ — однозначное отображение множества положительных целых чисел N_+ на множество $\{\lambda_k^0, \lambda_k^V, k \in N_+\}$, d_k — величина, которая определяется следующим образом:

$$d_k = \begin{cases} d_k^V - d_k^0, & \text{если } \lambda_k \in \{\lambda_h^V\} \cap \{\lambda_h^0\}, \\ d_k^V, & \text{если } \lambda_k \in \{\lambda_h^V\}, \\ -d_k^0, & \text{если } \lambda_k \in \{\lambda_h^0\}, \end{cases} \quad (13.4.44)$$

а

$$\gamma(\lambda) = \gamma_V(\lambda) - \gamma_0(\lambda). \quad (13.4.45)$$

Отметим, что выбранные значения величины λ_k не обязательно должны быть целыми. Теперь, для того чтобы получить фундаментальное соотношение (13.4.41), достаточно в разложение (13.4.43) подставить выражение для произведений функций Бесселя

$$\begin{aligned} J_\lambda(r) J_\lambda(r') = \pi^{-1} (rr')^{1/2} \int_0^1 w^{-1} \sin[w] P_{\lambda-1/2}(1-2u^2) u du + \\ + 2 (rr')^{1/2} \cos[\pi\lambda] \int_0^\infty w^{-1} \sin[w] \mathcal{J}_{\lambda-1/2}(2u^2-1) u du, \end{aligned} \quad (13.4.46)$$

где P и $\mathcal{J}$ — полиномы Лежандра (обыкновенные и присоединенные), и доказать сходимость всюду, где это требуется. Это можно доказать, и тогда оказывается, что ряд (13.4.43) сходится к непрерывной функции, если потенциал V принадлежит классу $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, который определяется условиями

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho^{1-2\varepsilon} |V(\rho)| d\rho + \int_1^\infty \rho^{1+2\varepsilon} |V(\rho)| d\rho < \infty, \\ \int_0^\infty \rho^{3+4\varepsilon} V^2(\rho) d\rho < \infty \quad (\varepsilon > 0). \end{aligned} \quad (13.4.47)$$

Тогда, если $0 < \varepsilon < 1/4$, то $\psi(u) \in L_{1/(1-2\varepsilon)}(0, \infty)$. Если же $\varepsilon \geq 1/4$, то $\psi(u) \in L_2(0, \infty)$. Если, кроме того,

$$\int_0^1 \rho^{-2\varepsilon'} |V(\rho)| d\rho + \int_1^\infty \rho^{2+2\varepsilon'} (\ln \rho)^2 |V(\rho)| d\rho < \infty \quad (\varepsilon' > 0) \quad (13.4.48)$$

(подкласс $\mathcal{O}'' \subset \mathcal{O}'$), то функция $f(r, r')$ имеет непрерывные производные, а функция $\psi(u)$ удовлетворяет условию $u\psi(u) \in L^2(0, \infty)$. Интересно, что первый член в выражении (13.4.46) сразу дает функцию $\bar{\phi}_I(r, r')$, которая использовалась выше.

Если метод полного решения строить на основе метода Редже — Лёффеля и, следовательно, на основе метода Гельфанда — Левитана, то это не только приводит к расширению класса восстанавливаемых потенциалов (расширению класса $\mathcal{E}$ на класс $\mathcal{O}''$, а при некоторых условиях и на класс $\mathcal{O}'$), но и дает нам звено,

связывающее все методы решения обратной задачи, — результат, весьма желательный для многих специалистов в данной области (см., например, работу [103]).

§ 5. Замечания

1. Методы Редже — Лёффеля и Бурде — Жиффона показывают, насколько интересна и сложна рассмотренная в гл. 11, § 7, взаимосвязь между обратными задачами при фиксированной энергии и при фиксированном угловом моменте. К трудностям, отмеченным в гл. 11, § 7, добавляется новая трудность, связанная с дискретным характером переменной λ . Поскольку физический смысл переменной λ имеют лишь значения $\lambda = l + 1/2$ с целыми l , очень важной специфической особенностью обратной задачи при фиксированной энергии оказывается необходимость интерполяции.

2. Метод полного решения основан на свойствах функции $f(r, r')$. Интересно было бы выяснить, что это означает, когда речь идет о методе Марченко или Гельфанда — Левитана. Возьмем, к примеру, метод Марченко. При $x = y$ и $x \geq 0$ симметричное ядро $F(x + y)$ имеет вид

$$F(2x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S(k) - 1] e^{2ikx} dk + \sum_n S_n e^{-2\xi_n x}. \quad (13.5.1)$$

Отсюда, взяв фурье-образ, легко получаем (если положить $\exp(-2\xi_n x) = 0$ при $x < 0$, что, конечно, есть некий произвол)

$$F(2x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[2ikx] \left\{ S(k) - 1 + \sum_n \frac{S_n}{\xi_n + ik} \right\} dk. \quad (13.5.2)$$

Если бы мы располагали лишь той информацией, что фурье-образ функции $F(x + x)$ принадлежит пространству $L^2(-\infty, \infty)$, то оказались бы в таком же положении, как и в § 4. Таким образом, не исключено, что когда-нибудь удастся выяснить физический смысл функций $\omega(r)$ и $\psi(u)$ как в методе Гельфанда — Левитана, так и в методе Марченко. Возможно, удастся показать, что фазовые сдвиги и полюса Редже очень просто связаны с функцией $\psi(u)$. Но это еще предстоит сделать.

ТРЕХМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

§ 1. Введение

В стационарной теории нерелятивистского рассеяния исходят из уравнения Шредингера для волновой функции Ψ

$$-\Delta\Psi + V(\mathbf{r})\Psi = E\Psi \quad (14.1.1)$$

и полагают свойства потенциала $V(\mathbf{r})$ такими, что Ψ имеет следующий асимптотический вид:

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + r^{-1} \exp(ikr) A(\hat{r}, \mathbf{k}) + o(r^{-1}). \quad (14.1.2)$$

(Длину любого вектора $\mathbf{v}$ мы обозначаем через v , а единичный вектор его направления $\mathbf{v}/v$ — через $\hat{v}$. В амплитуде рассеяния мы обозначаем через $\mathbf{k}'$ вектор $k\hat{r}$, а в более общем случае обозначаем через $\mathbf{k}'$ вектор длиной k , не совпадающий по направлению с вектором $\mathbf{k}$.)

Предполагается, что амплитуда $A(\hat{r}, \mathbf{k})$ вычислена по измеренным значениям (которые на самом деле дают ее модуль, см. гл. 10). Наша обратная задача заключается в том, чтобы, зная $A(\hat{r}, \mathbf{k})$, найти потенциал $V(\mathbf{r})$. Поскольку $A(\hat{r}, \mathbf{k})$ зависит от пяти переменных, а $V(\mathbf{r})$ — только от трех, неизбежно встает вопрос о существовании решения. Другими словами, существование некоего локального потенциала, соответствующего исходным данным, должно выражаться в сильных ограничениях на амплитуду $A(\hat{r}, \mathbf{k})$.

Если мы исходим из амплитуды рассеяния $A(\hat{r}, \mathbf{k})$, соответствующей некоему локальному потенциалу, и хотим восстановить этот потенциал, то вопрос о существовании решения отпадает. Задачу же единственности можно легко решить, так как для любого «разумного» потенциала амплитуда рассеяния при больших энергиях должна стремиться к своему пределу в борновском приближении

$$A \approx -(4\pi)^{-1} \int d\mathbf{r}' V(\mathbf{r}') \exp[i\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'], \quad (14.1.3)$$

где $\tau = k - k'$. Поскольку $\tau_{\text{макс}} = 2k$, при увеличении энергии E амплитуда A стремится к полному фурье-образу потенциала V . Следовательно, высокоэнергетическим пределом амплитуды рассеяния потенциал определяется однозначно. Но нас такое «решение» задачи не удовлетворяет, так как высокоэнергетический предел амплитуды A неизвестен и к тому же мы знаем, что уравнение Шредингера (14.1.1) непригодно для правильного физического описания поведения частиц при высоких энергиях. Желательно найти решение обратной задачи, которое бы не слишком сильно зависело от высокоэнергетических данных.

Если амплитудой рассеяния однозначно определяется потенциал, то тем более ею должны определяться связанные состояния, т. е. дискретный спектр гамильтониана H . В случае потенциала, удовлетворяющего условию $|V(\mathbf{r})| \leq C|1 + r|^{-3-\varepsilon}$, дискретный спектр можно определить, например, по амплитуде рассеяния вперед $A(k) \equiv A(\hat{k}, \mathbf{k})$. На действительной оси величина $A(k)$ есть предел некой аналитической функции, регулярной во всей верхней полуплоскости, кроме полюсов на мнимой оси при $k = iK_n$, где $-K_n^2$ — собственные значения оператора H , и $A(k)$ стремится к постоянному значению при $|k| \rightarrow \infty$ ($\text{Im } k \geq 0$). Эти свойства позволяют нам, зная $A(k)$ на действительной оси, найти положение полюсов путем аналитического продолжения функции A и, следовательно, найти дискретный спектр по амплитуде рассеяния вперед. Таким образом, полная амплитуда рассеяния связана с дискретным спектром и их нельзя задавать независимо.

Недавно Фаддеев [152] и Ньютон [322, 323] выполнили два эквивалентных исследования трехмерной обратной задачи в случае локального потенциала. Мы изложим исследование Ньютона. Эти исследования представляют большой интерес не потому, что их результаты очень удобны для решения обратной задачи (они очень сложны), а потому, что 1) в них содержится чрезвычайно интересное обобщение исследований потенциального рассеяния на случай, когда потенциал $V(\mathbf{r})$ не является сферически-симметричным, и 2) в них дается чрезвычайно интересное обобщение на этот случай метода Гельфанда — Левитана — Марченко.

В соответствии со сказанным мы строим изложение в данной главе таким образом, чтобы была видна аналогия с обычным потенциальным рассеянием, и во избежание ослабления интереса не воспроизводим длинных выводов и доказательств, полагая, что читатель сможет найти их в работе Ньютона [323], обозначения которого мы сохранили и лекциям которого будем близко следовать. В § 2 кратко излагаются результаты обычной теории потенциального рассеяния, с которыми далее проводится аналогия. Методу же решения самой обратной задачи посвящены § 3—5.

§ 2. Другая схема решения

Весьма общая схема решения обратных задач уравнения Шредингера была представлена на рис. 9 в гл. 11 (стр. 224).

На этой диаграмме не было показано, как получить «ядро преобразования», играющее центральную роль в схеме решения, и «симметричное ядро», но в своем изложении во всей книге мы выделили два способа их получения:

1) при первом способе эти ядра исследуются как решения определенных гиперболических уравнений в частных производных (не уравнения Шредингера);

2) при втором способе ядра получаются из соотношений полноты набора решений уравнения Шредингера.

Эти два способа указаны на диаграмме, представленной на рис. 18. Первый из них был обстоятельно изложен в гл. 11 и применен к обратной задаче при фиксированной энергии.

Исследуем теперь второй способ, который сразу дает ответы на вопросы о существовании, единственности и об алгоритме построения $V(r)$. Отметим, что во всех случаях, которые были подробно изучены (метод Гельфанда — Левитана — Марченко, одномерная задача на всей оси — $-\infty < x < \infty$), ход решения, по существу, один и тот же. Его можно приблизительно разбить на три этапа, соответствующих трем частям диаграммы, приведенной выше. Эти три этапа мы рассмотрим ниже на примере метода

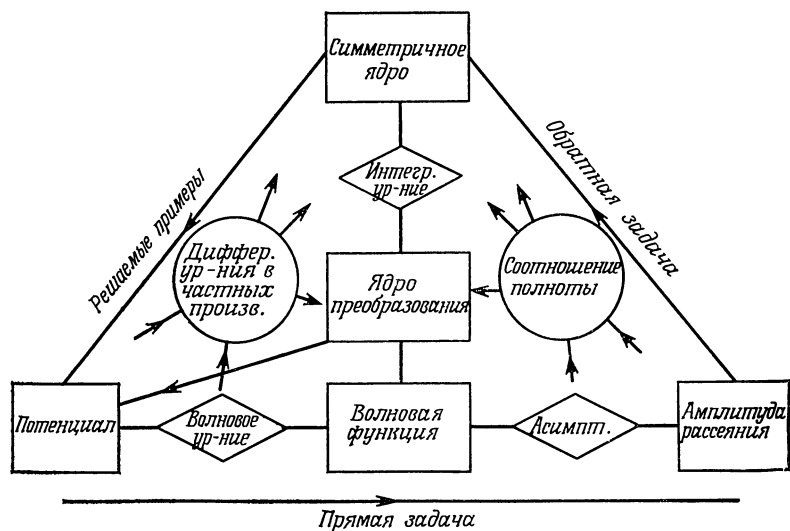


Рис. 18.

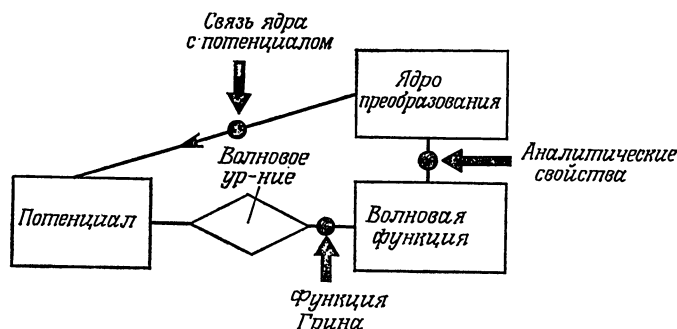


Рис. 19.

Гельфанда — Левитана для S -волны. Слова, выделенные ниже курсивом, задаются ключевыми для аналогий, которые мы хотим подчеркнуть, и будут служить подзаголовками в § 3.

А. Этап «волновая функция» (рис. 19)

Мы будем называть «волновой функцией» решение волнового уравнения, центральное в нашем исследовании. Вообще говоря, это не обязательно «физическая» волновая функция (см., например, решения Йоста в методе Марченко или в одномерной обратной задаче на всей оси $-\infty < x < \infty$). Но в методе Гельфанда — Левитана волновая функция с точностью до нормировки в самом деле физическая, т. е. это решение уравнения

$$H\varphi \equiv \varphi''(k, r) - V\varphi(k, r) = -k^2\varphi(k, r), \quad (14.2.1)$$

равное нулю при $r = 0$, и такой *выбор* равнозначен *выбору функции Грина*

$$\varphi(k, r) = \varphi_0(k, r) + \int_0^r G_0(k; r, \rho) V(\rho) \varphi_0(k, \rho) d\rho, \quad (14.2.2)$$

где

$$\varphi_0(k, r) = \frac{\sin kr}{k}, \quad G_0(k; r, \rho) = \frac{\sin k(r-\rho)}{k}. \quad (14.2.3)$$

Исходя из соотношений (14.2.2) и (14.2.3), можно показать, что $\varphi(k, r)$ — четная целая функция переменной k и что в комплексной k -плоскости

$$\varphi(k, r) - \frac{\sin kr}{k} = o\left(\frac{\sin kr}{k}\right) \quad (|k| \rightarrow \infty). \quad (14.2.4)$$

Из этих *аналитических свойств* сразу же следует, что существует *треугольное ядро* $K(r, r')$ со следующими свойствами (теорема

Пели — Винера):

- 1) $K(r, r')$ не зависит от k ,
- 2) $K(r, r') = 0$ для $r' \geq r$,

$$3) \quad \varphi(k, r) = \varphi_0(k, r) + \int_0^r K(r, r') \varphi_0(k, r') dr'. \quad (14.2.5)$$

Подставляя выражение (14.2.5) в формулу (14.2.2), получают соотношение между $V(r)$ и ядром преобразования K :

$$K(r, r) = \frac{1}{2} \int_0^r V(\rho) d\rho. \quad (14.2.6)$$

Б. Этап «асимптотика и полнота» (рис. 20)

Функцию Йоста $F(k)$ можно определить двумя способами:

- 1) исходя из асимптотического поведения $\varphi(k, r)$ при $r \rightarrow \infty$:
 $2ik\varphi(k, r) = \exp(ikr) F(-k) - \exp(-ikr) F(k) + o(1), \quad (14.2.7)$

2) вводя регулярное решение интегрального уравнения Липпмана — Швингера

$$\psi(k, r) = \varphi_0(k, r) + \int_0^\infty g(k, r, \rho) V(\rho) \psi(k, \rho) d\rho, \quad (14.2.8)$$

где

$$g(k, r, \rho) = -k^{-1} \exp(ikr_>) \sin(kr_<); \quad (14.2.9)$$

это дает

$$\varphi(k, r) = F(k) \psi(k, r). \quad (14.2.10)$$

Таким образом, функция $\varphi(k, r)$ прямо пропорциональна решению интегрального уравнения Фредгольма (14.2.8), причем коэффициент пропорциональности равен $F(k)$. Кроме того, можно

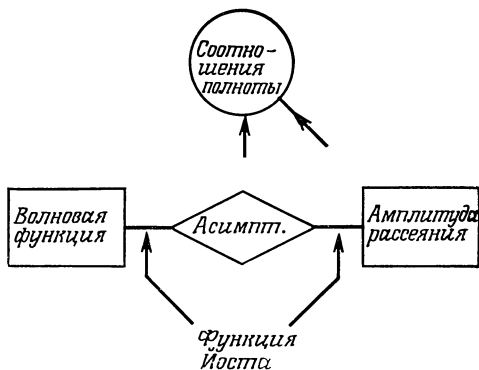


Рис. 20.

доказать, что $F(k)$ — детерминант Фредгольма уравнения (14.2.8). Из этого следует, что нули функции $F(k)$ в верхней полуплоскости находятся точно при тех же значениях $k = iK_n$, при которых величина $-K_n^2$ есть собственное значение гамильтониана, и кратность каждого нуля равна степени вырождения соответствующего собственного значения.

Можно доказать, что выполняется соотношение полноты функций $\psi(k, r)$ вместе с собственными функциями гамильтониана

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi(k, r) \psi^*(k, r') k^2 dk + \sum_n \psi^{(n)}(r) \psi^{(n)}(r') = \delta(r - r'), \quad (14.2.11)$$

где $\psi^{(n)}(r)$ есть n -я нормированная собственная функция оператора H :

$$\int_0^\infty |\psi^{(n)}(r)|^2 dr = 1. \quad (14.2.12)$$

На основании этих соотношений и равенства (14.2.10) можно записать соотношение полноты, выраженное через φ , в виде интеграла Стильеса:

$$\int \varphi(k, r) \varphi(k, r') d\rho(E) = \delta(r - r'), \quad (14.2.13)$$

где $\rho(E)$ — спектральная функция, которая определяется следующим образом:

$$\frac{d\rho}{dE} = \begin{cases} k\pi^{-1} |F(k)|^{-2} & \text{при } E \geq 0, \\ \sum_n \left(\int_0^\infty \varphi^2(iK_n, r) dr \right)^{-1} \delta(E - E_n) & \text{при } E < 0. \end{cases} \quad (14.2.14)$$

Имеется, конечно, аналогичное соотношение полноты для функций φ_0 со спектральной функцией ρ_0 , такой, что $d\rho_0/dE = 0$ при $E < 0$ и $d\rho_0/dE = k\pi$ при $E \geq 0$.

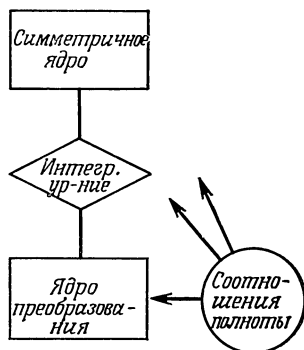
В. Этап «интегральное уравнение» (рис. 21)

Предварительное замечание. Пусть C^* — линейное пространство, содержащее все непрерывные функции на множестве $\mathbb{R}^+$, плюс все δ -функции во всех точках множества $\mathbb{R}$. Для линейного оператора T , преобразующего C^* в C^* , мы определяем сопряженный ему оператор T^* , потребовав, чтобы равенство

$$\int \overline{T a(\rho)} b(\rho) d\rho = \int a(\rho) T^* b(\rho) d\rho \quad (14.2.15)$$

выполнялось при всех сочетаниях a, b из пространства $C^* \times C^*$, при которых одна из частей равенства (14.2.15) имеет смысл.

Рис. 21.



(О математических деталях не будем беспокоиться.) Теперь легко видеть, что если U — оператор вида

$$U = \delta(r - \rho) + K(r, \rho) \theta(r - \rho) \theta(\rho), \quad (14.2.16)$$

то сопряженный оператор U^* имеет вид

$$U^* = \delta(r - \rho) + K^*(r, \rho) \theta(\rho - r) \theta(r), \quad (14.2.17)$$

где

$$K^*(r, \rho) = K(\rho, r) \quad (r < \rho). \quad (14.2.18)$$

Другими словами, оператор, сопряженный треугольному ядру, есть треугольное ядро. Далее запишем равенство (14.2.15) в простом виде:

$$\overline{Ta(\rho)} = a(\rho) T^*. \quad (14.2.19)$$

Очевидно, что $\delta(r - \rho)$ — единичный оператор; мы будем обозначать его символом 1 .

Формальное решение задачи. Выражение (14.2.5) можно записать в виде

$$\varphi_k = U\varphi_{0k}. \quad (14.2.20)$$

Поскольку любой вектор из пространства L^2 можно разложить в ряд по функциям φ_{0k} , равенство (14.2.20) означает, что U — сплетающий оператор:

$$HU = UH_0. \quad (14.2.21)$$

Если соотношения полноты функций φ_k и φ_{0k} записать символически в виде

$$\int d\rho \varphi_k \bar{\varphi}_k = 1, \quad \int d\rho_0 \varphi_{0k}^0 \bar{\varphi}_{0k}^0 = 1 \quad (14.2.22)$$

и подставить сюда (14.2.20), то получим

$$UgU^* = 1 - UU^*, \quad (14.2.23)$$

где величина

$$g = \int d(\rho - \rho_0) \varphi_{0k} \bar{\varphi}_{0k} \quad (14.2.24)$$

есть *симметричное ядро*. Это можно проделать с любым оператором преобразования. Но так как K — треугольный оператор, можно построить обратный оператор

$$U^{-1} = 1 + K', \quad (14.2.25)$$

и оператор K' будет также треугольным. Следовательно, имеем

$$Ug = K'^* - K, \quad (14.2.26)$$

что при $r' < r$ дает

$$K(r, r') + g(r, r') + \int K(r, \rho) g(\rho, r') d\rho = 0, \quad (14.2.27)$$

а это — *интегральное уравнение Гельфанда — Левитана*.

§ 3. Метод решения трехмерной задачи

А. Этап «волновая функция» (рис. 19)

Нам нужно выбрать решение уравнения Шредингера (14.1.1) так, чтобы был применим весь метод. Это значит, что нужно найти *подходящую* функцию Грина. Такая задача была решена Фаддеевым [151].

Функция Грина. Для вектора $\mathbf{v}$ примем обозначения, введенные в § 1 (вектор $\mathbf{v}$, длина вектора v , единичный вектор $\hat{v} = v^{-1}\mathbf{v}$). Введем фиксированный действительный единичный вектор $\hat{\gamma}$ и пусть q — действительное неотрицательное число. Фаддеевская функция Грина имеет вид

$$G_{q\hat{\gamma}}(K^2; \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \frac{\exp[i(\mathbf{p} + iq\hat{\gamma}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{K^2 - (\mathbf{p} + iq\hat{\gamma})^2}. \quad (14.3.1)$$

Легко видеть, что функция G , как и должно быть, удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + K^2) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (14.3.2)$$

Более того, функция Грина G представляет собой резольвенту оператора $-\Delta$ в пространстве $L_W^2(\mathbb{R}_3)$ с весом $W = \exp(2q\hat{\gamma} \cdot \mathbf{r})$.

Для вектора $\mathbf{v}$ введем обозначения $v_0 = \mathbf{v} \cdot \hat{\gamma}$, $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - v_0 \hat{\gamma}$. После замены переменных интегрирования можем написать

$$\begin{aligned} G_{q\hat{\gamma}}((\mathbf{k} + iq\hat{\gamma})^2; \mathbf{r}) &\equiv G_{\hat{\gamma}}(\mu^2, s; \mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \frac{\exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + isr_0)}{\mu^2 - p^2 - 2sp_0}, \end{aligned} \quad (14.3.3)$$

где $\mu^2 = k_\perp^2$, $s = k_0 + iq$. Таким образом, $\text{Im } s \geq 0$. Из выражения (14.3.3) легко видеть, что при фиксированных μ , $\hat{\gamma}$ и $\mathbf{r}$ функция $G_{\hat{\gamma}}(\mu^2, s; \mathbf{r})$ — аналитическая функция переменнй s , регулярная в верхней полуплоскости. Она регулярна также и в нижней полуплоскости, но имеется разрез от $-\infty$ до $+\infty$, на котором функция претерпевает разрыв. Для нас представляет интерес функция Грина $G_{\hat{\gamma}}$ только в верхней полуплоскости и, в частности, ее значение на границе разреза при действительных s . Из выражения (14.3.3) можно получить асимптотические значения $G_{\hat{\gamma}}$ при больших r и действительных s . Имеем

$$G_{\hat{\gamma}}(\mu^2, s; \mathbf{r}) = - (4\pi r)^{-1} [e^{ihr} \theta(sr - kr_0) + e^{-ihr} \theta(-sr - kr_0)] + o(r^{-1}), \quad (14.3.4)$$

где θ — функция Хевисайда.

Волновая функция. Пользуясь функцией Грина (14.3.4), определим решение уравнения (14.1.1) с помощью интегрального уравнения

$$\varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}_\perp, s, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + isr_0} + \int G_{\hat{\gamma}}(\mu^2, s; \mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \\ \times V(\mathbf{r}') \varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}_\perp, s, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (14.3.5)$$

или, если ввести обозначения

$$\Phi_{\hat{\gamma}} = |V|^{1/2} \exp(-isr_0) \varphi_{\hat{\gamma}}, \quad (14.3.6)$$

$$\Gamma_{\hat{\gamma}}(\mu^2, s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = |V(\mathbf{r})|^{1/2} G_{\hat{\gamma}}(\mu^2, s; \mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{is(r'_0 - r_0)} \times \\ \times |V(\mathbf{r}')|^{-1/2} V(\mathbf{r}'), \quad (14.3.7)$$

с помощью интегрального уравнения

$$\varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}_\perp, s, \mathbf{r}) = |V(\mathbf{r})|^{1/2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}} + \\ + \int \Gamma_{\hat{\gamma}}(\mu^2, s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \Phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}_\perp, s; \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (14.3.8)$$

Можно доказать, что если

$$\int \frac{|V(\mathbf{r})| |V(\mathbf{r}')|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' < \infty, \quad (14.3.9)$$

то при всех $\hat{\gamma}$, μ и s (с $\text{Im } s \geq 0$) ядро $\Gamma_{\hat{\gamma}}$ принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3)$. Следовательно, интегральное уравнение (14.3.8) имеет в пространстве $L^2(\mathbb{R}_3)$ единственное решение при всех s с $\text{Im } s \geq 0$, кроме тех значений s , при которых имеет решение однородное уравнение, соответствующее (14.3.8). Последние представляют собой исключительные точки, в которых обращается

в нуль модифицированный фредгольмовский детерминант уравнения (14.3.8):

$$D_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}) = D_{\hat{\gamma}}(\mu, s) = \det_{\text{mod}} (1 - G_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}) V) = 0. \quad (14.3.10)$$

Аналитические свойства волновой функции. Как и функции $G_{\hat{\gamma}}$, функция $\Gamma_{\hat{\gamma}}$ голоморфна в верхней половине s -плоскости. Отсюда следует, что если потенциал V удовлетворяет условию (14.3.9) и если

$$\int r |V(\mathbf{r})| d\mathbf{r} < \infty, \quad (14.3.11)$$

то $\Phi_{\hat{\gamma}}$ — аналитическая функция переменной s , мероморфная в верхней полуплоскости, с полюсами в исключительных точках $s = s_m$, которые определяются уравнением (14.3.10).

Из выражения (14.3.6) следует, что при всех фиксированных μ^2 , $\hat{\gamma}$ и $\hat{r}$ функция $\varphi_{\hat{\gamma}}$ — аналитическая функция переменной s , мероморфная в верхней полуплоскости. Свойства функции $\varphi_{\hat{\gamma}}$ при действительных s и ее свойства как функции аргумента $\mathbf{r}$ можно установить на основании формул (14.3.6) и (14.3.8) и оценок для $G_{\hat{\gamma}}$. Оказывается, что $\varphi_{\hat{\gamma}}$ является при всех s с $\text{Im } s \geq 0$ дважды дифференцируемой функцией переменной $\mathbf{r}$, удовлетворяет уравнению Шредингера и является непрерывной функцией переменной s при всех действительных значениях s , кроме исключительных точек. При больших $|s|$ при $\text{Im } s \geq 0$ и при условиях (14.3.9) и (14.3.11) легко показать, что $\|\Gamma_{\hat{\gamma}}\| \rightarrow 0$ при $|s| \rightarrow \infty$, а $D_{\hat{\gamma}} \rightarrow 1$, так что

$$\Phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, s, \mathbf{r}) = |V(\mathbf{r})|^{1/2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + o(1). \quad (14.3.12)$$

Поэтому регулярное решение

$$\phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}_{\perp}, s; \mathbf{r}) = P_{\hat{\gamma}}(\mu, s) \varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}_{\perp}, s; \mathbf{r}), \quad (14.3.13)$$

где

$$P_{\hat{\gamma}}(\mu, s) = \prod_n \frac{s - s_n}{s - \bar{s}_n} \quad (14.3.14)$$

есть непрерывная функция переменной s на действительной оси, голоморфная в верхней полуплоскости, и при больших $|s|$ имеет вид

$$\phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}_{\perp}, s; \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r} + isr_0} + o(e^{isr_0}) \quad (|s| \rightarrow \infty). \quad (14.3.15)$$

Треугольное ядро. Для удобства обозначим $k_{\perp} + s\hat{\gamma}$ через k и $\phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}_{\perp}, s; \mathbf{r})$ через $\phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r})$. Из выражения (14.3.15) явствует,

что область отличных от нуля значений преобразования Фурье функции $s \rightarrow (\phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) - \exp i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}])$ лежит справа от точки r_0 . Следовательно, существует представление вида

$$\phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \int_{r_0}^{\infty} \tilde{K}_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}; \mathbf{k}_{\perp}, r'_0) e^{isr'_0} dr'_0, \quad (14.3.16)$$

которое можно также записать в форме

$$\phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}; \mathbf{k}_{\perp}, t) e^{ist} dt, \quad (14.3.17)$$

где

$$\tilde{U}_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_{\perp}, t) = \delta(t - r_0) e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp}} - \tilde{K}_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}; \mathbf{k}_{\perp}, t) \theta(t - r_0), \quad (14.3.18)$$

$$\tilde{U}_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_{\perp}, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{-ik_0 t} dk_0. \quad (14.3.19)$$

Очевидно, что величины $\tilde{K}$ и $\tilde{U}$ не зависят от s .

Фурье-преобразованное представление. Можно получить более симметричные выражения, если выполнить преобразования Фурье функций $\mathbf{k}_{\perp} \rightarrow \phi_{\hat{\gamma}}$ и $\mathbf{k}_{\perp} \rightarrow \tilde{U}_{\hat{\gamma}}$:

$$\begin{aligned} \phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \int K_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \theta[\hat{\gamma} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}' = \\ &= \int U_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (14.3.20)$$

Очевидно, что важное свойство треугольности ядра $\tilde{K}_{\hat{\gamma}}$ (или $K_{\hat{\gamma}}$) относительно направления $\hat{\gamma}$ в множестве $\mathbb{R}_3$ является следствием того, что решение $\phi_{\hat{\gamma}}$ определено с помощью фаддеевской функции Грина, благодаря чему оно имеет нужные аналитические свойства в k_0 -плоскости. Связь между ядром и $\tilde{K}$ или K и потенциалом будет исследована ниже [формулы (14.3.57) и (14.3.58)].

Исключительные точки. Поскольку $D\hat{\gamma} \rightarrow 1$ при $|s| \rightarrow \infty$ в области $\text{Im } s \geq 0$, в верхней полуплоскости вблизи начала координат существует окрестность, вне которой нет исключительных точек. Если число исключительных точек на действительной оси конечно, то их полное число также должно быть конечным. Легко доказать, что так обстоит дело, если потенциал $V(\mathbf{r})$ экспоненциально убывает при $r \rightarrow \infty$, ибо тогда детерминант $D_{\hat{\gamma}}(\mu, s)$ имеет аналитическое продолжение до действительной оси.

При $\mu \neq 0$ исключительные точки расположены либо на самой мнимой оси, либо попарно симметрично относительно мнимой оси. При $\mu \rightarrow 0$ они стремятся к нулям модифицированного детерминанта Фредгольма разности $1 - G(s) V$, где $G(s)$ — резольвента лапласиана, т. е. приближаются к нулям модифицированного детерминанта Фредгольма уравнения Липпмана — Швингера. Следовательно, в пределе при $\mu \rightarrow 0$ они приближаются к значениям $s_n = iK_n$, расположенным на мнимой оси, где $-K_n^2 = E_n$ — собственные значения оператора H . Но неизвестно, возможны ли на действительной оси иные исключительные точки, нежели $\mu = s = 0$, а также каково их число и каков их физический смысл. В дальнейшем предполагаем, что их число конечно.

Б. Этап «асимптотика и полнота» (рис. 20)

При действительных s , исходя из (14.3.4) и (14.3.5), получаем

$$\varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = r^{-1} [e^{ihr\theta}(sr - kr_0) h_{\hat{\gamma}}(\hat{r}, \mathbf{k}) + e^{-ihr\theta}(-sr - kr_0) h_{\hat{\gamma}}(-\hat{r}, \mathbf{k})] + o(r^{-1}), \quad (14.3.21)$$

где

$$h_{\hat{\gamma}}(\hat{k}', \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (14.3.22)$$

Теперь нам нужно связать $\varphi_{\hat{\gamma}}$ с обычным решением выходящей волны уравнения Шредингера, чтобы вывести соотношение полноты, а также чтобы связать $\varphi_{\hat{\gamma}}$ с амплитудой рассеяния. Для этого мы воспользуемся функциями $\varphi^{\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{r})$, соответствующими падающей и уходящей волнам, которые являются хорошо известными решениями уравнения Липпмана — Швингера:

$$\varphi^{\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \int G^{\pm}(k; \mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \varphi^{\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (14.3.23)$$

где

$$G^{\pm}(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{\exp(\pm ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (14.3.24)$$

Асимптотический вид функции φ^{+} дается выражением (14.1.2), в котором амплитуда рассеяния такова:

$$A[\hat{r}, \mathbf{k}] \equiv A_{\mathbf{k}}(\hat{k}', \hat{k}) = - (4\pi)^{-1} \int \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \varphi^{+}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (14.3.25)$$

При этом S -матрица определяется по амплитуде рассеяния как интегральный оператор на единичной сфере:

$$S_{\mathbf{k}}(\hat{k}', \hat{k}) = \delta(\hat{k}', \hat{k}) - \frac{k}{2\pi i} A_{\mathbf{k}}(\hat{k}', \hat{k}). \quad (14.3.26)$$

Она связывает φ^- с φ^+ :

$$\varphi^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int S_k(\hat{k}', \hat{k}) \varphi^-(\mathbf{k}', \mathbf{r}) d\hat{k}'. \quad (14.3.27)$$

«Ядра Йоста». При данном значении величины k^2 функции φ^+ и φ^- по отдельности образуют полный набор решений уравнения (14.1.1). Поэтому $\varphi_{\hat{\gamma}}$ можно выразить через φ^+ или φ^- :

$$\varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int F_{\hat{\gamma}}^{\pm}(k, \hat{k}', \hat{k}) \varphi^{\pm}(\mathbf{k}', \mathbf{r}) d\hat{k}'. \quad (14.3.28)$$

Очевидно, что «ядра» $F_{\hat{\gamma}}^{\pm}$ соответствуют функциям Йоста обычного потенциального рассеяния. Поскольку $\varphi_{\hat{\gamma}}$ и $\varphi^{\pm}$ имеют такую же плоскую волну $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, как и их ведущий член при $r \rightarrow \infty$, мы приходим к определению, вероятно, более регулярного ядра $q_{\hat{\gamma}}$

$$F_{\hat{\gamma}}^{\pm}(k, \hat{k}', \hat{k}) = \delta(\hat{k}', \hat{k}) \pm \frac{k}{2\pi i} q_{\hat{\gamma}}^{\pm}(k; \hat{k}', \hat{k}). \quad (14.3.29)$$

Подставляя выражение (14.3.29) в соотношение (14.3.28) и учитывая асимптотические выражения (14.3.21) и (14.1.2), получаем

$$g^{\pm}(k; \hat{k}', \hat{k}) = \theta[\hat{\gamma} \cdot (\hat{k}' - \hat{k})] h_{\hat{\gamma}}(\hat{k}', \mathbf{k}), \quad (14.3.30)$$

$$h_{\hat{\gamma}}(\hat{k}', \mathbf{k}) = A_k(\hat{k}', \hat{k}) + \frac{k}{2\pi i} \int A_k(\hat{k}', \hat{k}'') h_{\hat{\gamma}}(\hat{k}'', \mathbf{k}) \times \\ \times \theta[\hat{\gamma} \cdot (\hat{k}'' - \hat{k})] d\hat{k}''. \quad (14.3.31)$$

Если задана амплитуда рассеяния A , то данное соотношение можно рассматривать как интегральное уравнение относительно $h_{\hat{\gamma}}$ или $q_{\hat{\gamma}}^{\pm}$. Следовательно, зная амплитуду рассеяния, можно найти ядра Йоста.

Согласно формуле (14.3.30), разность $F - 1$ есть «треугольный» оператор. Таким образом, равенство (14.3.28) представляет собой уравнение Вольтерра, которое можно решить. Иначе говоря, для оператора F существует обратный оператор, так что можно написать

$$\varphi_{\hat{\gamma}}^{\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int F_{\hat{\gamma}}^{\pm(-1)}(k; \hat{k}', \hat{k}) \varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}', \mathbf{r}) d\hat{k}'. \quad (14.3.32)$$

Подставляя данное выражение в формулу (14.3.27), получаем разложение

$$S_k(\hat{k}', \hat{k}) = \int F_{\hat{\gamma}}^-(k, \hat{k}', \hat{k}'') F_{\hat{\gamma}}^{+(-1)}(k; \hat{k}'', \hat{k}) d\hat{k}''. \quad (14.3.33)$$

Такое представление S -матрицы есть трехмерный аналог хорошо известного в сферически-симметричном случае разложения функции Йоста. Имеется аналогия и в аналитических свойствах,

так как из соотношения (14.3.32) и аналитических свойств функции $\varphi_{\hat{\gamma}}$ следует, что произведение $h_{\hat{\gamma}}(\hat{k}', k_{\perp}, s) D_{\hat{\gamma}}(\mu, s)$ как функция переменной s есть непрерывный предел некоей аналитической функции, голоморфной в верхней полуплоскости. Кроме того, имеется аналогия в свойствах симметрии относительно направлений $\hat{k}$ и $\hat{k}'$ и в связи этих свойств с теоремой об унитарности и взаимности S -матрицы [323].

Симметричное относительно направления $\hat{\gamma}$ выражение можно также получить из хорошо известного соотношения ортогональности функции $\varphi^{\pm}$:

$$(2\pi)^{-3} \int \overline{\varphi^{\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{r})} \varphi^{\pm}(\mathbf{k}', \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (14.3.34)$$

На основании этого соотношения и формулы (14.3.27) нетрудно показать, что

$$(2\pi)^{-3} \int \overline{\varphi_{-\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r})} \varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}', \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (14.3.35)$$

и

$$\int \overline{F_{-\hat{\gamma}}^{\pm}(k; \hat{k}'', \hat{k})} F_{\hat{\gamma}}^{\pm}(k; \hat{k}'', \hat{k}') d\hat{k}'' = \delta(\hat{k}', \hat{k}). \quad (14.3.36)$$

Другими словами,

$$F_{\hat{\gamma}}^{\pm-1} = F_{-\hat{\gamma}}^{\pm*}. \quad (14.3.37)$$

Полнота. Исходя из формулы (14.3.32) и принимая во внимание равенство (14.3.37), имеем

$$\begin{aligned} \int \varphi^{+}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \overline{\varphi^{+}(\mathbf{k}, \mathbf{r}')} d\mathbf{k} &= \int F_{-\hat{\gamma}}^{-1}(k; \hat{k}', \hat{k}) \overline{F_{\hat{\gamma}}^{-1}(k; \hat{k}''; \hat{k})} \times \\ &\times \varphi_{-\hat{\gamma}}(\mathbf{k}', \mathbf{r}) \overline{\varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}'', \mathbf{r}')} d\mathbf{k} d\hat{k}' d\hat{k}'' = \\ &= \int \varphi_{-\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \overline{\varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}')} d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (14.3.38)$$

Но из формул (14.3.28), (14.3.32) и (14.3.37) следует, что

$$\varphi_{-\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int \varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}', \mathbf{r}) M'_{\hat{\gamma}}(k; \hat{k}', \hat{k}) d\hat{k}, \quad (14.3.39)$$

где

$$M'_{\hat{\gamma}}(k; \hat{k}'; \hat{k}) = \int \overline{F_{-\hat{\gamma}}(k; \hat{k}'', \hat{k}')} F_{-\hat{\gamma}}(k; \hat{k}'', \hat{k}) d\hat{k}''. \quad (14.3.40)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &(2\pi)^{-3} \int \varphi^{+}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \overline{\varphi^{+}(\mathbf{k}, \mathbf{r}')} d\mathbf{k} = \\ &= (2\pi)^{-3} \int \varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}', \mathbf{r}) M'_{\hat{\gamma}}(k; \hat{k}', \hat{k}) \overline{\varphi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}')} d\mathbf{k} d\hat{k}'. \end{aligned} \quad (14.3.41)$$

Из хорошо известного соотношения полноты функции φ^+ [320] следует, что левая часть равенства (13.3.41) равна $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — $-\sum_n \varphi_n(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}')$, где φ_n — нормированные собственные функции оператора H . Поэтому имеем соотношение полноты

$$(2\pi)^{-3} \int \phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}', \mathbf{r}) M'_{\hat{\gamma}}(k; \hat{k}', \hat{k}) \bar{\varphi}_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}') d\mathbf{k} d\hat{k}' + \\ + \sum_n \varphi_n(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (14.3.42)$$

Спектральное ядро. На основании тождества (14.3.3) можно показать, что функция $G_{\hat{\gamma}}(0, s; \mathbf{r})$ при действительных положительных s равна обычной функции Грина $G^+(s; \mathbf{r})$, даваемой выражением (14.3.24). Поэтому из соотношения (14.3.5) следует, что при $\mathbf{k} = k\hat{\gamma}$ функция $\phi_{\hat{\gamma}}$ переходит в φ^+ . При $k = k_n = iK_n$ должно выполняться равенство

$$\phi_{\hat{\gamma}}(i\hat{\gamma}K_n, \mathbf{r}) = C_n(\hat{\gamma}) \varphi_n(\mathbf{r}). \quad (14.3.43)$$

Таким образом, соотношение (14.3.42) можем записать в виде

$$(2\pi)^{-3} \int \phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}', \mathbf{r}) M_{\hat{\gamma}}(k; \hat{k}', \hat{k}) \bar{\phi}_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}') d\mathbf{k} d\hat{k}' + \\ + \sum_n \phi_{\hat{\gamma}}(iK_n\hat{\gamma}, \mathbf{r}) \frac{\phi_{\hat{\gamma}}(iK_n\hat{\gamma}, \mathbf{r}')}{|C_n(\hat{\gamma})|^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (14.3.44)$$

где

$$M_{\hat{\gamma}}(k; \hat{k}', \hat{k}) = \frac{1}{P_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}')} M'_{\hat{\gamma}}(k; \hat{k}', \hat{k}) \frac{1}{P_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k})}. \quad (14.3.45)$$

Будем также пользоваться обозначением $(2/k) M_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ вместо обозначения (14.3.45).

Фурье-преобразованное представление соотношений полноты. На основании формулы (14.3.43) и представления (14.3.20) имеем

$$\varphi_n(\mathbf{r}) = \int U_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \alpha_{\hat{\gamma}}^{(n)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (14.3.46)$$

где

$$\alpha_{\hat{\gamma}}^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{\exp(-K_n\hat{\gamma} \cdot \mathbf{r})}{C_n(\hat{\gamma})}. \quad (14.3.47)$$

Подставляя выражения (14.3.20) и (14.3.46) в соотношение (14.3.44), получаем

$$\int U_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) W_{\hat{\gamma}}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma}) \bar{U}_{\hat{\gamma}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}') d\boldsymbol{\rho} d\boldsymbol{\sigma} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (14.3.48)$$

где

$$W_{\hat{\gamma}}(\rho, \sigma) = (2\pi)^{-2} \int \delta(k^2 - k'^2) \times \\ \times M_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k} \cdot \rho - \mathbf{k}' \cdot \sigma)} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' + \sum_n \alpha_{\hat{\gamma}}^{(n)}(\rho) \alpha_{\hat{\gamma}}^{(n)}(\sigma). \quad (14.3.49)$$

Введем величину $m_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, удовлетворяющую равенству

$$M_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{k}{2} \delta(\hat{k}, \hat{k}') + m_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \quad (14.3.50)$$

Тогда из равенства (14.3.49) получим

$$W_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + g_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (14.3.51)$$

где

$$g_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{(2\pi)^{-3}}{\delta(k^2 - k'^2)} m_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' + \\ + \sum_n \alpha_{\hat{\gamma}}^{(n)}(\mathbf{r}) \alpha_{\hat{\gamma}}^{(n)}(\mathbf{r}'). \quad (14.3.52)$$

В. Этап «интегральное уравнение» (рис. 21)

Взглянув на соотношения (14.3.20) и (14.3.44), мы видим, что находимся в ситуации, соответствующей тому, что говорилось в § 2, п. «В».

Уравнение (14.3.48) соответствует уравнению (14.2.22), и с учетом формул (14.3.45), (14.3.50) и (14.3.51) мы легко получаем аналог уравнения Гельфанда — Левитана: при $\mathbf{r} \cdot \hat{\gamma} < \mathbf{r}' \cdot \hat{\gamma}$ имеем

$$K_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int \theta[\hat{\gamma} \cdot (\rho - \mathbf{r})] K_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \rho) g_{\hat{\gamma}}(\rho, \mathbf{r}') d\rho. \quad (14.3.53)$$

Отсюда с учетом соотношения (14.3.52) получаем разложение

$$K_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (2\pi)^{-3} \int \delta(k^2 - k'^2) m_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \times \\ \times \phi_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' + \sum_n \varphi_n(\mathbf{r}) \overline{\alpha_{\hat{\gamma}}^{(n)}(\mathbf{r}')}. \quad (14.3.54)$$

Таким образом, функции $K_{\hat{\gamma}}$ и $g_{\hat{\gamma}}$ удовлетворяют гиперболическим дифференциальным уравнениям в частных производных

$$[\Delta - \Delta' - V(\mathbf{r})] K_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \quad (14.3.55)$$

$$(\Delta - \Delta') g_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (14.3.56)$$

Учитывая равенства (14.3.55) и (14.3.56) и интегрируя по частям, получаем

$$2 \frac{\partial}{\partial r_0} K_{\hat{\gamma}}(r; \mathbf{r}'_{\perp}, r_0) = V(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'). \quad (14.3.57)$$

Следует иметь в виду, что левая часть равенства (14.3.57) не должна зависеть от $\hat{\gamma}$.

Можно также исходить из ядра $\tilde{K}_{\hat{\gamma}}$ интегрального уравнения (14.3.16). Тогда получается [323] уравнение Гельфанда — Левитана и потенциал выражается через $\tilde{K}_{\hat{\gamma}}$ следующим образом:

$$V(r) = 2 \frac{\partial}{\partial r_0} \tilde{K}_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}; \mathbf{k}_{\perp}, r_0) e^{-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp}}. \quad (14.3.58)$$

Г. Некоторые специфические моменты

Отметим некоторые моменты, специфические для данного метода или для трехмерной задачи в целом.

Исключительные точки. Очевидно, что для построения $P_{\hat{\gamma}}$ необходимо определить исключительные точки по амплитуде рассеяния. Мы приведем только окончательные результаты, отсылая читателя за выводом к работе Ньютона [323]. Пусть $D^+(s)$ — модифицированный детерминант Фредгольма уравнения Липпмана — Швингера. Детерминант $D_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k})$ связан с $D^+(\mathbf{k})$ соотношением

$$D_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}) = D^+(k) d_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}) \exp[\beta_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k})], \quad (14.3.59)$$

где

$$\beta_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}) = \frac{i}{4\pi} (k - \mathbf{k} \cdot \hat{\gamma}) \int V(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (14.3.60)$$

$$d_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}) = \det(1 - A'_{\hat{\gamma}}), \quad (14.3.61)$$

$$A'_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}; \hat{k}, \hat{k}') = \frac{k}{2\pi i} \theta[\hat{\gamma} \cdot (\hat{k}' - \hat{k})] A_k(\hat{k}, \hat{k}').$$

Следовательно, $d_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k})$ — детерминант Фредгольма уравнения (14.3.31).

Что касается детерминанта $D^+(k)$, то его можно представить в виде

$$D^+(k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \prod_n \left(1 - \frac{E_n}{E}\right) \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\arg D^+(k') dE'}{E' - E - i\varepsilon}\right), \quad (14.3.62)$$

где $\arg D^+(k)$ — величина, связанная с детерминантом Фредгольма оператора (14.3.26) и с потенциалом $V(\mathbf{r})$ соотношением

$$\arg D^+(k) = \frac{1}{2} i \ln \det S - \frac{k}{4\pi} \int V(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (14.3.63)$$

а $E_n = -K_n^2$ — собственные значения оператора H .

Таким образом, $D_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k})$ можно выразить через амплитуду рассеяния. Коль скоро детерминант $D_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}) \equiv D_{\hat{\gamma}}(\mu, s)$ известен на действительной оси, мы можем найти исключительные точки s'_n — его нули в верхней полуплоскости. Поскольку $D_{\hat{\gamma}} \rightarrow 1$ при $|s| \rightarrow \infty$, это можно сделать, взяв фурье-образ величины $(1/D_{\hat{\gamma}} - 1)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{D_{\hat{\gamma}}(\mu, s)} - 1 \right) e^{ist} ds = \sum_n \frac{e^{its_n}}{D'_{\hat{\gamma}}(\mu, s_n)} \quad (14.3.64)$$

при $t > 0$, где $D'_{\hat{\gamma}}$ — производная величины $D_{\hat{\gamma}}$ по s .

Связанные состояния и нормировочные постоянные. Как уже отмечалось в § 1, связанные состояния и соответствующие им характеристики не могут быть произвольно выбраны в задаче, которая столь сильно переопределена. Можно показать, что величины K'_n связаны с амплитудой рассеяния вперед соотношением, справедливым при $t > 0$,

$$2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} A(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \cos kt \, dk = - \sum_n K_n |c_n(\hat{k})|^2 \exp(-K_n t), \quad (14.3.65)$$

которое позволяет найти набор коэффициентов $|c_n(\hat{k})|$, определяющих величины $C_n(\hat{\gamma})$:

$$C_n(\hat{\gamma}) = c_n(\hat{\gamma}) \frac{i}{2K_n} \prod_m \frac{K_m - K_n}{K_m + K_n}. \quad (14.3.66)$$

Если нормировочные постоянные и энергии связанных состояний найдены из соотношений (14.3.65) и (14.3.66), а исключительные точки найдены из соотношения (14.3.64), то мы можем решить линейное интегральное уравнение (14.3.31) относительно $h_{\hat{\gamma}}$. Это даст нам функцию $F_{\hat{\gamma}}$ и, следовательно, все входные данные для уравнения Гельфанда — Левитана, из которого мы находим K и потенциал.

§ 4. Применимость метода

Чтобы выяснить этот вопрос, нужно исследовать интегральные уравнения (14.3.31) и (14.3.53). Если предположить, что амплитуда рассеяния, из которой мы исходим в нашей задаче, соответствует некоторому потенциалу, то мы можем быть уверены, что решение существует. Но если решение не единственно, то мы не знаем, применим ли изложенный метод.

А. Уравнение (14.3.31)

Если при данной энергии амплитуда $A_{\hat{k}}(\hat{k}', \hat{k})$ как интегральное ядро на единичной сфере принадлежит пространству L^2 , то (14.3.31) — регулярное уравнение Фредгольма. Так будет обстоять дело, если

$$\int \sigma_{\text{полн}}(\mathbf{k}) d\hat{k} = \int |A_{\hat{k}}(\hat{k}', \hat{k})|^2 d\hat{k} d\hat{k}' < \infty. \quad (14.4.1)$$

Если к тому же существует интеграл $\int d\hat{k} A_{\hat{k}}(\hat{k}, \hat{k})$, то существует и дифференциал $d_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k})$. Он может быть равен нулю; тогда и $D_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}) = 0$ и на действительной оси появляется исключительная точка. Тогда ядра уравнений Гельфанда — Левитана не являются локально квадратично-интегрируемыми. Поэтому исключительных точек не должно быть. Очевидно, что достаточное (очень сильное) условие этого таково:

$$\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int \sigma_{\text{полн}}(\hat{k}) d\hat{k} < 1. \quad (14.4.2)$$

Б. Уравнения Гельфанда — Левитана

Уравнения Гельфанда — Левитана, введенные Фаддеевым [152] для решения данной задачи, и два уравнения, введенные Ньютоном [323], были исследованы Ньютоном [323]. Ему удалось доказать, что *если решение существует*, то оно единственное, но ему не удалось доказать существования решения в общем случае.

В. Общее условие существования решения

Фаддеев [152] вывел необходимое и достаточное условие существования соответствующего *локального* потенциала, но дал лишь приблизительную схему доказательства «достаточности». Условие это таково: функция $h_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ должна быть такой, чтобы произведение $h_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k}'_{\perp}, s; \mathbf{k}_{\perp}, s) D_{\hat{\gamma}}(k_{\perp}, s)$ было пределом некой аналитической функции аргумента s , регулярной в верхней полуплоскости.

Г. Исключительные точки на действительной оси

Пока еще не известно, возможны ли исключительные точки на действительной оси в случае локальных потенциалов с «хорошим поведением». В примерах же, исследованных методом фиксированной энергии (см., например, работу [323]), всегда получаются потенциалы с очень медленным убыванием на бесконечности. Таким образом, можно полагать, что «хорошие» потенциалы не дают таких исключительных точек.

§ 5. Случай аксиальной симметрии

Предположим теперь, что потенциал аксиально-симметричен, и обозначим через $\hat{\gamma}$ единичный вектор направления оси симметрии (z-оси).

Амплитуду рассеяния и функцию $h_{\hat{\gamma}}$ можно разложить в ряд Фурье как функции азимутальных углов φ , φ' :

$$A_{\hat{\gamma}}(\hat{k}', \hat{k}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi' - \varphi)} A_m(k; x', x), \quad (14.5.1)$$

$$h_{\hat{\gamma}}(k, \hat{k}', \hat{k}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi' - \varphi)} h_m(k; x', x), \quad (14.5.2)$$

где $x = \cos \theta$, $x' = \cos \theta'$. Тогда уравнение (14.3.31) примет вид

$$h_m(k; x, y) = A_m(k; x, y) + \frac{k}{2\pi i} \int_y^1 A_m(k; x, z) h_m(k; z, y) dz, \quad (14.5.3)$$

а для функции Йоста — вид

$$F_{\hat{\gamma}}(k; \hat{k}', \hat{k}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi' - \varphi)} F_m(k; x', x), \quad (14.5.4)$$

где

$$F_m(k; x', x) = \delta(x - x') + \frac{k}{2\pi i} \theta(x' - x) h_m(k; x', x). \quad (14.5.5)$$

Разложим также спектральное ядро:

$$M_{\hat{\gamma}}(k; \hat{k}', \hat{k}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi' - \varphi)} M_m(k; x', x). \quad (14.5.6)$$

Поскольку детерминант $D_{\hat{\gamma}}(\mathbf{k})$ не зависит от направления вектора $\mathbf{k}_{\perp}$ и, следовательно, может быть обозначен символом $D(k, x)$, из соотношения (14.3.45) получаем

$$M_m(k; x, y) = \frac{\int_{-1}^1 \bar{F}_{-m}(k; z, -x) F_{-m}(k; -z, -y) dz}{D(k, x) \bar{D}(k, y)}. \quad (14.5.7)$$

Положив

$$M_m(k; x, y) = \delta(x - y) + \lambda_m(k; x, y) \quad (14.5.8)$$

и разложив экспоненту $\exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp)$ в ряд Фурье, легко получим

$$g_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi' - \varphi)} g_m(r, z; r', z'), \quad (14.5.9)$$

где r, z, φ — цилиндрические координаты точки $\mathbf{r}$, а

$$\begin{aligned} g_m(r, z; r', z') = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} k^2 dk \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy \lambda_m(k; x, y) \times \\ & \times J_m[kr(1-x^2)^{1/2}] J_m[kr'(1-y^2)^{1/2}] \times \\ & \times e^{ikh(xz-yz')} + \delta_{m0} \sum_n \frac{e^{-K_n(z+z')}}{|C_n|^2}. \end{aligned} \quad (14.5.10)$$

Разложив в ряд ядро $K_{\hat{\gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, точно так же получим

$$\begin{aligned} K_m(r, z; r', z') = & g_m(r, z; r', z') - \\ & - \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_z^{\infty} d\xi K_m(r, z; \rho, \xi) g_m(\rho, \xi; r', z'). \end{aligned} \quad (14.5.11)$$

Потенциал связан с этим ядром соотношением

$$2 \frac{\partial}{\partial z} K_m(r, z; r', z) = V(r, z) r^{-1} \delta(r - r'). \quad (14.5.12)$$

Важно то обстоятельство, что мы можем восстановить (и получить один и тот же) потенциал, исходя из любого значения m , но дискретный спектр появляется только в том случае, когда берется значение $m = 0$.

Далее можно принять предположение, что потенциал V является сферически-симметричным. Но это, по-видимому, не приводит ни к каким дальнейшим упрощениям. Пока что не удалось перекинуть мост между данной трехмерной задачей и одномерными методами с фиксированным угловым моментом или фиксированной энергией, рассмотренными выше в нашей книге.

Исторические замечания. Первое исследование метода Гельфанда — Левитана в применении к трехмерной задаче рассеяния было проведено Кеем и Мозесом [244, 245]. Но их метод не обязательно дает какой-либо локальный потенциал, даже если такой потенциал существует.

В 1971 г. Фаддеев [152] предложил свой метод, почти такой же, как и изложенный нами, если не считать того, что несколько

функций подвергаются у него преобразованию Фурье (примеры таких эквивалентных подходов к решению задачи приводятся в § 3). К тому же методу независимо пришел Р. Ньютон, который написал свою статью и передал ее Сабатье 2 февраля 1972 г., но в конце того же месяца получил препринт Фаддеева [152] ¹⁾.

В 1973 и 1974 гг. Р. Ньютон прочитал лекции [322, 323], объединяющие работу Фаддеева и его собственную. Мы в данной главе полностью следовали этим лекциям

¹⁾ Подробно обратная задача в случае нескольких измерений рассмотрена в обзоре Фаддеева [504]. Решение многомерной обратной задачи в конечно-разностном подходе рассматривалось в работах [439, 455, 483]. — *Прим. ред.*

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ ПРИ ФИКСИРОВАННОЙ ЭНЕРГИИ

Как мы видели во всех предыдущих главах книги, ключ к решению обратной задачи обычно дает некий математический аппарат, главную роль в котором играет ядро преобразования. Но как найти такой аппарат? Мы укажем здесь два апробированных общих подхода к этому вопросу. Первый из них основан на интерполяционных свойствах волновых функций. Он применялся непосредственно (метод Миодека решения обратной задачи в плазме) и как способ получения аппарата обратной задачи (построение спин-орбитальных потенциалов по методу Сабатье — Хушияра и соответствующие обобщения), что позволило также по аналогии разработать метод Жолана — Жана для обратных задач при фиксированных l с потенциалами, линейно-зависящими от $\sqrt{E}$.

Второй подход, связанный с именами Левитана, Кудрэ и Коза, основан на применении метода, взятого из теории операторов обобщенного сдвига, к подходящим для этого обратным задачам.

§ 1. Методы, основанные на интерполяционных формулах

Мы примем обозначения (11.4.10), но только символ $\Phi_\lambda^1(r)$ заменим символом $s_\lambda(r)$; согласно формуле (12.8.6), величина $s_\lambda(r)$ пропорциональна $r^{\lambda+1/2}$. Теперь интерполяционная формула (12.8.11) в случае $V_0 = 1$ запишется в виде

$$\frac{\pi\lambda}{\sin(\pi\lambda)} \Phi_\lambda^V(r) s_{-\lambda}(r) = \Phi_0^V(r) s_0(r) + \sum_{\mu \in S} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{\pi\gamma_\mu(V, 1)}{2\mu} \Phi_\mu^V(r) s_{\mu}^{\bar{f}}(r). \quad (15.1.1)$$

Если положить $|\lambda| \rightarrow \infty$ в обеих частях равенства (15.1.1), то в силу формулы (12.8.3) получим

$$\frac{1}{2} \pi r = \Phi_0^V(r) s_0(r) + \sum_{\mu \in S} \frac{\pi\gamma_\mu(V, 1)}{2\mu} \Phi_\mu^V(r) s_\mu(r). \quad (15.1.2)$$

Вычитая из равенства (15.1.1) равенство (15.1.2) и умножая результат на $[(\sin \pi \lambda)/\pi \lambda] [s_\lambda(r)]^{-1}$, с учетом формулы (12.8.6) получаем

$$\Phi_\lambda^V(r) = s_\lambda(r) - \frac{\pi}{2} \sum_{\mu \in S} \frac{(1/2r)^{\lambda+\mu}}{\Gamma(1+\lambda) \Gamma(1+\mu) (\lambda+\mu)} \gamma_\mu(V, 1) \Phi_\mu^V(r). \quad (15.1.3)$$

Но, согласно формуле (11.4.14), данное соотношение эквивалентно преобразованию

$$\Phi_\lambda^V(r) = \Phi_\lambda^1(r) - \int_0^r K_1^V(r, \rho) \Phi_\lambda^1(\rho) \rho^{-2} d\rho, \quad (15.1.4)$$

где

$$K_1^V(r, \rho) = \sum_{\mu \in S} \gamma_\mu(V, 1) \Phi_\mu^V(r) \Phi_\mu^1(\rho). \quad (15.1.5)$$

Из сказанного в гл. 11 и из соотношения (15.1.4) ясно, что такого рода результаты могут быть получены не только с исходным «потенциалом», равным единице, но и с любым исходным потенциалом.

Итак, интерполяционные формулы (15.1.1) и (15.1.2) дают ключ к решению обратных задач для частного класса потенциалов (здесь — аналитических потенциалов). Сначала мы напомним метод Фробениуса, который позволяет исследовать аналитические свойства решений дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами. Затем покажем, как, пользуясь методом Фробениуса, можно получать интерполяционные формулы, и остановимся на двух возможных их применениях.

А. Метод Фробениуса и интерполяционные формулы

Легко показать, что регулярное решение $\Phi_\lambda^V(r)$ парциального волнового уравнения Шредингера

$$\left(r^2 T_r - r^{-1} \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} \right) \Phi_\lambda^V(r) = \lambda^2 \Phi_\lambda^V(r), \quad (15.1.6)$$

где

$$T_r = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + 1 - V(r), \quad (15.1.7)$$

удовлетворяет также уравнениям

$$\left(T_r - 2\lambda r^{-1} \frac{d}{dr} \right) [r^{-1} \Phi_\lambda^V(r) s_\lambda(r)] = 0, \quad (15.1.8)$$

$$\left(T_r + 2\lambda r^{-1} \frac{d}{dr} \right) [r^{-1} \Phi_\lambda^V(r) s_{-\lambda}(r)] = 0. \quad (15.1.9)$$

Предположим теперь, что потенциал $V(r)$ — функция, аналитическая в круге $D(0, R_0)$. Произведение $[s_\lambda(r)]^{-1} \Phi_\lambda^V(r)$ есть некое

решение уравнения (15.1.9). Применяв метод Фробениуса, мы можем получить разложение в ряд Тэйлора данного произведения. Для этого введем коэффициенты d_λ^p и g_λ^n , такие, что

$$[s_\lambda(r)]^{-1} \varphi_\lambda^V(r) = \sum_p d_\lambda^p \lambda^p \quad (d_\lambda^0 = 1), \quad (15.1.10)$$

$$r^{-p} \left(T_r + 2\lambda r \frac{d}{dr} \right) r^p = \sum_{n=0}^{\infty} g_\lambda^n(p) r^n = p(2\lambda + p) + r^2 [1 - V(r)]. \quad (15.1.11)$$

Коэффициенты g_λ^n известны из разложения потенциала $V(r)$ в ряд Тэйлора. На основании неравенства Коши легко получаем при $R < R_0$ |

$$|g_\lambda^{n+1}| \leq R^{-n} M(R), \quad (15.1.12)$$

где

$$M(R) = \sup_{|z|=R} |V'(z)|. \quad (15.1.13)$$

С учетом формулы (15.1.11) получаем из уравнения (15.1.9) треугольную систему уравнений, которая позволяет определить коэффициенты d_λ^p по заданным g_λ^n :

$$\begin{aligned} d_\lambda^0 &= 1, \\ d_\lambda^1 g_\lambda^0(1) + d_\lambda^0 g_\lambda^1 &= 0, \\ &\vdots \\ d_\lambda^p g_\lambda^0(p) + d_\lambda^{p-1} g_\lambda^1 + \dots + d_\lambda^0 g_\lambda^p &= 0, \end{aligned} \quad (15.1.14)$$

где величины $g_\lambda^n(p)$ при $n \geq 1$ обозначены просто символом g_λ^n так как они не зависят от p .

На основании неравенства (15.1.12) мы получаем неравенство ¹⁾

$$|d_\lambda^{p+1}| \leq \frac{M(R)}{|2\lambda+1|} \prod_{n=1}^{n=p} R^{-1} \frac{RM(R) + n|2\lambda+n|}{(n+1)|2\lambda+n+1|}, \quad (15.1.15)$$

которое для удобства заменим более сильным неравенством

$$|d_\lambda^{p+1}| \leq \frac{M(R)}{|2\lambda+1|} \prod_{n=1}^{n=p} \frac{R^{-1}}{n+1} \sup [n, RM(R)]. \quad (15.1.16)$$

¹⁾ В дальнейших выкладках мы для простоты, не оговаривая, опускаем случай, когда 2λ — отрицательное целое число. Символом C обозначаем положительную константу, а символом $C(R)$ — положительную функцию переменной R .

Его правая часть легко вычисляется:

$$|d_{\lambda}^{p+1}| \leq \frac{C(R) R^{-p-1}}{|2\lambda+1|(p+1)} \leq C(R) R^{-p-1}, \quad (15.1.17)$$

где $C(R)$ не зависит от λ и p при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Далее, пусть $V_1(r)$ — потенциал, тоже аналитический в круге $D(0, R_0)$. Из второго неравенства (15.1.17) легко видеть, что сумма ряда

$$\bar{d}_{2\lambda}(r) \equiv \sum_n \bar{d}_{2\lambda}^n r_n = \left(\sum_{\mu} d_{\lambda, v_0}^p r^p \right) \left(\sum_q d_{\lambda, v_1}^q r^q \right) \quad (15.1.18)$$

является аналитической в круге $D(0, R')$ и что

$$|\bar{d}_{2\lambda}^n| \leq C(R') R'^{-n}, \quad (15.1.19)$$

где $C(R')$ не зависит от λ при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ и $\bar{d}_{2\lambda}(r) \leq C(R')/(1-r/R')$:

Если $f(r)$ — функция вида $\sum_0^{\infty} f_n r^n$, аналитическая в круге $D(0, R_0)$, то ее можно разложить в ряд по функциям $r^n \bar{d}_n(r)$:

$$f(r) = \sum_0^{\infty} b_n r^n \bar{d}_n(r). \quad (15.1.20)$$

Доказательство. Формально приравнявая коэффициенты в обеих частях равенства (15.1.20), получаем

$$b_k = f_k - \sum_{n=0}^{k-1} b_n \bar{d}_n^{k-n}. \quad (15.1.21)$$

Введем функцию $C(R')$, такую, что $\bar{d}_{2\lambda}^n$ и f_n будут удовлетворять неравенству (15.1.19). С учетом этого из равенства (15.1.21) получаем

$$|b_k| \leq C(1+C)^k R^{-k}, \quad (15.1.22)$$

и этого ограничения достаточно, чтобы показать существование круга, в котором обе части равенства (15.1.22) являются одинаковыми аналитическими функциями.

Из равенства (15.1.20) следует, что мы можем сконструировать последовательность a_n ($a_0 = 1$), для которой в круге с центром в начале координат справедливо равенство

$$\left(\frac{1}{2} \pi r \right)^{-1} \sum_{\mu \in S^*} a_{\mu} \Phi_n^V(r) s_{\mu}(r) = 1 \quad (S^* = \{SUO\}). \quad (15.1.23)$$

Эта формула совпадает с формулой (15.1.2), если положить

$$a_{\mu} = \frac{\pi \gamma_{\mu}(V, 1)}{2\mu}. \quad (15.1.24)$$

Интерполяционная формула (15.1.1) легко выводится из формулы (15.1.23), так как, применяя оператор $[T_r + 2\lambda r^{-1} d/dr] r^{-1}$ к обеим частям равенства (15.1.1), мы с учетом формул (15.1.9), (15.1.8) и (15.1.23) получаем 0 и условия при $r = 0$ совместны.

Итак, мы видим, что основные формулы, необходимые для решения обратной задачи при фиксированной энергии, можно вывести, пользуясь классическим методом Фробениуса.

Б. Интерполяционные формулы как промежуточный аппарат

В случае рассеяния частиц с полуцелым спином в поле с центральным и спин-орбитальным потенциалами уравнение Шредингера можно записать в следующей форме:

$$\Delta \Psi(\mathbf{r}) + [1 - U_c(r) - 2L \cdot S U_s(r)] \Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (15.1.25)$$

Тогда дифференциальное сечение дается выражением

$$I(\theta) = |f(\theta)|^2 + |g(\theta)|^2, \quad (15.1.26)$$

где

$$f(\theta) = \frac{1}{2i} \sum_0^{\infty} \{ (l+1) [\exp(2i\delta_l^+) - 1] + l [\exp(2i\delta_l^-) - 1] \} P_l(\cos \theta), \quad (15.1.27)$$

$$g(\theta) = \frac{1}{2i} \sum_1^{\infty} [\exp(2i\delta_l^+) - \exp(2i\delta_l^-)] P_l^1(\cos \theta). \quad (15.1.28)$$

Обратная задача состоит в нахождении потенциалов U_c и U_s по данным фазовым сдвигам. Другими словами, нужно найти такие потенциалы, чтобы имело заданную форму асимптотическое поведение регулярных решений $\Phi_l^{\pm}(r)$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\left(r^2 T_r^{\pm} - r^{-1} \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} \right) \Phi_l^{\pm}(r) = \lambda^2 \Phi_l^{\pm}(r), \quad (15.1.29)$$

где

$$T_r^{\pm} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \pm 1 - [V(r) \pm 2\lambda Q(r)], \quad (15.1.30)$$

$$V(r) = U_c - \frac{1}{2} U_s, \quad (15.1.31)$$

$$Q(r) = \frac{1}{2} U_s(r),$$

причем в индексах « $\pm$ » берется либо всюду нижний, либо всюду верхний знак (так условимся понимать подобные обозначения и в дальнейшем).

Уравнение (15.1.30) сводится к уравнению (15.1.7), если потенциал $V(r)$ заменить величиной $V(r) \pm 2\lambda Q(r)$. Следовательно, если $V(r)$ и $Q(r)$ — функции, аналитические в круге $D(0, R_0)$, то выполняется неравенство (15.1.15) с заменой $M(R)$ на $M_0(r)(2\lambda + 1)$ (мы берем $\lambda \geq 0$). Легко видеть, что граница, не зависящая от λ , получается при замене неравенства (15.1.16) соотношением

$$|d_\lambda^{p+1}| \leq M_0(R) \prod_{n=1}^{n=p} \frac{2R^{-1}}{n+1} \sup [n, RM_0(r)]. \quad (15.1.32)$$

Таким образом, выполняется второе неравенство (15.1.17) с заменой R на $R/2$, и разложения в ряд, подобные разложению (15.1.20), будут снова справедливы в круге с центром в начале координат. Введем разложения в ряд двух функций

$$F^\pm(r) = \exp\left(\pm \int_0^r \rho V(\rho) d\rho\right) = \left(\frac{1}{2}\pi r\right)^{-1} \times \\ \times \sum_{\mu \in S} a_\mu^\pm \Phi_\mu^\mp(r) s_\mu(r), \quad (15.1.33)$$

представляющих собой обобщение разложения (15.1.23). Исходя из соотношения (15.1.33), можно вывести интерполяционную формулу [371]

$$\frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda} \Phi_\lambda^\pm(r) s_{-\lambda}(r) = \Phi_0(r) s_0(r) + \sum_{\mu \in S} \frac{\pi}{2\mu} \gamma_\mu(V^\pm, 1) \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \Phi_\mu^\mp(r) s_\mu(r), \quad (15.1.34)$$

где

$$\gamma_\mu(V^\pm, 1) = 2\mu\pi^{-1}a_\mu^\pm, \quad (15.1.35)$$

причем рассуждения при ее выводе совершенно аналогичны рассуждениям, следовавшим за формулой (15.1.24). Очевидно, что формула (15.1.34) представляет собой обобщение формулы (15.1.1). Вычитая равенство (15.1.34) из равенства (15.1.33), умножая обе стороны полученного равенства на $s_\lambda(r)$ и отмечая, что $r \int_0^r s_\mu(\rho) s_\lambda(\rho) \rho^{-2} d\rho$ есть не что иное, как $(\lambda + \mu)^{-1} s_\mu(r) s_\lambda(r)$, получаем следующую формулу, которая, очевидно, может быть продолжена в область $\operatorname{Re} \lambda > -1/2$:

$$\Phi_\lambda^\pm(r) = F^\pm(r) s_\lambda(r) - \int_0^r K^\pm(r, \rho) s_\lambda(\rho) \rho^{-2} d\rho, \quad (15.1.36)$$

где

$$K^{\pm}(r, r') = \sum_{\mu \in S} \gamma_{\mu}(V^{\pm}, 1) \Phi_{\mu}^{\mp}(r) s_{\mu}(r'). \quad (15.1.37)$$

Эти формулы показывают, что в рассматриваемой нами задаче в случае аналитических потенциалов существуют ядра преобразования, которые не зависят от λ и позволяют определить функции $\Phi_{\lambda}^{\pm}(r)$ по известным функциям $s_{\lambda}(r)$.

Придадим теперь величине λ последовательно все значения v , принадлежащие множеству S ; при каждом v умножим обе части равенства (15.1.36) на $\gamma_{\lambda}(V^{\pm}, 1) s_{\lambda}(r')$ и просуммируем все члены. Получим систему интегральных уравнений

$$K^{\pm}(r, r) = F^{\mp}(r) f^{\pm}(r, r') - \int_0^r K^{\mp}(r, \rho) f^{\pm}(\rho, r') \rho^{-2} d\rho, \quad (15.1.38)$$

где величины $f^{\pm}(r, r')$ — «симметричные» ядра, которые имеют вид

$$f^{\pm}(r, r') = \sum_{\mu \in S} \gamma_{\mu}(V^{\pm}, 1) s_{\mu}(r) s_{\mu}(r'). \quad (15.1.39)$$

Из соотношений (15.1.33) и (15.1.36) легко видеть, что система (15.1.38) может быть дополнена следующими условиями для потенциалов:

$$s_0(r) [F^{+}(r) - F^{-}(r)] = \int_0^r [K^{+}(r, \rho) - K^{-}(r, \rho)] s_0(\rho) \rho^{-2} d\rho, \quad (15.1.40)$$

$$F^{+}(r) F^{-}(r) = 1 \quad (15.1.41)$$

и формулой, которая дает $V(r)$ из $F^{\pm}(r)$ и $K^{\pm}(r, r')$ [см. ниже формулу (15.1.48)].

Система уравнений (15.1.38), (15.1.40) и (15.1.41) заменяет уравнение Редже — Ньютона для рассеяния частиц со спином. Она дает возможность вычислять потенциалы V и Q по функциям $f^{\pm}(r, r')$ [которые сами вычисляются по формуле (15.1.39) при заданных γ_{μ}] и способ построения всех решений уравнения Шредингера. Правда, при таком методе исходят из потенциала $+1$ как некоего «опорного потенциала» [или «нулевой энергии», см. (15.1.25)], что не всегда удобно. Но можно (гл. 12, § 8), воспользовавшись весьма специальными аналитическими свойствами в λ -плоскости, вытекающими из формулы типа (15.1.36), вывести интерполяционные формулы и интегральные уравнения, исходящие из любого опорного потенциала. Результат таков:

$$\Phi_{\lambda}^{\pm}(r) = F_{\lambda}^{\pm}(r) \Phi_{\lambda}^{V_0}(r) - \int_0^r K^{\pm}(r, \rho) \Phi_{\lambda}^{V_0}(\rho) \rho^{-2} d\rho, \quad (15.1.42)$$

где

$$K^{\pm}(r, r') = I^{\pm}(r, r') - J^{\pm}(r, r'), \quad (15.1.43)$$

$$J^{\pm}(r, r') = F^{\pm}(r) e(r, r') - \int_0^r K^{\pm}(r, \rho) e(\rho, r') \rho^{-2} d\rho, \quad (15.1.44)$$

$$I^{\pm}(r, r') = F^{\pm}(r) g^{\pm}(r, r') - \int_0^r K^{\mp}(r, \rho) g^{\pm}(\rho, r') \rho^{-2} d\rho, \quad (15.1.45)$$

$$e(r, r') = \sum_{\mu \in S} \gamma_{\mu}(V_0, 1) \Phi_{\mu}^{V_0}(r) \Phi_{\mu}^{V_0}(r'), \quad (15.1.46)$$

$$g^{\pm}(r, r') = \sum_{\mu \in S} \gamma_{\mu}(V^{\pm}, 1) \Phi_{\mu}^{V_0}(r) \Phi_{\mu}^{V_0}(r') \quad (15.1.47)$$

и справедливы условия (15.1.40) и (15.1.41) с заменой $s_0 \rightarrow \varphi_0^{V_0}$. Их можно дополнить формулой для вычисления $V(r)$:

$$K^{\pm}(r, r) = \frac{1}{2} r F^{\pm}(r) \left\{ \pm r^2 Q_1(r) + \int_0^r [\rho^3 Q^2(\rho) - \rho V(\rho)] d\rho \right\}. \quad (15.1.48)$$

Кроме того, $I^{\pm}$ и $J^{\pm}$ можно разложить в ряд по волновым функциям, как было сделано в случае центрального потенциала:

$$I_{\pm}^{\pm}(r, r') = \sum_{\mu \in S} \gamma_{\mu}(V^{\pm}, 1) \Phi_{\mu}^{\mp}(r) \Phi_{\mu}^{V_0}(r'), \quad (15.1.49)$$

$$J^{\pm}(r, r') = \sum_{\mu \in S} \gamma_{\mu}(V_0, 1) \Phi_{\mu}^{\pm}(r) \Phi_{\mu}^{V_0}(r'). \quad (15.1.50)$$

Подставляя эти разложения в формулу (15.1.42), получаем бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda}^{\pm}(r) = F^{\pm}(r) \Phi_{\lambda}^{V_0}(r) - \sum_{\mu \in S} [\Phi_{\mu}^{\mp}(r) \gamma_{\mu}(V^{\pm}, 1) - \\ - \Phi_{\mu}^{\pm}(r) \gamma_{\mu}(V_0, 1)] \Lambda_{\lambda\mu}^{V_0}(r), \end{aligned} \quad (15.1.51)$$

где Λ — величина, даваемая выражением (11.4.14).

Итак, было доказано [371] следующее.

1. Если V и Q — аналитические функции, то можно найти некий набор коэффициентов $\gamma_{\mu}(V^{\pm}, 1)$, таких, что функции $K^{\pm}(r, r')$, определяемые формулами (15.1.43) — (15.1.47), будут удовлетворять соотношению (15.1.48) и регулярные решения уравнения (15.1.29) можно будет выразить через $K^{\pm}$ по формуле (15.1.42).

2. Если задан набор коэффициентов $\gamma_{\mu}(V^{\pm}, 1)$, таких, что $g^{\pm}(r, r')$ — аналитическая функция переменных r и r' , и некий

опорный потенциал $V_0(r)$ тоже аналитический, то решение системы уравнений (15.1.44) — (15.1.47) существует и является единственным в отсутствие «исключительных» условий; исключительные условия не выполняются при достаточно малых r и соответствуют изолированным точкам в комплексной r -плоскости.

Таким образом, Сабатье [371] удалось найти точно решаемые примеры, получить производящую функцию для $\psi_\lambda^\pm(r)$ и показать, что обратная задача в случае потенциала, равного сумме центрального и спин-орбитального потенциалов, может быть решена по схеме, представленной на рис. 18. Но остался важный этап построения коэффициентов γ_μ , а следовательно, и потенциалов по фазовым сдвигам. Это было выполнено Хушияром [208]. Он исходит из нулевого опорного потенциала, так что $\psi_\lambda^{V_0}(r)$ сводится к $u_\lambda(r)$, и принимает, что

$$\left| \int_0^r s Q(s) ds \right| < \infty \quad \text{при всех } r, \\ Q(r) = O_2^2(r^{-3}) \quad \text{при больших } r. \quad (15.1.52)$$

Так как $V_0 = 0$, коэффициент $\gamma_\mu(V_0, 1)$ равен просто $2\lambda/\pi$ при целых λ и нулю при всех других λ . Для удобства введем коэффициенты $c_\lambda^\pm$ и $d_\lambda^\pm$ в соответствии с равенством

$$\gamma_\lambda(V^\pm, 1) = h_\pm^2 (\gamma_\lambda(V_0, 1) + c_\lambda^\pm) = h_\pm^2 d_\lambda^\pm, \quad (15.1.53)$$

где

$$h_\pm = \exp \left(\pm \int_0^\infty \rho Q(\rho) d\rho \right). \quad (15.1.54)$$

Исследование ограничивается потенциалами, соответствующими коэффициентам $c_\lambda^\pm$, которые удовлетворяют условию

$$c_\lambda^\pm = O(\lambda^{1/3}) \quad \text{при больших } \lambda. \quad (15.1.55)$$

При таком предположении можно перейти к пределу при $r \rightarrow \infty$ в формуле (15.1.51) и приравнять коэффициенты при $\exp(ir)$ и $\exp(-ir)$ по отдельности. В результате получаем

$$A_\lambda^\pm \exp \left[i \left(\delta_\lambda^\pm - \pi \frac{\lambda}{2} \right) \right] = h_\pm \exp \left(-i\pi \frac{\lambda}{2} \right) - \\ - \sum_{\mu \in S} [A_\mu^\mp h_\pm^2 d_\mu^\pm \exp(i\delta_\mu^\pm) - A_\mu^\pm \gamma_\mu(V_0, 1) \times \\ \times \exp(i\delta_\mu^\pm)] e^{i\mu\pi/2} \Lambda_{\lambda\mu}^{V_0}(\infty). \quad (15.1.56)$$

Введем обозначение

$$B_{\lambda}^{\pm} = A_{\lambda}^{\pm} h_{\mp} \quad (15.1.57)$$

и умножим обе части равенства (15.1.56) на $h_{\mp}$. Тогда, поскольку $h_- h_+ = 1$, это равенство примет вид

$$\begin{aligned} B_{\lambda}^{\pm} \exp \left[i \left(\delta_{\lambda}^{\pm} - \lambda \frac{\pi}{2} \right) \right] = & \exp \left(-i\lambda \frac{\pi}{2} \right) - \\ & - \sum_{\mu \in S} [B_{\mu}^{\mp} d_{\mu}^{\pm} \exp(i\delta_{\mu}^{\mp}) - \\ & - B_{\mu}^{\pm} \gamma_{\mu}(V_0, 1) \exp(i\delta_{\mu}^{\pm})] \times \\ & \times e^{-i\mu\pi/2} \Lambda_{\lambda\mu}^{V_0}(\infty). \end{aligned} \quad (15.1.58)$$

Предположим теперь, что фазы $\delta_{\lambda}^{\pm}$ заданы при физических значениях величины $\lambda \in S_p = \{1/2, 3/2, \dots\}$, а величины $d_{\lambda}^{\pm}$ выбраны при нефизических значениях $\lambda \in S_0 = \{1, 2, 3, \dots\}$. В этом случае, как показал Хушияр, систему уравнений (15.1.58) можно свести к обращению бесконечных матриц, и это может быть выполнено в общем случае, так как эти матрицы либо весьма сходны с матрицей M , исследованной в гл. 12, либо связаны с ядром Гильберта — Шмидта, зависящим от фазовых сдвигов. Хушияр исследовал также связь между коэффициентами $d_{\mu}^{\pm}$ и потенциалами и сделал следующий интересный вывод. Предположим, что при физических значениях λ мы берем $\delta_{\lambda}^{\pm} = \delta_{\lambda}^{-}$ и не выбираем $d_{\lambda}^{\pm} = d_{\lambda}^{-}$ при нефизических значениях λ . Тогда, вообще говоря, метод для суммы центрального потенциала со спин-орбитальным не сводится к методу для центральных потенциалов. Другими словами, даже если $\delta_{\lambda}^{\pm} = \delta_{\lambda}^{-}$ при всех физических значениях λ , все-таки возможно наличие спин-орбитального взаимодействия. Потенциалы такого типа можно назвать «спин-орбитально-прозрачными» потенциалами, так как их спин-орбитальную часть невозможно обнаружить по изменению поляризации или по другим данным о спине при фиксированной энергии.

В. Прямое применение интерполяционных формул

Положив

$$h(\lambda, r) = [s_{1/2\lambda}(r)]^{-1} \Phi_{1/2\lambda}^V(r) \quad (15.1.59)$$

в формуле (15.1.3), с учетом формулы (12.8.6) сразу получаем

$$h(\lambda, r) = 1 + \sum_{n>0} c_n r^n \frac{h(n; r)}{\lambda + n}, \quad (15.1.60)$$

где

$$c_n = -\pi \gamma_{n/2}(V, 1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}n\right)\right]^{-2}. \quad (15.1.61)$$

Миодек [306] пытался прямо по формуле (15.1.60) (и некоторым ее обобщениям) строить потенциал, исходя из логарифмических производных физических волновых функций при фиксированном значении $r = R_1$. Если принять, что потенциал равен нулю вне шара $B(0, r_1)$, то эти логарифмические производные, очевидно, легко вычислить по амплитуде рассеяния, так что исследования Миодека представляют интерес в обычной обратной задаче при фиксированной энергии (если априори предположить, что потенциал обрывается при R_1 и является аналитической функцией при $r < R_1$). Они представляют интерес и в других задачах и, в частности, в детально рассмотренной Миодеком специальной обратной задаче для плазмы, в которой последовательность $\{c_n\}$ и логарифмические производные являются комплексными числами.

Таким образом, в методе Миодека, который не ограничивается последовательностями действительных $\{c_n\}$, по «экспериментальным» данным определяются величины

$$\beta(n) = \left[r \frac{\partial}{\partial r} \ln h(n; r) \right]_{r=R_1}. \quad (15.1.62)$$

Продифференцировав выражение (15.1.60), получим вместе с исходным два соотношения при $r = R_1$:

$$h(\lambda; R_1) = 1 + \sum_{n>0} \frac{b_n}{\lambda + n}, \quad (15.1.63)$$

$$\beta(\lambda) h(\lambda; R_1) = \sum_{n>0} \frac{b_n}{\lambda + n} [\beta(n) + n], \quad (15.1.64)$$

где

$$b_n = c_n R_1^n h(n; R) \in C. \quad (15.1.65)$$

Если мы сможем найти $\{b_n\}$ по заданным $\{\beta(n)\}$, то задача будет решена, так как тогда по формуле (15.1.63) мы вычислим $h(n; R_1)$, а затем по формуле (15.1.65) (определение величины b_n) — и величины $\{c_n\}$. Очевидно, что формулы (15.1.63) и (15.1.64) дадут

$$\beta(\lambda) = \frac{\sum_n b'_n / (\lambda + n)}{1 + \sum_m b_m / (\lambda + m)}, \quad (15.1.66)$$

где

$$\frac{b'_n}{b_n} = \beta(-n) = \beta(n) + n. \quad (15.1.67)$$

Остается осуществить такую интерполяцию коэффициентов $\beta(n)$. Уравнения (15.1.66) и (15.1.67) представляют собой необходимые и достаточные условия для существования потенциала вида $u(r) = \sum_{n>0} u_n r^n$, который будет давать величины $\beta(n)$ ($n > 0$), будучи подставлен в регулярные решения радиальных уравнений. Миодек [306] доказал, что такая интерполяция может быть осуществлена для любого ограниченного набора. Рассмотрим, к примеру,

$$\beta^N(\lambda) = \frac{\sum_{0 < n \leq N} (b_n'^N / \lambda + n)}{1 + \sum_{0 < m \leq N} (b_m^N / \lambda + m)}. \quad (15.1.68)$$

Это соответствует случаю $c_n \equiv 0$ при $n > N$. У функции $h(\lambda, r)$ имеется конечное число полюсов при $\lambda = n$ ($0 < n \leq N$). Величина $\beta^N(\lambda)$ — рациональная функция аргумента λ . Это отношение двух полиномов $Q^{N-1}(\lambda)/P^N(\lambda)$ порядка $N-1$ и N , которые находятся во взаимно-однозначном соответствии с $2N$ константами $\{b_n'^N, b_n^N\}$:

$$P^N(\lambda) \equiv p^N(\lambda) \left(1 + \frac{\sum_n b_n^N}{\lambda + n} \right), \quad (15.1.69)$$

$$Q^{N-1}(\lambda) = p^N(\lambda) \frac{\sum_n b_n'^N}{\lambda + n}, \quad (15.1.70)$$

где $p^N(\lambda) = \prod_{0 < n \leq N} (\lambda + n)$. Эта рациональная функция имеет $2N$ свободных параметров и может быть построена однозначно по своим значениям при $\lambda = \pm n$ ($n > 0$).

Нужно только проинтерполировать $\{\beta^N(n)$ и $\beta^N(-n) = \beta^N(n) + n\}$ с помощью функции $Q^{N-1}(\lambda)/P^N(\lambda) = \beta^N(\lambda)$, чтобы удовлетворить условиям (15.1.66) и (15.1.67). Тогда величина

$$b_m^N \equiv \lim_{\lambda \rightarrow -n} \frac{(\lambda + n) P^N(\lambda)}{p^N(\lambda)} \quad (15.1.71)$$

даст нам решение обратной задачи для ограниченного набора экспериментальных значений $\{\beta^N(n)\}$ ($0 < n \leq N$).

К сожалению, пока остается открытым вопрос об устойчивости такой интерполяции при $N \rightarrow \infty$ и нет гарантий, что будут малы величины $\beta^N(n)$ ($n > N$), вычисленные по формуле (15.1.66). Предварительные исследования Миодека не дали ему оснований сделать вывод об их малости в общем случае. Но, может быть, аппроксимирующие функции Паде позволят найти устойчивый способ численного построения таких рациональных приближений. Во всяком случае, метод интересен хотя бы своей простотой.

Г. Дальнейшие обобщения

Структура интегральных уравнений и решение, основанное на интерполяционных формулах, таковы, что допускают обобщение на более сложные случаи. Эту мысль весьма плодотворно реализовал Хушияр, который исследовал случай потенциалов, зависящих от L^2 [207], получив сравнительно простые результаты, а также обратную задачу рассеяния в случае потенциалов, содержащих одновременно центральную, спин-орбитальную и тензорную составляющие [206]. Очевидно, что такая задача представляет большой интерес в ядерной физике. Хушияру удалось построить метод решения, который следует общей схеме рис. 18, но чрезвычайно сложен в деталях. По этой причине некоторые моменты, в частности построение потенциалов, пока не доведены до конца полностью.

На основании обычной аналогии между обратной задачей при фиксированном E и обратной задачей при фиксированном l (гл. 11, § 7) можно построить метод решения второй задачи, применив подход, разработанный для первой. Так поступали Жолан и Жан [221—223], которые решали обратную задачу при фиксированном l в случае потенциалов, линейно-зависящих от $E^{1/2}$, методом, сходным с введенным Сабатье методом исследования, потенциалов, линейно-зависящих от λ при фиксированной энергии, который был изложен выше.

§ 2. Методы, основанные на операторах обобщенного сдвига

Теория операторов обобщенного сдвига изложена и развита далее в работах Левитана [271, 274, 275], который применил ее к дифференциальным операторам, в частности к дифференциальным операторам второго порядка. Левитан показал также, каким образом операторы обобщенного сдвига могут быть применены в обратных задачах. Нам уже встречался один пример такого применения: сплетающий оператор U в гл. 14. Данный метод был применен к некоторым обратным задачам при фиксированной энергии Кудрэ и Козом [111, 112], которым удалось обобщить метод Ньютона на уравнения Клейна — Гордона и Дирака. Мы кратко остановимся на применении операторов обобщенного сдвига (в частности, так называемых «операторов преобразования») при решении обратных задач, а затем изложим метод Кудрэ и Коза для уравнения Клейна — Гордона.

А. Суть метода операторов преобразования

Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ и $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ — линейные функциональные пространства. Пусть A — линейный (дифференциальный) оператор, отображающий пространство $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}'$, а B — линейный (дифференциальный) оператор, отображающий $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}'$. Нам нужно найти линейный оператор X , биективно отображающий пространство $\mathcal{F}$ в пространство $\mathcal{E}$, а $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{E}'$, такой, что

$$AX = XB, \quad (15.2.1)$$

X^{-1} существует как оператор, отображающий $\mathcal{E}$ в $\mathcal{F}$.

Условия (15.2.1) означают, что при любом f ($f \in \mathcal{F}$) в пространстве $\mathcal{F}'$ выполняется равенство

$$A(Xf) = X(Bf). \quad (15.2.2)$$

В частности, если f — решение уравнения $Bf = 0$, то $g = Xf$ есть решение уравнения $Ag = 0$. Таким образом, X — это оператор преобразования, который, действуя на f , дает g , а X^{-1} — оператор преобразования, который, действуя на g , дает f .

Из условий (15.2.1) следует, что если X — оператор преобразования для операторов A и B , то он также оператор преобразования и для операторов $A + \gamma$ и $B + \gamma$, где γ — произвольная постоянная. Таким образом, если f_γ — решение уравнения

$$(B + \gamma)f_\gamma = 0, \quad (15.2.3)$$

то $g_\gamma = Xf_\gamma$ — решение уравнения

$$(A + \gamma)g_\gamma = 0. \quad (15.2.4)$$

Чтобы обеспечить обратимость оператора X , обычно принимают $X = 1 - K$, где K — интегральный оператор с треугольным ядром. Таким образом,

$$(Xf(r)) = f(r) - \int_0^r K(r, \rho) \omega(\rho) f(\rho) d\rho. \quad (15.2.5)$$

Пример. Введем дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} A &= [h(r)]^{-1} \left(\frac{d^2}{dr^2} + W(r) \right), \\ B &= [h(r)]^{-1} \left(\frac{d^2}{dr^2} + W_0(r) \right). \end{aligned} \quad (15.2.6)$$

Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ — множество функций, дважды дифференцируемых на $\mathbb{R}^+$ и равных нулю при $r = 0$, и пусть $\mathcal{E}' = A(\mathcal{E})$, $\mathcal{F}' = B(\mathcal{F})$. Полагаем $\omega(r) = h(r)$ (и предполагая, что функции $h(r)$, $W_0(r)$ и $W(r)$ имеют свойства, достаточные для справедливости следующего вывода), получаем (после

двойного интегрирования по частям и алгебраических преобразований)

$$\begin{aligned}
 (AX - XB) f = & -K(r, 0) f'(0) + \\
 & + \frac{1}{h(r)} \left(W(r) - W_0(r) - h'(r) K(r, r) - 2h(r) \frac{d}{dr} K(r, r) \right) f(r) + \\
 & + \int_0^r \left\{ \left[\frac{1}{h(\rho)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + W_0(\rho) \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{h(r)} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + W(r) \right) \right] K(r, \rho) \right\} f(\rho) d\rho. \quad (15.2.7)
 \end{aligned}$$

Таким образом, $AX = XB$ в том и только в том случае, если

$$K(r, 0) = 0, \quad (15.2.8)$$

$$W(r) - W_0(r) = h'[(r) K(r, r) + 2h(r) \frac{d}{dr} K(r, r)], \quad (15.2.9)$$

$$\left[\frac{1}{h(r)} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + W(r) \right) - \frac{1}{h(\rho)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + W_0(\rho) \right) \right] K(r, \rho) = 0. \quad (15.2.10)$$

Если $h(r) = 1$ и центробежный член включается в W или W_0 , то мы получаем ядро преобразования Гельфанда — Левитана для обратной задачи при фиксированном l , причем $\gamma = k^2$ в формулах (15.2.3) и (15.2.4).

Если $h(r) = -r^{-2}$, $W_0(r) = k^2$ и $W(r) = k^2 - V(r)$, то мы получаем ядро преобразования Редже — Ньютона для обратной задачи при фиксированной энергии с $\gamma = l(l+1)$.

Б. Применение к уравнению Клейна — Гордона

Уравнение Клейна — Гордона при фиксированной энергии имеет вид

$$[E - V(r)]^2 \phi(r) = (\mu^2 - \Delta) \phi(r). \quad (15.2.11)$$

Разложение по парциальным волнам в сферически-симметричном случае

$$\phi(r) = \sum_l r^{-1} \phi_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (15.2.12)$$

дает радиальные уравнения

$$[E - V(r)]^2 \phi_l(r) = \left(\mu^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \phi_l(r). \quad (15.2.13)$$

При фиксированной энергии таким путем получается система дифференциальных уравнений со всеми значениями углового момента l .

Если теперь ввести операторы A и B , даваемые выражениями (15.2.6), в которых мы примем

$$\begin{aligned} h(r) &= -r^{-2}, \quad W_0(r) = [E - V_0(r)]^2 - \mu^2, \\ W(r) &= [E - V(r)]^2 - \mu^2, \end{aligned} \quad (15.2.14)$$

и положить $\gamma = l(l+1)$ в формулах (15.2.3) и (15.2.4), то, очевидно, легко будет применить результаты, полученные нами в примере. Ядро $K(r, r')$ оператора преобразования удовлетворяет уравнениям

$$K(r, 0) = 0, \quad (15.2.15)$$

$$r^2 \{ [E - V(r)]^2 - [E - V_0(r)]^2 \} = 2r \frac{d}{dr} [r^{-1} K(r, r)], \quad (15.2.16)$$

$$\begin{aligned} \left\{ r^2 \left[(E - V(r))^2 + \mu^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] - r'^2 \left[(E - V_0(r'))^2 + \mu^2 - \frac{\partial^2}{\partial r'^2} \right] \right\} \times \\ \times K(r, r') = 0. \end{aligned} \quad (15.2.17)$$

Полагая

$$K(r, r') = \sum_l c_l \phi_l(r) \phi_l^0(r'), \quad (15.2.18)$$

$$F(r, r') = \sum_l c_l \phi_l^0(r) \phi_l^0(r') \quad (15.2.19)$$

и выражая $\phi_l(r)$ через $\phi_l^0(r)$ и ядро преобразования ($\phi_l = X\phi_l^0$):

$$\phi_l(r) = \phi_l^0(r) - \int_0^r K(r, s) \phi_l^0(s) s^{-2} ds, \quad (15.2.20)$$

легко получаем уравнение Редже — Ньютона:

$$K(r, r') = F(r, r') - \int_0^r K(r, \rho) F(\rho, r') \rho^{-2} d\rho. \quad (15.2.21)$$

Зная коэффициенты c_l , вычисляем $F(r, r')$ по формуле (15.2.19), а зная $F(r, r')$, можно найти $K(r, r')$, решив уравнение (15.2.21). Таким образом, обратная задача сводится к определению коэффициентов c_l по экспериментальным данным. Очевидно, что, подставив выражение (15.2.18) в формулу (15.2.20), мы снова получим результаты гл. 12, § 2:

$$\phi_l(r) = \phi_l^0(r) - \sum_{l'} c_{l'} L_{ll'}(r) \phi_{l'}(r), \quad (15.2.22)$$

где

$$L_{ll'}(r) = \frac{\phi_{l'}^0(r) (d/dr) \phi_l^0(r) - \phi_l^0(r) (d/dr) \phi_{l'}^0(r)}{l(l+1) - l'(l'+1)}. \quad (15.2.23)$$

Допустим теперь, что $r \rightarrow \infty$ в формуле (15.2.22). Предполагая для простоты, что $V_0(r) = 0$, получаем следующие асимптотические выражения для волновых функций:

$$\phi_l^0(r) \sim \sin(\sqrt{E^2 - \mu^2}r - l\pi/2), \quad r \rightarrow \infty, \quad (15.2.24)$$

$$\phi_l(r) \sim A_l \sin(\sqrt{E^2 - \mu^2}r - l\pi/2 + \delta_l), \quad r \rightarrow \infty, \quad (15.2.25)$$

так что метод, изложенный в гл. 12, § 2, полностью применим.

В случае уравнения Дирака операторы, взятые в примере (15.2.6), необходимо соответствующим образом изменить ($d^2/dr^2 \rightarrow d/dr$), но суть метода не меняется. Снова $K(r, r')$ разлагается по произведениям физических волновых функций с коэффициентами c_l , но результаты оказываются более сложными.

§ 3. Замечание

Ни одна из обратных задач, рассмотренных в данной главе, не решена полностью. Для всех задач предложены формальные схемы решения и для большинства из них найден способ построения одного или нескольких потенциалов по экспериментальной информации, но полного ответа на общие вопросы, касающиеся обратной задачи, ни в одном из случаев найдено не было. Несомненно, найти ответ на эти вопросы — самое сложное в обратной задаче. Коль скоро же на них нет ответа, такое «решение» обратной задачи мало чем отличается от подгонки.

Кроме того, слишком сложные математические методы вряд ли могут найти практическое применение. Этим, вероятно, объясняется то, что разработанные методы решения обратных задач пока что применялись только в случаях, когда очень проста зависимость потенциала $V(r)$ от E или l . Метод Корниля [104], который исходит из соотношения между детерминантами Фредгольма двух ядер, не избежал этого ограничения, хотя в принципе мог бы использоваться в более общих случаях.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

§ 1. Введение

В данной главе мы снова будем всюду (кроме параграфов, посвященных частным проблемам) рассматривать эксперимент, в котором пучок частиц A рассеивается мишенью, состоящей из частиц B , при заданной нерелятивистской энергии E . Для квантовомеханического описания системы $A - B$ мы используем уравнение Шредингера и одну или несколько функций расстояния между частицами. Наша «обратная задача» заключается в конструировании этих «потенциалов» по экспериментальным данным.

Всюду в этой главе мы используем уравнение Шредингера со сферически-симметричным потенциалом:

$$\Delta^2 \psi + [k^2 - U(r)] \psi = 0, \quad (16.1.1)$$

где $k^2 = 2mE/\hbar^2$ и $U(r) = 2mV(r)/\hbar^2$. Хорошо известное разложение волновой функции по полиномам Лежандра приводит к уравнениям для парциальных волн

$$\frac{d^2 \phi_l}{dr^2} + [k^2 - U(r) - l(l+1)r^{-2}] \phi_l = 0, \quad (16.1.2)$$

где $\phi_l(r)$ — функция, которая ведет себя в начале координат как величина

$$u_l(r) = \left(\frac{\pi}{2} kr \right)^{1/2} J_{l+1/2}(kr). \quad (16.1.3)$$

Предположим, что потенциал $U(r)$ выбран в самом широком классе потенциалов, для которых функция ϕ_l и ее производная имеют следующее асимптотическое поведение (если нет кулоновского взаимодействия):

$$\left. \begin{aligned} \phi_l(r) &= A_l \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) + o(1) \\ \frac{d}{dr} \phi_l(r) &= kA_l \cos(kr - l\pi/2 + \delta_l) + o(1) \end{aligned} \right\} \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (16.1.4)$$

При наличии кулоновского потенциала формулы (16.1.2) и (16.1.4) заменяются формулами

$$\frac{d^2 \phi_l}{dr^2} + [k^2 - U(r) - 2\eta r^{-1} - l(l+1)r^{-2}] \phi_l(r) = 0, \quad (16.1.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_l &= A_l \sin[kr - l\pi/2 - \eta \ln(2kr) + \gamma_l + \delta_l] + o(1) \\ \frac{d}{dr} \phi_l &= k A_l \cos[kr - l\pi/2 - \eta \ln(2kr) + \gamma_l + \delta_l] + o(1) \end{aligned} \right\} \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (16.1.6)$$

где

$$\gamma_l = \arg \Gamma(l + 1 + i\eta). \quad (16.1.7)$$

Сечения рассеяния связаны с фазовыми сдвигами формулами

$$f(\theta) = (k)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta), \quad (16.1.8)$$

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2. \quad (16.1.9)$$

Физики, желающие аппроксимировать экспериментальные значения сечения на основе какого-то комплексного потенциала, обычно выбирают некое семейство потенциалов $\mathcal{F}$, зависящих от нескольких параметров, и путем подгонки определяют потенциал этого семейства, обеспечивающий наилучшее согласие с экспериментальными значениями сечения. Если подгоночных параметров не слишком много, то это можно сделать однозначно. К сожалению, ограничение класса допустимых потенциалов семейством $\mathcal{F}$ представляет собой слишком большое допущение, мотивируемое не столько физическими соображениями, сколько успешностью предыдущих подгонок. Правда, при этом обычно исходят из интуитивного предположения, что физически приемлемые потенциалы не должны очень сильно отличаться от потенциалов, построенных в семействе $\mathcal{F}$. В данной главе мы хотим исследовать вопрос о том, насколько обоснованно такое предположение, используя *простейшие приближения*. Поэтому мы оставим в стороне общие методы решения обратных задач и обратимся к очень простым и хорошо известным приближениям. Мы не будем претендовать на выявление «всех возможных неоднозначностей», но укажем классы наиболее интересных неопределенностей, имеющих физический смысл.

На всех этапах восстановления потенциалов по сечениям возможны неоднозначности, обусловленные ошибками измерения. Такие неоднозначности должны, очевидно, отсутствовать в пределе абсолютно точных измерений. Но поскольку на практике абсолютно точные измерения невозможны, важно установить, каким образом и где именно ошибки измерения могут вносить неопределенности в конструируемый потенциал. Возьмем, например, рассеяние частицы в случае комплексного сферического потенциала с мнимой частью, локализованной на поверхности.

Из-за сильного поглощения коэффициенты $\exp(2i\delta_l)$ очень малы по модулю при тех нескольких первых значениях l , при которых параметры столкновения не превышают радиуса действия потенциала. Поэтому при первых значениях l малые ошибки в сечениях могут приводить к большим ошибкам в фазах δ_l , которые в свою очередь могут приводить к намного большим неточностям во внутренней части потенциала, чем на его поверхности. Это, так сказать, эффект экранирования, обусловленный мнимой частью потенциала. Но такой эффект не следует переоценивать, ибо он уменьшается при повышении точности экспериментальных измерений.

Общее исследование неопределенностей (приводящих иногда к неоднозначностям), обусловленных ошибками эксперимента, пока что представляет слишком большие трудности, и в настоящее время каждый экспериментальный случай приходится изучать отдельно. Поэтому мы не будем заниматься таким исследованием в данной главе.

В дальнейшем будем считать, что потенциал V принадлежит к классу потенциалов, таких, что амплитуда рассеяния $f(\theta)$ существует и с хорошей точностью определяется в том или ином приближении. В § 2 рассматривается случай борновского приближения, а в § 3—5 — случай полуклассического приближения¹⁾. В § 6 неоднозначности, возникающие при двух названных подходах, сравниваются с точными решениями. В § 7 проводится сравнение с обратными задачами в других областях физики.

Три типа полуклассических приближений, рассматриваемых в § 3—5, служат разным целям. Мы увидим, как при переходе от одного к другому снижается их математическая строгость и меняется характер их физических приложений.

Следует иметь в виду, что в приближениях, принятых в прямой задаче, затрудняется корректная формулировка обратной. Если допустимость приближения не доказана, то можно получить решения, не являющиеся решением корректно поставленной задачи, и не получить правильных решений. Возьмем, к примеру, полуклассический анализ. В обратных задачах квантовой механики квантовые эффекты никогда не пренебрежимы. Кроме того, использование в теории рассеяния тяжелых ионов и в теории молекулярного рассеяния одного действительного потенциала уже само по себе есть приближение. Следовательно, в таких случаях физики не пытаются получить «все решения» задачи квантового полуклассического рассеяния, но всего лишь исследуют типичные решения и типичные неоднозначности. Как мы увидим в § 7, в других областях физики дело может обстоять иначе.

¹⁾ Здесь и в дальнейшем авторы используют термин «полуклассическое приближение» шире, чем это обычно принято в литературе, включая сюда и квазиклассику. — *Прим. ред.*

§ 2. Борновское приближение

Предположим, что искомые потенциалы достаточно малы и можно пользоваться простым борновским приближением, и рассмотрим набор получаемых в таком приближении эквивалентных потенциалов. Для простоты мы оставим в стороне кулоновский случай, поскольку он вносит ряд неинтересных усложнений.

В некулоновском случае фазовый сдвиг и амплитуда даются выражениями (см., например, [311])

$$\delta_l = -k^{-1} \int_0^{\infty} U(\rho) [u_l(\rho)]^2 d\rho, \quad (16.2.1)$$

$$f(\theta) = -\left(2k \sin \frac{\theta}{2}\right)^{-1} \int_0^{\infty} \sin\left(2kr \sin \frac{\theta}{2}\right) U(r) r dr. \quad (16.2.2)$$

Здесь амплитуда $f(\theta)$ дается как функция аргумента $2k \sin \theta/2$. Полагая $t = 2k \sin \theta/2$ и $g(t) = -(4/\pi) k \sin(\theta/2) f(\theta)$, мы видим, что $g(t)$ есть синус-преобразование Фурье произведения $rU(r)$:

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(rt) rU(r) dr. \quad (16.2.3)$$

Итак, поскольку функция $g(t)$ может быть известна в лучшем случае лишь в интервале $t \in (0, 2k)$, функцию $rU(r)$ можно найти, исходя из функции $g(t)$, только тогда, когда выбрано подходящее аналитическое продолжение последней при $t > 2k$. Если функция $rU(r)$ принадлежит пространству $L^2(0, \infty)$, то необходимое продолжение может быть любой функцией из пространства $L^2(2k, \infty)$. После того как такое продолжение функции $g(t)$ выбрано, произведение $rU(r)$ дается выражением

$$rU(r) = \text{l. i. m.} \int_0^{\infty} \sin(rt) g(t) dt \quad (16.2.4)$$

Однако фурье-образ произведения $rU(r)$ экспериментально известен только в узком энергетическом интервале $(0, 2k)$. Дело обстоит так же, как в оптике, когда требуется восстановить форму объекта по его изображению. Такая же ситуация встречается и в самых разнообразных экспериментах с электронными устройствами (линиями передачи, волноводами, усилителями), передающими некий сигнал. Во всех таких случаях физический эксперимент эквивалентен линейному фильтру, ширина полосы пропускания которого в нашем случае равна $2k$.

Самый простой способ продолжения функции $g(t)$ за пределы значения $t = 2k$ — это положить $g(t) = 0$ при $t > 2k$. Тогда для

величины $rU_a(r)$ получаем выражение

$$rU_a(r) = \int_0^{2k} \sin(rt) g(t) dt, \quad (16.2.5)$$

так что произведение $rU_a(r)$ есть целая функция переменной r порядка 1 типа $2k$ в пространстве $L^2(0, \infty)$. Из теоремы Пели — Винера следует, что функция (16.2.5) есть единственное решение уравнения (16.2.3) в пространстве E_{2k} , содержащем все целые функции экспоненциального типа $2k$, принадлежащие пространству $L^2(0, \infty)$. Поэтому мы можем построить все потенциалы, эквивалентные произведению $rU_a(r)$ (т. е. приводящие к тем же самым фазовым сдвигам в борновском приближении) и принадлежащие пространству $L^2(0, \infty)$, просто выбирая произвольно функции из пространства $L^2(2k, \infty)$.

Функция $rU_a(r)$, а также ее производные ограничены на действительной оси. И наоборот, по хорошо известным теоремам ограничения на производные величины $rU_a(r)$ можно связать с поведением функции $g(t)$ при больших t , и, в частности, при $t > 2k$. Предположим, что вместо того, чтобы искать функцию $rU(r)$ в пространстве $L^2(0, \infty)$, мы наложим на $rU(r)$ условия *гладкости*, потребовав, например, чтобы при любом $n < N$ и при любом $k' < 1/2N$ выполнялись соотношения

$$\int_0^\infty \left| \frac{d^n}{d\rho^n} \rho U(\rho) \right|^2 d\rho \leq v_n^2 < \infty, \quad (16.2.6)$$

$$\left[\frac{d^{2k'}}{d\rho^{2k'}} \rho U(\rho) \right]_{\rho=0} = 0. \quad (16.2.7)$$

Тогда, интегрируя по частям и применяя теорему Парсеваля, легко показать, что

$$\frac{\pi}{2} \int_{2k}^\infty |t^n g(t)|^2 dt < v_n^2 \quad (n < N). \quad (16.2.8)$$

Если коэффициенты v_n заданы как *априорные* условия гладкости, то на основании соотношения (16.2.8) можно доказать, что все эквивалентные потенциалы представляют собой приближающие функции для одного из них и их взаимные среднеквадратичные отклонения стремятся к нулю, либо когда $\sup_{n < N} [v_n^2] \rightarrow 0$ при фиксированной энергии E , либо когда $E \rightarrow \infty$ при фиксированном значении $\sup [v_n^2]$. Первое условие означает, что физик повысил требования к гладкости потенциала. Второе означает, что при повышении энергии растет ширина «полосы пропускания» $2k$. Доказательство таково: из соотношений (16.2.4) и (16.2.8) по

теореме Парсеваля получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} r^2 [U(r) - U_a(r)]^2 dr = \\ = \frac{\pi}{2} \int_{2k}^{\infty} g^2(t) dt \leq [v_n^2 (2k)^{-2n}] \quad (n \leq N). \end{aligned} \quad (16.2.9)$$

Чаще всего используется самое простое условие: единственное ограничение на производную и требование, чтобы был конечным потенциал $U(0)$. Тогда условия (16.2.6) и (16.2.7) выполняются при $k = 0$ и $N = 1$, а неравенство (16.2.9) — при $N = 1$, так что при $E \rightarrow \infty$ взаимное отклонение решений для эквивалентных потенциалов стремится к нулю как E^{-1} .

Чтобы исследовать степень неединственности решения задачи, мы могли бы также рассматривать семейство прозрачных потенциалов, т. е. потенциалов, дающих *все* фазовые сдвиги, равные нулю. Такой подход эквивалентен предыдущему: прозрачные потенциалы соответствуют функциям $g(t)$, равным нулю на интервале $(0, 2k)$ и принадлежащим пространству $L^2(2k, \infty)$. В том, что соответствующие фазовые сдвиги δ_l равны нулю, легко убедиться, если взять выражение (16.2.1), воспользоваться тождеством Парсеваля и учесть, что синус-преобразование Фурье функции $\rho^{-1} [u_l(\rho)]^2$ равно нулю при $t > 2k$ [и полиномам Лежандра $1/2 P_l(1 - 1/2 k^{-2} t^2)$ при $0 \leq t \leq 2k$].

Отметим, что благодаря линейности борновского приближения добавка мнимой части потенциала, по существу, не усложняет задачу.

Обобщение. В борновском приближении потенциал $U(r)$ вводится как малое возмущение свободного движения. Но можно вместо нулевого исходного потенциала взять ненулевой потенциал U_0 , дающий некий набор фазовых сдвигов $\delta_l^{(0)}$, и добавить возмущение ΔU , достаточно малое для того, чтобы было допустимым обобщенное борновское приближение. Затем вычисляются возмущения фазовых сдвигов как линейные преобразования функции ΔU . Неоднозначности, возникающие при обращении такого линейного преобразования, были исследованы Сабатье [377, 378]. Они до некоторой степени аналогичны неоднозначностям в рассмотренном нами простом случае.

Отметим, что если в случае чисто упругого рассеяния (отсутствует поглощение) применимо борновское приближение, то на этапе $\sigma \rightarrow \{\delta_l\}$ имеется только тривиальная неоднозначность (гл. 10), так как амплитуда $f(\theta)$ действительна.

Относительно борновского приближения в трехмерном случае см. гл. 14, § 1.

§ 3. Полуклассическое приближение I¹⁾

В данном параграфе мы исследуем класс всех потенциалов, которые дают набор фаз $\{\delta_l\}$ в ВКБ-приближении. Сначала, в п. «А», мы напомним результаты прямой задачи. Затем, в п. «Б», выведем некоторые формулы обращения и некоторые необходимые и достаточные условия для интересующих нас функций, после чего сможем приступить к изучению неоднозначностей. В п. «В» мы рассмотрим случай, когда имеется несколько точек поворота. В этом случае вклад в фазовые сдвиги тех частей потенциала, которые заключены между двумя точками поворота, и вклад оставшейся части потенциала ведут себя по-разному и можно, сбалансировав изменение первой изменением второй, сдвинуть некоторые фазы на $K\pi$, где K — целое число. В результате получается ряд эквивалентных потенциалов. Другие неоднозначности возникают как в случае нескольких точек поворота, так и в случае только одной и также связаны со смещением некоторых фазовых сдвигов на $K\pi$ или с неединственностью их интерполяции.

А. Прямая задача

1. Некулоновский случай. Мы принимаем, что фазовый сдвиг Δ_l связан с потенциалом формулой ВКБ-приближения

$$\Delta_l = \delta \left(l + \frac{1}{2} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_{r_0}^r \left[\bar{\lambda}^2(k\rho) - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \rho^{-1} d\rho - \int_{(l+1/2)/k}^r \left[k^2 \rho^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \rho^{-1} d\rho \right\}, \quad (16.3.1)$$

где

$$\bar{\lambda}^2(x) = x^2 \left[1 - k^{-2} U \left(\frac{x}{k} \right) \right], \quad (16.3.2)$$

а r_0 — самая дальняя «точка поворота», т. е. наибольший нуль функции $\rho \rightarrow [\bar{\lambda}^2(k\rho) - \lambda^2]$ при $\lambda = l + 1/2$. Отметим, что $\bar{\lambda}(x)$ зависит также от k . В дальнейшем принимаем k фиксированным, а U непрерывным в интервале $[0, \infty]$ и стремящимся к нулю при $x \rightarrow \infty$ быстрее, чем $x^{-1-\varepsilon}$.

Представим теперь выражение (16.3.1) в форме преобразования Абеля, пользуясь приемом, введенным несколько лет назад [365], который, как мы знаем, дает очень простой способ решения обратной задачи (относительно истории применения ВКБ-приближения в обратных задачах см. раздел «Исторические замечания» в § 7).

¹⁾ Рассматриваемое здесь ВКБ-приближение принято называть квазиклассическим. См. примечание на стр. 328.— *Прим. ред.*

Пусть $x_{\min}$ — наибольший нуль функции $\bar{\lambda}(x)$. В соответствии с ВКБ-приближением и хорошо известными свойствами потенциала можно принять, что при $x \geq x_{\min}$ величина $\bar{\lambda}(x)$ есть непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция с конечным числом максимумов и минимумов, которая асимптотически ведет себя как x . Пусть x_3 — наименьшее значение переменной x , такое, что при $x \geq x_3$ $\bar{\lambda}(x)$ монотонно возрастает, и пусть $\bar{\lambda}(x_3) = \lambda_0$. При $x > x_3$ ($\lambda > \lambda_0$) для отображения $x \rightarrow \lambda = \bar{\lambda}(x)$ имеется обратное отображение, которое мы обозначим следующим образом:

$$\lambda \rightarrow x = \psi(\lambda) \quad (\lambda > \lambda_0). \quad (16.3.3)$$

Функция $\psi(\lambda)$ есть непрерывная кусочно-дифференцируемая монотонно возрастающая функция. Переходя к новой переменной λ в формуле (16.3.1), получаем при $p > \lambda_0$

$$\delta(p) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_p^{\bar{\lambda}(kr)} (\lambda^2 - p^2)^{1/2} \frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)} d\lambda - \int_p^{kr} (\lambda^2 - p^2)^{1/2} \lambda^{-1} d\lambda \right]. \quad (16.3.4)$$

Учитывая, что $U(r)$ стремится к нулю быстрее, чем $r^{-1-\varepsilon}$, при $r \rightarrow \infty$ из выражения (16.3.4) прямо получаем следующие формулы, справедливые при $p > \lambda_0$:

$$\delta(p) = - \int_p^{\infty} (\lambda^2 - p^2)^{1/2} H'(\lambda) d\lambda, \quad (16.3.5)$$

$$\delta(p) = \int_p^{\infty} (\lambda^2 - p^2)^{-1/2} \lambda H(\lambda) d\lambda, \quad (16.3.6)$$

где

$$H(\lambda) = \ln \frac{\lambda}{\psi(\lambda)}. \quad (16.3.7)$$

Предположим теперь, что у функции $\bar{\lambda}(x)$ имеется только один максимум при $x_{\min} < x < x_3$ (рис. 22), скажем при $x = x_2$, причем $\bar{\lambda}(x_2) = \lambda_1$, и пусть x_1 — такое значение переменной x на отрезке $(x_{\min}, x_2)$, при котором $\bar{\lambda}(x) = \lambda_0$. При $p < \lambda_0$ фазовый сдвиг ВКБ-приближения равен

$$\delta(p) = \bar{\delta}(p) + \delta_{\lambda_0}(p) \theta(\lambda_0 - p), \quad (16.3.8)$$

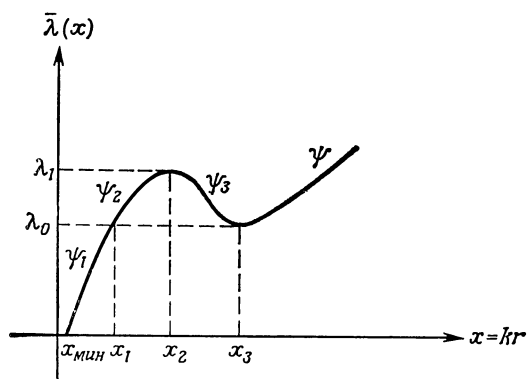


Рис. 22.

где θ — ступенчатая функция Хевисайда и

$$\bar{\delta}(p) = \int_{x_0}^{x_1} [\bar{\lambda}^2(x) - p^2]^{1/2} x^{-1} dx + \int_{x_1}^{x_3} (\lambda_0^2 - p^2)^{1/2} x^{-1} dx + \\ + \lim_{X \rightarrow \infty} \left\{ \int_{x_3}^X [\bar{\lambda}^2(x) - p^2]^{1/2} x^{-1} dx - \int_{\frac{p}{\lambda}}^X (x^2 - p^2)^{1/2} x^{-1} dx \right\}, \quad (16.3.9)$$

причем $x_0 = kr_0(p)$, а

$$\delta_{\lambda_0}(p) = \int_{x_1}^{x_3} [\bar{\lambda}^2(x) - p^2]^{1/2} x^{-1} dx - \int_{x_1}^{x_3} (\lambda_0^2 - p^2)^{1/2} x^{-1} dx. \quad (16.3.10)$$

Введем следующие обозначения для отображений, обратных отображению $x \rightarrow \lambda = \bar{\lambda}(x)$:

$$\begin{aligned} \lambda \rightarrow x = \psi_1(\lambda) \text{ при } x \in (x_{\min}, x_1), \quad \lambda \in (0, \lambda_0), \\ \lambda \rightarrow x = \psi_2(\lambda) \text{ при } x \in (x_1, x_2), \quad \lambda \in (\lambda_0, \lambda_1), \\ \lambda \rightarrow x = \psi_3(\lambda) \text{ при } x \in (x_2, x_3), \quad \lambda \in (\lambda_0, \lambda_1), \end{aligned} \quad (16.3.11)$$

а также обозначение $\psi(\lambda)$ для функций $\psi_1(\lambda)$ при $\lambda < \lambda_0$. Функция $\psi(\lambda)$ [формулы (16.3.3) и (16.3.11)] кусочно-непрерывна и кусочно-дифференцируема. Из выражений (16.3.9) и (16.3.10) легко получаем

$$\bar{\delta}(p) = \int_0^{\infty} (\lambda^2 - p^2)^{-1/2} \lambda H(\lambda) d\lambda, \quad (16.3.12)$$

где $H(\lambda)$ — величина, даваемая формулой (16.3.7), и

$$\delta_{\lambda_0}(p) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (\lambda^2 - p^2)^{-1/2} \lambda h(\lambda) d\lambda, \quad (16.3.13)$$

где

$$h(\lambda) = \ln \frac{\psi_3(\lambda)}{\psi_2(\lambda)}. \quad (16.3.14)$$

Таким образом, $\psi(\lambda)$ — функция, обратная преобразованию $x \rightarrow \lambda_s(x)$, где $\lambda_s(x)$ — наибольшая неубывающая функция, такая, что $\lambda_s(x) \leq \bar{\lambda}(x)$ при любом $x \geq x_{\min}$.

Полученные формулы могут быть обобщены на случай любого числа максимумов и минимумов между двумя точками с ординатой λ_0 при условии, что самый глубокий минимум выше λ_0 , а функция $h(\lambda)$ определена подходящим образом [377, 378]. Тогда фазовый сдвиг $\delta(p)$ в ВКБ-приближении обычно дается выражением

$$\delta(p) = \bar{\delta}(p) + \sum_{m_i} \bar{\delta}_{\lambda_0^{(m_i)}}(p) \theta(\lambda_0^{(m_i)} - p), \quad (16.3.15)$$

где $\delta_{\lambda_0^{(m)}}$ — величина, даваемая формулами, аналогичными формуле (16.3.13), а $\bar{\delta}(p)$ — величина, даваемая выражением (16.3.12), причем $H(\lambda)$ дается формулой (16.3.7), где $\psi(\lambda)$ — функция отображения, обратного отображению $x \rightarrow \lambda = \lambda_s(x)$. Таким образом, $\psi(\lambda)$ — положительная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция и $\psi'(\lambda)$ удовлетворяет неравенству

$$\psi'(\lambda) \geq 0. \quad (16.3.16)$$

Отметим, что все результаты, полученные выше, остаются верными даже тогда, когда у функции $\bar{\lambda}(x)$ имеются участки, на которых она постоянна или имеет разрывы первого рода.

2. Кулоновский случай. В ВКБ-приближении, как и прежде [формула (16.3.1)], разность фаз волновой функции и свободной волновой функции (т.е. $kr - l\pi/2$) при больших r дается выражением

$$\begin{aligned} \Delta_l(r) = & \int_{r_0}^r \left[\bar{\lambda}^2(k\rho) - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \rho^{-1} d\rho - \\ & - \int_{(l+1/2)/k}^r \left[k^2 \rho^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \rho^{-1} d\rho, \end{aligned} \quad (16.3.17)$$

где

$$\bar{\lambda}^2(x) = x^2 \left[1 - 2\eta x^{-1} - k^{-2} U\left(\frac{x}{k}\right) \right], \quad (16.3.18)$$

а r_0 — самая дальняя точка поворота и η — обычный кулоновский параметр $Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v$. При $U(x) = 0$ величина $\bar{\lambda}(x)$ монотонно возрастает, начиная с $x_{\min} = 2\eta$, и отображение, обратное

отображению $x \rightarrow \lambda = \bar{\lambda}(x)$, имеет вид

$$\lambda \rightarrow x = \psi_c(\lambda) = \eta + (\eta^2 + \lambda^2)^{1/2}. \quad (16.3.19)$$

Следовательно, при $U(r) \equiv 0$ разность фаз $\Delta_l(r)$ сводится к

$$\begin{aligned} \Delta_l^c(r) = & \int_p^{(k^2 r^2 - 2\eta k r)^{1/2}} (\lambda^2 - p^2)^{1/2} \left(\frac{\psi_c'(\lambda)}{\psi_c(\lambda)} - \lambda^{-1} \right) d\lambda - \\ & - \int_{(k^2 r^2 - 2\eta k r)^{1/2}}^{kr} (\lambda^2 - p^2)^{1/2} \lambda^{-1} d\lambda, \quad (16.3.20) \end{aligned}$$

где через p обозначена сумма $l + 1/2$. При больших r и не очень малых $l^2 + \eta^2$ второй член в выражении (16.3.20), как легко видеть, стремится к η , а первый асимптотически стремится к $-\eta \ln [2kr] + \arg [\Gamma(l + 1 + i\eta)]$, что дает точную фазу чисто кулоновской волновой функции. Итак, если потенциал $U(r)$ присутствует, то «модифицированный» фазовый сдвиг ВКБ-метода определяется разностью

$$\delta_c \left(l + \frac{1}{2} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} [\Delta_l(r) - \Delta_l^c(r)]. \quad (16.3.21)$$

Подставляя сюда выражение (16.3.17), видим, что мы пришли к изучению функций $\bar{\lambda}(x)$, как это было и в случае отсутствия кулоновского взаимодействия. В частности, мы снова можем определить функцию $\lambda_s(x)$ как наибольшую монотонно возрастающую функцию, такую, что $\lambda_s(x) \leq \bar{\lambda}(x)$, а $\psi(\lambda)$ — как функцию, обратную функции $\lambda_s(x)$. Следовательно, величина $\delta(p)$ по-прежнему дается выражением (16.3.15), а из формул (16.3.21) и (16.3.20) явствует, что величина $\delta(p)$ снова дается выражением (16.3.12) в котором, однако, теперь

$$H(\lambda) = \ln \frac{\psi_c(\lambda)}{\psi(\lambda)}. \quad (16.3.22)$$

Б. Формулы обращения и условия непротиворечивости

Предположим, что $H(\lambda)$ — кусочно-дифференцируемая функция. Тогда из выражения (16.3.5) видно, что функция $\delta(p)$ всюду, кроме, может быть, некоторых изолированных значений p , дифференцируема и ее производные даются формулой

$$\delta'(p) = p \int_p^\infty (\lambda^2 - p^2)^{-1/2} H'(\lambda) d\lambda. \quad (16.3.23)$$

Из данного выражения легко видеть, что величина $\delta'(p)$ непрерывна при всех p , если функция $H'(\lambda)$ не имеет особой точки λ_s с более быстрой расходимостью, чем типа $|\lambda - \lambda_s|^{-1/2+\varepsilon}$. Таких особых точек нет, если функция $\lambda'(x)$ непрерывна и всюду положительна.

Предположим теперь, что мы знаем, что $\delta(p)$ определяется монотонной функцией $\bar{\lambda}(x)$, и что мы знаем функцию $\delta'(p)$ в интервале от $p = 0$ до $p = \infty$. Тогда функция $\delta(p)$ должна быть связана с $\bar{\lambda}(x)$ формулами (16.3.6), (16.3.7) и (16.3.3). Обратив преобразование Абеля (16.3.6), получим

$$H(\lambda) = -2\pi^{-1} \int_{\lambda}^{\infty} (p^2 - \lambda^2)^{-1/2} \delta'(p) dp. \quad (16.3.24)$$

Если функция $\delta'(p)$ сама имеет кусочно-непрерывную производную, то величины $H(\lambda)$ и $H'(\lambda)$ могут быть выражены через $(d/dp) p^{-1} \delta'(p)$:

$$H(\lambda) = 2\pi^{-1} \int_{\lambda}^{\infty} (p^2 - \lambda^2)^{1/2} \frac{d}{dp} [p^{-1} \delta'(p)], \quad (16.3.25)$$

$$H'(\lambda) = -2\pi^{-1} \lambda \int_{\lambda}^{\infty} (p^2 - \lambda^2)^{-1/2} \frac{d}{dp} [p^{-1} \delta'(p)] dp. \quad (16.3.26)$$

Здесь важно то обстоятельство, что если $\delta'(p)$ выбирается случайно, например в пространстве $C_1(0, \infty)$, то функции $H(\lambda)$ нельзя поставить в соответствие какой-либо потенциал. Чтобы можно было получить некий потенциал в ВКБ-приближении, функция $H(\lambda)$ должна быть дифференцируемой всюду, кроме конечного числа точек, а функция $\psi(\lambda)$ должна быть неубывающей положительной при $\lambda > 0$. Но исходя из какой-либо действительной функции $H(\lambda)$, мы всегда можем получить положительную функцию $\psi(\lambda)$ вида

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} \lambda \exp[-H(\lambda)] & \text{(некулоновский случай),} \\ \psi_c(\lambda) \exp[-H(\lambda)] & \text{(кулоновский случай).} \end{cases} \quad (16.3.27)$$

Поэтому *необходимое и достаточное условие*, при котором можно получить $\lambda(r)$, имеет вид неравенства (16.3.16) или неравенства

$$H'(\lambda) < \begin{cases} \lambda^{-1} & \text{(некулоновский случай),} \\ \lambda [\lambda^2 + \eta^2 + \eta(\lambda^2 + \eta^2)^{1/2}]^{-1} & \text{(кулоновский случай).} \end{cases} \quad (16.3.28)$$

При подстановке в формулу (16.3.23) эти неравенства в свою очередь дают *необходимые неравенства* для $\delta'(p)$. В некулоновском

случае мы получаем, например,

$$\delta'(p) < \frac{1}{2} \pi. \quad (16.3.29)$$

Этого условия, однако, недостаточно, чтобы функция $\psi(\lambda)$ была неубывающей. Положим, например, $\delta'(p) = (\pi/2)p$ при $p \leq p_0 < 1$ и $\delta'(p) = 0$ при $p > p_0$. Тогда $H(\lambda) = (p_0^2 - \lambda^2)^{1/2} \theta(p_0 - \lambda)$ (где θ — ступенчатая функция Хевисайда) и $H'(\lambda) = \lambda(p_0^2 - \lambda^2)^{-1/2} \times \theta(p_0 - \lambda)$, что, очевидно, несовместимо с неравенством (16.3.28) при $\lambda \rightarrow p_0$.

Но если производная $(d/dp)[p^{-1}\delta'(p)]$ кусочно-непрерывна или нигде не является более сингулярной, чем $|\lambda - \lambda_s|^{-1/2+\varepsilon}$, то достаточное условие для получения неубывающей функции $\psi(\lambda)$ (в некулоновском случае) таково:

$$\frac{d}{dp}[p^{-1}\delta'(p)] > -\frac{1}{2}\pi p^{-2}. \quad (16.3.30)$$

При подстановке этого неравенства в выражение (16.3.26) получаем условие (16.3.28) (некулоновский случай). Поскольку функция $\delta'(p)$ конечна, очевидно, что из (16.3.30) следует (16.3.29). Аналогичные, но более сложные результаты могут быть получены в кулоновском случае.

Соответствующее условие для функции $h(\lambda)$ легко следует из формулы (16.3.14), так как функции $\psi_{2i+1}(\lambda)$ убывающие, а функции $\psi_{2i}(\lambda)$ возрастающие. Это условие имеет вид

$$h'(\lambda) \leq 0. \quad (16.3.31)$$

Но допустим, что функция $h(\lambda)$ удовлетворяет неравенству (16.3.31). Будет ли функция $H(\lambda)$, полученная из $\bar{\delta}(p)$, приводить к функции $\bar{\lambda}(x)$, непрерывной и дающей на отрезке (x_1, x_3) функцию $h(\lambda)$? Для этого должно выполняться следующее (рис. 22) условие:

$$h(\lambda_0) = \ln \frac{\psi_3(\lambda_0)}{\psi_1(\lambda_0)} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^-} H(\lambda) - \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^+} H(\lambda). \quad (16.3.32)$$

Это условие выполняется, если $\delta'(p)$ расходится не быстрее, чем $|p - p_s|^{-1/2+\varepsilon}$.

В. Сбалансированные неоднозначности

Для простоты предположим, что у функции $\bar{\lambda}(x)$ имеется только один максимум (рис. 22) и, следовательно, функция $\delta(p)$ дается выражением (16.3.8), причем $\bar{\delta}(p)$ и $\delta_{\lambda_0}(p)$ даются выражениями

(16.3.12) и (16.3.13). Допустим, что мы изменили функцию $h(\lambda)$:

$$h(\lambda) \rightarrow h^+(\lambda) = h(\lambda) + \Delta h(\lambda), \quad (16.3.33)$$

где $\Delta h(\lambda) = 0$ при $\lambda < \lambda_0$ и $\Delta h(\lambda) = 0$ при достаточно больших λ , так что мы определяем λ_0^M как наименьшее значение величины λ , выше которого величины $h(\lambda)$ и $\Delta h(\lambda)$ тождественно равны нулю. Кроме того, функция $h^+(\lambda)$ должна удовлетворять неравенству (16.3.31). Предположим также, что изменена и функция $H(\lambda)$:

$$H(\lambda) \rightarrow H^+(\lambda) = H(\lambda) + \Delta H(\lambda), \quad (16.3.34)$$

где $\Delta H(\lambda) = 0$ при $\lambda > \lambda_0$ и выполняется условие непрерывности (16.3.32), т. е.

$$\Delta H(\lambda_0) = \Delta h(\lambda_0). \quad (16.3.35)$$

При наличии таких возмущений фазовый сдвиг тоже изменяется:

$$\delta(p) \rightarrow \delta^+(p) = \delta(p) + \Delta\delta(p) \quad (16.3.36)$$

и в соответствии с формулами (16.3.8), (16.3.12) и (16.3.13) имеем $\Delta\delta(p) = 0$ при $p > \lambda_0$ и

$$\begin{aligned} \Delta\delta(p) = \Delta\bar{\delta}(p) + \Delta\delta_{\lambda_0}(p) = & \int_p^{\lambda_0} (\lambda^2 - p^2)^{-1/2} \lambda \Delta H(\lambda) d\lambda + \\ & + \int_{\lambda_0}^{\lambda_0^M} (\lambda^2 - p^2)^{1/2} \lambda \Delta h(\lambda) d\lambda \quad \text{при } p < \lambda_0. \end{aligned} \quad (16.3.37)$$

Но при заданной функции рассеяния $\exp[2i\delta(p)]$ может, очевидно, существовать несколько решений $(H(\lambda), h(\lambda))$, соответствующих возмущениям

$$\Delta\delta(p) = K\pi \quad (p < \lambda_0), \quad (16.3.38)$$

где K — целое положительное или отрицательное число или нуль. Первое слагаемое в выражении (16.3.37) равно нулю при $p = 0$. Следовательно, чтобы получить решение, мы должны выбрать $\Delta h(\lambda)$ в соответствии с условием

$$\Delta\delta_{\lambda_0}(\lambda_0) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0^M} (\lambda^2 - \lambda_0^2)^{-1/2} \lambda \Delta h(\lambda) d\lambda = K\pi, \quad (16.3.39)$$

а затем найти функцию $\Delta H(\lambda)$, при которой разность $\Delta\delta(p) - \Delta\delta(\lambda_0)$ была бы равна нулю при любых $p < \lambda_0$. Согласно формуле (16.3.39), для этого нужно взять

$$\Delta H(\lambda) = -2\pi^{-1} \int_{\lambda}^{\lambda_0} dp (p^2 - \lambda^2)^{-1/2} \frac{d}{dp} [\Delta\delta_{\lambda_0}(\lambda_0) - \Delta\delta_{\lambda_0}(p)] \quad (16.3.40)$$

или после некоторых алгебраических преобразований

$$\Delta H(\lambda) =$$

$$= 2\pi^{-1} (\lambda_0^2 - \lambda^2)^{1/2} \int_{\lambda_0}^{\lambda_0^M} \Delta h(\mu) (\mu^2 - \lambda_0^2)^{-1/2} (\mu^2 - \lambda^2)^{-1} \mu d\mu. \quad (16.3.41)$$

Из выражения (16.3.41) для $\lambda \ll \lambda_0$, пренебрегая вариацией функции $\mu^2 - \lambda^2$ на отрезке (λ_0, λ_0^M) , получаем грубо приближенное выражение для $\Delta H(\lambda)$, справедливое при $\lambda_0^M - \lambda_0 \ll \lambda_0$:

$$\Delta H(\lambda \ll \lambda_0) \sim 2\pi^{-1} (\lambda_0^2 - \lambda^2)^{-1/2} \int_{\lambda_0}^{\lambda_0^M} \Delta h(\mu) (\mu^2 - \lambda_0^2)^{-1/2} \mu d\mu. \quad (16.3.42)$$

Далее с учетом выражения (16.3.39) получаем замечательный результат

$$\Delta H(\lambda \ll \lambda_0) \sim 2K (\lambda_0^2 - \lambda^2)^{-1}. \quad (16.3.43)$$

Таким образом, эквивалентные решения, соответствующие возмущению (16.3.38) фазовых сдвигов, можно разбить на классы с разными K . Все функции $\Delta H(\lambda)$ данного класса ведут себя приблизительно одинаково при $\lambda \rightarrow 0$. Их поведение не зависит от функции $h(\lambda)$, взятой в формуле (16.3.41), а также от функции $H(\lambda)$. Оно зависит только от K . Следовательно, можно говорить о слоях (или полосах) эквивалентных решений и о слоистой неоднозначности. Кроме того, предположим, что функция $H(\lambda)$ получена из потенциала притяжения, стремящегося к постоянному значению U_0 при $r \rightarrow 0$. Тогда потенциал, соответствующий функции $H^+(\lambda)$, стремится к постоянному значению U_K :

$$H^+(0) = \frac{1}{2} \ln(1 - k^2 U_K). \quad (16.3.44)$$

Следовательно, слоистость функции $H(0)$ соответствует слоистости функции $U(0)$, согласно формуле

$$-U_K = -U_0 \exp\left(\frac{4K}{\lambda_0}\right) + k^2 \exp\left(\frac{4K}{\lambda_0} - 1\right). \quad (16.3.45)$$

Отметим, что если слоистость рассматривается при каждом значении энергии, то она плавно изменяется с энергией.

Мы указывали, что слои представляют собой *классы* эквивалентных потенциалов, соответствующие постоянным значениям индекса K . Внутри данного класса различные потенциалы соответствуют различным функциям $h^+(\lambda)$, совместимым с условием (16.3.32) при данном значении K . В том, что такая непрерывная неоднозначность существует, легко убедиться в случае простых функций $\Delta H(\lambda)$, если такое изменение достаточно мало. Имеется также дополнительная неопределенность, обусловленная тем, что

функция $h(\lambda)$ сама связана с $\bar{\lambda}(x)$ неоднозначно, так как заданием функции $h(\lambda)$ определяется только отношение $\psi_3(\lambda)/\psi_2(\lambda)$. Можно выбрать функцию $\psi_2(\lambda)$ в каких-то пределах, а затем вычислить $\psi_3(\lambda)$. Кроме того, поскольку функция $\Delta h(\lambda)$ не полностью определяется соотношением (16.3.39), функция $\Delta H(\lambda)$ не полностью определяется формулами (16.3.41) и (16.3.39). Соответствующая неоднозначность при заданном K приводит в основном к вариации поверхности потенциала («неоднозначности формы»).

Физический смысл указанной слоистости не очень трудно установить. Формула (16.3.9) с фиксированным верхним пределом интегрирования X и формула (16.3.17) дают фазу регулярной волновой функции как функцию r . Следовательно, $\delta_{\lambda_0}(p)$ есть не что иное, как фазовый сдвиг, обусловленный той частью эффективного потенциала [т. е. разности $V(r)$ и центробежного члена], которая заключена между двумя точками поворота при λ_0 . Таким образом, при увеличении числа K на единицу число узлов волновой функции тоже увеличивается на единицу. Условие сшивания с волновой функцией во внутренней области остается примерно тем же, если только локальное значение эффективного волнового числа изменено так, чтобы оно соответствовало новой частоте (ибо такое соответствие предполагается в ВКБ-приближении). Следовательно, потенциал $-V(r)$ должен возрасти на фиксированную величину. Отметим также, что число узлов в барьере очевидным образом связано с числом состояний в перевернутом барьере.

Были показаны другие примеры неоднозначности. Они соответствуют либо инвариантности амплитуд рассеяния при изменении фазового сдвига по модулю на целое кратное числа π (полосы непрерывных неоднозначностей), либо неоднозначности интерполяции фазовых сдвигов в интервалах между целыми значениями l . К сожалению, условия гладкости, которые требуются в ВКБ-подходе, в некоторых пределах не противоречат такой непрерывности. Слоистые неоднозначности, появляющиеся в случаях, когда допускается только одна точка поворота, соответствуют слишком большим изменениям потенциала, и их, по-видимому, легко отсеять из физических соображений.

Г. Другие результаты

Скажем несколько слов о проблеме неоднозначности в оптико-модельных анализах. Эта задача сложнее рассмотренной выше, поскольку приходится учитывать поглощение, что приводит к двум следствиям:

1) коэффициенты рассеяния при малых значениях l имеют малые амплитуды, так что относительные ошибки увеличиваются;

2) мнимая часть потенциала выступает как дополнительный непрерывно изменяющийся параметр, который, добавляясь к действительной части, тоже вызывает неоднозначности; правда, результаты показывают, что неоднозначности, обусловленные действительной составляющей, все еще наиболее существенны.

В большинстве случаев неоднозначности исследовались путем численного анализа и было установлено, что ВКБ-метод удобен для качественного объяснения некоторых неоднозначностей, а также пригоден при наличии поглощения [19, 390, 391, 136, 127].

В заключение отметим, что в следующем порядке ВКБ-приближения снова получается формула, подобная формуле (16.3.6), так что снова применима изложенная обратная процедура [366].

§ 4. Полуклассический анализ II

В предыдущем параграфе мы предполагали лишь, что фазовые сдвиги можно вычислить в ВКБ-приближении. В качестве следующего шага предположим, что число непренебрежимых фазовых сдвигов достаточно велико и их зависимость от l достаточно гладка, так что допустимы следующие дополнительные приближения [155, 156]:

1) использование асимптотического выражения для полиномов Лежандра (при углах, не слишком близких к 0 или π)

$$P_l(\cos \theta) = \left[\frac{1}{2} \left(l + \frac{1}{2} \right) \pi \sin \theta \right]^{-1/2} \sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right]; \quad (16.4.1)$$

2) замена суммы в амплитуде рассеяния (16.1.8) интегралом:

$$f(\theta) = -(2\pi k^2 \sin \theta)^{-1/2} \int_0^\infty \left(l + \frac{1}{2} \right) (e^{i\varphi_+} - e^{i\varphi_-}) dl, \quad (16.4.2)$$

$$\varphi^\pm = 2\delta_l \pm \left(l + \frac{1}{2} \right) \theta \pm \frac{\pi}{4}; \quad (16.4.3)$$

3) использование метода стационарной фазы для оценки интеграла в выражении (16.4.2).

Если точки стационарной фазы изолированы, то мы получаем следующее выражение для дифференциального сечения в полуклассическом приближении:

$$\sigma(\theta) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\theta) + \sum_{i>j} 2(\sigma_i \sigma_j)^{1/2} \cos(\beta_i - \beta_j), \quad (16.4.4)$$

где

$$\sigma_i = \frac{l_i + 1/2}{2k^2 \sin \theta \delta'_{l_i}}, \quad (16.4.5)$$

$$\beta_k = \left[2\delta_l - 2 \left(l + \frac{1}{2} \right) \delta'_l - \left(2 - \frac{\delta''_l}{|\delta'_l|} - \frac{\delta'_l}{|\delta'_l|} \right) \frac{\pi}{4} \right]_{l=l_k}. \quad (16.4.6)$$

Здесь штрихи — символы дифференцирования; l_i — это значения величины l , удовлетворяющие при каждом значении угла θ соотношению

$$\Theta_l = 2\delta'_l \equiv 2 \frac{d\delta_l}{dl} = \pm \theta, \quad (16.4.7)$$

где Θ_l — так называемая функция отклонения. В качестве примера на рис. 23 показано, что если угол θ достаточно мал, то имеется три ветви: l_1 , l_2 , l_3 . В случае тождественных частиц

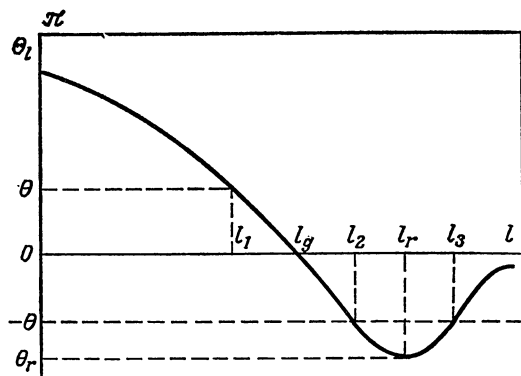


Рис. 23. Функция отклонения Θ_l .

выражение для сечения $\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2$ должно быть заменено выражением $\sigma(\theta) = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2$. Тогда к трем указанным ветвям добавляется четвертая.

Если функция отклонения Θ_l не монотонна и дает две или более ветвей, соответствующих одному и тому же углу отклонения, то у функции $\Theta(l) = \Theta_l$ должны быть либо особые точки, либо максимумы или минимумы.

Сначала рассмотрим случай, когда функция $\Theta(l)$ имеет экстремум. Так как в классической механике сечение (16.4.5) содержит множитель $(d\Theta_l/dl)^{-1}$, оно будет иметь сингулярность при $d\Theta/dl = 0$. В оптике такая ситуация соответствует явлению радуги и точку экстремума функции отклонения принято называть радужным углом. Мы будем называть рассеяние в окрестности радужного угла радужным рассеянием.

В классической теории интенсивность радужного рассеяния должна неограниченно возрастать на светлой стороне и равняться нулю на темной (в предположении, что нет других ветвей, вносящих вклад в рассеяние), так же как в геометрической оптике при рассеянии света на водяных капельках вблизи радужного угла.

В полуклассической теории так же, как и в теории Эйри — Ми оптической радуги, тщательная оценка интеграла (16.4.2) дает на темной стороне постепенный спад интенсивности (быстрее

экспоненциального), а на светлой — осцилляции интенсивности, при низком разрешении соответствующие предсказаниям геометрической оптики (рис. 24). Конечно, осцилляции обусловлены интерференцией между двумя ветвями классической кривой функции отклонения. Постепенный спад интенсивности, естественно, можно наблюдать только в том случае, если достаточно мал вклад дополнительной ветви (когда она имеется).

Функция отклонения может также обладать сингулярностями, скажем при некотором критическом значении l_1 , соответствующем

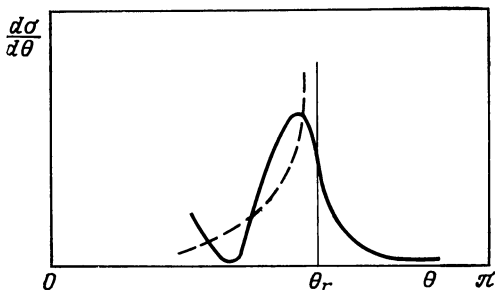


Рис. 24. Зависимость дифференциального сечения рассеяния $d\sigma/d\theta$ [или $I(\theta)$] от θ вблизи точки $\theta = \theta_r$.

Сплошная линия — полуклассический расчет, штриховая — классический расчет.

бесконечному спиральному закручиванию классической орбиты при ее стремлении к предельной круговой орбите. Такое явление связано с существованием двойной точки поворота (§ 3). В данных условиях классическая функция отклонения вблизи l_1 изменяется логарифмически:

$$\Theta(l) = \begin{cases} \theta_1 + b \ln \frac{l-l_1}{l_1} & \text{при } l > l_1, \\ \theta_2 + 2b \ln \frac{l_1-l}{l_1} & \text{при } l < l_1, \end{cases} \quad (16.4.8)$$

где θ_1 и θ_2 зависят от свойств потенциала внутри барьера. При значениях l , несколько превышающих l_1 , частица будет по спирали входить в область взаимодействия и выходить из нее, немного не достигая вершины барьера. При значениях l , несколько меньших l_1 , центробежный барьер должен быть ниже и частица будет двигаться по спирали, заходя над барьером во внутреннюю область и выходя из нее снова над барьером. При этом интеграл не упрощается. Мы приведем здесь несколько иллюстраций радужного рассеяния. На рис. 25 представлены потенциал притяжения $V(r)$ содержащий барьер, и соответствующая функция отклонения [141]. На рис. 26 [141] отношение сечения упругого рассеяния α -частиц с энергией 22 МэВ на атомах Ag к их кулоновскому сечению сравнивается с результатами расчета радужного рассеяния. На рис. 27 представлены квантовое и классическое угловые распределения

рассеяния на потенциале Леннарда-Джонса вблизи радужного угла ($\theta_r = 87^\circ$).

Если функция отклонения плавно проходит через нуль или через значения $\pm\pi$ и т. д., то возникает новый эффект: в классической физике возникает сингулярность сечения рассеяния вперед

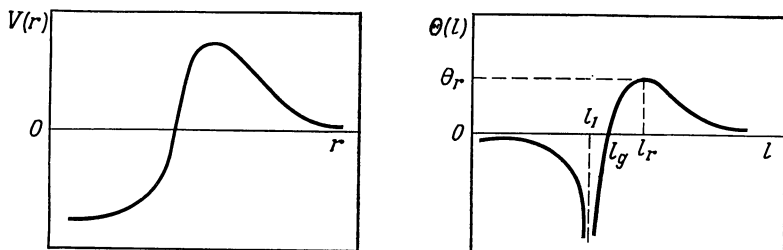


Рис. 25.

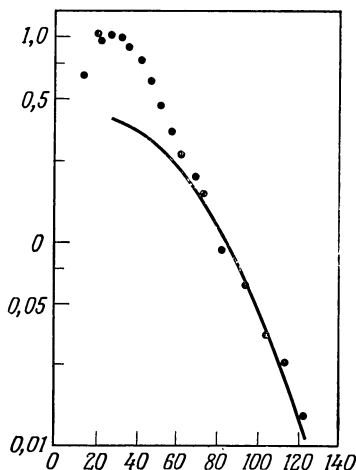


Рис. 26. Отдельные точки — данные Уолла — Риса для рассеяния α -частиц с энергией 22 МэВ на Ag; сплошная линия — результат расчета радужного рассеяния (график взят из работы [141]).¹

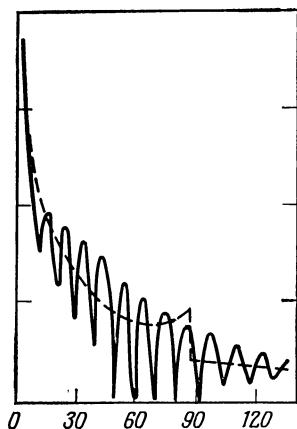


Рис. 27. Угловое распределение рассеяния в случае потенциала Леннарда-Джонса вблизи радужного угла ($\theta_r = 87^\circ$).

Сплошная линия — квантовое распределение, штриховая — классическое.

Е:
или назад. В оптике такой эффект носит название «глории». Глорию иногда можно наблюдать, летя в самолете, как сильное рассеяние назад солнечного света на капельках тумана под самолетом, очерчивающее его тень.

Все указанные типичные явления могут быть использованы для практического решения обратных задач. Имеются две области физики, в которых такого рода анализ хорошо пригоден: ион-нуклонное рассеяние ($E \gtrsim 10$ МэВ/нуклон) и атомное рассеяние ($T \gtrsim 300$ К). В первом случае нет достаточно сильных оснований для введения единого потенциала, если только не предполагать очень сильного поглощения. Можно отметить типичный радужный ход (см., например, работу [141]) некоторых кривых рассеяния, но физический смысл соответствующих потенциалов остается под вопросом.

Во втором случае химики-теоретики сталкиваются со следующей ситуацией: значения фазового сдвига δ_l довольно велики при нескольких сотнях значений l . Иногда химики пытаются выразить дифференциальные сечения через параметры, которые могут служить опорными точками при подгонке сплайнами кривой фазовых сдвигов δ_l . Но даже в случае шестипараметрических потенциалов обычно не удается описать данные рассеяния по вполне разрешенным дифференциальным сечениям. В то же время зависимость сечения от угла в некоторых областях абсолютно нечувствительна к параметрам. Это ведет к очень большой неустойчивости решения обратной задачи. С подобными трудностями приходится иметь дело, когда сечение представляют с помощью полюсов Редже. Следовательно, полуклассическое приближение и, в частности, анализ осцилляций интенсивности рассеяния в области радужного рассеяния остается одним из лучших путей практического применения обратной задачи (см., например, работы [34, 35, 300]).

Молекулярная радуга впервые наблюдалась, по-видимому, Кнауером [495] в 1933 г., который, правда, не дал правильной интерпретации явления. Свыше 20 лет это явление оставалось непонятым, пока в работе [299] не было проведено исследование траекторий рассеянных лучей, на несколько лет опередившее замечательный анализ Форда и Уилера [156] (1959 г.). Недавно были снова проведены опыты по рассеянию тепловых молекулярных пучков, наблюдались многие основные радуги и по ним была получена информация о глубине потенциальных ям. Наблюдались также и более сложные интерференционные явления. Следует отметить, что теория Эйри (аппроксимация параболой функции отклонения вблизи максимума) имеет очень ограниченную применимость. Дело в том, что область, непосредственно прилегающая к области радужного рассеяния, крайне чувствительна к изменению потенциала и во многих случаях необходим, по-видимому, точный квантовомеханический подход.

Поскольку радужное рассеяние обычно связано с поведением потенциала в так называемой «поверхностной» области, она может дать хорошую информацию о силах промежуточного радиуса

действия, но не о дальнедействующих силах. Информацию же последнего типа можно извлечь из поведения сечения вблизи нулевого угла, т. е. в «тени». В некоторых случаях с этими явлениями интерферируют глюрии.

Относительно различных вкладов в сечение (16.4.4) (в прямой задаче) можно дополнительно сказать следующее. Во-первых, поскольку при данном θ уравнением (16.4.7) определяется l_i для каждой отдельной ветви, мы можем рассматривать величину l_i как функцию переменной θ . Тогда легко видеть, что для дифференциальных сечений данной угловой области важны только определенные области кривой фазового сдвига.

Во-вторых, так как разные сечения $\sigma_i(\theta)$ обычно сильно различаются по величине и виду зависимости от θ , область значений l , соответствующая заданному интервалу значений θ , может быть еще более сужена. Следовательно, можно быть уверенным в том, что данная угловая область даст нам конкретную информацию об определенной области кривой фазового сдвига. Кроме того, в большинстве угловых областей только один интерференционный член дает значительный вклад в $\sigma_{\text{расс}}(\theta)$, так что легко объяснить, почему, например, в дифференциальном сечении $\theta > \theta_1$ иногда наблюдаются равномерные осцилляции.

Все сказанное приложимо к практическим обратным задачам в химической физике, где обычно заранее известна приближительная форма потенциала и на основании отмеченного можно определять те участки сечения σ , которые более или менее чувствительны к данной части потенциала. Полученную таким путем информацию можно использовать двояко: либо для установления локальных «обращений», которые приближенно дают часть за частью параметры потенциала (с уточнением на дальнейших этапах), либо для оптимального планирования экспериментов по определению параметров потенциала.

На практике химики пользуются тремя перечисленными ниже методами определения $\Theta(l)$ или $\{\delta_l\}$ по экспериментальным данным [56]).

а) Определение неизвестных коэффициентов фазового сдвига или S -матрицы, представленных в параметризованном виде, путем оптимизации на основе данных измерения и расчета. Обычно принимают асимптотическое поведение $V(r) \sim -Cr^{-n}$ при $r \rightarrow \infty$, так что $\eta \sim Cl^{-n-1}$ при $l \rightarrow \infty$ [334, 35, 333], и вводят удобную параметризацию для фазовых сдвигов или функций рассеяния [414, 355, 356, 251]. Затем по точным формулам квантовой механики вычисляют сечения. Таким образом, этот метод не относится к данному параграфу, а представляет собой либо метод подгонки, либо этап анализа, о котором говорилось в § 3.

б) Сравнение полуклассических характерных участков кривой сечения с расчетными значениями, полученными путем параметризации функции отклонения. Здесь главные трудности связаны с тем, что в выражения для полуклассического сечения входит $l(\theta)$, а не $\Theta(l)$, причем $l(\theta)$ в общем случае — многозначная функция. Чтобы исключить эту многозначность, функцию отклонения разбивают на монотонные функции $\Theta_i(l)$, аппроксимируемые простыми кривыми. Были предложены методы, в которых исходят из всех измеримых величин или рассматривают лишь наиболее характерные особенности хода изменения полуклассических сечений [58, 52, 303].

в) Прямое определение $\theta(l)$ или части $\theta(l)$ по сечениям, полученным в полуклассическом приближении. Такое прямое определение возможно, если сечение — монотонная функция. Из выражений (16.4.5) и (16.4.7) видим, что тогда произведение $\sigma \sin \theta$ пропорционально величине $(l + 1/2) dl/d\theta$, так что функция отклонения получается прямым интегрированием измеренного сечения:

$$\left(l(\theta) + \frac{1}{2}\right)^2 = 2k^2 \int_{\theta}^{\pi} \sigma(\theta') \sin \theta' d\theta'. \quad (16.4.9)$$

Потенциал определяется одним из способов, указанных в § 3. Можно также извлечь прямую информацию о функции отклонения из данных об интерференции [393, 394, 347].

Хороший обзор по данному вопросу, в котором рассматривается обобщение указанных методов на случай тождественных частиц, сечений обменного взаимодействия, потенциальных переходов и приводятся результаты, полученные в практических задачах определения молекулярных потенциалов по экспериментальным данным, можно найти в работе Бака [56].

Оценка степени приближения при полуклассическом анализе. Степень приближения при полуклассическом анализе исследовалась с математической точки зрения путем точного вывода следующих порядков на всех этапах приближения, включая замену дискретной суммы интегралом (см., например, [365, 36]). Было показано, что погрешности такого приближения по порядку величины не превышают $(ka)^{-1}$, где a — радиус действия потенциала (произведение ka приблизительно равно числу непренебрежимых значений δ_l). Поскольку же два первых порядка в ВКБ-приближении имеют одинаковый вид, погрешность, вероятно, еще меньше.

§ 5. Полуклассический анализ III

Применение ВКБ-приближения и полуклассического метода не ограничивается обратной задачей рассеяния при фиксированной энергии. Они могут быть столь же хорошо применены ко всем обратным задачам квантовой теории. Мы рассмотрим две такие задачи: спектральную обратную задачу и обратную задачу при фиксированном l . В обоих случаях, хотя приближенные теории были введены с самого начала, они до сих пор играют важную роль в задачах, представляющих интерес в настоящее время. Кроме того, структура полуклассического метода позволяет проводить некоторые интересные сравнения с точной теорией.

А. Спектральная обратная задача

Будем исходить из уравнения Шредингера (16.1.4) и рассмотрим потенциальную энергию $V(r)$ при тех значениях r , при которых она отрицательна (притяжение). Предположим, что при отрицательных E имеются только две точки поворота $r = TP_1$ и $r =$

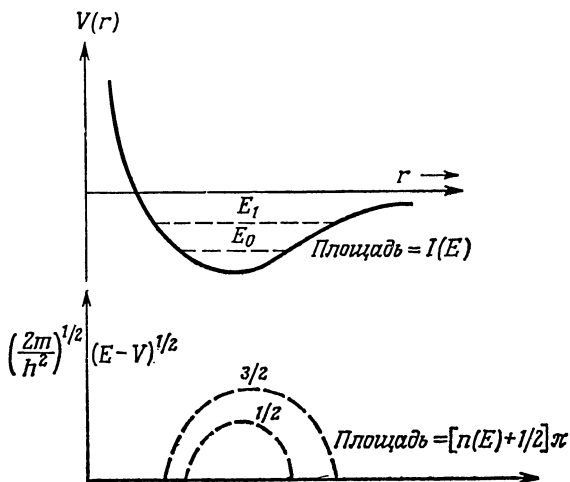


Рис. 28.

$= TP_2$, в которых $E = V(r)$. Иначе говоря, мы для удобства исключаем случай, когда у потенциала имеется более одного минимума. Далее, следуя Уилеру [425], введем три величины (рис. 28): инклюзию $I(E)$, т. е. площадь

$$I(E) = \int_{TP_1}^{TP_2} [E - V(r)] dr \quad (16.5.1)$$

области, ограниченной кривой потенциала и заданной энергией E и заканчивающейся в точках поворота; *изменение фазы* волновой функции при переходе из первой во вторую точку поворота:

$$\left[n(E) + \frac{1}{2} \right] \pi = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \int_{TP_1}^{TP_2} [E - V(r)]^{1/2} dr \quad (16.5.2)$$

и «экскурсию» — расстояние между точками поворота по оси r :

$$X(E) = \int_{TP_1}^{TP_2} dr = r_2 - r_1. \quad (16.5.3)$$

Энергии S -уровней $E_0, E_1, \dots, E_n$ соответствуют неотрицательным целым значениям $n(E)$ в формуле (16.5.2). Спектральная обратная задача состоит в том, чтобы определить потенциал $V(r)$ по заданной системе энергетических уровней.

Такую задачу нетрудно решить в ВКБ-приближении.

1. Поскольку мы знаем E_n , мы можем путем подходящей интерполяции найти непрерывную зависимость $E(n)$, а следовательно, и $n(E) + 1/2$. Путем экстраполяции отсюда находим энергию $E_{\min}$, которая соответствует минимуму кривой потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \min \{V(r)\} &= E_{\min}, \\ \left[n(E_{\min}) + \frac{1}{2} \right] \pi &= 0. \end{aligned} \quad (16.5.4)$$

2. Теперь обратим преобразование Абеля в правой части равенства (16.5.2), как это делалось в § 3 [формула (16.3.24)]. Поскольку это «интеграл порядка $1/2$ », естественно применить к обеим частям равенства (16.5.2) оператор полуинтегрирования $D^{-1/2}$, определяемый выражением

$$[D^{-1/2}f]_{(E)} = \pi^{-1/2} \int_{E_{\min}}^E (E - E')^{-1/2} f(E') dE'. \quad (16.5.5)$$

В правой части получаем интеграл

$$\pi^{-1/2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \int_{E_{\min}}^E (E - E')^{-1/2} \left\{ \int_{TP_1(E')}^{TP_2(E')} [E' - V(r)]^{1/2} dr \right\} dE'. \quad (16.5.6)$$

Изменив порядок интегрирования (в результате чего появляется элементарный эллиптический интеграл), сразу получаем инклюзию:

$$I(E) = \int_{TP_1(E)}^{TP_2(E)} [E - V(r)] dr = 2\pi^{-1/2} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{1/2} \left[D^{-1/2} \left(n(E) + \frac{1}{2} \right) \pi \right]. \quad (16.5.7)$$

3. Из формулы (16.5.1) для $I(E)$ путем однократного дифференцирования получаем

$$X(E) = \frac{\partial I(E)}{\partial E} = (r_2 - r_1). \quad (16.5.8)$$

Следовательно, энергетическими уровнями $E_0, E_1, \dots, E_n$ не определяется ни левая ветвь кривой потенциальной энергии, ни правая ветвь, а определяется только расстояние между ветвями. Мы произвольно определим левую ветвь потенциальной кривой, задав $r_1(E)$ как некую монотонно убывающую функцию энергии. Пусть она убывает с энергией не быстрее, чем растет функция $X(E)$. Тогда о правой точке поворота $r_2(E)$ можно сказать следующее: она 1) полностью определена: $r_2(E) = r_1(E) + X(E)$, 2) является наименьшей функцией энергии и 3) обеспечивает единственно возможное продолжение левой ветви потенциальной кривой через точку $E_{\min}$ в правую.

Аналогичные рассуждения возможны в случае спектрального ядра при $l \neq 0$, если потенциал $V(r)$ заменить эффективным потенциалом

$$V_{\text{эфф}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(l + 1/2)^2}{r^2}. \quad (16.5.9)$$

Предположим теперь, что инклюзия I определяется не только как функция E , но и как функция углового момента или как функция параметра

$$L^2 = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (16.5.10)$$

Тогда на основании формул (16.5.1) и (16.5.9) и в соответствии с классическим методом Ридберга — Клейна — Риса анализа данных по атом-атомному взаимодействию уравнение (16.5.8) можно дополнить уравнением

$$-\frac{2m}{\hbar^2} \frac{\partial I(E, L^2)}{\partial L^2} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}. \quad (16.5.11)$$

Системой уравнений (16.5.8) и (16.5.11) определяются обе точки поворота, что позволяет построить кривую потенциальной энергии $V(r)$ полностью во всей области взаимодействия.

Информация, необходимая для нахождения $I(E, L^2)$, задается в атомной физике колебательно-вращательными спектрами, и данный метод применяется на практике. Хотя, кроме первого, были исследованы и следующие порядки ВКБ-приближения, было показано, что уже результаты первого порядка удивительно точны. Этому было дано следующее объяснение: «Как известно, вблизи минимума энергетические уровни, рассчитанные в первом порядке

ВКБ-приближения, являются точными. Вблизи порога диссоциации движение становится почти классическим и результаты первого порядка ВКБ-приближения также должны быть точными [300] (в работе [300] дан очень хороший обзор по методу Ридберга — Клейна — Риса и его приложениям).

Если функция $I(E)$ известна только при одном заданном значении l , то ею определяется лишь некое семейство спектрально-эквивалентных потенциалов. Параметризовать это семейство потенциалов удобнее всего, рассматривая зависимость r от V , а не зависимость V от r . Так, в случае параболического барьера имеем

$$r = r_0 \pm \left(\frac{2V}{m\omega^2} \right)^{1/2} \quad (16.5.12)$$

и все эквивалентные решения даются формулами

$$r = \begin{cases} r_0 - \left(\frac{2V}{m\omega^2} \right)^{1/2} + f(V) & \text{(левая ветвь),} \\ r_0 + \left(\frac{2V}{m\omega^2} \right)^{1/2} + f(V) & \text{(правая ветвь).} \end{cases} \quad (16.5.13)$$

Здесь предполагается, что $f(V)$ — непрерывная функция, которая имеет хорошо определенную производную, ограниченную неравенством

$$\left| \frac{df(V)}{dV} \right| < \frac{d}{dV} \left(\frac{2V}{m\omega^2} \right)^{1/2} \quad (16.5.14)$$

(чтобы на кривой потенциальной энергии $V(r)$ не было участков с «отрицательным наклоном» в альпинистском смысле слова).

В. Обратная задача рассеяния

Будем обозначать через $V(r)$ эффективный потенциал: потенциальную энергию, включающую кулоновский барьер и центробежные ВКБ-члены $(l + 1/2)^2 r^{-2}$. Фактический потенциал содержит все эти три составляющие. «Опорный» же потенциал содержит только кулоновский и центробежный члены. Тогда, согласно формулам (16.3.1) и (16.3.17), в ВКБ-приближении фазовый сдвиг дается интегралом

$$\delta(E) = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{TP}^R [E - V(r)]^{1/2} dr - \int_{TP_0}^R [E - V_0(r)]^{1/2} dr \right\}, \quad (16.5.15)$$

где TP и TP_0 — точки поворота фактического и опорного потенциалов (рис. 29).

Интегралы в формуле (16.5.15) аналогичны интегралу (16.5.2), который дает изменение фазы и при отрицательных E . Таким

образом, фазовому сдвигу и изменению фазы соответствует инклюзия, равная площади области, заключенной между кривой фактического потенциала и кривой опорного потенциала ниже прямой $V = E = \text{const}$:

$$I(E) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{TP}^R (E - V(r)) dr - \int_{TP_0}^R [E - V_0(r)] dr \right\}. \quad (16.5.16)$$

Первый интеграл здесь состоит, очевидно, из двух частей. Площадь области, лежащей ниже прямой $E = 0$, есть инклюзия в том виде, как она вычислялась при полуинтегрировании по E разности фаз $[n(E) + 1/2]\pi$ между двумя точками поворота. Площадь

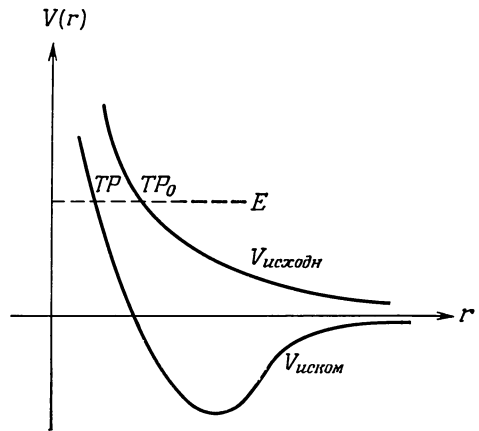


Рис. 29.

области, лежащей выше прямой $E = 0$, вместе с интегралом, содержащим V_0 , получается таким же образом из фазового сдвига [по двум членам в формуле (16.5.16) можно определить в ВКБ-приближении собственные значения для потенциалов V и V_0 с непроницаемой вертикальной стенкой при $r = R$]. Следовательно, как и прежде, полная инклюзия $I(E)$ находится путем одного полуинтегрирования:

$$I(E) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{1/2} \left\{ \int_{E_{\min}}^0 \frac{[n(E') + 1/2]\pi}{(E - E')^{1/2}} dE' + \int_0^E \frac{\delta(E')}{(E - E')^{1/2}} dE' \right\}, \quad (16.5.17)$$

а отсюда путем однократного дифференцирования находится положение точки поворота TP :

$$TP_0 - TP = \frac{\partial I(E)}{\partial E}. \quad (16.5.18)$$

Так как величина TP_0 известна, это и есть решение «обратной задачи рассеяния» в полуклассическом приближении.

Итак, мы видим, что при отрицательных энергиях имеются две неизвестные точки поворота и одно условие для их определения, а при положительных энергиях — только одна неизвестная действительная точка поворота, так что в последнем случае имеется полностью определенный результат. Другими словами, в ВКБ-приближении фазово-эквивалентные потенциалы различаются «под прямой $E = 0$ », но не различаются «над этой прямой» [425]. Дифференцирование же энергии E_n по l (метод Ридберга — Клейна — Риса) устраняет все неопределенности.

Аналогичную ситуацию мы имеем в точной теории, где информации о положении связанных состояний вместе с данными о фазовом сдвиге как функции энергии E недостаточно для полного определения потенциала, но дополнительные сведения о спектральных параметрах (нормировках связанных состояний) позволяют однозначно восстановить потенциал.

В. Другие задачи и замечания

Обратные задачи, исходящие из других наборов экспериментальных данных, тоже можно решать приближенными методами, применяя в высокоэнергетическом пределе ВКБ-приближение.

Исходные данные — дифференциальные сечения при высоких энергиях. Из выражений (16.3.2), (16.3.3) и (16.3.7) мы видим, что в пределе больших энергий

$$H(\lambda) \sim -\frac{1}{2} E^{-1} V\left(\frac{\lambda}{k}\right) + O(E^{-2}). \quad (16.5.19)$$

Таким образом, вводя прицельный параметр $b = (l + 1/2)k^{-1}$ из соотношения (16.3.23) легко получаем высокоэнергетический предел функции отклонения:

$$\tau(E, b) \equiv E\Theta(E, b) = 2Ek^{-1} \frac{d\eta}{db} = \tau_0(b) + O(E^{-1}), \quad (16.5.20)$$

$$\tau_0(b) = -b \int_b^{\infty} (r^2 - b^2)^{-1/2} \frac{dV}{dr} dr. \quad (16.5.21)$$

Фактически эти асимптотические выражения справедливы либо при высоких энергиях и фиксированном угле рассеяния, либо при малых углах и любых энергиях [394, 392]. Они позволяют следующим образом находить потенциал по дифференциальным сечениям. Из классического выражения для сечения рассеяния

$$\rho(\tau, E) = \theta \sin \theta \sigma(\theta, E) = 0,5\tau \left| \frac{db^2}{d\tau} \right| = \rho_0(\tau) + O(E^{-1}) \quad (16.5.22)$$

мы видим, что $b(\tau_0)$ дается соотношением

$$[b(\tau_0)]^2 = 2 \int_{\tau_0}^{\infty} \rho_0(\tau) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (16.5.23)$$

Величину $\rho_0(\tau)$ можно определить по графику зависимости функции $\rho(E, \tau)$ от $\Theta(E)$ при разных значениях энергии E . Все кривые на таком графике должны асимптотически стремиться к $\rho_0(\tau)$ при малых τ (рис. 30). Очевидно, что при таком методе сводятся

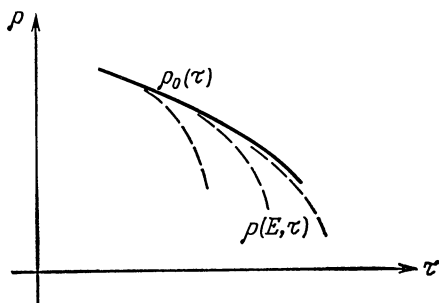


Рис. 30.

в одну кривую все данные, соответствующие широкому интервалу энергий; это особенно важно, если данные при одной энергии не полные. Имеется также аналогичный метод, пригодный при малых b , для процессов рассеяния назад [394].

Исходные данные — полное сечение. Из выражений (16.5.19) и (16.3.6) получаем высокоэнергетический предел фазового сдвига:

$$\delta(b) = -(2k)^{-1} [\omega(b) + O(E^{-1})], \quad (16.5.24)$$

где

$$\omega(b) = \frac{2m}{\hbar^2} \int_b^{\infty} (r^2 - b^2)^{-1/2} r V(r) dr. \quad (16.5.25)$$

Это интеграл Абеля, и его можно обратить [302]; в результате имеем

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{\pi m} \int_r^{\infty} (b^2 - r^2)^{-1/2} \omega'(b) db. \quad (16.5.26)$$

В то же время полное сечение в интегральной форме имеет вид

$$\sigma(k) = 4\pi \int_0^{\infty} \sin^2 \frac{\omega(b)}{2k} (2b) db. \quad (16.5.27)$$

Если $\omega(b)$ — некая монотонная функция (т. е. монотонный отталкивающий потенциал), то можно взять ее в качестве новой переменной и, обратив полученное таким образом в формуле (16.5.27) синус-преобразование Фурье, выразить $b(\omega)$ через полное сечение:

$$\bar{\sigma}(\omega) = [b(\omega)]^2 = \pi^{-2} \int \sigma(k) \sin \frac{\omega}{k} k^{-1} dk. \quad (16.5.28)$$

Изменение переменных интегрирования в формуле (16.5.26) дает

$$V(r) = \frac{\hbar^2}{\pi m} \int_0^{TP} [\bar{\sigma}(\omega) - r^2]^{-1/2} d\omega,$$

где верхний предел интеграла TP является нулем подкоренного выражения. Подобный метод предложен Миллером [302], который также обобщил его на случай, когда $\omega(b)$ не монотонная функция, но угол glory известен. Аналогичные методы предложены Генри и др. [201], а также Зигмундом и Лиллемарком [389], исследовавшими обратную задачу в случае неполного сечения:

$$\sigma_{\theta c}(E) = \int_{\theta > \theta_c} \frac{d\sigma(E, \theta)}{d\theta} d\theta. \quad (16.5.29)$$

Кроме того, такой метод применим, очевидно, и в случаях, отличных от высокоэнергетического предела, если потенциал V заменить функцией $H(\lambda)$, а формулу (16.5.26) — формулой (16.3.6) (замечание автора главы).

Г. Замечание о выводах формул § 3

Правая часть формулы (16.3.1) содержит интегралы вида

$$F\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right] = \int_{TP_1}^{TP_2} \left[f(r) - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{1/2} \frac{dr}{r}. \quad (16.5.30)$$

Эти интегралы совершенно аналогичны интегралам, рассматриваемым в § 5, п. «А» [с заменой $E \rightarrow (l + 1/2)^2$ и $r \rightarrow \ln r$]. Они берутся путем соответствующего полуинтегрирования:

$$\frac{2}{\pi} \int_{(l+1/2)^2}^{f(r)} \frac{[f(r) - (l' + 1/2)^2]^{1/2}}{[(l' + 1/2)^2 - (l + 1/2)^2]^{1/2}} d\left(l' + \frac{1}{2}\right)^2 = f(r) - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (16.5.31)$$

Интегрируя это выражение по $\ln r$ от точки поворота до точки поворота, получаем новую инклюзию, которая при дифференцировании дает экскурсию относительно переменной $\ln r$ [425]. Тем

самым сразу же доказывается, что из $F(l + 1/2)^2$ нельзя извлечь иной информации о функции f , кроме экскурсии, выраженной через $\ln r$ между двумя точками поворота, в которых $f(r) = (l + 1/2)^2$.

Очевидно, что данное замечание представляет собой часть заключительного замечания гл. 11.

§ 6. От приближенных методов к точным

А. Проблемы единственности

Лёффель [281] показал, что может быть только один потенциал, обеспечивающий заданную интерполяцию $l \rightarrow \delta_l$ при любых $\text{Re } l > 0$. Результаты § 2 и 3 могут служить хорошим примером, иллюстрирующим его теорему. Например, легко убедиться, что потенциалы, «прозрачные» в борновском приближении, соответствуют фазовому сдвигу $\delta_l \neq 0$ при нецелом l . В борновском приближении на этапе определения фаз $\{\delta_l\}$ по сечению σ имеется лишь тривиальная неоднозначность. В квазиклассическом методе § 3 этап $\sigma \rightarrow \{\delta_l\}$ подобен этапу точной теории. Кроме того, функция $\delta(p)$ имеет точку ветвления при $p = \lambda_0$, поскольку значения на положительной полуплоскости не единственны при значениях, заданных на положительной действительной оси, и этап $h(\lambda) \rightarrow V(r)$ сам по себе неоднозначен. Соответствующие неоднозначности остаются в методе § 4, в котором этап $\sigma \rightarrow \Theta_l$ систематически не исследовался. Поскольку приближенный метод § 3 весьма удобен для исследования неоднозначностей, можно взять его за основу при точном выявлении неоднозначностей в обратных методах. Такие исследования недавно были проведены [127] и охватывали следующие моменты:

1) систематический анализ всех возможных полуклассических неопределенностей;

2) итерационный переход от полуклассических результатов к точным;

3) детальную классификацию неоднозначностей и сравнение с результатами, полученными путем численных расчетов. На основании такого анализа показано, в частности, что полосы, или слои, непрерывных неоднозначностей (§ 3) — это неоднозначности глубины потенциала, «неоднозначности формы» — это неоднозначности потенциальной поверхности и что путем полуклассического анализа могут быть получены некоторые эмпирические правила, например правило VR^n . Метод дает прозрачные потенциалы до классического предела [128].

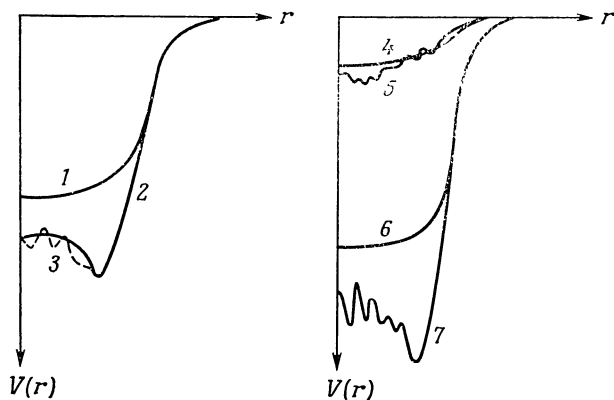


Рис. 31.

1 — исходный потенциал V , 2 — классический эквивалентный потенциал, 3 — точный эквивалентный потенциал, 4 — мнимая часть исходного потенциала, 5 — мнимая часть эквивалентного потенциала, 6 — действительная часть исходного потенциала, 7 — действительная часть эквивалентного потенциала.

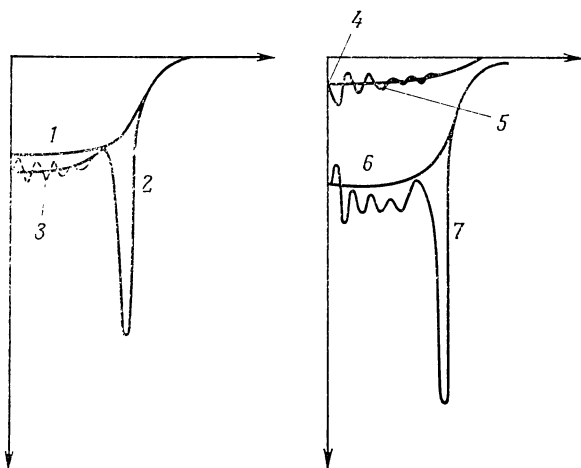


Рис. 32.

1 — исходный потенциал V , 2 — полуклассический эквивалентный потенциал, 3 — точный эквивалентный потенциал, 4 — мнимая часть исходного потенциала, 5 — мнимая часть эквивалентного потенциала, 6 — действительная часть исходного потенциала, 7 — действительная часть эквивалентного потенциала.

Б. Неопределенности, возникающие в случае борновского приближения и в случае метода Ньютона

Было показано [375], что метод Ньютона [318] эквивалентен замене функции $f(r, r)$, отвечающей потенциалу (гл. 13), ее наилучшим приближением в пространстве $L^2(0, 2k)$ и построению потенциала по такой «фильтрованной» функции. Это совершенно аналогично тому, как строится потенциал при методе, основанном на борновском приближении. Предположим, что мы исходим из потенциала $V(r)$, который дает набор фазовых сдвигов $\{\delta_i\}$, и получаем $V_a(r)$ методом Ньютона. Если это выполнено при больших значениях k , то $f(r, r) \approx K(r, r)$, а $V_a(r)$ есть не что иное, как решение, полученное методом, основанным на обращении в борновском приближении с функцией $f(\theta)$, продолженной до нуля. Следовательно, при больших k метод Ньютона должен обнаруживать такие же закономерности, как и метод обращения в борновском приближении [чем более гладкая функция $V(r)$ или чем больше E при заданном $V(r)$, тем лучше приближение $V_a(r)$]. Систематическое численное исследование, проведенное в работе [383], показало, что это выполняется в большой области, в которой функции $f(r, r)$ и $K(r, r)$ могут сильно различаться (рис. 31, 32).

В. От точных методов обратной задачи к приближенным

Полуклассические приближенные методы, в частности изложенные в § 6, во многих существенных чертах сходны с точными методами. Кроме того, в приближенных методах более наглядна физика. Поэтому было бы чрезвычайно интересно вывести метод обратной задачи, основанный на ВКБ-приближении, непосредственно из точных методов (методов Гельфанда — Левитана или Марченко в обратной задаче при фиксированном l или методов полного решения обратной задачи при фиксированной энергии E , рассмотренных в гл. 13). К сожалению, такой вывод, который мог бы пролить свет на физическое содержание точных методов, не осуществлен. Приведем слова Уилера [425]: «Интегральное уравнение, которое Марченко вывел методом Гельфанда — Левитана, — очень крупный и прекрасный успех. О его большом значении и красоте говорит следующее: оно вобрало в себя и скрывает в себе так много физики, что еще не удалось распутать ее и разобраться в ней».

§ 7. Квазиклассические исследования в других областях физики

Линейные приближения и обращение линейных преобразований были получены в столь многих областях физики, что мы даже не пытаемся все их охватить здесь. В других разделах физики про-

водились также и квазиклассические исследования, и в них получены формулы, в какой-то мере сходные с формулами, представленными в § 3—5. Подчеркнем, однако, что центр интереса в таких исследованиях не всегда совпадает с нашим.

В теории классического рассеяния, в оптике, в теории зондирования атмосферы и ионосферы, в диагностике плазмы уравнение Абеля имеет такой же вид, как и в нашем случае (см., например, работы [247, 124, 203, 285, 286, 175, 338, 331, 332, 95], но внимание исследователей концентрируется главным образом на проблеме устойчивости (см., например, работы [305, 185, 95]).

Очень интересное положение в сейсмологии: квазиклассическое приближение здесь оказывается столь удовлетворительным (всюду, конечно, кроме земной коры, где никакое приближение не годится), что можно, приняв его без доказательств, попытаться получить на его основе все решения. Кроме того, здесь возможны различные положения источника волн (тогда как в нашей задаче частицы приходят, очевидно, из бесконечности). Подобные исследования проводились Гервером и Маркушевичем [174, 175]. Эти авторы свели задачу определения распределения скорости по глубине $v(r)$ к задаче определения скорости $u(y)$ в полуплоскости $y > 0$, исходя из кривой времени прохождения волн в Земле, предполагая ее сферически-симметричной. Для этого они вводят переменные

$$x = \frac{R(\theta)}{v(R)}, \quad y = \frac{R \ln R/r}{v(R)}, \quad u(y) = \frac{v(R) e^{-yv(R)/R}}{v(R) e^{-yv(R)/R}}, \quad (16.7.1)$$

где R — радиус Земли, а θ — угловое расстояние между наблюдателем и источником, и рассматривают кривую времени прохождения Γ в плоскости x, t . По заданной кривой Γ определяются функции $X(p)$ и $T(p)$. Пусть $(2X, 2T)$ — точка на кривой Γ , а l — касательная к кривой Γ в этой точке. Вводится переменная

$$p = \text{tg}(\hat{l}, x) \quad (16.7.2)$$

и вводится функция $\tau(p) = T(p) - pX(p)$. Если функция $\tau(p)$ непрерывна, мы оказываемся в ситуации, которую исследовали Герглоц [202] и Вихерт [426]: функция $u(y)$ монотонная, функции $X(p)$ и $T(p)$ — преобразования Абеля функции $[u(y)]^{-1}$, и обращение любого из них дает функцию $u(y)$ однозначно (так же как в § 3 в случае только одной точки поворота). Если же у функции $\tau(p)$ имеются точки разрыва $p_1, \dots, p_n$, то вводится функция

$$\sigma(k) = \tau(p_k^-) - \tau(p_k^+). \quad (16.7.3)$$

Функция σ_k в какой-то мере аналогична функции $\delta_{\lambda_0}(p)$, введенной в § 3. Она позволяет названным выше авторам получить различные «обращения» $u_\nu(y)$ функции $X(p)$ [или $T(p)$] в случае, когда

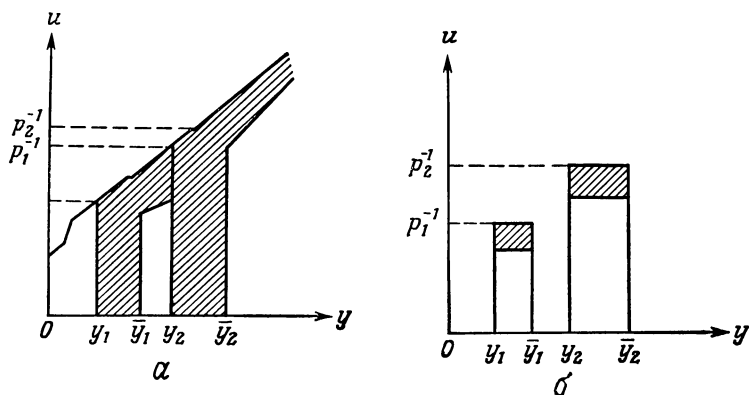


Рис. 33.

функция $u(y)$ не является монотонной. Существует целый набор решений $\{u_v(y)\}$. Герверу и Маркушевичу удалось показать, что графики всех решений в плоскости (u, y) могут быть ограничены. Пример приводится на рис. 33, а. Можно точно указать глубину y_1 , на которой начинается первый волновод, и можно определить скорость $u(y)$ при $y \in (0, y_1)$ по методу Герглоца — Вихерта. При $y > y_1$ введем

$$N(p) = \frac{2}{N} \int_p^1 \frac{X(q) dq}{\sqrt{q^2 - p^2}}, \quad (16.7.4)$$

$$\tilde{H}(k) = \inf \left\{ \frac{T(p)}{p}, p < p_k \right\} - N(\bar{p}_k) \quad (1 \leq k \leq n), \quad (16.7.5)$$

и пусть u — любое число из интервала (p_k^{-1}, p_{k+1}^{-1}) . Было доказано, что 1) скорость может принимать значение u на интервале $N(u^{-1}) \leq y \leq N(u^{-1}) + \tilde{H}_k$, 2) при $y < N(u^{-1})$ скорость строго меньше u .

Наконец, положение волноводов (числа $y_2, \dots, y_n, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$) также определяется только приблизительно. Кривые времени прохождения от глубоких источников позволяют уменьшить неоднозначность в определении скорости $u(y)$. Пример результатов приводится на фиг. 33, б. Те же авторы дали также ограничения на Γ , достаточные для существования решения.

При несложной модификации эта теория должна дать соответствующие результаты и в квантовой теории рассеяния [496]. Однако, по нашему мнению, такие исследования необходимо дополнить 1) анализом квантовых поправок и 2) хотя бы полуклассическим анализом отклонений от модели с одним потенциалом.

В заключение напомним, что преобразование Абеля было вве-

дено (в 1826 г.) в самой старой обратной задаче, которая когда-либо решалась в литературе [1].

Исторические замечания. Асимптотические приближения для линейных дифференциальных уравнений второго порядка впервые были введены в работах Грина, [189], Ливилля, [279] и Стокса [398] (см. руководства общего характера Эрдеи [142], Хединга [195], Олвера [329]). Их дальнейшее развитие и применение в физике по общему признанию связано с именами Джеффриса [225], Вентцеля [422], Крамерса [252] и Бриллюэна [54]. Первые широкие исследования квазиклассического приближения в целом были выполнены Фордом и Уилером [155, 156]. Математическое обоснование и улучшения теории и ее применений к дифференциальным уравнениям даны в работах [261—264, 326—328, 340], к фазовым сдвигам — [196, 143, 362, 163, 431], к барьерным явлениям — [182, 155, 163], к полуклассическим приближениям в целом — [365, 36]. Относительно применения к задачам рассеяния более практического характера см. обзоры [334, 34, 300, 35, 37, 91, 56].

Использовать ВКБ-приближение в спектральной обратной задаче предложено в работах [363, 364, 248, 353], а обобщен метод в работах [303, 154]. Полуклассический метод решения обратной задачи рассеяния в случае монотонных потенциалов был применен в работах [209, 153] (см. также работы [247, 424]), в общем случае — в работах [366—369, 414, 302], к практическим задачам — в работе [57] и в некоторых других работах в области химической физики (см. обзоры, указанные выше).

Неоднозначности результатов анализа на основе оптической модели были замечены, вероятно, сразу же, как только были проведены первые расчеты. Пригодность и преимущества ВКБ-приближения при их интерпретации были отмечены Остерном [19], Сингхом и др. [390, 391], Дриско и др. [136], а более систематически исследованы в работах Сабатье [377] и Кюзэ [127, 128].

В § 7 мы дали ссылки на некоторые приложения квазиклассического метода к обратным задачам в других областях. Относительно сравнения приближенных (и точных) методов применительно к обратным задачам в различных областях можно рекомендовать лекцию Сабатье [95]¹⁾.

¹⁾ Приближенный метод решения обратной задачи, основанный на подходе Крейна и использующий разложение волновых функций и потенциала в оборванный ряд Фурье, предложен В. К. Мельниковым [474]. Формализм восстановления потенциала в обобщенном квазиклассическом методе разработан в работе [442]. — *Прим. ред.*

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ОДНОГО ИЗМЕРЕНИЯ

§ 1. Введение

Известно, что одномерная задача рассеяния на всей действительной оси $-\infty < x < \infty$ в ряде отношений существенно отличается от задачи рассеяния в трех измерениях и от такой же задачи в радиальном одномерном случае на полуоси $0 \leq r < \infty$. По задаче на всей оси проведены многочисленные исследования, поскольку она находит приложение во многих задачах теоретической электротехники, среди которых мы можем упомянуть следующие:

1) восстановление параметров неоднородной линии передачи, в которой либо индуктивность, либо емкость постоянна, по коэффициенту отражения $r(\omega)$, заданному при всех частотах ω ;

2) восстановление при определенных условиях формы волновода переменного сечения по части матрицы рассеяния — обычно по коэффициенту отражения;

3) построение диэлектрика, составленного из слоев с разными диэлектрическими проницаемостями так, чтобы обеспечивалась заданная частотная зависимость коэффициента отражения электромагнитной волны;

4) определение плотности ионизации (по слоям) ионосферы по времени задержки импульса радиоволны, переданного с Земли и отраженного назад на Землю ионосферой.

В данном параграфе мы рассмотрим прямую задачу и укажем все свойства S -матрицы, необходимые для решения обратной задачи. Задача снова сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка

$$\varphi''(x) + k^2 \varphi(x) = V(x) \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (17.1.1)$$

Поскольку во многих технических аспектах такая задача очень сходна с задачами, с которыми мы сталкивались ранее в случае радиальных решений Йоста, мы приведем лишь конечные результаты. Допустим, что потенциал действителен, локально интегрируем и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |V(x)| dx < \infty. \quad (17.1.2)$$

Мы ищем решения ψ_1 и ψ_2 задачи рассеяния (17.1.1), удовлетворяющие следующим условиям при $x \rightarrow \pm \infty$:

$$\psi_1(k, x) \sim \begin{cases} e^{ikx} + s_{12}(k) e^{-ikx} & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ s_{11}(k) e^{ikx} & \text{при } x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (17.1.3)$$

$$\psi_2(k, x) \sim \begin{cases} s_{22}(k) e^{-ikx} & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ e^{-ikx} + s_{21}(k) e^{ikx} & \text{при } x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (17.1.4)$$

В нестационарном подходе решение ψ_1 соответствует волне $\exp(ikx)$, падающей при $t = -\infty$ слева (т. е. $x = -\infty$ при $t = -\infty$) и бегущей направо. При $t = +\infty$ она частично отражается налево, чему отвечает слагаемое $s_{12}(k) \exp(-ikx)$ в выражении (17.1.3), где $s_{12}(k)$ — коэффициент отражения налево, а частично проходит направо, чему соответствует слагаемое $s_{11}(k) \exp(ikx)$, причем здесь $s_{11}(k)$ — коэффициент прохождения направо. В литературе очень часто встречаются другие обозначения: $s_{11}(k) = t(k)$, $s_{12}(k) = r(k)$ и т. д. (t — коэффициент прохождения и r — коэффициент отражения).

Точно так же для решения $\psi_2(k, x)$, где теперь $x = +\infty$ и $x = -\infty$ поменялись местами, $s_{22}(k)$ — коэффициент прохождения налево и $s_{21}(k)$ — коэффициент отражения направо.

Назовем матрицу

$$S(k) = \begin{pmatrix} s_{11}(k) & s_{12}(k) \\ s_{21}(k) & s_{22}(k) \end{pmatrix} \quad (17.1.5)$$

S -матрицей уравнения (17.1.1). Возникает вопрос: в какой мере S -матрицей определяется потенциал V ? Чтобы ответить на него, мы вначале должны исследовать свойства S -матрицы. Тогда оказывается, что существуют такие же уравнения, как и в методе Марченко, рассмотренном в гл. 5, которые позволят нам решить обратную задачу.

Прежде чем приступить к детальному изучению свойств S -матрицы, отметим одно обстоятельство эвристического характера. Как следствие общей теории рассеяния из того, что потенциал действителен, вытекает, что S -матрица унитарна (сохранение вероятностей или числа частиц) и должна удовлетворять условию симметрии

$$s_{11}(k) = s_{22}(k), \quad (17.1.6)$$

следующему из инвариантности по отношению к обращению времени. Стало быть, в S -матрице остаются только три независимые действительные функции переменной k , изменяющейся в интервале $0 \leq k < \infty$. Но потенциал $V(x)$ на интервале $-\infty < x < \infty$ можно рассматривать как две действительные функции переменной x , заданные на интервале $[0, \infty)$. Так как потенциал полностью определяет S -матрицу, должно, по-видимому, существовать одно

соотношение между тремя независимыми действительными элементами S -матрицы. Оказывается, что это дополнительное соотношение сводится к аналитичности коэффициентов прохождения $s_{11}(k) = s_{22}(k)$ в верхней полуплоскости $\text{Im } k > 0$. Мы увидим, что в результате вся S -матрица определяется заданием одного из коэффициентов отражения, а именно $s_{12}(k)$ или $s_{21}(k)$.

Как хорошо известно, все решения уравнения Шредингера (17.1.1) могут быть представлены в виде линейных комбинаций некоторых фундаментальных решений, удовлетворяющих определенным граничным условиям. В качестве таких условий возьмем

$$f_+(k, x): \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ikx} f_+(k, x) = 1, \quad (17.1.7)$$

$$f_-(k, x): \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ikx} f_-(k, x) = 1. \quad (17.1.8)$$

Искомые решения в известной мере аналогичны решениям Йоста радиального уравнения Шредингера. Они удовлетворяют интегральным уравнениям

$$f_+(k, x) = e^{ikx} - \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{k} V(t) f_+(k, t) dt, \quad (17.1.9)$$

$$f_-(k, x) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \frac{\sin k(x-t)}{k} V(t) f_-(k, t) dt. \quad (17.1.10)$$

Поскольку это уравнения типа Вольтерра, нетрудно, так же как и в гл. 1 в случае решений Йоста, доказать, что они допускают единственные решения, удовлетворяющие неравенствам

$$|f_+(k, x) - e^{ikx}| \leq C^+ \frac{e^{-\text{Im } kx}}{1+|k|} \int_x^\infty (1+|t|) |V(t)| dt, \quad (17.1.11)$$

$$|f_-(k, x) - e^{-ikx}| \leq C^- \frac{e^{\text{Im } kx}}{1+|k|} \int_{-\infty}^x (1+|t|) |V(t)| dt, \quad (17.1.12)$$

где $C^\pm = C(1 + |x| \pm x)$, причем C — некоторая константа.

Точно так же, как прежде в случае радиальных решений Йоста, из этого следует, что функция f_+ голоморфна при $\text{Im } k > 0$ и что разность $f_+ - \exp(ikx)$ допускает в этой области асимптотическую оценку

$$f_+ - e^{ikx} = O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad |k| \rightarrow \infty. \quad (17.1.13)$$

Поэтому справедливо представление Левина из гл. 5

$$f_+(k, x) = e^{ikx} + \int_x^\infty A_+(x, y) e^{iky} dy \quad (17.1.14)$$

и аналогичное представление для f_- в нижней полуплоскости $\text{Im } k > 0$ с ядром A_- . При любом фиксированном x ядра A_+ и A_- квадратично интегрируемы по теореме Титчмарша.

Вводя величину B_+ :

$$A_+(x, y) = \frac{1}{2} B_+ \left(x, \frac{y-x}{2} \right), \quad (17.1.15)$$

преобразуем представление (17.1.14) к виду

$$f_+(k, x) = e^{ikx} \left(1 + \int_0^\infty B_+(x, y) e^{2iky} dy \right), \quad (17.1.16)$$

где B_+ — тоже квадратично интегрируемая по y функция при любом фиксированном x . Аналогично

$$f_-(k, x) = e^{-ikx} \left(1 + \int_{-\infty}^0 B_-(x, y) e^{-2iky} dy \right), \quad (17.1.17)$$

где B_- — также квадратично интегрируемая по y функция. Представления (17.1.16) и (17.1.17) будут здесь более удобными, чем представление (17.1.14).

Подставляя эти выражения в интегральные уравнения (17.1.9) и (17.1.10) и производя обратные преобразования Фурье, получаем в полной аналогии с результатами гл. 5

$$B_+(x, y) = \int_{(x+y)}^\infty V(t) dt + \int_0^y dz \int_{x+y-z}^\infty V(t) B_+(t, z) dt, \quad (17.1.18)$$

$$B_-(x, y) = \int_{-\infty}^{x+y} V(t) dt + \int_y^0 dz \int_{-\infty}^{x+y-z} V(t) B_-(t, z) dz. \quad (17.1.19)$$

Из этих интегральных уравнений снова легко получить ограничения

$$|B_+(x, y)| \leq \sigma_1^+(x+y) e^{\sigma_2^+(x)}, \quad (17.1.20a)$$

$$|B_-(x, y)| \leq \sigma_1^-(x+y) e^{\sigma_2^-(x)}, \quad (17.1.20б)$$

где

$$\sigma_1^\pm(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} |V(t)| dt, \quad (17.1.21a)$$

$$\sigma_2^\pm(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} (t-x) |V(t)| dt; \quad (17.1.21б)$$

знак плюс в левой части равенств всегда соответствует знаку плюс в правой части, и то же самое относится к знаку минус.

На основании записанных выше неравенств теперь можно показать, что B_+ и B_- имеют интегрируемые первые производные, удовлетворяющие неравенствам

$$|\partial_x B_+(x, y) + V(x+y)| \leq C \sigma_1^+(x) \sigma_1^+(x+y) e^{\sigma_2^+(x)}, \quad (17.1.22a)$$

$$|\partial_x B_-(x, y) - V(x+y)| \leq C \sigma_1^-(x) \sigma_2^-(x+y) \sigma_2^-(x) \quad (17.1.22b)$$

и аналогичным неравенствам для $\partial_y B_{\pm}$.

Наконец, непосредственно из интегральных уравнений для $B_{\pm}$ получаем

$$B_+(x, 0) = \int_x^{\infty} V(t) dt, \quad (17.1.23a)$$

$$B_-(x, 0) = \int_{-\infty}^x V(t) dt, \quad (17.1.23b)$$

что совершенно аналогично уравнению (5.1.9). Поэтому ¹⁾

$$-\frac{\partial}{\partial x} B_+(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x} B_-(x, 0) = V(x). \quad (17.1.24)$$

При действительных значениях $k \neq 0$ пары решений

$$\{f_+(k, x), f_+(-k, x) = f_+^*(k, x)\},$$

$$\{f_-(k, x), f_-(-k, x) = f_-^*(k, x)\}$$

представляют собой фундаментальные системы решений рассматриваемого дифференциального уравнения, поскольку их вронскианы (в обычных обозначениях) имеют вид

$$W[f_{\pm}(k, x), f_{\pm}(-k, x)] = \pm 2ik. \quad (17.1.25)$$

С учетом этого можем написать

$$f_-(k, x) = c_{11}(k)f_+(k, x) + c_{12}(k)f_+(-k, x), \quad (17.1.26a)$$

$$f_+(k, x) = c_{22}(k)f_-(k, x) + c_{21}(k)f_-(-k, x). \quad (17.1.26b)$$

Теперь можно подставить каждое из этих двух выражений в другое выражение. Это приводит к условиям совместности

$$c_{11}(k)c_{22}(k) + c_{12}(-k)c_{21}(k) = c_{22}(k)c_{11}(k) + c_{21}(-k)c_{12}(k) = 1 \quad (17.1.27a)$$

$$c_{12}(k)c_{22}(k) + c_{11}(k)c_{21}(k) = c_{21}(k)c_{11}(k) + c_{22}(-k)c_{12}(k) = 0. \quad (17.1.27b)$$

¹⁾ Оба уравнения необходимы для исследования свойств потенциала на обоих концах интервала: B_+ при $x = +\infty$ и B_- при $x = -\infty$.

Из определений (17.1.26а) и (17.1.26б) и выражений для вронскианов (17.1.25) имеем

$$c_{12}(k) = c_{21}(k) = \frac{1}{2ik} W[f_+(k, x), f_-(k, x)], \quad (17.1.28a)$$

$$c_{11}(k) = \frac{1}{2ik} W[f_-(k, x), f_+(-k, x)], \quad (17.1.28б)$$

$$c_{22}(k) = \frac{1}{2ik} W[f_-(-k, x), f_+(k, x)]. \quad (17.1.28в)$$

Из последних двух соотношений сразу же видно, что

$$c_{11}(k) = -c_{22}(-k). \quad (17.1.29)$$

Это следует также из формул (17.1.27а) и (17.1.27б) и равенства $c_{12}(k) = c_{21}(k)$.

Легко видеть также, что

$$|c_{12}(k)|^2 = 1 + |c_{11}(k)|^2 = 1 + |c_{22}(k)|^2. \quad (17.1.30)$$

Позднее мы увидим связь между коэффициентами $c_{ij}(k)$ и элементами S -матрицы $s_{ij}(k)$. Коэффициенты $c_{ij}(k)$ играют роль, вполне аналогичную роли функции Йоста $F(k)$ предыдущих глав, и, как и должно быть, допускают также интегральные представления, подобные представлениям функции Йоста. Например, на основе условия (17.1.2) и интегрального уравнения (17.1.10) можно показать, что

$$\begin{aligned} f_-(k, x) = & e^{-ikhx} + \frac{e^{ikhx}}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} V(t) f_-(k, t) dt - \\ & - \frac{e^{-ikhx}}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} V(t) f_-(k, t) dt + o(1), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (17.1.31)$$

В то же время выражение (17.1.26а) дает

$$f_-(k, x) = e^{ikhx} c_{11}(k) + e^{-ikhx} c_{12}(k) + o(1). \quad (17.1.32)$$

Сравнивая два последних выражения, получаем

$$c_{11}(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} V(t) f_-(k, t) dt, \quad (17.1.33)$$

$$c_{12}(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} V(t) f_-(k, t) dt. \quad (17.1.34)$$

Аналогично имеем

$$c_{21}(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} V(t) f_+(k, t) dt, \quad (17.1.35)$$

$$c_{22}(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} V(t) f_+(k, t) dt. \quad (17.1.36)$$

Исходя из этих интегральных представлений и свойств решений $f_{\pm}(k, r)$, данных ранее, тем же методом, которым в гл. 1 и 2 исследовались свойства функции Йоста $F(k)$ и ее связь с состояниями дискретного спектра, мы можем легко установить свойства функций $c_{ij}(k)$. Прежде всего из известных нам свойств решений Йоста $f_{\pm}$ следует, что функция $c_{12}(k)$ аналитична по k в верхней полуплоскости $\text{Im } k > 0$ и что произведение $kc_{12}(k)$ ограничено и непрерывно на действительной оси. Учитывая оценки, данные ранее для $f_{\pm}$, и лемму Римана — Лебега, мы видим также, что имеются следующие асимптотические выражения:

$$c_{11}(k) = \frac{o(1)}{k}, \quad c_{22}(k) = \frac{o(1)}{k}, \quad |k| \rightarrow \infty, \quad (17.1.37)$$

$$c_{12}(k) = c_{21}(k) = 1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o(1)}{k} \quad |k| \rightarrow \infty, \quad (17.1.38)$$

$$\alpha = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} V(t) dt. \quad (17.1.39)$$

Далее мы можем в точной аналогии с функцией Йоста исследовать нули функции $c_{12}(k)$ при $\text{Im } k \geq 0$. Из соотношения (17.1.30) явствует, что функция c_{12} не обращается в нуль на действительной оси. Асимптотическое же выражение (17.1.38) показывает также, что c_{12} не обращается в нуль при достаточно больших значениях k . Следовательно, функция $c_{12}(k)$ может иметь лишь конечное число нулей в верхней полуплоскости при $\text{Im } k > 0$. Если обозначить такой нуль через k_0 , то из определения (17.1.28а) мы выводим, что

$$f_+(k_0, x) = af_-(k_0, x). \quad (17.1.40)$$

Так как $\text{Im } k_0 > 0$ и функция $f_+(k_0, x)$ убывает экспоненциально при $x \rightarrow \infty$, а функция $f_-(k_0, x)$ ведет себя так же при $x \rightarrow -\infty$, мы имеем связанное состояние, т. е. квадратично интегрируемое решение дифференциального уравнения. Поэтому величина k_0^2 принадлежит точечному спектру дифференциального оператора $-(d^2/dx^2) + V(x)$. Легко также видеть, как и в случае функции Йоста, что вследствие действительности потенциала k_0^2 — действительная величина (действительный спектр) и поэтому k_0 — чисто мнимая величина.

Снова в полной аналогии с функцией Йоста можно показать, что все связанные состояния соответствуют нулям функции $c_{12}(k)$. Более того, можно опять показать, что в этих нулях мы имеем

$$i\dot{c}_{12}(k_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_+(k_0, x) f_-(k_0, x) dx = -a \int_{-\infty}^{\infty} f_-^2(k_0, x) dx. \quad (17.1.41)$$

Поскольку при чисто мнимых значениях k функция действительна, нули функции $c_{12}(k)$ простые. В гл. 2 мы видели, что так обстоит дело и в случае функции Йоста. Теперь мы можем подытожить свойства функции c_{ij} в следующей теореме.

Теорема 1. Коэффициенты $c_{ij}(k)$ в соотношениях (17.1.26а) и (17.1.26б), связывающих решения f_+ и f_- , являются непрерывными функциями переменной k на действительной оси всюду, кроме точки $k=0$, где непрерывно произведение $kc_{ij}(k)$. Эти коэффициенты связаны между собой соотношениями

$$c_{11}(k) = -c_{22}(-k), \quad (17.1.42a)$$

$$c_{12}(k) = c_{21}(k), \quad (17.1.42б)$$

$$c_{ij}(-k) = [c_{ij}(k)]^*, \quad (17.1.42в)$$

$$|c_{12}(k)|^2 = 1 + |c_{11}(k)|^2 = 1 + |c_{22}(k)|^2, \quad (17.1.42г)$$

а при больших значениях $|k|$ — асимптотическими выражениями (17.1.37) и (17.1.38).

Функция $c_{12}(k)$ при действительном k является предельным значением функции, голоморфной в верхней полуплоскости $\text{Im } k > 0$ и имеющей там конечное число простых нулей $k_j = i\chi_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) на мнимой оси, причем

$$\dot{c}_{12}(i\chi_j) = i \int_{-\infty}^{\infty} f_+(i\chi_j, x) f_-(i\chi_j, x) dx. \quad (17.1.43)$$

Далее нам нужно найти связь между коэффициентами c_{ij} и элементами s_{ij} S -матрицы. Теперь это нетрудно сделать. Как было показано в начале главы, для того чтобы найти S -матрицу, нужно найти два решения ψ_1 и ψ_2 с асимптотическими свойствами (17.1.3) и (17.1.4). Очевидно, что, например, решением ψ_1 может служить линейная комбинация функций $f_{\pm}$:

$$\psi_1(k, x) = f_-(-k, x) + s_{12} f_-(k, x) = s_{11}(k) f_+(k, x). \quad (17.1.44)$$

Это совместимо с формулой (17.1.26а) в том и только в том случае, если выполняется равенство

$$f_+(-k, x) + s_{12}(k) f_-(k, x) = s_{11}(k) [c_{22}(k) f_-(k, x) + c_{21}(k) f_-(-k, x)].$$

откуда следует, что должны выполняться равенства

$$s_{11}(k) = \frac{1}{c_{21}(k)}, \quad s_{12}(k) = \frac{c_{22}(k)}{c_{21}(k)}. \quad (17.1.45)$$

Мы видим, что величины s_{11} и s_{12} конечны при всех действительных значениях k , так как функция c_{21} не обращается в нуль на действительной оси. Единственная исключительная точка — точка $k = 0$, в которой $c_{21}(k)$ может достигать бесконечности. В этом случае $s_{11}(0) = 0$ и мы должны рассматривать только s_{12} . Однако из формул (17.1.35) и (17.1.36) легко видеть, что

$$\lim_{k \rightarrow 0} s_{12}(k) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{c_{22}(k)}{c_{21}(k)} = \frac{-\beta}{\beta} = -1, \quad (17.1.46a)$$

где

$$\beta = - \int_{-\infty}^{\infty} V(t) f_+(0, t) dt. \quad (17.1.46b)$$

Поэтому функция c_{12} непрерывна даже при $k = 0$.

Проводя такие же рассуждения применительно к решению ψ_2 , получаем

$$s_{22}(k) = \frac{1}{c_{12}(k)}, \quad s_{21}(k) = \frac{c_{11}(k)}{c_{12}(k)}. \quad (17.1.47)$$

Снова, если $c_{12}(0) = \infty$, то мы имеем при $k \rightarrow 0$

$$s_{22}(k) = O(k), \quad s_{21}(0) = -1.$$

Отметим, что функции $s_{ij}(k)$, вообще говоря, не являются непрерывными при $k=0$, если выполняется только условие (17.1.2). Но если выполняется еще и условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |V(x)| dx < \infty, \quad (17.1.48)$$

то, как легко показать, функции $s_{ij}(k)$ непрерывны при $k = 0$. Более того, тогда получаются следующие выражения, справедливые при $k \rightarrow 0$:

$$s_{11}(k) \approx Lk, \quad s_{12}(k) \approx -1 + L_1 k, \quad s_{21}(k) \approx -1 + L_2 k, \quad (17.1.49)$$

где $L (\neq 0)$, L_1 и L_2 — чисто мнимые величины. В следующем параграфе мы увидим, что условия (17.1.48) и (17.1.49) играют решающую роль при установлении взаимно-однозначного соответствия между элементами S -матрицы и потенциалом в обратной задаче (см. ниже теорему 4).

Из формул (17.1.47) и (17.1.45) явствует, что

$$s_{11}(k) = s_{22}(k). \quad (17.1.50)$$

Кроме того, пользуясь соотношениями (17.1.29) и (17.1.30), легко убедиться в том, что S -матрица унитарна. Например, из соотношения (17.1.29) следует равенство

$$s_{11}s_{12}^* + s_{12}s_{22}^* = 0, \quad (17.1.51a)$$

а из соотношения (17.1.30) — равенство

$$|s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = \frac{1}{|c_{12}|^2} + \frac{|c_{02}|^2}{|c_{12}|^2} = \frac{1 + |c_{22}|^2}{|c_{12}|^2} = 1. \quad (17.1.51б)$$

На основании теоремы 1 о свойствах функций $c_{ij}(k)$ и полученных выше соотношений между s_{ij} и c_{ij} можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Коэффициенты $s_{ij}(k)$ ($i, j = 1, 2$) являются непрерывными функциями переменной k на всей действительной оси и удовлетворяют равенству

$$s_{ij}(-k) = s_{ij}^*(k) \quad (17.1.52)$$

При больших значениях $|k|$

$$s_{12}(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad s_{21}(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad (17.1.53a)$$

$$s_{11}(k) = s_{22}(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (17.1.53б)$$

Функция $s_{11}(k)$ является предельным значением на действительной оси функции, аналитической в верхней полуплоскости всюду, кроме конечного числа полюсов в точках $k_j = i\chi_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) на мнимой оси. Вычеты в этих полюсах даются формулой

$$\text{Res } s_{11}(k)|_{i\chi_n} = i\gamma_n = \left[i \int_{-\infty}^{\infty} f_+(i\chi_n, x) f_-(i\chi_n, x) dx \right]^{-1}. \quad (17.1.54)$$

S -матрица с элементами $s_{ij}(k)$ является унитарной матрицей, а поэтому

$$|s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 = |s_{22}|^2 + |s_{21}|^2 = 1, \quad (17.1.55a)$$

$$s_{11}s_{21}^* + s_{12}s_{22}^* = 0. \quad (17.1.55б)$$

При всех действительных $k \neq 0$ выполняется строгое неравенство

$$|s_{12}(k)| = |s_{21}(k)| < 1. \quad (17.1.56)$$

Если $|s_{12}(0)| = 1$, то

$$s_{12}(0) = s_{21}(0) = -1. \quad (17.1.57)$$

Свойства S -матрицы, подытоженные в этой теореме, позволяют восстановить все ее элементы только по одному из известных коэф-

коэффициентов отражения s_{12} или s_{21} . Действительно, в силу равенства (17.1.55а) имеем

$$|s_{11}(k)| = (1 - |s_{12}(k)|^2)^{1/2}. \quad (17.1.58)$$

Поскольку этот коэффициент прохождения есть функция, мероморфная в верхней полуплоскости, его, как хорошо известно, можно восстановить с помощью соотношений Гильберта (дисперсионных соотношений), зная его абсолютную величину на действительной оси. Так, при $\text{Im } k > 0$ (гл. 2, § 2)

$$s_{11}(k) = \exp \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |s_{12}(k')|^2)^{1/2}}{k' - k} dk' \right) \prod_{j=1}^n \frac{k + i\gamma_j}{k - i\gamma_j}, \quad (17.1.59)$$

$$s_{11}(k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_{11}(k + i\varepsilon). \quad (17.1.60)$$

С учетом этого из соотношения (17.1.55б) получаем

$$s_{21}(k) = - \frac{s_{12}(-k) s_{11}(k)}{s_{11}(-k)}. \quad (17.1.61)$$

Напомним, что при больших значениях $|k|$ мы имеем выражения (17.1.53а) и (17.1.53б).

§ 2. Обратная задача

С помощью метода Марченко в конце гл. 5 было показано, что свойства потенциала в начале координат связаны со свойствами фурье-образа S -матрицы. В полной аналогии с методом Марченко мы здесь сначала наметим метод решения обратной задачи, а затем исследуем свойства S -матрицы, необходимые и достаточные для того, чтобы потенциал удовлетворял условиям интегрируемости (17.1.2) и (17.1.48). То, что мы выбираем подход Марченко, а не метод Гельфанда — Левитана, который должен был бы применяться здесь для решения обратной задачи, объясняется лишь тем, что здесь не играет особой роли точка $x = 0$ и что мы оперируем исключительно с решениями, имеющими требуемое асимптотическое поведение при $x = \pm \infty$, т. е. являющимися аналогами решений Йоста в радиальном случае.

Мы уже установили для функции f_+ и f_- интегральные представления (17.1.16) и (17.1.17), аналоги которых для решений Йоста в радиальном случае были исходными в методе Марченко. Следовательно, нам нужно найти интегральные уравнения, связывающие ядра B с данными рассеяния: S -матрицей, ее полюсами (связанными состояниями) и их вычетами.

Мы будем исходить из формул

$$s_{11}(k)f_+(k, x) = s_{12}(k)f_-(k, x) + f_-(-k, x), \quad (17.2.1a)$$

$$s_{22}(k)f_-(k, x) = s_{21}(k)f_+(k, x) + f_+(-k, x), \quad (17.2.1б)$$

установленных выше. Далее мы вводим функции h и g :

$$h_+(k, x) = e^{-ikhx} f_+(k, x), \quad (17.2.2a)$$

$$h_-(k, x) = e^{ikhx} f_-(k, x), \quad (17.2.2b)$$

$$g_+(k, x) = s_{22}(k) e^{ikhx} f_-(k, x), \quad (17.2.2c)$$

$$g_-(k, x) = s_{11}(k) e^{-ikhx} f_+(k, x). \quad (17.2.2d)$$

Функции h_+ и h_- аналитичны и ограничены в верхней полуплоскости, где они имеют асимптотическую форму

$$h(k, x) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \text{Im } k \geq 0, \quad (17.2.3)$$

а функции g_+ и g_- мероморфны в той же области с простыми полюсами, обусловленными значениями $s_{11}(k)$, в точках $k_j - i\chi_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Соответствующие вычеты связаны со значениями функций $h_{\pm}$ в этих точках. Например,

$$\begin{aligned} \text{Res } g_+(k, x) |_{i\chi_j} &\equiv \text{Res } s_{11}(k) |_{i\chi_j} e^{-2\chi_j x} f_-(i\chi_j, x) = \\ &= \frac{f_-(i\chi_j, x) e^{-2\chi_j x}}{i \int_{-\infty}^{\infty} f_+(i\chi_j, x) f_-(i\chi_j, x) dx} = \\ &= i M_j^{(1)} e^{-2\chi_j x} h_+(i\chi_j, x), \end{aligned} \quad (17.2.4a)$$

где ¹⁾

$$M_j^{(1)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_+^2(i\chi_j, x) dx \right)^{-1}. \quad (17.2.4b)$$

Аналогично

$$\text{Res } g_-(k, x) |_{i\chi_j} = -i M_j^{(2)} e^{2\chi_j x} h_-(i\chi_j, x), \quad (17.2.5a)$$

где

$$M_j^{(2)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_-^2(i\chi_j, x) dx \right)^{-1}. \quad (17.2.5b)$$

При больших значениях k имеем также

$$g(k, x) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \text{Im } k \geq 0. \quad (17.2.6)$$

В таких обозначениях формулы (17.2.4a) и (17.2.4b) примут вид

$$s_{21}(k) e^{2ikhx} h_+(k, x) + h_+(-k, x) = g_+(k, x), \quad (17.2.7a)$$

$$s_{12}(k) e^{-2ikhx} h_-(k, x) + h_-(-k, x) = g_-(k, x). \quad (17.2.7b)$$

¹⁾ Напомним, что в полюсах $i\chi_j$ функции f_+ и f_- пропорциональны друг другу в силу соотношений (17.1.45) и (17.1.28a).

Отметим, что для перехода от одной из этих формул к другой достаточно произвести замену $+\leftrightarrow -$ в индексах и замену $i\leftrightarrow -i$. Отметим также, что, вообще говоря, данные соотношения справедливы только на действительной оси, поскольку в каждое из них входят $+k$ и $-k$.

Чтобы получить интегральное уравнение, аналогичное уравнению Марченко из гл. 5, нам нужно лишь выполнить фурье-преобразование уравнений (17.2.7a) и (17.2.7б), написав

$$s_{21}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} A_+(t) e^{2ikt} dt, \quad (17.2.8)$$

$$h_+(k, x) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} B_+(x, y) e^{2iky} dy, \quad (17.2.9)$$

$$g_+(k, x) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}_+(x, y) e^{2iky} dy. \quad (17.2.10)$$

Как говорилось ранее, ядро B_+ , уже введенное в формуле (17.1.16), квадратично интегрируемо по y при любом фиксированном x . То же самое можно показать для $\tilde{B}_+$. Поскольку функция h_1 аналитична в верхней полуплоскости, имеем

$$B_+(x, y) = 0, \quad y < 0. \quad (17.2.11)$$

Кроме того, поскольку функция g_+ мероморфна в той же области, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{B}_+(x, y) &= -i \sum_j \text{Res } g_+(k, x) |_{i\chi_j} e^{-2\chi_j y} = \\ &= - \sum_j M_j^{(1)} e^{-2\chi_j(x+y)} \left(1 + \int_0^{\infty} B_+(x, t) e^{-2\chi_j t} dt \right), \quad y < 0. \end{aligned} \quad (17.2.12)$$

Теперь, выполняя фурье-преобразование обеих частей равенства (17.2.7a), получаем

$$A_+(x+y) + \int_{-\infty}^{\infty} A_+(x+y+t) B_+(x, t) dt + B_+(x, y) = \tilde{B}_+(x, -y). \quad (17.2.13)$$

Из этого уравнения при $y > 0$ с учетом формул (17.2.11) и (17.2.12) получаем

$$B_+(x, y) + \int_0^{\infty} B_+(x, t) \Omega_+(x+t+y) dt + \Omega_+(x+y) = 0, \quad y > 0, \quad (17.2.14a)$$

где

$$\Omega_+(t) = \sum_j M_j^{(1)} e^{-\chi_j t} + A_+(t). \quad (17.2.145)$$

Интегральное уравнение (17.2.14а) и есть нужное нам уравнение. Оно совершенно аналогично уравнению Марченко из гл. 5. если мы преобразуем его в соответствии с формулой (17.1.15). Точно так же, написав

$$s_{12}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} A_-(t) e^{-2ikt} dt, \quad (17.2.15)$$

$$h_-(k, x) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} B_-(x, y) e^{-2iky} dy, \quad (17.2.16)$$

получаем

$$B_-(x, y) + \int_{-\infty}^0 B_-(x, t) \Omega_-(x+t+y) dt + \Omega_-(x+y) = 0, \quad y < 0, \quad (17.2.17a)$$

где

$$\Omega_-(t) = \sum_j M_j^{(2)} e^{\chi_j t} + A_-(t). \quad (17.2.17b)$$

Уравнения (17.2.14а) и (17.2.17а) — основные уравнения для решения обратной задачи, т. е. для нахождения потенциала $V(x)$ по одному из известных коэффициентов отражения, скажем $s_{12}(k)$, при всех действительных значениях k , а также по полюсам $i\chi_j$ и положительным вычетам $M_j^{(1)}$ [формула (17.2.4б)]. Действительно, зная $s_{12}(k)$ и величины χ_j , можно вычислить $s_{11}(k)$ по формуле (17.1.59). Зная же коэффициент прохождения $s_{11}(k)$, можно вычислить его вычеты $i\gamma_j$ в полюсах $i\chi_j$ [формула (17.1.54)]. Величину $s_{11}(k)$ дает также формула (17.1.61). Поскольку $s_{22} = s_{11}$, S -матрица полностью определена. Кроме того, мы находим $M_j^{(2)}$ из тождества

$$M_j^{(1)} M_j^{(2)} = \gamma_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (17.2.18)$$

которое следует из соотношений (17.2.4б), (17.2.5б), (17.1.54) и из того, что в полюсах $i\chi_j$ решения f_+ и f_- пропорциональны друг другу. Зная теперь s_{12} , s_{21} , $M_j^{(1)}$ и $M_j^{(2)}$, по формулам (17.2.8), (17.2.14б), (17.2.15) и (17.2.17б), мы можем однозначно вычислить ядра $\Omega(t)$. Следовательно, мы можем решить интегральные уравнения (17.2.14а) и (17.2.17а) относительно B , а затем вычислить и потенциал $V(x)$ по формуле (17.1.24).

§ 3. Свойства потенциала

По аналогии с методом Аграновича и Марченко, которым в гл. 5 устанавливаются связи между свойствами потенциала и свойствами фурье-образа S -матрицы, здесь можно показать, что предположения (17.1.2) и (17.1.48) о потенциале влекут за собой следующие свойства интегрируемости для производной от $\Omega(t)$:

$$\int_a^{\infty} (1+t^2) |\Omega'_+(t)| dt \leq C(a), \quad (17.3.1a)$$

$$\int_{-\infty}^b (1+t^2) |\Omega'_-(t)| dt \leq D(b). \quad (17.3.1b)$$

Поскольку функции $A_{\pm}(t)$ отличаются от функций $\Omega_{\pm}$ членами, отвечающими связанным состояниям, и эти члены являются гладкими функциями, функции $A_{\pm}$ удовлетворяют аналогичным неравенствам. Иначе говоря, фурье-образы $A_{\pm}(t)$ коэффициентов отражения $s_{21}(k)$ и $s_{12}(k)$ абсолютно непрерывны и их производные удовлетворяют неравенствам (17.3.1a) и (17.3.1b) с соответствующими константами C и D .

Зная теперь свойства ядер, вытекающие из условий (17.1.2) и (17.1.48), мы можем установить свойства решений интегральных уравнений (17.2.14a) и (17.2.17a). Не вдаваясь в подробности, приведем окончательные результаты. В предыдущем параграфе мы видели, что вся S -матрица может быть восстановлена по одному из коэффициентов отражения и дискретному спектру. Возьмем коэффициент $s_{21}(k)$, который связан с функцией $A_+(t)$ и с соответствующими нормировочными константами $M_j^{(1)}$. Тогда можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть функция $s_{21}(k)$, определенная на интервале $-\infty < k < \infty$ выражением (17.2.8), удовлетворяет условиям

$$s_{21}(-k) = s_{21}^*(k), \quad (17.3.2a)$$

$$|s_{21}(k)| \leq 1. \quad (17.3.2b)$$

Пусть функция $A_+(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_a^{\infty} (1+t^2) |A'_+(t)| dt \leq C(a). \quad (17.3.3)$$

Уравнение (17.2.14a), ядро которого конструируется согласно формулам (17.2.8) и (17.2.14b), имеет единственное решение $B_+(x, y)$ при любом x в интервале $-\infty < x < \infty$.

Аналогичная теорема справедлива для функции $B_-(x, y)$. Эти две теоремы позволяют показать, что решения g и h , конструируе-

мые в соответствии с формулами (17.2.2а)–(17.2.2г), имеют все нужные свойства, перечисленные выше, и что потенциал удовлетворяет условиям (17.1.2) и (17.1.48). Все изложенное выше можно кратко сформулировать следующим образом.

Теорема 4. *Непрерывная матрица $S(k)$ размерности 2×2 является S -матрицей одномерного уравнения Шредингера (17.1.1) с потенциалом, удовлетворяющим условиям (17.1.2) и (17.1.48), в том и только в том случае, если выполняются следующие условия.*

1. Унитарность:

$$\begin{aligned} s_{11}(k)s_{12}^*(k) + s_{21}(k)s_{22}^*(k) &= 0, \\ |s_{11}(k)|^2 + |s_{12}(k)|^2 &= |s_{22}(k)|^2 + |s_{21}(k)|^2 = 1, \\ s_{12}(0) &= s_{21}(0) = -1, \quad \text{если } s_{11}(0) = 0. \end{aligned}$$

2. Действительность:

$$s_{ij}(-k) = s_{ij}^*(k), \quad i, j = 1, 2.$$

3. Симметрия:

$$s_{11}(k) = s_{22}(k).$$

4. Асимптотическое поведение при $|k| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} s_{12}(k) &= O\left(\frac{1}{k}\right), \quad s_{21}(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \\ s_{11}(k) &= 1 + O\left(\frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

5. Аналитичность: функция $s_{11}(k)$ является предельным значением функции, аналитической в полуплоскости $\text{Im } k > 0$, где она имеет асимптотический вид $1 + O(k^{-1})$ и конечное число простых полюсов на мнимой оси.

6. Фурье-образы $A_{\pm}(t)$ коэффициентов отражения $s_{21}(k)$ и $s_{12}(k)$ должны удовлетворять условию (17.3.3) и неравенству

$$\int_{-\infty}^b (1+t^2) |A'_-(t)| dt \leq D(b). \quad (17.3.4)$$

7. В случае, когда $s_{11}(0) = 0$, должно выполняться условие (17.1.49).

§ 4. Приложения

Одномерная обратная задача, рассмотренная в данной главе, нашла теперь приложение в самых разнообразных областях теории. Кроме уже упоминавшихся в начале применений в теоретических основах электротехники, теперь опубликовано большое число

работ по использованию аппарата обратной задачи для решения многих зависящих от времени нелинейных эволюционных уравнений математической физики, таких, как уравнения Кортевега — де Фриза и их обобщения, синус-уравнения Гордона, нелинейные уравнения Шредингера и многие другие уравнения. Все эти исследования связаны с понятием солитона, которое, по-видимому, имеет очень важное значение и оказывается весьма плодотворным в прикладной физике, а также может оказаться важным понятием в физике элементарных частиц, хотя основания для этого здесь носят значительно более умозрительный характер и еще как следует не установлены.

А. Пример применения аппарата обратной задачи — решение нелинейного эволюционного уравнения

Для примера рассмотрим уравнение Кортевега — де Фриза ¹⁾

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (17.4.1)$$

которое описывает распространение в течение большого промежутка времени дисперсионных (недиссипативных) волн с большой длиной волны и малой амплитудой. Уравнение Кортевега — де Фриза имеет решения в виде устойчивых бегущих волн. Их представляют либо в виде однородных волновых дуг, либо в виде уединенных волн. Однородные волновые дуги описываются эллиптическими функциями Якоби и являются периодическими. Для нас представляют интерес уединенные волны, которые даются выражением

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} a^2 \operatorname{sch}^2 \left[\frac{1}{2} a (x - x_0 - a^2 t) \right]. \quad (17.4.2)$$

где мы предположили, что $u = 0$ при $x = \pm \infty$. Величина a — произвольный параметр. Такие волны бегут направо со скоростью a^2 , пропорциональной их амплитуде $-\frac{1}{2} a^2$. Ширина волны обратно пропорциональна корню квадратному из скорости. Это означает, что более высокая волна не только уже, но и быстрее движется. Интересной особенностью таких уединенных волн является то, что они ведут себя во многих отношениях подобно частицам, сохраняя форму даже после нелинейного взаимодействия в соответствии с уравнением (17.4.1).

Возьмем, например, две такие четко разделенные волны, из которых более высокая слева. С течением времени высокая волна догоняет низкую, и они взаимодействуют согласно нелинейному уравнению (17.4.1). Но вместо того, чтобы рассеиваться, как

¹⁾ Впредь мы будем дифференцирование по t или x обозначать индексом t и x .

можно было бы ожидать при нелинейном взаимодействии, волны идут после взаимодействия без изменения формы и скорости. Единственным результатом взаимодействия оказывается то, что волны смещены относительно положения, в котором они находились бы в отсутствие взаимодействия. Высокая волна сдвигается вправо, а низкая — влево. Сохранение в неизменном виде при нелинейном взаимодействии двух и более таких локализованных волн и делает понятие солитона интересным и плодотворным во многих приложениях, когда имеются полностью исследованные уравнения, выполняющиеся в хорошем приближении. Сюда относятся следующие случаи:

- 1) волнение на мелкой воде;
- 2) ионно-акустические волны в плазме;
- 3) уравнения самонаведенной прозрачности, описывающие взаимодействие ультракоротких импульсов света с резонансной двухуровневой оптической средой;
- 4) синус-уравнение Гордона, которое описывает движение дислокаций в кристаллах и бляховской стенки в магнитных кристаллах, а также распространение «сплэй-волны» вдоль липидной мембраны и магнитного потока в джозефсоновской цепи;
- 5) распространение звуковых волн в ангармонической кристаллической решетке;
- 6) уравнение Буссинеска, описывающее волны на мелководье, распространяющиеся в обоих направлениях;
- 7) нелинейное уравнение Шредингера, описывающее многие явления, такие, как распространение теплового импульса в твердом теле, лэнгмюровских волн в плазме и т. п.;
- 8) уравнение Борна — Инфельда, примененное недавно к электрону.

Не удивительно, что многие теоретики, работающие в области физики элементарных частиц, разочарованные отсутствием эффективной общей теории или хотя бы каких-то последовательных и непротиворечивых моделей, ринулись в этот поток исследований. Вынырнут ли они с крупной рыбой? Это было бы замечательно!

После такого отступления вернемся к уравнению (17.4.1). Поскольку оно представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, для него могут быть заданы разные отдельные наборы начальных и граничных условий, причем каждый такой набор приводит к особой математической задаче. Здесь нас интересует задача с начальными условиями $u(x, 0) = u_0(x)$, где $u_0(x)$ — ограниченная функция, имеющая три непрерывные производные. Чтобы корректно поставить задачу, нужно задать граничные условия. Предположим, что функция $u(x, t)$ быстро убывает до нуля при $|x| \rightarrow \infty$. Мы увидим, что начальным значением $u_0(x)$ определяется ряд дискретных значений этой функции при произвольном параметре a^2 в формуле (17.4.2). Именно они даются

дискретными собственными значениями уравнения Шредингера (17.1.4) с потенциалом $V \equiv u_0(x)$. Кроме того, мы найдем полное решение уравнения (17.4.1), выраженное через решения этого уравнения Шредингера.

Общая схема решения уравнения (17.4.1) такова. Сначала рассматриваем уравнение Шредингера с «потенциалом» $u_0(x)$. Получаем полный набор данных рассеяния, например:

1) коэффициент отражения направо $s_{21}(k) = b(k)$, рассматривавшийся в § 3;

2) дискретный спектр значений χ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, вместе с нормировочными константами C_j , которые определяются соотношениями

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^2(x) dx = 1, \quad (17.4.3a)$$

$$C_j = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{i\chi_j x} \psi_j(x). \quad (17.4.3b)$$

Здесь мы возьмем $\psi_j > 0$ при очень больших x , так что $C_j > 0$. Постоянные C_j тесно связаны с величинами $M_j^{(1,2)}$, введенными в предыдущих параграфах. Мы будем также пользоваться коэффициентом прохождения налево $s_{22}(k) = a(k)$.

Рассмотрим теперь такую же задачу с потенциалом $u(x, t)$. Данные рассеяния $\{b(k, t); \chi_j(t), C_j(t)\}$ будут теперь функциями времени t . Благодаря тому что функция $u(x, t)$ есть решение уравнения Кортевега — де Фриза с начальным значением $u_0(x)$, данные рассеяния, зависящие от времени, оказывается возможным полностью определить по их начальным значениям при $t = 0$, соответствующим потенциалу $u_0(x)$. Поэтому, чтобы найти $u(x, t)$, мы решаем сначала уравнение Шредингера с потенциалом $u_0(x)$ и находим начальные параметры рассеяния. Зная их, находим параметры рассеяния, зависящие от времени. Они в свою очередь, использованные в качестве исходных данных в обратной задаче, будут определять зависящий от времени «потенциал» $u(x, t)$, т. е. решение уравнения Кортевега — де Фриза. Поэтому рассмотрим уравнение Шредингера

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi(x, t) + E(t) \varphi(x, t) = u(x, t) \varphi(x, t), \quad (17.4.4)$$

где t — параметр, а $u(x, t)$ — решение уравнения Кортевега — де Фриза с начальным значением $u_0(x)$, введенным выше, быстро убывающим до нуля при $|x| \rightarrow \infty$. Решая записанное выше уравнение относительно $u(x, t)$, подставляя найденное решение в уравнение (17.4.1) и умножая обе части равенства на φ^2 , получаем

$$E_t \varphi^2 + (\varphi R_x - \varphi_x R) = 0, \quad (17.4.5a)$$

где

$$R \equiv \varphi_t + \varphi_{xxx} - 3(u + E)\varphi_\lambda. \quad (17.4.56)$$

На основании этого уравнения легко показать, что если $u(x, t)$ изменяется во времени в соответствии с уравнением (17.4.4) и быстро убывает до нуля при $|x| \rightarrow \infty$, то всякое дискретное собственное значение E_j уравнения (17.4.4) есть константа. В самом деле, интегрируя выражение (17.4.5а), получаем

$$(E_j)_t \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j^2 dx = 0, \quad (17.4.6)$$

так как собственные функции φ_j и все рассматриваемые здесь их производные обращаются в нуль при $|x| \rightarrow \infty$. Поэтому

$$E_j(t) = E_j(0). \quad (17.4.7)$$

Это означает, что мы можем определить собственные значения E_j по начальным значениям потенциала $u_0(x) = u(x, 0)$.

С учетом полученных выше результатов, а также уравнения (17.4.4) мы можем записать уравнение (17.4.5а) для связанных состояний в виде

$$R_{xx} - [u(x, t) - E_j] R = 0, \quad (17.4.8)$$

тождественном уравнению Шредингера (17.4.4). Следовательно, R есть некая линейная комбинация двух независимых решений уравнения Шредингера:

$$R(x, t) = A(t)\varphi(x, t) + B(t)\psi(x, t), \quad (17.4.9a)$$

$$\psi = \varphi \int_{-\infty}^x dy \varphi^{-2}. \quad (17.4.9б)$$

Рассмотрим нормировочные константы $C_j(t)$. Очевидно, что если φ_j — собственная функция, то соответствующая функция ψ_j , даваемая выражением (17.4.9б), экспоненциально возрастает до бесконечности при $x \rightarrow +\infty$. Это означает, что в формуле (17.4.9а) написанной в применении к φ_j , нужно положить $B_j(t) \equiv 0$. Тогда, умножая обе части равенства (17.4.9а) (для φ_j) на φ_j и интегрируя, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \varphi_j^2 \right)_t dx + \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_j \varphi_j'' - 2\varphi_j' - 3E_j \varphi_j^2)_x dx = A_j(t) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j^2 dx.$$

В левой части полученного равенства первый интеграл равен нулю, поскольку функция φ_j нормирована. Второй интеграл равен нулю, поскольку $\varphi_j = 0$ при $x = \pm\infty$. Следовательно, $A_j(t) \equiv 0$. Полагая теперь в формуле (17.4.9а) $x \rightarrow +\infty$ и $\varphi_j \sim C_j(t)e^{-x/2}$,

получаем

$$\frac{d}{dt} C_j(t) - 4\chi_j^3 C_j(t) = 0.$$

Поэтому

$$C_j(t) = e^{4\chi_j^3 t} C_j(0). \quad (17.4.10)$$

Рассмотрим теперь величины $a(k)$ и $b(k)$, характеризующие рассеяние, и их эволюцию во времени. Прежде всего отметим, что если дискретный спектр (нормировки C), вообще говоря, может зависеть от времени, то непрерывный, напротив, фиксирован и охватывает всю энергетическую область $[0, \infty)$, так как мы имеем дело с потенциалами, обладающими хорошим поведением (достаточно быстро убывающими до нуля при $|x| \rightarrow \infty$). Поэтому при фиксированном значении энергии E в непрерывном спектре соотношение (17.4.5а) снова приводит к уравнению Шредингера (17.4.8). Мы применим это уравнение к решению ψ_2 задачи рассеяния с граничным условием (17.1.4), введенным ранее. При $x = -\infty$ функция ψ_2 ведет себя как $a(k, t) \exp(-ikx)$. Это приводит к соотношению

$$(a_t + ik^3 a + 3ik^3 a) e^{-ikx} = A(t) a e^{-ikx} + \frac{B(t)}{a} e^{-ikx} \int_0^x e^{2ikx} dy.$$

Таким образом, снова $B(t) \equiv 0$, и поэтому

$$a_t + [4ik^3 - A(t)] a = 0.$$

При $x \rightarrow +\infty$ имеем асимптотический вид $\psi_2 \sim \exp(-ikx) + b(k, t) \exp(ikx)$. Приравнявая по отдельности нулю соответствующие коэффициенты при $\exp(\pm ikx)$, получаем

$$A(t) = 4ik^3, \quad b_t - 8ik^3 b = 0.$$

Поэтому

$$a(k, t) = a(k, 0), \quad (17.4.11)$$

$$b(k, t) = b(k, 0) e^{8ik^3 t}. \quad (17.4.12)$$

Соотношения (17.4.7), (17.4.10) и (17.4.12) показывают, что, как утверждалось ранее, начальными данными рассеяния, соответствующими потенциалу $u_0(x)$, полностью определяются данные рассеяния, зависящие от времени. Итак, чтобы найти решение нелинейного уравнения Кортевега — де Фриза, мы прежде всего решаем линейное уравнение Шредингера с заданным начальным потенциалом $u_0(x)$. Затем в соответствии с формулами, приведенными выше, мы определяем данные рассеяния, зависящие от времени. Последние же, будучи использованы в (тоже линейных) интегральных «уравнениях Марченко» обратной задачи, рас-

смотренной в предыдущих параграфах, дадут нам решение $u(x, t)$ для любого момента времени $t > 0$.

Были найдены аналогичные методы решения и других нелинейных уравнений, упомянутых в начале данного параграфа. Эти методы позволяют выразить их через решения соответствующих обратных задач. Пока что все эти уравнения рассматривались только в случае одного пространственного измерения. Обобщение на большее число измерений еще никем не было предложено ¹⁾. Не известно также, каков общий вид нелинейных эволюционных уравнений, к которым применимы методы обратной задачи.

Представим теперь некоторые простые решения. Рассмотрим вначале решение (17.4.2) с $x_0 = 0$ и $a = 2$. При $t = 0$ имеем

$$u_0(x) = -2 \operatorname{sch}^2 x. \quad (17.4.13)$$

В случае такого потенциала уравнение Шредингера точно решается с помощью гипергеометрических функций и дает одно связанное состояние с равным нулю коэффициент отражения:

$$\chi_1 = 1, \quad C_1(0) = \sqrt{2}, \quad b(k, 0) = 0. \quad (17.4.14)$$

Теперь зависящее от времени интегральное уравнение обратной задачи сводится к виду

$$B_+(x, y) + 2e^{8t-x-y} + 2e^{8t-y} + 2e^{8t-y} \int_x^\infty B_+(x, z) e^{-z} dz = 0. \quad (17.4.15)$$

Это уравнение легко решить, и решение таково:

$$B_+(x, y) = \frac{-2e^{x-y}}{1 + e^{2x-8t}}. \quad (17.4.16)$$

Следовательно,

$$u(x, t) = -2 \operatorname{sch}^2(x - 4t). \quad (17.4.17)$$

Это действительно решение уединенной волны, из которого мы исходили.

Рассмотрим теперь менее тривиальный пример — с двумя солитонами. Для этого зададим начальные условия в виде

$$u_0(x) = u(x, 0) = -6 \operatorname{sch}^2 x. \quad (17.4.18)$$

Соответствующее уравнение Шредингера снова может быть точно решено и дает

$$\chi_1 = 1, \quad \chi_2 = 2, \quad b(k, 0) = 0.$$

Решение уравнения Кортевега — де Фриза в этом случае таково:

$$u(x, t) = -12 \frac{3 + 4 \operatorname{csh}(2x - 8t) + \operatorname{csh}(4x - 6t)}{[3 \operatorname{csh}(x - 28t) + \operatorname{csh}(3x - 36t)]^2}. \quad (17.4.19)$$

¹⁾ См., однако, работу В. К. Мельникова [473].— *Прим. ред.*

При больших значениях $|t|$ решение состоит из двух хорошо разделенных солитонов с амплитудами 8 и 2.

Положив коэффициент отражения равным нулю, мы приходим к уравнениям с вырожденными ядрами, совершенно аналогичным тем уравнениям, общие решения которых рассматривались в гл. 4 в случае фазово-эквивалентных потенциалов. На этой основе можно исследовать эволюцию во времени решения $u(x, t)$, и тогда оказывается, что солитоны, отвечающие собственным значениям соответствующего линейного уравнения, ведут себя так, как и ожидалось. Точно такой же анализ возможен и в случае коэффициента отражения $b(k)$, не равного нулю. Правда, в этом случае уравнения не могут быть решены в замкнутом виде, но все-таки можно показать, что через большой промежуток времени поведение системы определяется солитонами с малым фоном, обусловленным отличием от нуля коэффициентов отражения. Полное изложение исследований таких задач выходит за рамки нашей книги, и мы отсылаем читателя к прекрасным обзорным статьям по данному вопросу, опубликованным в последние годы.

Б. Применение к другим физическим задачам

Методы одномерной обратной задачи были применены к обратной задаче рассеяния для линий передач и к более общим обратным задачам теории электромагнетизма в работах [242, 386, 432, 428, 197, 184, 41] (хороший обзор и другие ссылки см. в работе [238]). Методы одномерной обратной задачи были использованы также для исследований в диагностике плазмы [236, 388, 20], для определения строения органов речи человека по данным акустических измерений [183, 395] и для геофизических обратных задач [39, 40, 42, 28].

§ 5. Замечания и литература

Одномерная обратная задача на всей оси $-\infty < x < \infty$ впервые была решена Кеем [235] (см. также статьи Крейна [254], Кея и Мозеса [241, 243], Блоха [47], Фаддеева [147])¹. Здесь мы следовали статье Фаддеева [149], в которой дан полный и строгий анализ задачи. Но теорема 4 о взаимно-однозначном соответствии между S -матрицей и потенциалом взята из работ Жана и Жолана [222, 223]. Ее доказательство без условий (17.1.48) и (17.1.49), как утверждал Фаддеев, по-видимому, не дает взаимно-однозначного соответствия между S -матрицей и потенциалом, в особенности если $s_{11}(0) = 0$ ²). Случай, когда коэффициент отражения представляет

¹) См. также работу [505].— *Прим. ред.*

²) Мы также слегка изменили оценки (17.1.11), (17.1.12), (17.1.21б), (17.1.22а) и (17.1.22б), следуя Дейфту и Трубовицу (Comm. Pure and Appl. Math., March 1979).

собой рациональную функцию, были рассмотрены Кеем [237] (см. также статьи Мозеса [308, 309]), а Рамм [350] и Портинари [342, 343] исследовали, в частности, случай потенциала конечного радиуса.

Дискретный вариант обратной задачи рассеяния в одном измерении рассматривался в статьях Кейза [76] и Шарпа [387].

В последнем параграфе (§ 4), посвященном решению уравнения Кортевега — де Фриза, мы следовали работе Гарднера и др. [166], в которой дано полное изложение метода и полученных результатов, а также приводится полный список более ранних работ.

Способ решения уравнения Кортевега — де Фриза, основанный на методах обратной задачи, был предложен в статье Гарднера и др. [166]¹⁾.

Отличная обзорная статья по всем нелинейным уравнениям, рассмотренным в § 4, принадлежит Скотту и др. [385]. По вопросу детального исследования нелинейных задач методами преобразования, использующими аппарат обратной задачи рассеяния, рекомендуем статью Абловица и др. [2]. Соответствующие математические основы изложены в статье Лакса [265]. Дав эти общие ссылки, мы не станем больше приводить ничего из многочисленных публикаций по этому вопросу, так как это, очевидно, выходит за рамки нашей книги. Обобщение одномерного подхода на задачи, в которых потенциал линейно зависит от k , недавно было дано Жоланом и Жаном [223] и Жоланом [219]. Их метод совершенно аналогичен использованному ими же методу в радиальном случае (гл. 9).

¹⁾ Только что вышла книга [503].— *Ирим. ред.*

Этот список литературы может служить именным указателем, так как в каждой ссылке указывается номер главы и параграфа, в котором она приводится.

1. *Abel N. H.*, Journ. Reine Angew. Math., **1**, 97 (1826). (Гл. 16, § 7.)
2. *Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H.*, Stud. Appl. Math., **53**, 249 (1974). (Гл. 17, § 5.)
3. *Агранович З. С., Марченко В. А.*— ДАН СССР, 1957, т. 113, с. 951. (Гл. 5, § 3; гл. 9, § 2; предисловие.)
4. *Агранович З. С., Марченко В. А.*— Усп. матем. наук, 1957, т. 12, с. 143. (Гл. 3, § 4; гл. 5, § 3; гл. 9, § 2; предисловие.)
5. *Агранович З. С., Марченко В. А.*— ДАН СССР, 1958, т. 118, с. 1055. (Гл. 5, § 3; гл. 11; § 2, предисловие.)
6. *Агранович З. С., Марченко В. А.* Обратная задача рассеяния.— Харьков, 1960. (Гл. 3, § 7; гл. 5, § 3; гл. 9, § 1; предисловие.)
7. *Alvarez-Estrada R. F.*, Ann. Phys., **68**, 222 (1971). (Гл. 10, § 1.)
8. *Alvarez-Estrada R. F., Carreras B.*, Nucl. Phys., **B54**, 237 (1973). (Гл. 10 § 6.)
9. *Амбарцумян В.*, Zs. Phys., **53**, 690 (1929). (Гл. 3, § 7; предисловие.)
10. *Atkinson D., Johnson P. W., Kok L. P., De Roo M.*, Nucl. Phys., **B74**, 109 (1974). (Гл. 10, § 4, 6; предисловие.)
11. *Atkinson D., Johnson P. W., Mehta N., De Roo N.*, Nucl. Phys., **B55**, 125 (1973). (Гл. 10, § 1; предисловие.)
12. *Atkinson D., Johnson P. W., Warnock R. L.*, Commun. Math. Phys., **28**, 133 (1972). (Гл. 10, § 1; предисловие.)
13. *Atkinson D., Johnson P. W., Warnock R. L.*, Commun. Math. Phys., **33**, 221 (1973). (Гл. 10, § 6; предисловие.)
14. *Atkinson D., Kaekebeke M., De Roo M.*, Journ. Math. Phys., **16**, 685 (1975). (Гл. 10, § 4; предисловие.)
15. *Atkinson D., Kok L. P., De Roo M.*, Preprint TH2289 CERN (1977). (Гл. 10, § 1.)
16. *Atkinson D., Mahoux G., Yndurain F. J.*, Nucl. Phys., **B54**, 263 (1973). (Гл. 10, § 1, 6; предисловие.)
17. *Atkinson D., Mahoux G., Yndurain F. J.*, Nucl. Phys., **B66**, 429 (1973). (Гл. 10, § 6.)
18. *Atkinson D., Mahoux G., Yndurain F. J.*, Nucl. Phys., **B98**, 521 (1975). (Гл. 10, § 6.)
19. *Austern N.*, Ann. Phys., **15**, 299 (1961). (Гл. 16, § 3, 4.)
20. *Balanis G. N.*, Journ. Math. Phys., **13**, 1001 (1972). (Гл. 17, § 4.)

¹⁾ Литература, помеченная звездочкой, добавлена при переводе.— Прим. ред.

21. *Baeteman M. L., Chadan K.*, Nucl. Phys., A255, 34 (1975). (Гл. 1, § 7; гл. 2, § 5; гл. 3, § 7; гл. 5, § 3; гл. 6, § 3.)
22. *Baeteman M. L., Chadan K.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 24, 1 (1976). (Гл. 1, § 7; гл. 2, § 5; гл. 3, § 7; гл. 5, § 3; гл. 6, § 3.)
23. *Bargmann V.*, Phys. Rev., 75, 301 (1949). (Гл. 4, § 5; гл. 6, § 3; предисловие.)
24. *Bargmann V.*, Rev. Mod. Phys., 21, 488 (1949). (Гл. 4, § 5; гл. 6, § 3; предисловие.)
25. *Bargmann V.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 38, 961 (1952). (Гл. 2, § 1; гл. 9, § 9.)
26. *Bart G. R., Johnson P. R., Warnock R. L.*, Journ. Math. Phys., 14, 1158 (1973). (Гл. 10, § 6.)
27. *Bart G. R., Johnson R. W., Warnock R. L.*, Nucl. Phys., B72, 329 (1974). (Гл. 10, § 6.)
28. *Becher W. D., Sharpe C. B.*, Radio Sci., 4, 1089 (1969). (Гл. 17, § 4.)
29. *Benn J., Scharf G.*, Nucl. Phys., A183, 319 (1972). (Гл. 6, § 3.)
30. *Berends F. A., Ruijsenaars S. N. M.*, Nucl. Phys., B56, 507 (1973). (Гл. 10, § 1.)
31. *Berends F. A., Ruijsenaars S. N. M.*, Nucl. Phys., B56, 525 (1973). (Гл. 10, § 6.)
32. *Березанский Ю. М.* — ДАН СССР, 1955, т. 105, с. 433; Math. Rev., 17, 1210 (1956). (Гл. 3, § 7; предисловие.)
33. *Березанский Ю. М.* — Труды Моск. матем. общества, 1958, т. 7, с. 3. (Предисловие.)
34. *Bernstein R. B.*, Adv. Chem. Phys., 75 (1966). (Гл. 16, § 4.)
35. *Bernstein R. B., Muckerman J. T.*, Adv. Chem. Phys., 12, 389. (Гл. 16, § 4, 7.)
36. *Berry M. W.*, Journ. Phys., 2B, 381 (1969). (Гл. 16, § 4, 7.)
37. *Berry M. W., Mount K. E.*, Rep. Progr. Phys., 35, 315 (1972). (Гл. 16, § 7.)
38. *Bessis J. D., Martin A.*, Nuovo Cimento, 52A, 719 (1967). (Гл. 10, § 1.)
39. *Благовещенский А. С.* В кн.: Пробл. матем. физ. — Л.: ЛГУ, 1966, в. 1, с. 68. (Гл. 17, § 4.)
40. *Благовещенский А. С.* В кн.: Пробл. матем. физ. — Л.: ЛГУ, 1965, в. 3. (Гл. 17, § 4.)
41. *Благовещенский А. С.* В кн.: Пробл. матем. физ. — Л.: ЛГУ, 1970, в. 4, с. 27. (Гл. 17, § 4.)
42. *Благовещенский А. С.* В кн.: Пробл. матем. физ. — Л.: ЛГУ, 1970, в. 4, с. 40. (Гл. 17, § 4.)
43. *Blazek M.*, Czech. Journ. Phys., B12, 249 (1962). (Гл. 4, § 5; гл. 6, § 3; гл. 9, § 1.)
44. *Blazek M.*, Czech. Journ. Phys., B12, 258 (1962). (Гл. 4, § 5; гл. 9, § 9; предисловие.)
45. *Blazek M.*, Matem.-Fys. Casopis, 13, 147 (1963). (Гл. 9, § 1.)
46. *Blazek M.*, Commun. Math. Phys., 3, 282. (Гл. 9, § 1.)
47. *Блох А. Ш.* — ДАН СССР, 1953, т. 92, с. 209. (Гл. 3, § 7.)
48. *Boas R. P.*, Entire Functions, Academic Press, New York (1954). (Гл. 3, § 1; гл. 12, § 8.)
49. *Bolsterli M., MacKenzie J.*, Physics, 2, 141 (1965). (Гл. 8, § 5; предисловие.)
50. *Borg G.*, Acta Math., 78, § 1 (1946). (Гл. 3, § 7.)
51. *Borg G.*, в кн.: Proc. Eleventh Congress of Scandinavian Mathematics (Trondheim, Aug. 22—25), 1949, p. 276. (Гл. 3, § 7; предисловие.)
52. *Boyle J. F.*, Mol. Phys., 22, 993 (1971). (Гл. 16, § 6.)
53. *Brackett J. W., Mueller C. R., Sanders W. A.*, Journ. Chem. Phys. 39, 2564 (1963). (Гл. 16, § 4.)
54. *Brillouin L.*, Compt. Rend., 183, 24 (1926). (Гл. 16, § 7.)
55. *Buck U.*, Journ. Chem. Phys., 54, 1923 (1971). (Гл. 16, § 7; предисловие.)

56. *Buck U.*, Rev. Mod. Phys., **46**, 369 (1974). (Гл. 16, § 4, 7; предисловие.)
57. *Buck U.*, *Pauly H.*, Journ. Chem. Phys., **51**, 1662 (1969). (Гл. 16, § 4, 7; предисловие.)
58. *Buck U.*, *Pauly H.*, Journ. Chem. Phys., **54**, 1928 (1971). (Гл. 16, § 4, 7; предисловие.)
59. *Burdet G.*, *Dufour J. Giffon M.*, Compt. Rend., **259**, 2369 (1964). (Гл. 13, § 3.)
60. *Burdet G.*, *Giffon M.*, Compt. Rend., **259**, 3190 (1964). (Гл. 13, § 3.)
61. *Burdet G.*, *Giffon M.*, Acta Phys. Hung., **19**, 263 (1965). (Гл. 13, § 3.)
62. *Burdet G.*, *Giffon M.*, *Goldberg J.*, Nuovo Cimento, **44A**, 138 (1966). (Гл. 13, § 3.)
63. *Burdet G.*, *Giffon M.*, *Predazzi E.*, Nuovo Cimento, **36**, 1337 (1965). (Гл. 13, § 3.)
64. *Burkhardt H.*, Nuovo Cimento, **10A**, 379 (1972). (Гл. 10, § 6; предисловие.)
65. *Burkhardt H.*, Preprint CERN-TH. 1784 (1974). (Гл. 10, § 6; предисловие.)
66. *Burkhardt H.*, *Martin A.*, Nuovo Cimento, **29A**, 141 (1975). (Гл. 10, § 1, 6; предисловие.)
67. *Буслаев В. С.* В кн.: Пробл. матем. физ.—Л.: ЛГУ, 1971, в. 1. (Гл. 7, § 5.)
68. *Буслаев В. С.*— ДАН СССР, 1962, т. 143, с. 1067. (Гл. 7, § 5; предисловие.)
69. *Буслаев В. С.* В кн.: Пробл. матем. физ.—Л.: ЛГУ, 1971, в. 4. (Гл. 7, § 5.)
70. *Буслаев В. С.*, *Фаддеев Л. Д.*— ДАН СССР, 1960, т. 132, с. 13. (Гл. 7, § 5; предисловие.)
71. *Calogero F.*, в кн.: Mathematics of Profile Inversion, ed. L. Colin, 1971. (Гл. 7, § 5; предисловие.)
72. *Calogero F. et al.*, Journ. Math. Phys., **9**, 1002 (1968). (Гл. 7, § 5; предисловие.)
73. *Calogero F.*, *Cox J. R.*, Nuovo Cimento, **55A**, 786 (1968). (Гл. 7, § 5.)
74. *Calogero F.*, *Degasperis A.*, Journ. Math. Phys., **9**, 90 (1968). (Гл. 7, § 5; предисловие.)
75. *Case K. M.*, Journ. Math. Phys., **14**, 916 (1973). (Гл. 7, § 5; предисловие.)
76. *Case K. M.*, Journ. Math. Phys., **15**, 143 (1974). (Гл. 17, § 5; предисловие.)
77. *Case K. M.*, Journ. Math. Phys., **15**, 974 (1974). (Гл. 9, § 6; предисловие.)
78. *Case K. M.*, Journ. Math. Phys., **15**, 2166 (1974). (Гл. 9, § 6; предисловие.)
79. *Case K. M.*, *Kac M.*, Journ. Math. Phys., **14**, 594 (1973). (Гл. 9, § 6; предисловие.)
80. *Chadan K.*, Journ. phys. rad., **16**, 843 (1955). (Гл. 6, § 3.)
81. *Chadan K.*, Compt. Rend. **242**, 1964 (1956). (Гл. 6, § 3.)
82. *Chadan K.*, Nuovo Cimento, **10**, 892 (1958). (Гл. 8, § 5; предисловие.)
83. *Chadan K.*, Thèse de Doctorat d'Etat, Paris, 1958. (Гл. 8, § 5; предисловие.)
84. *Chadan K.*, Nuovo Cimento, **24**, 379 (1962). (Гл. 7, § 5.)
85. *Chadan K.*, Nuovo Cimento, **47A**, 510 (1967). (Гл. 8, § 5; предисловие.)
86. *Chadan K.*, Lett. Math. Phys., **1**, 281 (1976). (Гл. 2, § 5.)
87. *Chadan K.*, *Martin A.*, Commun. Math. Phys., **53**, 221 (1977). (Гл. 2, § 5.)
88. *Chadan K.*, *Montes A.*, Journ. Math. Phys., **9**, 1998 (1968). (Гл. 5, § 3; гл. 9, § 9.)
89. *Charap J.*, Nuovo Cimento, **14**, 540 (1959). (Гл. 13, § 2.)
90. *Charap J.*, *Fubini S.*, Nuovo Cimento, **15**, 73 (1960). (Гл. 13, § 2.)
91. *Child M. S.*, Molecular Collision Theory, Academic Press, New York, 1974. (Гл. 16, § 7.)
92. *Чудов Л. А.*— Матем. сборн., 1949, т. 25 (67), с. 451. (Гл. 3, § 7; предисловие.)
93. *Чудов Л. А.*— ДАН СССР, 1956, т. 109, с. 40. (Гл. 3, § 7; предисловие.)

94. *Coddington E. A., Levinson N.*, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1965. (Гл. 2, § 5.)
95. *Colin L.*, редактор, Proceeding of the Workshop Held at Ames Research Center, Moffet Field, Calif., July 12—16, 1971, NASA Technical Memorandum: NASA TM X-62 (1972).—(Ссылки на лекции, опубликованные в этой книге, даются отдельно по фамилиям их авторов.)
96. *Corbella O. D.*, Journ. Math. Phys., **11**, 1695 (1970). (Гл. 7, § 5; предисловие.)
97. *Corbella O. D.*, Journ. Math. Phys., **12**, 1873 (1971). (Гл. 7, § 5; предисловие.)
98. *Corinaldesi E.*, Nuovo Cimento, **11**, 468 (1954). (Гл. 11, § 5; предисловие.)
99. *Corinaldesi E.*, Nuovo Cimento, **12**, 469 (1955). (Гл. 9, § 5.)
100. *Cornille H.*, Journ. Math. Phys., **8**, 2268 (1967). (Гл. 7, § 5.)
101. *Cornille H.*, Journ. Math. Phys., **11**, 61 (1970). (Гл. 7, § 5.)
102. *Cornille H.*, Journ. Math. Phys., **11**, 79 (1970). (Гл. 7, § 5.)
103. *Cornille H.*, Some General Results for the Inverse Scattering Theory at Fixed Angular Momentum or at Fixed Energy, Inst. Phys. Nucleaire, Division Physique Theorique IPNO/TH.72.8 (1973). (Гл. 13, § 4.)
104. *Cornille H.*, Journ. Math. Phys., **17**, 1143 (1976). (Гл. 9, § 9.)
105. *Cornille H., Drouffe J. M.*, Nuovo Cimento, **20A**, 401 (1974). (Гл. 10, § 1.)
106. *Cornille H., Martin A.*, Nuovo Cimento, **26**, 298 (1962). (Гл. 7, § 5.)
107. *Cornille H., Martin A.*, Nucl. Phys., **B48**, 104 (1972).
108. *Cornille H., Martin A.*, Nucl. Phys., **B49**, 413 (1972).
109. *Cornille H., Rubinstein G.*, Journ. Math. Phys., **9**, 1501 (1968). (Гл. 7, § 5.)
110. *Coudray C.*, The Inverse Problem: Some Applications of the Newton — Sabatier Method, Preprint Orsay IPNO/TH 77—15 (1977). (Гл. 13, § 4.)
111. *Coudray C., Coz M.*, Ann. Phys., **61**, 488 (1970). (Гл. 12, § 7; гл. 15, § 2.)
112. *Coudray C., Coz M.*, Journ. Math. Phys., **12**, 1166 (1972). (Гл. 15, § 5.)
113. *Cox J. R.*, Construction of Potentials from the Many-Channel $\mathcal{S}$ -Matrix, Ph. D. Thesis, Indiana University (1962). (Гл. 9, § 4; предисловие.)
114. *Cox J. R.*, Journ. Math. Phys., **5**, 1065 (1964). (Гл. 9, § 4, предисловие.)
115. *Cox J. R.*, Ann. Phys., **39**, 216 (1966). (Гл. 9, § 4; предисловие.)
116. *Cox J. R.*, Journ. Math. Phys., **8**, 2327 (1967). (Гл. 9, § 4; предисловие.)
117. *Cox J. R.*, Journ. Math. Phys., **16**, 1410 (1975). (Гл. 9, § 4; предисловие.)
118. *Cox J. R., Garcia H. R.*, Journ. Math. Phys., **16**, 1402 (1975). (Гл. 9, § 4; предисловие.)
119. *Cox J. R., Thompson K. W.*, Bull. Amer. Phys. Soc., **14**, 579 (1969). (Гл. 12, § 6, 7; предисловие.)
120. *Cox J. R., Thompson K. W.*, Journ. Math. Phys., **11**, 805 (1970). (Гл. 12, § 6, 7; предисловие.)
121. *Cox J. R., Thompson K. W.*, Journ. Math. Phys., **11**, 815 (1970). (Гл. 12, § 6, 7; предисловие.)
122. *Coz M., Coudray C.*, Journ. Math. Phys., **14**, 1574 (1973). (Гл. 9, § 1.)
123. *Crawford F. H., Jorgensen T.*, Phys. Rev., **49**, 745 (1936). (Предисловие.)
124. *Cremers D. J., Birkebak R. C.*, Appl. Opt., **5**, 1057 (1966). (Гл. 16, § 7.)
125. *Crichton J. G.*, Nuovo Cimento, **45A**, 256 (1966). (Гл. 10, § 1.)
126. *Crum M. M.*, Quart. Journ. Math., **6**, 121 (1955). (Гл. 4, § 5.)
127. *Cuer M.*, Ambiguités semi-classiques, Thèse de doctorat de 3-ème cycle, Phys. Math. Montpellier, 1976. (Гл. 16, § 2, 6, 7.)
128. *Cuer M.*, Journ. Math. Phys., **18**, 658 (1977). (Гл. 16, § 6.)
129. *De Alfaro V.*, Nuovo Cimento, **18**, 783 (1960). (Гл. 9, § 5.)
130. *De Alfaro V., Regge T.*, Nuovo Cimento, **20**, 956 (1961). (Гл. 7, § 5.)
131. *De Alfaro V., Regge T.*, Potential Scattering, John Wiley and Sons, New York, 1965. (Имеется перевод: В. де Алфари, Т. Редже. Потенциальное рассеяние.— М.: Мир, 1966.) (Гл. 2, § 5.)
132. *De Alfaro V., Regge T., Rossetti C.*, Nuovo Cimento, **26**, 1029 (1962). (Гл. 7, § 5.)

133. *Degasperis A.*, Journ. Math. Phys., **11**, 551 (1970). (Гл. 7, § 5; гл. 9, § 5; предисловие.)
134. *Дукуй С. А.*— Усп. матем. наук, 1958, т. 13, с. 111. (Гл. 7, § 5.)
135. *Di Salvo E., Viano G. A.*, Uniqueness and Stability in the Inverse Problem of Scattering Theory, Preprint, Istituto Nazionale Fisica Nucleare, Sezione di Genova, 1976. (Гл. 13, § 2.)
136. *Drisko R. M., Satchler G. R., Bassel R. H.*, Phys. Lett., **5**, 367 (1963). (Гл. 16, § 3.)
137. *Dunford N., Schwartz J. T.*, Linear Operators, Interscience Publishers, 1963. (Имеется перевод: *П. Данфорд, Д. Шварц*, Линейные операторы.— М.: ИЛ, 1966, т. 2.) (Гл. 2, § 5.)
138. *Dyson F. J.*, Journ. Opt. Soc. Am., **65**, 551 (1975).
139. *Dyson F. J.*, в кн.: Studies in Mathematical Physics, eds. E. H. Lieb, B. Simon, A. S. Wightman, Princeton, 1976.
140. *Dyson F. J.*, Comm. Math. Phys., **47**, 171 (1976).
141. *Eisberg R. M., Porter C. E.*, Rev. Mod. Phys., **33**, 190 (1961). (Гл. 16, § 4.)
142. *Erdelyi A.*, Asymptotic Expansions, Dover Publications, 1956. (Имеется перевод: Асимптотические разложения.— М., 1962.) (Гл. 16, § 4.)
143. *Erdelyi A.*, Journ. Math. Phys., **1**, 16 (1960). (Гл. 16, § 7.)
144. *Erdelyi A., et al.*, Higher Transcendental Functions and Tables of Integral Transforms¹), McGraw-Hill, 1954.
145. *Фаддеев Л. Д.*— Вестник Ленингр. ун-в., 1956, т. 11, с. 126.
146. *Фаддеев Л. Д.*— ДАН СССР, 1957, т. 115, с. 878. (Гл. 7, § 5; предисловие.)
147. *Фаддеев Л. Д.*— ДАН СССР, 1958, т. 121, с. 63. (Гл. 7, § 5; предисловие.)
148. *Фаддеев Л. Д.*— Усп. матем. наук, 1959, т. 14, с. 57. (Гл. 2, § 5; гл. 4, § 5; гл. 5, § 3; предисловие.)
149. *Фаддеев Л. Д.*— Труды мат. ин-та АН СССР им В. А. Стеклова, 1964, т. 73, с. 314. (Гл. 17, § 5; предисловие.)
150. *Фаддеев Л. Д.*— ДАН СССР, 1965, т. 165, с. 514. (Гл. 14, § 3; предисловие.)
151. *Фаддеев Л. Д.*— ДАН СССР, 1966, т. 167, с. 69. (Предисловие.)
152. *Фаддеев Л. Д.* Препринт Института теоретической физики.— Киев: ИТФ-74-106Е, 1971. (Гл. 14, § 1, 3, 5; предисловие.)
153. *Фурсов О. Б.*— ЖЭТФ, 1953, т. 24, с. 279. (Гл. 16, § 7; предисловие.)
154. *Flügge S., Vollmer G.*, Zs. Phys., **248**, 1 (1971). (Гл. 16, § 7.)
155. *Ford K. W., Hill D. L., Wakano M., Wheeler J. A.*, Ann. of Phys., **7**, 239 (1959). (Гл. 16, § 7.)
156. *Ford K. W., Wheeler J. A.*, Ann. of Phys., **7**, 259, 287 (1959). (Гл. 16, § 4, 7.)
157. *Freeman M. P., Katz S.*, Journ. Opt. Soc. Am., **50**, 826 (1960). (Гл. 16, § 7.)
158. *Friedman B.*, Michigan Math. Journ., **4**, 137 (1957). (Гл. 3, § 7; гл. 5, § 3.)
159. *Fröberg C. E.*, Phys. Rev., **72**, 519 (1947). (Гл. 10, § 1; предисловие.)
160. *Fröberg C. E.*, Arkiv Mat. Astron. Fys., **34A**, 1 (1948). (Гл. 10, § 1; предисловие.)
161. *Fröberg C. E.*, Arkiv Mat. Astron. Fys., **36A**, 1 (1949). (Гл. 10, § 1; предисловие.)
162. *Fröberg C. E.*, Arkiv. Fys., **3**, 1 (1951). (Гл. 9, § 1; предисловие.)
163. *Fröman N., Fröman P. O.*, JWKB Approximation, North Holland, Amsterdam, 1965. (Имеется перевод: *П. Фрёман, П. У. Фрёман*, ВКБ-приближение.— М.: Мир, 1967.) (Гл. 14, § 7.)
164. *Fulton T., Newton R. C.*, Nuovo Cimento, **3**, 677 (1956). (Гл. 4, § 5; предисловие.)

¹) Все специальные функции, встречающиеся в нашей книге, определены в соответствии с этими таблицами.

165. *Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 1095 (1967). (Гл. 17, § 5; предисловие.)
166. *Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.*, Comm. on Pure and Appl. Math., **27**, 97 (1974). (Гл. 17, § 5.)
167. *Гасымов М. Г.*— ДАН СССР, 1966, т. 169, с. 1037. (Гл. 9, § 5; предисловие.)
168. *Гасымов М. Г.*— Труды моск. матем. общества, 1968, т. 19, с. 41. (Гл. 9, § 5; предисловие.)
169. *Гасымов М. Г., Левитан Б. М.*— ДАН СССР, 1966, т. 167, с. 967, 1219. (Гл. 9, § 5; предисловие.)
170. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.*— ДАН СССР, 1951, т. 77, с. 557.
171. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.*— Изв. АН СССР (сер. мат.), 1951, т. 15, с. 309. (Гл. 3, § 7, предисловие.)
172. *Gerber R. B., Karplus M.*, Phys. Rev., **1**, 998 (1970). (Гл. 10, § 1; предисловие.)
173. *Gersten A.*, Nucl. Phys., **B12**, 537 (1969). (Гл. 10, § 1.)
174. *Gerver M., Markushevich V.*, Geophys. Journ. R. Astron. Soc., **11**, 165 (1966). (Гл. 16, § 7.)
175. *Gerver M., Markushevich V.*, Geophys. Journ. R. Astron. Soc., **13**, 241 (1967). (Гл. 16, § 7.)
176. *Glaser V.*, в кн.: Studies in Mathematical Physics, eds. E. H. Lieb, B. Simon, A. S. Wightman, Princeton, 1976.
177. *Goldberger M. L., Lewis H. W., Watson K. M.*, Phys. Rev., **132**, 2764 (1963). (Гл. 10, § 1.)
178. *Goldberger M. L., Lewis H. W., Watson K. M.*, Phys. Rev., **142**, 25 (1966). (Гл. 10, § 1.)
179. *Goldberger M. L., Watson K. M.*, Phys. Rev., **134B**, 919 (1964). (Гл. 10, § 1.)
180. *Goldberger M. L., Watson K. M.*, Phys. Rev., **137**, 1396 (1965). (Гл. 10, § 1.)
181. *Goldberger M. L., Watson K. M.*, Phys. Rev., **140**, 500 (1965). (Гл. 10, § 1.)
182. *Гольдман И. М., Миздал А. Б.*— ЖЭТФ, 1955, т. 28, с. 394. (Гл. 16, § 7.)
183. *Gopinath B., Sondhi M. M.*, Bell. Syst. Tech. Journ., **49**, 1195 (1970). (Гл. 12, § 4.)
184. *Gopinath B., Sondhi M. M.*, IEEE, **59**, 383 (1971). (Гл. 12, § 4.)
185. *Gorenflo R., Kovetz Y.*, Numer. Math., **8**, 392 (1966). (Гл. 16, § 7.)
186. *Gourdin M., Martin A.*, Compt Rend., **244**, 1329 (1957). (Гл. 8, § 5; предисловие.)
187. *Gourdin M., Martin A.*, Nuovo Cimento, **6**, 757 (1957). (Гл. 8, § 5; предисловие.)
188. *Gourdin M., Martin A.*, Nuovo Cimento, **8**, 699 (1958). (Гл. 8, § 5; предисловие.)
189. *Green T. A.*, Cambridge Philos. Soc. Trans., **6**, 223 (1837). (Гл. 16, § 7.)
190. *Гугушвили Е. И., Ментковский Ю. Л.*, Nuovo Cimento, **10A**, 292 (1972). (Гл. 9, § 1.)
191. *Гугушвили Е. И., Ментковский Ю. Л.*, Nuovo Cimento, **10A**, 277 (1972). (Гл. 9, § 1.)
192. *Hanbury-Brown R., Twiss R. Q.*, Nature, **45**, 663 (1954). (Гл. 10, § 1.)
193. *Hanbury-Brown R., Twiss R. Q.*, Nature, **178**, 1447 (1956). (Гл. 10, § 1.)
194. *Hanbury-Brown R., Twiss R. Q.*, Proc. Roy. Soc., **242A**, 300 (1957). (Гл. 10, § 1.)
195. *Heading J.*, An Introduction to Phase Integral Method, Mathuen, London, 1962. (Имеется перевод: Дж. Хединг, Введение в метод фазовых интегралов.— М.: Мир, 1965.) (Гл. 16, § 7.)
196. *Hecht C. E., Mayer J. E.*, Phys. Rev., **106**, 1156 (1957). (Гл. 16, § 7.)

197. *Heim D. S., Sharpe C. B.*, IEEE Trans. on Circuit Theory, **14**, 394 (1967). (Гл. 17, § 4.)
198. *Heniger A., Loeffel J. J.*, Helv. Phys. Acta, **46**, 462 (1973). (Предисловие.)
199. *Heisenberg W.*, Zs. Phys., **120**, 513, 673 (1943). (Гл. 13, § 3.)
200. *Heisenberg W.*, Zs. Phys., **123**, 93 (1944). (Предисловие.)
201. *Henry J. H. et al.*, в кн.: Тезисы докладов конференции VIII IPEAC (Beograd 35), 1973. (Гл. 16, § 5.)
202. *Herglotz V. G.*, Zs. Phys., **8**, 145 (1907). (Гл. 16, § 7.)
203. *Herlitz S. I.*, Arkiv. Fys., **23**, 571 (1963). (Гл. 16, § 7.)
204. *Hille E.*, Lectures on Ordinary Differential Equations, Addison Wesley, Reading, 1969. (Гл. 2, § 5.)
205. *Holmberg B.*, Nuovo Cimento, **9**, 597 (1952). (Гл. 3, § 7; гл. 4, § 5; предисловие.)
206. *Hooshyar M. A.*, Journ. Math. Phys., **12**, 2243 (1971). (Гл. 16, § 1; предисловие.)
207. *Hooshyar M. A.*, Journ. Math. Phys., **13**, 1931 (1972). (Гл. 15, § 1; предисловие.)
208. *Hooshyar M. A.*, Journ. Math. Phys., **16**, 257 (1975). (Гл. 15, § 1; предисловие.)
209. *Hoyt F. C.*, Phys. Rev., **55**, 664 (1939). (Гл. 16, § 7; предисловие.)
210. *Hylleraas E. A.*, Phys. Rev., **74**, No. 1, 48 (1948). (Гл. 3, § 7; предисловие.)
211. *Hylleraas E. A.*, Ann. of Phys., **25**, 309 (1963). (Гл. 3, § 7.)
212. *Hylleraas E. A.*, Resonance Method in Scattering Theory, Institute for Theoretical Physics University of Oslo, Report 18, 1963, (Гл. 3, § 7; предисловие.)
213. *Hylleraas E. A.*, On the Inversion of Eigen Problems, Institute for Theoretical Physics University of Oslo, Report 20, 1963. (Гл. 3, § 7; предисловие.)
214. *Hylleraas E. A.*, Nucl. Phys., **57**, 208 (1964). (Гл. 3, § 7; предисловие.)
215. *Itzykson C., Martin A.*, Nuovo Cimento, **17A**, 245 (1973). (Гл. 10, § 1—3; предисловие.)
216. *Jauch J. M.*, Helv. Phys. Acta, **30**, 143 (1957). (Гл. 8, § 5.)
217. *Jauho P.*, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. № 80. 7 (1950). (Гл. 9, § 1.)
218. *Jaulent M.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **4**, 368 (1972). (Гл. 9, § 8; предисловие.)
219. *Jaulent M.*, Compt. Rend., **280**, 1467 (1975). (Гл. 9, § 8; предисловие.)
220. *Jaulent M.*, Journ. Math. Phys., **17**, 7, 1351 (1976). (Гл. 17, § 5; предисловие.)
221. *Jaulent M., Jean C.*, Commun. Math. Phys., **28**, 177 (1972). (Гл. 9, § 8; гл. 15, § 1.)
222. *Jaulent M., Jean C.*, Cahiers de Mathématiques de Montpellier, **7** (1975). (Гл. 17, § 5.)
223. *Jaulent M., Jean C.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **25**, 105. 119 (1975). (Гл. 17, § 5.)
224. *Jean C., Sabatier P. C.*, Nuovo Cimento, **18A**, 105 (1973). (Гл. 13, § 4; предисловие.)
225. *Jeffreys H.*, Proc. London Math. Soc., **23** (2), 428 (1923). (Гл. 16, § 7.)
226. *Jorgens K.*, Spectral Theory of Second Order Ordinary Differential Operators, Lectures Delievered at Aarhus Universitet-Mathematik Institut. 1964. (Гл. 2, § 5.)
227. *Jost R.*, Helv. Phys. Acta, **29**, 410 (1956). (Гл. 5, § 3; предисловие.)
228. *Jost R., Kohn W.*, Phys. Rev., **87**, 977 (1952). (Гл. 3, § 7; предисловие.)
229. *Jost R., Kohn W.*, Phys. Rev., **88**, 382 (1952). (Гл. 3, § 7; гл. 4, § 5; гл. 6, § 3; предисловие.)
230. *Jost R., Kohn W.*, Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Math. fys. Medd., **27** (9), 3 (1953). (Гл. 3, § 7; гл. 4, § 5; гл. 6, § 3; предисловие.)
231. *Jost R., Pais A.*, Phys. Rev., **82**, 840 (1951). (Гл. 2, § 1.)

232. *Kac M.*, Amer. Math. Monthly, **73**, № 4, part II, 1 (1966). (Предисловие.)
233. *Karlsson B. R.*, Phys. Rev., **D6**, 1662 (1972). (Гл. 9, § 7.)
234. *Karlsson B. R.*, Phys. Rev., **D10**, 1985 (1974); в кн.: Applied Inverse Problems, ed. P. C. Sabatier, Springer, 1976. (Гл. 9, § 7.)
235. *Kay I.*, The Inverse Scattering Problem, Research Report No. EM. 74. NY, N. Y. University, Inst. Math. Sc. Electromagnetic Research, 1955. (Гл. 17, § 5.)
236. *Kay I.*, On the Determination of the Free Electron Distribution of an Ionized Gas, Research Report No. EM. 141, N. Y. University (1959). (Гл. 17, § 4.)
237. *Kay I.*, Comm. Pure Appl. Math., **13**, 371 (1960). (Гл. 17, § 4.)
238. *Kay I.*, в кн.: Mathematics of Profile Inversion, ed. L. Colin., 1972. (Гл. 17, § 5.)
239. *Kay I.*, *Moses H. E.*, Nuovo Cimento, **2**, 917 (1955). (Гл. 3, § 7; предисловие.)
240. *Kay I.*, *Moses H. E.*, Nuovo Cimento, **3**, 66 (1956). (Гл. 3, § 7; предисловие.)
241. *Kay I.*, *Moses H. E.*, Nuovo Cimento, **3**, 276 (1956). (Гл. 17, § 5; предисловие.)
242. *Kay I.*, *Moses H. E.*, Journ. Appl. Phys., **27**, 1503 (1956). (Гл. 17, § 4; предисловие.)
243. *Kay I.*, *Moses H. E.*, Nuovo Cimento Suppl. (ser. 10), **5**, 230 (1957). (Гл. 17, § 5; предисловие.)
244. *Kay I.*, *Moses H. E.*, Nuovo Cimento, **22**, 689 (1961). (Гл. 14, § 5; предисловие.)
245. *Kay I.*, *Moses H. E.*, Comm. Pure Appl. Math., **14**, 435 (1961). (Гл. 14, § 5; предисловие.)
246. *Keller J. B.*, Amer. Journ. Phys., **30**, 22 (1962). (Гл. 16, § 7.)
247. *Keller J. B.*, *Kay I.*, *Shmoys J.*, Phys. Rev., **102**, 557 (1956). (Гл. 16, § 7; предисловие.)
248. *Klein O.*, Zs. Phys., **76**, 226 (1932). (Гл. 16, § 7; предисловие.)
249. *Клепиков Н. П.* — ЖЭТФ, 1962, т. 41, с. 1187. (Гл. 10, § 1.)
250. *Клепиков Н. П.* — ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 757. (Предисловие.)
251. *Klingbeil*, Journ. Chem. Phys., **56**, 132 (1972); **57**, 1066 (1972). (Гл. 16, § 4.)
252. *Kramers H. A.*, Zs. Phys., **39**, 828 (1926). (Гл. 16, § 7.)
253. *Крейн М. Г.*, ДАН СССР, 1951, т. 76, с. 21, 345. (Гл. 3, § 7; предисловие.)
254. *Крейн М. Г.* — ДАН СССР, 1953, т. 88, с. 405. (Гл. 3, § 7; гл. 4, § 5; гл. 9, § 2; гл. 17, § 5; предисловие.)
255. *Крейн М. Г.* — ДАН СССР, 1953, т. 93, с. 617. (Гл. 3, § 7; гл. 9, § 2; гл. 17, § 5; предисловие.)
256. *Крейн М. Г.* — ДАН СССР, 1954, т. 97, с. 21. (Гл. 3, § 7; гл. 4, § 5; гл. 9, § 2; предисловие.)
257. *Крейн М. Г.* — ДАН СССР, 1955, т. 105, с. 433. (Гл. 2, § 5; гл. 3, § 7; предисловие.)
258. *Крейн М. Г.* — ДАН СССР, 1956, т. 111, с. 1167, (Гл. 3, § 7; гл. 4, § 5; гл. 9, § 2.)
259. *Крейн М. Г.* — Усп. матем. наук, 1958, т. 13 (5), с. 83. (Гл. 2, § 5.)
260. *Lambert F.*, *Corbella O.*, *Thome Z. D.*, Nucl. Phys., **B90**, 267 (1975). (Гл. 6, § 3.)
261. *Langer R. E.*, Trans. Amer. Math. Soc., **34**, 447 (1932). (Гл. 16, § 7.)
262. *Langer R. E.*, Trans. Amer. Math. Soc., **36**, 90 (1934). (Гл. 16, § 7.)
263. *Langer R. E.*, Phys. Rev., **51**, 669 (1937). (Гл. 16, § 7.)
264. *Langer R. E.*, Trans. Amer. Math. Soc., **67**, 461 (1949). (Гл. 16, § 7.)
265. *Lax P. D.*, Comm. Pure Appl. Math., **21**, 467 (1968). (Гл. 17, § 5.)

266. *Lax P. D., Phillips R. S.*, Scattering Theory, Academic Press, New York, 1967. (Имеется перевод: *П. Лакс, Р. Филлипс*. Теория рассеяния.— М.: Мир, 1971.) (Предисловие.)
267. *Левин Б. Я.*— ДАН СССР, 1956, т. 106, с. 187. (Гл. 5, § 3.)
268. *Levinson N.*, Phys. Rev., **75**, 1445 (1949). (Гл. 3, § 7.)
269. *Levinson N.*, Kgl. Danske Videnskab Selskab. Math.-Fys. Medd., **25** (9), 1 (1949). (Гл. 3, § 7; предисловие.)
270. *Levinson N.*, Phys. Rev., **89**, 755 (1953). (Гл. 3, § 7; предисловие.)
271. *Левитан Б. М.*— Усп. матем. наук, 1949, т. 4, с. 3. (Гл. 15, § 1.)
272. *Левитан Б. М.*— Усп. матем. наук, 1956, т. 11, с. 117. (Гл. 3, § 7; предисловие.)
273. *Левитан Б. М.*— Изв. АН СССР (сер. мат.), 1964, т. 28, с. 63. (Гл. 3, § 7; предисловие.)
274. *Левитан Б. М.* Операторы обобщенного сдвига.— М.: Физматгиз, 1962.
275. *Левитан Б. М.*— ДАН СССР, 1963, т. 150, с. 474. (Гл. 3, § 7; предисловие.)
276. *Левитан Б. М., Гасимов М. Г.*— Усп. матем. наук, 1964, т. 19, с. 3. (Гл. 3, § 7; предисловие.)
277. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.*— ДАН СССР, 1964.
278. *Лейбензон З. Л.*— Труды Моск. матем. общества, 1966, т. 17, с. 78. (Гл. 3, § 7.)
279. *Liouville J.*, Journ. de math., **2**, 16, 418 (1837). (Гл. 16, § 7.)
280. *Лянце В.*— Матем. сборник, 1964, т. 64, с. 521; т. 65, с. 47. (Гл. 3, § 7.)
281. *Loeffel J. J.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **8**, 339 (1968). (Гл. 12, § 2; гл. 16, § 6; предисловие.)
282. *Ma S. T.*, Phys. Rev., **69**, 668 (1946). (Предисловие.)
283. *Ma S. T.*, Phys. Rev., **71**, 195, 210 (1947). (Предисловие.)
284. *Мальченко В. И.*— Укр. матем. журн., 1966, т. 18, с. 126. (Гл. 3, § 7; предисловие.)
285. *Maldonado C. D., Caron A. P., Olsen H. N.*, Journ. Opt. Soc. Am., **55**, 1247 (1965). (Гл. 16, § 7.)
286. *Maldonado C. D., Olsen H. N.*, Journ. Opt. Soc. Am. **56**, 1305 (1966). (Гл. 16, § 7.)
287. *Марченко В. А.*— ДАН СССР, 1950, т. 72, с. 457. (Гл. 3, § 7; предисловие.)
288. *Марченко В. А.*— Труды Моск. матем. общества, 1952, т. 1, с. 327. (Гл. 3, § 4; предисловие.)
289. *Марченко В. А.*— Труды Моск. матем. общества, 1953, т. 2, с. 3. (Гл. 3, § 7; предисловие.)
290. *Марченко В. А.*— ДАН СССР, 1955, т. 104, с. 695. (Гл. 4, § 5; гл. 5, § 3; предисловие.)
291. *Martin A.*, Nuovo Cimento, **7**, 607 (1958). (Гл. 8, § 5.)
292. *Martin A.*, Nuovo Cimento, **14**, 404 (1959). (Гл. 7, § 5.)
293. *Martin A.*, Nuovo Cimento, **19**, 1257 (1961). (Гл. 7, § 5.)
294. *Martin A.*, в кн.: Progress in Elementary Particle and Cosmic Ray Physics, eds. J. G. Wilson, S. A. Wouthuysen, vol. 8, New York, 1965, p. 1. (Гл. 7, § 5.)
295. *Martin A.*, Nuovo Cimento, **59A**, 131 (1969). (Гл. 10, § 1; предисловие.)
296. *Martin A.*, Reconstruction of Scattering Amplitude from Differential Cross Sections, Lectures given at the Adriatic Meeting on Particle Physics, Rovjani, 1973. (Гл. 10, § 1, 2; предисловие.)
297. *Martin A., Sabatier P. C.*, Journ. Math. Phys., **8**, 1623 (1977). (Гл. 9, § 9.)
298. *Martin A., Targonsky G. Y.*, Nuovo Cimento, **20**, № 6, 1182 (1961). (Гл. 13, § 2; предисловие.)
299. *Mason E. A.*, Journ. Chem. Phys., **26**, 667 (1957). (Гл. 16, § 4.)
300. *Mason E. A., Monchick L.*, Adv. Chem. Phys., **12**, 329 (1967). (Гл. 16, § 4, 7; предисловие.)

301. *Miller W. H.*, Journ. Chem. Phys., **48**, 464 (1968). (Гл. 16, § 7; предисловие.)
302. *Miller W. H.*, Journ. Chem. Phys., **51**, 3631 (1969). (Гл. 16, § 5. 7; предисловие.)
303. *Miller W. H.*, Journ. Chem. Phys., **54**, 4774 (1971). (Гл. 16, § 4, 7; предисловие.)
304. *Mills R. L.*, *Reading J. F.*, Journ. Math. Phys., **10**, 321 (1969). (Гл. 8, § 5; предисловие.)
305. *Minerbo G. N.*, *Levy M. E.*, SIAM Journ. Numer. Anal., **6**, 598 (1969). (Гл. 16, § 7.)
306. *Miodek I.*, Journ. Math. Phys., **17**, 168 (1976). (Гл. 15, § 1.)
307. *Morse P. M.*, Phys. Rev., **43**, 57 (1929). (Предисловие.)
308. *Moses H. E.*, Phys. Rev., **102**, 559 (1956). (Гл. 3, § 7, гл. 17, § 5; предисловие.)
309. *Moses H. E.*, Journ. Math. Phys., **5**, 833 (1964). (Гл. 17, § 5.)
310. *Moses H. E.*, *Tuan S. F.*, Nuovo Cimento, **13**, 198 (1959). (Гл. 6, § 3; предисловие.)
311. *Mott N. F.*, *Massey H. S. M.*, The Theory of Atomic Collisions, Oxford, third ed., 1965. (Имеется перевод 2-го и 3-го изд.: *И. Момм, Г. Мессу*, Теория атомных столкновений.— М.: ИЛ, 1951, 1965). (Гл. 1, § 7.)
312. *Mushkkelishvili N. I.*, Singular Integral Equations, Noordhoff, 1953. (Гл. 8, § 5.)
313. *Нейгауз М. Г.*— ДАН СССР, **102**, 25 (1955). (Гл. 5, § 3.)
314. *Newton R. G.*, Phys. Rev., **100**, 412 (1955). (Гл. 9, § 3.)
315. *Newton R. G.*, Phys. Rev., **101**, 1588 (1956). (Гл. 3, § 7; гл. 4, § 5; гл. 5, § 3; гл. 7, § 5; предисловие.)
316. *Newton R. G.*, Phys. Rev., **105**, 763 (1957). (Гл. 6, § 3; предисловие.)
317. *Newton R. G.*, Phys. Rev., **107**, 1025 (1957). (Гл. 6, § 3; предисловие.)
318. *Newton R. G.*, Journ. Math. Phys., **3**, 75 (1962). (Гл. 11, § 7; гл. 12, § 2, 9; гл. 16, § 6; предисловие.)
319. *Newton R. G.*, Scattering Theory of Waves and Particles, McGraw-Hill, New York, 1966. (Имеется перевод: *Р. Ньютона*. Теория рассеяния волн и частиц.— М.: Мир, 1969.) (Гл. 12, § 7.)
320. *Newton R. G.*, Journ. Math. Phys., **8**, 1566 (1967). (Гл. 10, § 6; предисловие.)
321. *Newton R. G.*, Journ. Math. Phys., **9**, 2050 (1968). (Гл. 10, § 6; предисл.)
322. *Newton R. G.*¹⁾, в кн.: Proceeding of the NATO Advanced Study Institute of Scattering Theory, eds. Levita J. A., J. Movchand, Denver, Colorado. 1973, p. 173. (Гл. 16, § 1; предисловие.)
323. *Newton R. G.*, The Three-dimensional Inverse Scattering Problem in Quantum Mechanics, Indiana University, Bloomington, 1974. (Гл. 14, § 1, 3, 5; предисловие.)
- 323*. *Newton R. G.*, Journ. Math. Phys., **21**, 1698 (1980).
324. *Newton R. G.*, *Fulton T.*, Phys. Rev., **107**, 1103 (1957). (Гл. 6, § 3.)
325. *Newton R. G.*, *Jost R.*, Nuovo Cimento, **1**, 590 (1955). (Гл. 9, § 3; предисловие.)
326. *Olver F. W. J.*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **57**, 790 (1961). (Гл. 16, § 7.)
327. *Olver F. W. J.*, Journ. Res. Natl. Bur. Stand., **69B**, 271 (1965). (Гл. 16, § 7.)
328. *Olver F. W. J.*, Journ. Res. Natl. Bur. Stand., **69B**, 291 (1965). (Гл. 16, § 7.)

¹⁾ Проф. Ньютон указал на две существенные ошибки в формуле (4.91) этой статьи, которую следует читать так:

$$2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} dk A(\mathbf{k}, \mathbf{k})^{i\hbar k} = \sum_n K_n |c_n(\tilde{\hbar})|^2 e^{K_n t} \quad (t > 0).$$

329. *Olver F. W. J.*, Asymptotic Expansions and Special Functions, Academic Press, New York, 1974. (Гл. 16, § 7.)
330. *Paley R., Wiener N.*, Fourier Transforms in the Complex Domain, American Mathematical Society, 1934. (Гл. 13, § 3.)
331. *Paul A. K.*, Radio Sci., 2 (New series), 1127 (1967). (Гл. 16, § 7.)
332. *Paul A. K., Smith G. H.*, Radio Sci., 3, 163 (1968). (Гл. 16, § 7.)
333. *Pauly H. D.*, Physical Chemistry, and Advanced Treatise, vol. IV, Academic Press, New York, 1973, Ch. IV. (Гл. 16, § 4.)
334. *Pauly H. D., Toennies J. P.*, Adv. At. Mol. Phys., 1, 195 (1965). (Гл. 16, § 4, 7.)
335. *Percival J. C.*, Proc. Phys. Soc., 80, 1290 (1962). (Гл. 7, § 5; предисловие.)
336. *Percival J. C., Roberts M. J.*, Proc. Phys. Soc., 82, 519 (1963). (Гл. 7, § 5; предисловие.)
337. *Peiras M.*, Czechoslov. Journ. Phys., B12, 87 (1962). (Гл. 9, § 9.)
338. *Phinney R. A.*, Review of Geophysics and Space Physics, 8, 517 (1970). (Гл. 16, § 7.)
339. *Pietarinen*, Invited talk given at the Triangle Seminar Smolanice, Czechoslovakia, 1974. (Гл. 10, § 6.)
340. *Pike E. R.*, Quart. Journ. Mech. Appl. Math., 17, 1964. (Гл. 16, § 7.)
341. *Pogorzelski W.*, Integral Equations, Pergamon, 1966. (Гл. 1, § 7.)
342. *Portinari J. C.*, The One-dimensional Inverse Scattering Problem. Ph. D. Thesis (M. I. T. Department of Electrical Engineering), 1966. (Гл. 17, § 5.)
343. *Portinari J. C.*, Ann. of Phys., 45, 445 (1967). (Гл. 17, § 5.)
344. *Pöschl G., Teller E.*, Zs. Phys., 83, 143 (1933). (Предисловие.)
345. *Повзнер А. Ю.* — Матем. сборн., 1948, т. 23, с. 3. (Гл. 3, § 7.)
346. *Prats F., Toll J. S.*, Phys. Rev., 113, 363 (1959). (Гл. 9, § 5; предисловие.)
347. *Pritchard D. E.*, Journ. Chem. Phys., 56, 4206 (1972). (Гл. 16, § 4.)
348. *Prosser R. T.*, Journ. Math. Phys., 10, 1819 (1969). (Гл. 3, § 7; предисловие.)
349. *Prosser R. T.*, Journ. Math. Phys., 17, 1775 (1976). (Гл. 3, § 7; предисловие.)
350. *Рамм А. Г.* — ДАН СССР, 1964, т. 157, с. 1073. (Гл. 5, § 3; гл. 17, § 5.)
351. *Rayleigh J. W. S.*, The Theory of Sound, Dover Publications, New York, 1945 (1877). [Имеется перевод одного из предыдущих изданий: Дж. В. Стретт (лорд Рэлей). Теория звука. — 2-е изд. — М., 1955.]
352. *Redmond P. J.*, Journ. Math. Phys., 5, 1547 (1964). (Гл. 12, § 9.)
353. *Rees A. L. G.*, Proc. Phys. Soc. London, 59, 998 (1947). (Гл. 16, § 7; предисловие.)
354. *Regge T.*, Nuovo Cimento, 14, 5, 951 (1959). (Гл. 11, § 7; гл. 13, § 3; предисловие.)
355. *Remler E. A.*, Phys. Rev., A3, 1949 (1971). (Гл. 16, § 4.)
356. *Rich V. G. et al.*, Phys. Rev., A4, 2253 (1971). (Гл. 16, § 4.)
357. *Roberts M. J.*, Proc. Phys. Soc., 82, 594 (1963). (Гл. 7, § 5; предисловие.)
358. *Roberts M. J.*, Proc. Phys. Soc., 83, 503 (1964). (Гл. 7, § 5; предисловие.)
359. *Roberts M. J.*, Proc. Phys. Soc., 84, 825 (1964). (Гл. 7, § 5; предисловие.)
360. *Roberts M. J.*, Proc. Phys. Soc., 86, 683 (1965). (Гл. 7, § 5; предисловие.)
361. *Rosen M., Morse P. M.*, Phys. Rev., 42, 210 (1932). (Предисловие.)
362. *Rosen M., Yennie D. R.*, Journ. Math. Phys., 5, 1505 (1965). (Гл. 16, § 7.)
363. *Rydberg R.*, Zs. Phys., 73, 376 (1931). (Гл. 16, § 7.)
364. *Rydberg R.*, Zs. Phys., 80, 514 (1933). (Гл. 16, § 7; предисловие.)
365. *Sabatier P. C.*, Nuovo Cimento, 37, 1180 (1965). (Гл. 16, § 3.)
366. *Sabatier P. C.*, De Problème Inverse à énergie fixée en Mécanique Quantique. Thèse de Doctorat d'Etat, Orsay, 1966, p. 222. (Гл. 12, § 7, 9; гл. 16, § 7; предисловие.)
367. *Sabatier P. C.*, Journ. Math. Phys., 7, 1515 (1966). (Гл. 12, § 2—5, 7, 9; предисловие.)

368. *Sabatier P. C.*, Journ. Math. Phys., **7**, 2079 (1966) ¹⁾. (Гл. 12, § 7, 9; предисловие.)
 369. *Sabatier P. C.*, Compt. Rend., **263**, 788 (1966). (Гл. 12, § 8; предисловие.)
 370. *Sabatier P. C.*, Journ. Math. Phys., **8**, 1905 (1967). (Гл. 12, § 6, 7, 9; предисловие.)
 371. *Sabatier P. C.*, Journ. Math. Phys., **8**, 1957 (1967) ²⁾. Гл. 11, § 7; гл. 12, § 8, 9; предисловие.)
 372. *Sabatier P. C.*, Compt. Rend., **265**, 5 (1967). (Гл. 13, § 4; предисловие.)
 373. *Sabatier P. C.*, Journ. Math. Phys., **9**, 1241 (1968) ³⁾. (Гл. 15, § 1; предисловие.)
 374. *Sabatier P. C.*, Journ. Math. Phys., **12**, 1303 (1971). (Гл. 13, § 4; предисловие.)
 375. *Sabatier P. C.* ⁴⁾, Journ. Math. Phys., **13**, 675 (1972). (Гл. 12, § 4, гл. 16, § 6; предисловие.)
 376. *Sabatier P. C.*, в кн.: Mathematics of Profile Inversion, ed. L. Colin, 1972. 9.2—9.34. (Гл. 6, § 3; гл. 11, § 7; гл. 16, § 7; предисловие.)
 377. *Sabatier P. C.*, Intern. Journ. of Chemistry Symp., **7**, 421 (1973). (Гл. 12, § 4; гл. 16, § 6; предисловие.)
 378. *Sabatier P. C.* ⁵⁾, Phys. Rev., **A8**, 589 (1973). (Гл. 16, § 2, 7; предисловие.)
 379. *Sabatier P. C.*, Cahiers mathématiques de Montpellier, **4** (1974). (Гл. 10, § 1; предисловие.)
 380. *Sabatier P. C.*, Compt. Rend., **278B**, 545 (1974). (Гл. 6, § 3; предисловие.)
 381. *Sabatier P. C.*, Compt. Rend., **278B**, 603 (1974). (Гл. 6, § 3; предисловие.)
 382. *Sabatier P. C.*, Journ. Geophys., **43**, 115 (1977).

¹⁾ Стр. 2081: в 4-й строке перед формулой (1.21) следует читать «порядка 2» (а не «порядок, меньший или равный 2»). Стр. 2091: имеется общая ошибка в знаке в формулах (А. IV.5.8).

²⁾ Стр. 1961: в 3-й строке перед формулой (1.63) следует читать $\lambda = -\mu$.

³⁾ В формулах (2.72) — (2.74) этой статьи член V_s (но не $\pm \lambda V_s$) должен иметь множитель $1/2$. Отметим также, что в формуле (2.71) слагаемое с $l = 0$ фактически отсутствует и суммирование должно начинаться с $l = 1$.

⁴⁾ В этой статье имеется ряд неприятных опечаток. Стр. 679: в 7-й строке после соотношения (2.11) нужно читать $\bar{k}(r) +$; стр. 683: в формуле (2.93) следует читать $w^{-1}(\sin w) u \Phi(u)$; стр. 685: в формуле (3.2) нужно читать $\Phi_{\frac{1}{2}}^1(u)$; через две строки после формулы (3.2) нужно читать $L_{l+1/e}(u)$; формулу (3.4) нужно записать в виде $(d/du)(\pi u)^{-1}$; стр. 686: в 3-й строке формулу (3.28) следует читать

$$-\varphi(u) [P_{l+1}(1-2u^2) - P_{l-1}(1-2u^2)]_{\alpha}^{\beta} + \\ + \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(u) [P_{l+1}(1-2u^2) - P_{l-1}(1-2u^2)] du;$$

стр. 697: формулу A99 следует читать

$$10r^{-5} [K(r, r)]^2 + 2r^2 V(r) K(r, r) + \dots$$

и нужно иметь в виду, что пропущены некоторые (тривиальные) члены; после формулы (4.99) следует читать $\partial/\partial r$, $\partial/\partial r$, $\partial/\partial r$, Cr , $r \leq r'$ [I(4.54.55)].

⁵⁾ В этой статье на стр. 591, в тексте между формулами (2.2) и (2.3) и в формуле (2.3) следует читать $(\pi/2) g(t)$ вместо $g(t)$; на стр. 592 в формулах (2.8) и (2.9) следует читать $(\pi/2) [g(t)]^2$; на стр. 598 в последней строчке «должно быть ограниченным» заменить на «должно быть ограниченным при фиксированном λ^M ».

383. *Sabatier P. C., Quyen Van Phu F.*, Phys. Rev., **D4**, 127 (1971). (Гл. 13, § 4; гл. 16, § 6.)
384. *Sanders W. A., Mueller C. R.*, Journ. Chem. Phys., **39**, 2572 (1963). (Предисловие.)
385. *Scott A. C., Chu F. J. T., McLaughlin D. W.*, Proc. IEEE, **61**, 1443 (1973). [Имеется перевод: ТИИЭР, **61**, 79 (1973).] (Гл. 17, § 5; предисловие.)
386. *Sharp C. B.* Quart. Appl. Math., **21**, 337, 1963. (Гл. 17, § 4.)
387. *Sharp C. B.*, Siam Journ. Appl. Math., **32**, 405 (1977).
388. *Shmoys*, Journ. Appl. Phys., **32**, 689 (1961). (Гл. 17, § 4.)
389. *Sigmund P., Lillemark U.*, Physica, **71**, 258 (1974). (Гл. 16, § 5.)
390. *Singh P. P. et al.*, Phys. Rev. Lett., **23**, 1124 (1972). (Гл. 16, § 3, 4.)
391. *Singh P. P., Schwandi P.*, Phys. Lett., **42B**, 181 (1972). (Гл. 16, § 3, 7.)
392. *Smith F. T.*, в кн.: Lectures in Theoretical Physics and Atomic Collision Processes, eds. Geltman et al., Gordon and Breach, New York, vol. XIX, 1969, p. 95. (Гл. 16, § 4.)
393. *Smith F. T., et al.*, Phys. Rev., **161**, 31 (1967). (Гл. 16, § 4.)
394. *Smith F. T., Marchi R. P., Dedrich K. G.*, Phys. Rev., **150**, 79 (1966). (Гл. 16, § 4.)
395. *Sondhi M. M., Gopinath B.*, в кн.: Proceedings of the 7-th International Congress on Acoustics, Budapest, Hungary, Academiai Kiado, 1971. (Гл. 17, § 4.)
396. Сташевская В. В. — ДАН СССР, 1953, т. 93, с. 409. (Гл. 3, § 7.)
397. *Steinmann O.*, Helv. Phys. Acta **30**, 515 (1957).
398. *Stokes G. C.*, Trans. Cambridge Phil. Soc., **10**, 106 (1857). (Гл. 16, § 7.)
399. *Stokes P.*, Nucl. Phys., **A90**, 436 (1967). (Гл. 6, § 3.)
400. *Swan P., Pearce W. A.*, Nucl. Phys., **79**, 77 (1966). (Гл. 6, § 3; предисловие.)
401. *Tabakin F.*, Phys. Rev., **177**, 1443 (1969). (Гл. 8, § 5; предисловие.)
402. *Theis W. R.*, Zs. Naturforsch., **110**, 889 (1956). (Гл. 4, § 5; предисловие.)
403. *Titchmarsh E. C.*, Theory of Fourier Integrals, Oxford University Press, 1948. [Имеется перевод: Э. Ч. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. — М.: ИЛ, 1948.] (Гл. 8, § 5.)
404. *Titchmarsh E. C.*, Eigenfunction Expansions Part I, Oxford University Press 2-nd ed. 1962. [Имеется перевод 1-го изд.: Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. — М.: ИЛ, 1960, ч. 1.] (Гл. 2, § 5.)
405. *Tortorella M.*, Journ. Math. Phys., **13**, 1764 (1972). (Гл. 10, § 1; предисловие.)
406. *Tortorella M.*, Journ. Math. Phys., **15**, 1153 (1974). (Гл. 10, § 1.)
407. *Tortorella M.*, Journ. Math. Phys., **16**, 823 (1975). (Гл. 10, § 1.)
408. *Tortorella M., Leise J. A.*, Siam. Journ. on Appl. Math., **30**, 407 (1976). (Гл. 10, § 1.)
409. *Tricomi F. G.*, Integral Equations, Interscience Publishers, New York, 1957. (Гл. 13, § 3.)
410. *van Kampen N. G.*, Phil. Mag., **42**, 851 (1951). (Гл. 5, § 3; предисловие.)
411. *Verde M.*, Nucl. Phys., **9**, 255 (1959). (Гл. 9, § 5; предисловие.)
412. *Viano G. A.*, Nuovo Cimento, **63A**, 581 (1969); Journ. Math. Phys., **17**, 1160 (1976). (Гл. 13, § 2.)
413. Волк В. — Усп. матем. наук, 1953, т. 8, с. 141. (Гл. 3, § 7.)
414. *Vollmer G.*, Zs. Phys., **226**, 423 (1969). (Гл. 16, § 4, 7.)
415. *Weidelt P.*, Zs. Geophys., **38**, 257 (1972). (Гл. 6, § 3.)
416. *Weiss J.*, Czech. Journ. Phys., **B19**, 1578 (1969). (Гл. 7, § 5.)
417. *Weiss J.*, Fys. Cas., **20**, 3 (1970). (Гл. 7, § 5.)
418. *Weiss J.*, Czech. Journ. Phys., **B21**, 1019 (1971). (Гл. 7, § 5; предисловие.)
419. *Weiss J.*, Czech. Journ. Phys., **B21**, 1032 (1971). (Гл. 7, § 5.)
420. *Weis R., Scharf G.*, Helv. Phys. Acta, **44**, 910 (1971). (Гл. 9, § 5; предисловие.)

421. *Weis R., Stahel W., Scharf C.*, Nucl. Phys., A183, 337 (1972). (Гл. 9, § 5; предисловие.)
422. *Wentzel G.*, Zs. Phys., 38, 518 (1926). (Гл. 16, § 7.)
423. *Wheeler J. A.*, Phys. Rev., 52, 1107 (1937). (Предисловие.)
424. *Wheeler J. A.*, Phys. Rev., 99, 630 (1955). (Гл. 16, § 7; предисловие.)
435. *Wheeler J. A.*, в кн.: Studies in Mathematical Physics (Essays in Honor of Valentine Bargmann), Princeton University, 1976 (Гл. 16, § 5, 6; предисловие.)
426. *Wiechert E.*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys., 1907, Hft. 1, S. 415 (Гл. 16, § 7.)
427. *Wildermuth K.*, Zs. Phys., 127, 85 (1949). (Предисловие.)
428. *Wohlers M. R.*, IEEE Trans. Circuit Theory, 13, 356 (1966). (Гл. 17, § 6.)
429. *Yamaguchi Y.*, Phys. Rev., 95, 1628 (1954). (Гл. 8, § 5.)
430. *Yamaguchi Y.*, Phys. Rev., 95, 1635 (1955). (Гл. 8, § 5.)
431. *Yennie D. R., Boos F. L., Rarenhall D. G.*, Phys. Rev., 127B, 882 (1965). (Гл. 16, § 7.)
432. *Youla D. C.*, IEEE Trans. on Circuit Theory, 11, 363 (1964). (Гл. 17, § 4.)
433. *Захарьев Б. Н.*, Nucleonika, 21, 709 (1976).
- 434*. *Амирханов И. В. и др.* Сообщения ОИЯИ Р4-7109, Дубна, 1973.
- 435*. *Амирханов И. В. и др.* Препринт ОИЯИ Е2-9767, Дубна, 1978.
- 436*. *Арсенин В. Я.* — УМН, 1976, т. 31, в. 6, с. 89.
- 437*. *Береви П., Захарьев Б. Н., Ниязгулов С. А.* — ЭЧАЯ, 1973, т. 8, в. 2, с. 512.
- 438*. *Банг Е., Гареев Ф. А., Гизаткулов М. Х., Гончаров С. А.*, Nucl. Phys., A309, 381 (1978).
- 439*. *Березанский Ю. М.*, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: «Наукова думка», 1965.
- 440*. *Березанский Ю. М.* В кн.: Труды семинара по функциональному анализу, т. 2, в. 2. — Киев: Инст. мат. АН УССР, 1970.
- 441*. *Блохинцев Л. Д. и др.* — ЭЧАЯ, 1977, т. 8, в. 6.
- 442*. *Василевский Л. С., Журнов Н. И.*, Journ. Phys. Atom. Molec. Phys., B10, 1425 (1977).
- 443*. *Велиев С. Г. и др.* Спектральная теория операторов. — Баку: Изд. Элм., 1977, с. 56.
- 444*. *Визнер Я. и др.* — ЭЧАЯ, 1968, т. 9, № 3, с. 710.
- 445*. *Гусейнов Г. Ш.* — ДАН СССР, 1976, т. 231, с. 1045.
- 446*. *Гусейнов Г. Ш.* — ДАН СССР, 1976, т. 227, с. 1289.
- 447*. *Денисов А. М.* — Вестн. МГУ (вычисл. мат. киберн.), 1978, № 2, с. 77.
- 448*. *Денисов А. М.* — ЖВМ и МФ, 1977, т. 17, с. 753.
- 449*. *Жигунов В. П.* Препринт ИФВЭ — ОМВТ 77—123. — Серпухов, 1977.
- 450*. *Жигунов В. П. и др.* Препринт ОИЯИ Р4-7815. — Дубна, 1974.
- 451*. *Жигунов В. П., Захарьев Б. Н.* Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. — М.: Атомиздат, 1974.
- 452*. *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill, 1953, Formula 3.2.(15). (Имеется перевод: Г. Бейтман, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1965.)
- 453*. *Захарьев Б. Н., Мельников В. Н.* Препринт ОИЯИ Р4-11841. — Дубна, 1978.
- 454*. *Захарьев Б. Н., Мельников В. Н.* В кн.: Тезисы 29 совещ. по ядерн. спектр. и структуре ат. ядра (Рига, 1979). — Л.: Наука, 1979.
- 455*. *Захарьев Б. Н., Мельников В. Н., Рудяк Б. В., Сузько А. А.* — ЭЧАЯ, 1977, т. 8, в. 2, с. 290.
- 456*. *Захарьев Б. Н. и др.* — ЯФ, 1977, т. 24, с. 295.
- 457*. *Захарьев Б. Н. и др.* Препринт ОИЯИ Р4-8640. — Дубна, 1975.
- 458*. *Захарьев Б. Н., Ниязгулов С. А., Сузько А. А.* — ЯФ, 1974, т. 20, с. 1273.
- 459*. *Захарьев Б. Н., Сузько А. А.* — ЯФ, 1975, т. 22, с. 289.

- 460*. Кириллов А. И. и др.— ЭЧАЯ, 1975, т. 6, № 1, с. 3.
 461*. Кириллов А. И., Троицкий В. Е.— ЯФ, 1977, т. 25, в. 2, с. 288.
 462*. Козел В. А.— Теор. функц., функц. анализ и их прилож., 1973, в. 17, с. 187.— Харьков: Изд. ХГУ.
 463*. Левитан Б. М. В кн.: Задачи механики и мат. физ. (Памяти Петровского И. Г.).— М.: Наука, 1976.
 464*. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию.— М.: Наука, 1970.
 465*. Лянце В. В книге [477].
 466*. Малахов В. В. и др.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, в. 2, с. 432.
 467*. Малахов В. В. и др.— ЯФ, 1975, т. 22, в. 4, с. 860.
 468*. Малахов В. В. и др.— ЯФ, 1977, т. 25, в. 1, с. 72.
 469*. Малахов В. В. и др.— ЯФ, 1978, т. 27, в. 4, с. 1128.
 470*. Малахов В. В. и др.— Укр. Физ. Журн., 1978, т. 23, с. 1505.
 471*. Манаков С. В.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, в. 2, с. 543.
 472*. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля.— Киев: «Наукова думка», 1972.
 473*. Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.— Киев: «Наукова думка», 1977.
 474*. Мельников В. К.— УМН, 1959, т. 14, в. 4, с. 121.
 475*. Мельников В. К.— Мат. сборн., 1979, т. 108 № 3, с. 378.
 476*. Музафаров В. М., Троицкий В. Е.— ЯФ, 1979, т. 30, № 4—6.
 477*. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.— М.: Наука, 1969.
 478*. Нижник Л. П. Обратная нестационарная задача рассеяния.— Киев: «Наукова думка», 1973.
 479*. Соколов С. Н.— ТМФ, 1978, т. 36, с. 193.
 480*. Фам-Лой-Бу.— Укр. Мат. Журн., 1972, т. 24, с. 666.
 481*. Фролов И. С.— ДАН СССР, 1972, т. 207, № 1.
 482*. Широков Ю. М., Nucl. Phys., B6, 158 (1968).
 483*. Эскина М. С. В кн.: Труды семинара по функциональному анализу.— Киев: Инст. мат. АН УССР, 1970, т. 2, в. 2.
 484*. Яковлев Л. Г., Баширов Э. М.— Изв. ВУЗ Физика, 1970, в. 8, с. 118.
 485*. Jaulent M., Jean C., Ann. Inst. Henri Poincaré, 25, 105 (1976).
 486*. Hron M., Razavy M., Canad. Journ. Phys., 55, 1434 (1977).
 487*. Lipperheide R., Fiedeldey H., Zs. Phys., A286, 45 (1978).
 488*. Newton R. G., Journ. Math. Phys., 2, 188 (1961).
 489*. Fonda L., Newton R. G., Ann. Phys., 10, 490 (1960).
 490*. Соколов С. Н. Препринт ИФВЭ 79-71.— Серпухов, 1979.
 491*. Karlsson B. R., Lecture Notes in Physics № 85: Applied Inverse Problems, ed. P. C. Sabatier, Springer, 1976.
 492*. Jaulent M., Compt. Rend., 280A, 1467, (1975).
 493*. Eftimin C., Journ. Math. Phys., 12, 2047 (1971); 13, 485 (1972).
 494*. Пузииков Л. и др.— ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 592.
 495*. Knauer F., Naturwiss., 21, 366 (1933).
 496*. Демков Ю. Н. и др.— ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 1604.
 497*. Boucock J. E., Buckhardt H., Rep. Progr. Phys., 38, 1099 (1975).
 498*. Viano G. A., Journ. Math. Phys., 17, 1160 (1976).
 499*. Baetman M. L., Chadani K., Ann. Inst. Henri Poincaré, AXXIV, 1 (1977).
 500*. Newton R. G., Siam Rev., 12, 344 (1970).
 501*. Sabatier P. C., в кн.: Compt. Rend. Colloque d'Analyse Numérique, La Grande Motte, France (Mai 1975).
 502*. Марченко В. А.— Мат. сборн., 1975, т. 97, с. 541.
 502_а*. Troubowitz E. et al., Comm. Appl. Math., 30, 321 (1977).
 503*. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. Л., Пятаевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.
 504*. Фаддеев Л. Д.— В кн.: Современные проблемы математики.— М.: ВИНТИИ, 1974, т. 3, с. 93.
 505*. Deift P. et al., Comm. Appl. Math., 32, 121 (1979).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Альтернатива Фредгольма 226
Аналитически решаемый пример 236, 317

Баргмана потенциалы 89, 110
Баргмана — *Малырова* потенциалы 89, 118
Барьерные явления 362
Бесселя функции 23, 221, 285

ВКБ-приближение 332, 333, 335
Вронскиан 25, 36

Глория 345, 347

Данные рассеяния 78, 137, 164, 174
Дискретный вариант метода Гельфанда —
Левитана 13, 176, 180, 187, 188
— спектр 187. См. также Связанные со-
стояния
Дисперсионные (недиссипативные) волны
379
— соотношения 181, 184, 253
Духовые состояния 131

Единственность
для обратной задачи с потенциалами
Юкавы при фиксированном l 126,
132
для приближенных методов обратной
задачи 330, 332, 338
для точных методов обратной задачи
при фиксированной энергии 267, 281,
318
при построении амплитуд рассеяния
по сечениям 194, 200, 211
решения уравнения Гельфанда — Ле-
витана 68
— — Марченко 102

Инклюзия 349
Интерполяция:
единственность 267
формулы и применения 254, 255, 309,
318
Исключительные точки 296, 297, 303

Поста решения (f_l) 24, 30, 35, 365
— — высокоэнергетическое поведение 31,
32, 36
— — для потенциалов Юкавы 120, 129,
135
— — интегральное представление Левина
100, 365, 366
— — — Петраса — Корниля 130
— — — уравнение 30, 35, 365
— — полный набор в l -плоскости 268

Конечно-разностный подход в обратной
задаче 13, 176, 187, 188
Коэффициенты отражения 363, 364
— прохождения 364
Крейна методы 69, 161, 266
— теорема 72, 93
— уравнение 69, 162

Марченко дифференциальное уравнение 101
— интегральное уравнение 101
— — эквивалентность интегральному
уравнению Гельфанда — Левитана 102
— метод 99, 106, 180, 184, 186, 187
— обобщения или аналогии 159, 171, 172,
286
— — при $l > 0$ и при наличии куло-
новского потенциала 159
— теорема 72, 93
— — с приближениями Паде 119

Матрица рассеяния (S -матрица) 34, 37,
47, 58, 77, 93, 298, 364
— — мероморфная 47
— — обращение ряда Борна 79
— t 140
Метод Гельфанда — Левитана 59
— — дискретный вариант 176, 180,
187, 188
— — дифференциальное уравнение 65,
71, 74
— — — вывод вариационным ме-
тодом 188
— — — вывод методом случайных
блужданий 188
— — — интегральное уравнение 67, 73
— — — обобщения 158, 166, 169, 172,
187, 265
— — — применения 80
— — — при наличии кулоновского вза-
имодействия 160

- Метод конструктивный 19
 — Крейна 69, 161, 266
 — Мартена 17, 132, 135, 138
 — матричный (Ньютона — Сабатье) 18, 237
 — N/D 17, 131
 — обратной задачи:
 в акустике 385
 в геофизике 385
 в диагностике плазмы 385
 в электромагнетизме 385
 — основанный на разложении в ряд 77
 — подгонки 16
 — полного решения 270, 280, 284, 285
 — Редже и Лёффеля 18
 — Римана 160, 271
 — сильной связи каналов 166
 — следов 17, 136—139
 — Фробениуса 310
 — целых значений индекса α 237
 Многоканальные задачи см. Метод сильной связи каналов
- Нейтрон-протонное взаимодействие 119
 Нелокальные сепарабельные взаимодействия 140
 — — — обратная задача 140
 — — — прямая задача 147
 — — — теорема Левинсона 147, 154, 157
 Неоднозначность континуальная 218
 — Кричтона 201
 — слоистая 340, 341
 — тривиальная 195
 — формы 341
 Непрерывность по Гёльдеру 148, 150, 157
 Неупругие задачи 171
 Нормировочные постоянные 82, 85
 — — изменение см. Потенциалы фазово-эквивалентные
 — — для связанных состояний 44, 47, 52, 113, 132, 137, 304
 — — определение из эксперимента 50
- Обратная задача в импульсном представлении 184
 — — отражения 13, 14
 Обращение матрицы 239
 Оператор обобщенного сдвига 161, 321
 — — полуинтегрирования 350
 — — проектирования 210
 — — сдвигающий 293
 Определитель Фредгольма 171, 185, 227, 298
 — — для уравнения Липпмана — Швингера 296, 303
 — — — Мартена 129
 — — — Петраса — Корниля 131
 — — — физического решения 45
 — — метод 188
 — — нули см. Связанные состояния
- Параметр неупругости 216
 Потенциалы
 — Баргмана 89, 98, 110
 — голоморфные 27, 136, 247, 249
 — зависящие от энергии 185
 — конструирование 326
 — кулоновские 135, 138, 160, 253, 327, 335
 — Леннард-Джонса 345
 — локальные 12, 287
 — нелокальные сепарабельные 140
 — опорные 352, 353
 — приращение 98
 — прозрачные 115, 156, 151, 318, 357
 — регулярные 29
 — сингулярные 20, 37, 117, 270
 — — осциллирующие 22, 38, 117
 — спин-орбитальные 98, 157, 162, 313, 321
 — тензорные 98, 157, 162, 321
 — точка поворота 352
 — фазово-эквивалентные 85, 98, 113, 253, 281
 — Экарта 111
 — Юкавы 120, 126, 133, 261
 Представление Левина 99, 365
 — Повзнера — Левитана 61, 71, 72
 Приближение 223, 282
 — квазиклассическое 328, 332, 360, 362
 — Пада 119
 — полуклассическое 328
 — эффективного радиуса 111, 112, 155
 Ψ_I см. Физическое решение
- Радужное рассеяние 343-347
 Разложение в ряд по собственным функциям см. Соотношения полноты
 Регулярное решение (приведенного радиального уравнения Шредингера) Ψ_I 23, 28, 34, 38, 125, 237, 290
 — — асимптотическое поведение при больших r 24, 32, 43, 46
 — — и решения Йоста 25
 — — и физическое решение 25
 — — интегральное представление см. представление Повзнера — Левитана
 — — поведение при высоких энергиях 29, 35
 — — представление Крейна 70
 Резольвента:
 — для уравнения Гельфанда — Левитана 66
 — — Редже — Ньютона 231
 — — Шредингера 50
 Резонанс при нулевой энергии 110, 112
 Релятивистские задачи 6, 171
 Ряд Неймана 227
 R -матричная теория 187
- Сбалансированные неоднозначности 338
 Свободное решение 58
 Связанные состояния 17, 26, 42, 80, 112, 144, 154, 303
 — — античастиц 172
 — — введение новых 80
 — — границы для числа 45, 188
 — — на разрезе 126, 132
 — — нормировочные постоянные 44, 47, 50, 52, 58, 132, 137, 304
 — — при положительной энергии, погруженные в непрерывный спектр 144, 145, 147, 168, 169
 — — сечения 187, 327, 342, 348, 354, 355
 — — системы уравнений 162, 166
 — — слои эквивалентных решений 340
 — — слоистая неоднозначность 340, 341
 — — Солитон 14, 379, 380, 384, 386
 — — соотношения (условия) полноты 50, 165, 169, 266, 269, 292, 300
 — — — резонансных состояний 52
 — — состояния рассеяния 143
 — — спектральная мера 77
 — — обратная задача 362

- Спектральная функция 77
 Спин-орбитальные силы 98, 153, 162
 Сплэйн 346
 Существование решения 122, 267, 287
 — — глобальное 194
 — — локальное 194
 — — метод Гельфанда — Левитана 68
 — — — Марченко 102
 — — — Ньютона — Сабатье 247
 S-устойчивость 216
- Тензорные силы 98, 157, 162, 321
 Теорема
 Абеля 56, 61
 Адамара 227
 Бесселя — Парсевала 240
 Винера — Боаса 60
 Винера — Леви 53
 Крейна 72, 93
 Лагранжа — Валирона 257
 Левинсона 45, 46
 — для нелокальных взаимодействий 147, 154, 157
 — различные формы 58
 Марченко 72, 93
 оптическая 13, 192, 217
 о фиксированной точке Вейля 13
 Пели — Винера 59, 60, 68, 291
 Титчмарша 99
 Теория возмущений в обратной задаче 329—331
 — переноса 13
- Уединенная волна 14. см. также Солитон
 Унитарная амплитуда 213
 — окружность 198
 Уравнение
 Борна — Инфельда 380
 Буссинеска 380
 Вольтерра 65
 Гельфанда — Левитана 67, 73
 Гильберта — Шмидта 131
 Дирака 139, 171, 321, 325
 Клейна — Гордона 139, 171, 321
 — — при фиксированной энергии 323
 — — при фиксированном l 172, 176
 Кортвега — де Фриза 13, 379, 386
 Крейна 69, 162
 Липпмана — Швингера 291, 298
 нелинейное эволюционное 379, 384
 Редже — Ньютона 235, 265, 275
 — — обобщения 315, 324
 Шредингера 23, 221, 287, 326
 — радиальное 59
 — регулярное решение 23, 28, 34, 38, 125, 237, 290
 — решения Йоста 24, 30, 35, 365
 — физическое решение (ψ_l) 24
 Фредгольма интегральное 67, 226, 243
 — для физического решения 44, 45
 Условия непротиворечивости 18
 Устойчивость 223
- Фазовые сдвиги δ_l
 и связанные состояния (теорема Левинсона) 45, 46, 147, 154, 157
 и функция Йоста 25, 32, 48, 54
 интегральное представление 54
 исключительный набор 281
 поведение при высоких энергиях 33, 34, 37, 118, 146, 147, 172
 Физическое решение (ψ_l) 24
 — — интегральное уравнение Фредгольма 44
 — — свойство полноты 51
 — — связь с регулярным решением 25
 Функция Бесселя 23, 221, 285
 — биортонормированная 79
 — Йоста (F_l) 25, 32, 48, 299
 — — динамическая интерпретация 258
 — — дисперсионные разложения 252
 — — для одномерной задачи рассеяния ($c_{ij}(k)$) 368
 — — для потенциалов Юкавы 124, 128
 — — интегральные представления 32, 36, 40, 48, 53, 54, 368
 — — интерполяционные формулы 258
 — — как определитель Фредгольма 45
 — нули см. Связанные состояния
 — поведение при высоких энергиях 33, 34, 37
 Ханкеля 71, 155
 — Хевисайда 121
- Экскурсия 350
- Юкавы потенциалы 120
 — — волны с $l > 0$, кулоновский потенциал (l фиксировано) 133
 — — обратная задача (при фиксированном l) 126
 — — прямая задача (при фиксированном l) 120
 — — — при фиксированной энергии 261
- Ядра:
 вырожденные 86, 89
 и операторы обобщенного сдвига 321
 одномерной задачи 375
 преобразования уравнения Редже — Ньютона 225, 238, 268, 323
 симметричное для уравнения Редже — Ньютона 226
 треугольные 12
 трехмерного интегрального уравнения 296, 302
 уравнения Гельфанда — Левитана 7, 294

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	7
Введение	15
Глава 1. Некоторые результаты теории рассеяния	21
§ 1. Приведенное радиальное уравнение Шредингера	21
§ 2. Регулярное решение: S -волна ($l = 0$)	27
§ 3. Решение Йоста: S -волна ($l = 0$)	30
§ 4. Функция Йоста и фазовый сдвиг	32
§ 5. Волны с $l > 0$	34
§ 6. Сингулярные потенциалы	37
§ 7. Замечания и литература	41
Глава 2. Связанные состояния, разложение по собственным функциям	42
§ 1. Связанные состояния, теорема Левинсона	42
§ 2. Интегральное представление функции Йоста	47
§ 3. Разложение по собственным функциям	48
§ 4. Другие результаты	52
§ 5. Замечания и литература	58
Глава 3. Метод Гельфанда — Левитана — Йоста — Кона	59
§ 1. Представление Повзнера — Левитана	59
§ 2. Интегральное уравнение Гельфанда — Левитана	66
§ 3. Уравнение Крейна	69
§ 4. Волны с $l > 0$	71
§ 5. Более общие уравнения	72
§ 6. Краткое изложение метода	74
§ 7. Замечания и литература	76
Глава 4. Применение уравнения Гельфанда — Левитана	80
§ 1. Введение новых связанных состояний	80
§ 2. Фазово-эквивалентные потенциалы	85
§ 3. Потенциалы Баргмана	89
§ 4. Преобразования уравнения Шредингера	93
§ 5. Замечания и литература	98

Глава 5.	Метод Марченко	99
§ 1.	Представление Левина	99
§ 2.	Интегральное уравнение Марченко	101
§ 3.	Замечания и литература	108
Глава 6.	Примеры	110
§ 1.	Потенциалы Баргмана	110
§ 2.	Сингулярные потенциалы	117
§ 3.	Замечания и литература	118
Глава 7.	Специальные классы потенциалов	120
§ 1.	Потенциалы Юкавы и прямая задача	120
§ 2.	Потенциалы Юкавы и обратная задача	126
§ 3.	Волны с $l \neq 0$, кулоновский потенциал	133
§ 4.	Голоморфные потенциалы	136
§ 5.	Замечания и литература	138
Глава 8.	Нелокальные сепарабельные взаимодействия	140
§ 1.	Прямая задача	140
§ 2.	Обратная задача	147
§ 3.	Взаимодействие более общего вида	152
§ 4.	Применение	155
§ 5.	Замечания и литература	156
Глава 9.	Различные подходы к обратной задаче рассеяния при фиксированном l	158
§ 1.	Обобщение на другие сферически-симметричные потенциалы	158
§ 2.	Подход Крейна	161
§ 3.	Система уравнений	162
§ 4.	Связанные каналы	166
§ 5.	Релятивистские задачи	171
§ 6.	Дискретные формы обратной задачи	176
§ 7.	Подход, основанный на дисперсионных соотношениях	181
§ 8.	Потенциалы, зависящие от энергии	185
§ 9.	Другие результаты	187
Глава 10.	Построение амплитуды по сечениям упругого рассеяния	189
§ 1.	Введение	189
§ 2.	Методы построения решения	195
§ 3.	Другие исследования вопроса единственности	200
§ 4.	Локальная задача	205
§ 5.	Вопросы единственности и устойчивости решения (уточнение утверждений)	211
§ 6.	Обобщения	216

Глава 11. Восстановление потенциалов по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии (основное уравнение и математические методы)	221
§ 1. Введение	221
§ 2. Ядро преобразования	224
§ 3. Симметричное ядро и интегральное уравнение	226
§ 4. Общая схема решения задачи	228
§ 5. Дальнейшее исследование интегрального уравнения	231
§ 6. Некоторые замечания	234
§ 7. Связь между задачами при фиксированной энергии E и при фиксированном l	235
Глава 12. Матричные методы восстановления потенциалов по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии	237
§ 1. Введение	237
§ 2. Метод целых значений индекса μ	237
§ 3. Обратимость матрицы M и другие свойства	239
§ 4. Построение коэффициентов $\{c_l\}$ по $\{\operatorname{tg} \delta_l\}$	243
§ 5. Метод построения потенциала $V(r)$ и применимость такого метода	246
§ 6. Обобщенные матричные методы	249
§ 7. Другие результаты	251
§ 8. Интерполяционные свойства	254
§ 9. Ограниченность матричных методов	258
Глава 13. Операторные методы восстановления потенциалов по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии	260
§ 1. Введение	260
§ 2. Метод построения потенциалов Юкавы	260
§ 3. Методы, использующие спектр оператора Шредингера	263
§ 4. Полное решение	270
§ 5. Замечания	286
Глава 14. Трехмерная обратная задача	287
§ 1. Введение	287
§ 2. Другая схема решения	289
§ 3. Метод решения трехмерной задачи	294
§ 4. Применимость метода	304
§ 5. Случай аксиальной симметрии	306
Глава 15. Различные подходы к обратным задачам при фиксированной энергии	309
§ 1. Методы, основанные на интерполяционных формулах	309
§ 2. Методы, основанные на операторах обобщенного сдвига	321
§ 3. Замечание	325

Глава 16. Приближенные методы	326
§ 1. Введение	326
§ 2. Борновское приближение	329
§ 3. Полуклассическое приближение I	332
§ 4. Полуклассический анализ II	342
§ 5. Полуклассический анализ III	349
§ 6. От приближенных методов к точным	357
§ 7. Квазиклассические исследования в других областях физики	359
Глава 17. Обратные задачи в случае одного измерения	363
§ 1. Введение	363
§ 2. Обратная задача	373
§ 3. Свойства потенциала	377
§ 4. Приложения	378
§ 5. Замечания и литература	385
Литература	387
Предметный указатель	402

К. Шадап, П. Событьс

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Научный редактор Е. С. Куранский
 Младший научный редактор В. И. Аксёнова
 Художник Ю. С. Урманчеев
 Художественный редактор Л. Е. Безрученков
 Технический редактор Е. С. Герасимова
 Корректор В. И. Киселева

ИБ № 1927

Сдано в набор 25.02.80.

Подписано к печати 07.08.80.

Формат 60×90^{1/16}.

Бумага типографская № 1.

Гарнитура обыкновенная. Печать высокая.

Объем 12,75 бум. л. Усл. печ. л. 25,50.

Уч.-изд. л. 24,36. Изд. № 2 0319.

Тираж 4400 экз. Зак. 0713. Цена 3 р. 80 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Трудового Красного Знамени

Московская типография № 7 «Искра революции»

Союзполиграфпрома Государственного Комитета СССР

по делам издательств,

полиграфии и книжной торговли

Москва 103001, Трехпрудный пер., д. 9.

