

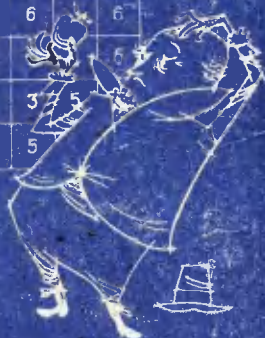
Дж. Д. Вильямс

СОВЕРШЕННЫЙ СТРАТЕГ

ИЛИ

*Букварь по теории
стратегических игр*

		Красные						
		1	2	3	4	5	6	7
Синие	1	8	3	4	3	2	5	5
	2	6	6	0	0	2	4	1
	3	0	3	5	6	6		6
	4	6	4	9	3		5	
	5	1	6	4	4	3	5	
	6	7	8	2	1	5		
	7							



Дж. Д. ВИЛЬЯМС

СОВЕРШЕННЫЙ СТРАТЕГ

ИЛИ
БУКВАРЬ ПО ТЕОРИИ
СТРАТЕГИЧЕСКИХ ИГР

The Compleat Strategyst
being a primer on the theory of games
of strategy by J. D. WILLIAMS
with pictorial illustrations by Charles Satterfield
first edition, published 1954, by MCGRAW-
HILL BOOK COMPANY, INC. New York,
Toronto, London

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
Ю. С. ГОЛУБЕВА-НОВОЖИЛОВА
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
И. А. ПОЛЕГАЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО „СОВЕТСКОЕ РАДИО“

МОСКВА — 1960

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
От редактора перевода	5
Предисловие	13
Глава 1. Введение	17
Природа вопроса	17
Один исторический пример	22
Некоторые уроки и параллели	22
Некоторые замечания относительно метода	25
Игроки и люди	28
Платеж	31
Стратегии	34
Платежная матрица	35
Молчаливые предположения	38
Критерий	39
Пример 1. Туристы	42
Глава 2. Игры с двумя стратегиями	47
Игры 2×2	47
Введение	47
Случайные отклонения	48
Седловые точки	53
Смешанные стратегии	55
Относительные частоты	59
Правила для определения относительных частот	60
Цена игры	64
Влияние изменения масштаба	65
Хорошая игра против плохой	67
Пример 2. Бомбардировочная операция	68
Пример 3. Коктейль „Дайквир“	69
Пример 4. Речная история	71
Пример 5. Наступление и оборона	72
Пример 6. Проблема встречи у мюзик-холла	74
Пример 7. Темная комната	75
Пример 8. День рождения	76
Пример 9. Лотошник	77
Пример 10. Полицейская машина	78
Выводы по методам решения игр 2×2	82
Упражнения 1	85
Игры $2 \times m$	87
Седловые точки	87
Доминирование	88
Смешанные стратегии	89
Графическое решение	92
Пример 11. Игра в слова	94
Пример 12. Спортивный набор	96
Пример 13. Высококачественный проигрыватель	100
Способы бросания жребия (случайные механизмы)	101
Выводы по методам решения игр $2 \times m$	103
Упражнения 2	105

Глава 3. Игры с тремя стратегиями	109
Игры 3×3	109
Нравоучительное отступление	109
Седловые точки	111
Доминирование	112
Цена игры	114
Три активные стратегии	115
Игры, с которыми вам лучше бы не встречаться	119
Пример 14. Игра „камень—бумага—ножницы“	123
Пример 15. Топливная проблема	125
Пример 16. Наследник	127
Пример 17. Раздел имущества скотовладельцев	129
Пример 18. Свидание	132
Выводы по методам решения игр 3×3	133
Упражнения 3	134
Игры $3 \times m$	137
Метод решения	137
Пример 19. Морской окунь и профессор	146
Пример 20. Умение подойти к больному	149
Пример 21. Шахматисты	153
Выводы по методам решения игр $3 \times m$	154
Упражнения 4	155
Глава 4. Игры с четырьмя и более стратегиями	159
Решения с помощью догадок	159
Седловые точки	162
Доминирование	162
Случай, когда все стратегии активны	163
Пример 22. Подержанный автомобиль	175
Пример 23. Опрыскиватели	177
Пример 24. Цветной покер	179
Пример 25. Для детей старшего возраста	181
Пример 26. Судебный исполнитель	183
Пример 27. Игра с монетами	185
Пример 28. „Административная“ дилемма	186
Пример 29. Проблема полковника Блотто	189
Пример 30. Морра	193
Пример 31. Лабиринт	196
Пример 32. Мерлин	198
Выводы по методам решения игр 4×4	201
Упражнения 5	203
Глава 5. Разные замечания	210
Приближения	210
Еще о доминировании	217
Простые решения	220
Многократные решения	223
Упражнение 6	225
Относительно измерения платежей	225
Качественные оценки платежей	232
Пример 33. Порция	235
Пример 34. Леди или тигр	237
Игры, которые играют только один раз	240
Симметричные игры	242
Линейное программирование	244
Пример 35. Диета	245
Игры с ненулевой суммой	248
Заключение	250
Приложения	254
Таблица случайных чисел	254
Решения упражнений	260
Литература	265

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Существует привычное деление наук на точные и описательные. Граница между ними определена не очень четко. Обычно к разряду точных относят науки, использующие математические методы, т. е. числовые оценки в теории и эксперименте и специальную символику для записи высказываний. Описательные науки, напротив, ограничиваются словесными формулировками и доказательствами и лишь в некоторых случаях пользуются числами для иллюстрации качественных закономерностей. К описательным наукам принадлежит большая часть гуманитарных наук.

Последнее время все чаще наблюдаются случаи, когда граница между точными и описательными науками нарушается. Нарушения эти происходят односторонне: методы точных наук вторгаются в области наук описательных, в том числе и гуманитарных. В качестве примера достаточно вспомнить бурное развитие математической лингвистики в связи с необходимостью создания точных правил перевода текста с одного национального языка на другой и передачи их электронным вычислительным машинам.

Появление быстродействующих электронных вычислительных машин (ЭВМ), резко расширившее возможности

быстрой обработки больших количеств информации, явилось, по-видимому, одной из решающих причин того, что методы точных наук, в частности численные методы, стали находить себе широкое применение в совершенно новых областях. При этом практическая ценность получаемых с помощью ЭВМ решений оказалась настолько большой, что она с лихвой окупала значительные расходы на создание и эксплуатацию машин. Однако для нормального использования ЭВМ необходимо было заботиться не только о технической, но и о математической стороне работы машины. Иначе говоря, каждая новая задача требовала строгой постановки и формулировки в терминах операций, доступных машине, требовала составления сводки правил проведения расчетов, т. е. «алгоритма» новой задачи.

Начались успешные поиски алгоритмов решения новых задач. При этом постепенно выявилось удивительное обстоятельство: «алгоритмизации» поддаются самые разнообразные процессы, в том числе и такие, которые раньше представлялись доступными только человеческому интеллекту. К их числу относится уже упомянутый выше перевод текстов, а также задачи диспетчеризации и планирования производства и транспорта, учет, поиски и выбор информации по сложным признакам, постановка врачебного диагноза, игра в шахматы и многие другие.

Особенно важными оказались задачи, связанные с управлением процессом производства в различных звеньях. Дело в том, что применение ЭВМ в управлении производством и хозяйственной деятельностью в крупных масштабах оказывается выгодным не только в том смысле, что позволяет труд большого числа работников управления заменить работой одной машины. Одна только такая замена чаще всего не дает экономии в расходах или если и дает, то лишь незначительную. Основная выгода применения ЭВМ, повлекшая за собой их бурное развитие, заключается в том, что с их помощью решается задача *оптимизации* управления, т. е. задача нахождения тех вариантов управления, которые дают наибольшую *пользу* в некотором точно определенном смысле.

Огромная пропускная способность ЭВМ по обработке информации позволяет просматривать большое число вариантов производственного плана и выбирать из них наилучший. Более того, существуют методы систематического улучшения вариантов плана и нахождения наилучшего при ограниченном просмотре вариантов.

Улучшение результатов производственной деятельности в результате оптимизации управления и является основным источником дополнительных средств, притом достаточно большим, чтобы в короткий срок окупить значительные расходы на создание и обслуживание машин.

Успех в одних областях стимулировал поиски аналогичных применений ЭВМ в других, и в результате «алгоритмизация» — стремление охватить строгими правилами численных расчетов и математической логики все новые области явлений — привела к формированию новой точной науки — кибернетики, науки об общих законах управления посредством информации. Именно в этих рамках и происходит упоминавшееся нами выше вторжение методов точных наук в пограничные с ними области наук описательных и даже в области, отстоящие довольно далеко.

Следует заметить, что использование численных методов расчета в новых областях не всегда проходит гладко, работники этих областей нелегко переходят на новые методы и неохотно их принимают. Иногда дело доходит даже до утверждений о якобы «идеологической несостоятельности» новых методов. Объясняется такое сопротивление либо непониманием, либо консерватизмом, либо, иногда, опасением понести личные потери при переоценке ценностей, вызванной новыми методами. Практика применения ЭВМ, успехи, достигнутые с их помощью, — лучший аргумент против подобного рода сопротивления. В настоящее время не видно принципиальных границ применения ЭВМ в решении задач управления. Во всяком случае до этих границ еще далеко.

Среди большого числа приложений кибернетики одним из наиболее важных является так называемое «исследование операций», сложившееся и оформившееся еще до появления ЭВМ и формирования основных понятий кибернетики. Исследование операций — прикладная наука, использующая математические методы и потому относящаяся к разряду точных наук. Предмет ее изучения — работа организованных коллективов людей. «Операцией» называется любая конкретная деятельность коллектива, руководимая единым замыслом и чаще всего из единого центра, протекающая при использовании оборудования, с точно определенной целью и имеющая, как правило, характер повторяемости. Производство, транспорт, связь, торговля, строительство, боевые действия — все это суть «операции».

Целью исследований является определение оптималь-

ных методов управления операцией, т. е. наилучшей организации работы, приносящей наибольшую пользу при фиксированных затратах.

Возникновение исследования операций связано главным образом с военными проблемами и приурочивается к периоду начала второй мировой войны. Однако методы исследования оказываются широко применимыми и в условиях мирного времени. Поэтому с окончанием войны исследование операций продолжает успешно развиваться на новой основе.

Интересно отметить некоторые особенности проведения работ по исследованию операций. Прежде всего, в исследовании конкретной операции всегда участвует коллектив ученых различных специальностей. В группу исследователей, как правило, включается математик, которому часто принадлежит ведущая роль, затем специалист в данной области: инженер, экономист, офицер, и, наконец, специалист побочной специальности, часто — психолог или педагог, если исследование касается вопросов взаимоотношений в коллективе. Вся работа по проведению исследования как теоретическая, так и экспериментальная ведется группой совместно лишь с частичным разделением труда по специальностям.

Вторая интересная особенность состоит во взаимоотношениях группы исследования с руководителями самой операции: администрацией, армейским командованием и т. д. Группа исследования не вмешивается в руководство и не принимает на себя никакой ответственности за проведение операции. Исполнительная власть и ответственность целиком сохраняется за руководством операцией. Группа исследования получает всю имеющуюся информацию о цели, средствах и ходе операции, на основании которой и решается задача о наилучшем управлении; результат исследования и полученные рекомендации в кратком и понятном изложении доводятся до сведения руководителей, которые одни только уполномочены принять решение об их использовании.

При исследовании операций, как правило, применяются точные методы исследований. Факторы, не поддающиеся точному выражению в числах, но существенные для операции, часто также оцениваются численно, хотя бы приближенно. Основой изучения операций является алгоритмизация изучаемых процессов, построение абстрактных

математических моделей операции, — метод, типичный для кибернетики.

При исследовании операции, в зависимости от характера изучаемого явления, применяются многие разделы математики: анализ, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, численные методы. В ходе развития исследования операций постепенно сложились характерные типы задач. Одновременно появились и развились специальные математические приемы и методы решения типичных задач. К числу таких методов относятся, например, линейное программирование, динамическое программирование, теория массового обслуживания, теория статистических решений и, наконец, математическая теория игр — предмет настоящей книги.

Таким образом, теория игр является разделом математики, применяемым в области исследования операций. Теория игр изучает абстрактную модель конфликтной ситуации, т. е. ситуации, в которой участвуют по крайней мере две стороны, представляемые лицами, коллективами или управляющими системами, деятельность которых целеустремленно направлена, причем интересы сторон оказываются частично или полностью противоположными. Обилие таких ситуаций в реальной действительности делает теорию игр весьма актуальной. Не будет преувеличением сказать, что теория игр является математической основой военного искусства.

Но, кроме военных, имеется много других операций, в которых отдельные виды деятельности, отдельные части коллектива имеют различные цели, что часто приводит к типично конфликтным ситуациям. Раздел теории игр, рассматривающий «игры с природой», непосредственно смыкается с теорией статистических решений и математической статистикой. Этот раздел теории имеет дело с выработкой наилучшего поведения в ситуации, когда человеку противостоит обстановка, известная ему лишь отчасти, изучаемая им и требующая от него некоторой реакции. Теория игр, таким образом, имеет дело со всякого рода борьбой интересов.

Весьма существенно то, что задачи, имеющие дело с конфликтными ситуациями, не могут быть правильно сформулированы и полноценно решены без математической теории игр. Подобно тому как задачи о случайных событиях не могут правильно решаться методами только классического анализа и находят решение лишь с помощью

нового математического аппарата — теории вероятностей и математической статистики, так и конфликтные ситуации для своего моделирования не могут обойтись только теорией вероятностей и требуют новой математической дисциплины — теории игр.

Попытки решать игровые задачи неигровыми методами приводят к принципиальным затруднениям, к необходимости вводить *гипотезы* о том, «какое из возможных решений примет противник», или о том, «каково будет распределение вероятностей над множеством его возможных решений». При этом приходится намеренно закрывать глаза на то, что противник представляет собой разумное существо (или в некоторых случаях — сложный автомат, изготовленный разумным существом), а не детерминированный простой механизм и не случайный процесс и, таким образом, однозначное решение противника или распределение вероятностей могут просто *не существовать*. Распределение вероятностей существует в том случае, когда противник пользуется некоторым случайным механизмом (бросанием жребия) для определения своих действий. Но в таком случае характеристики этого случайного механизма определяются именно в рамках теории игр как «смешанная стратегия».

Однако теория игр в ее современном состоянии не является еще законченной теорией. Ценность ее сегодня заключается главным образом в отчетливой формулировке основных, принципиальных особенностей конфликтной ситуации, и это чрезвычайно важно для правильного подхода к задачам. Что же касается конструктивных методов решения игровых задач, то арсенал математической теории игр не может похвастать их обилием. Хорошо разработаны методы решения только одного типа игр, а именно конечных дискретных парных игр с нулевой суммой платы. Но даже для игр этого типа решение сколько-нибудь сложных игровых задач требует очень большой вычислительной работы. А в ряде задач (например, в непрерывных играх) общие методы решения еще мало разработаны. Ценным подспорьем в решении дискретных игр в нормальной форме являются методы линейного программирования.

Хотя практические методы решения игр и оставляют желать дальнейших усовершенствований, основные положения теории игр вполне строгие, и знание их абсолютно необходимо для правильного подхода к формулировке и анализу конфликтных ситуаций.

Весьма важно и то, что теория игр четко ставит вопрос о критериях оценки качества, сформулированного в пределах этой теории в виде «функции платы». Нужно сказать, что вопрос об определении или назначении платы в данной игре лежит вне теории игр, использующей плату как числовую меру успеха операции. То же можно сказать и о четком определении ограничений, наложенных на возможные действия участников операции. Правила игры однозначно определяют ограничения в виде «возможных ходов». Сама необходимость сформулировать правила игры и назначить плату заставляет исследователя задать себе целый ряд весьма существенных вопросов, выясняющих сущность задачи.

Во всей сумме проблем исследования операций вообще и в вопросах теории игр в частности должны правильно ориентироваться и руководители операций: администраторы, хозяйственные руководители, работники вооруженных сил и инженеры-разработчики оборудования и вооружения. Оценка пользы, приносимой данной операцией, оценка эффективности использования оборудования или вооружения, полезности тех или иных организационных мероприятий, определение наилучшего образа действия в данной ситуации — все это является предметом изучения исследования операций и теории игр и представляет первостепенный интерес для работников промышленности и техники.

Средства и методы исследования операций должны шире использоваться и глубже внедряться. Одним из важных путей к этому является популяризация методов исследования операций. Однако этому препятствует значительная сложность математического аппарата.

Книга, перевод которой предлагается, весьма полезна тем, что она окажется вполне доступной широкому кругу читателей. Автор намеренно ограничивает себя в средствах и при изложении материала пользуется только элементарной арифметикой. Стремясь облегчить читателю усвоение основных понятий теории, автор не останавливается перед повторениями и многократными разъяснениями. Книга написана в шутовском, нарочито «несерьезном» тоне. Такое изложение непривычно для русского читателя и порой может вызвать у некоторых чувство досады. Однако следует помнить, что, несмотря на шутовской тон автора, основные концепции теории игр отражены в книге вполне доброкачественно и полноценно.

Если не в написании книги, то в подготовке материалов

для нее принимали участие крупнейшие специалисты по теории игр и другим разделам исследования операций.

Книга изобилует разнообразными примерами, в сущности на примерах построено все изложение. Литературное оформление примеров, нарочито гротескное, иногда оставляет желать лучшего. Однако заменять примеры при переводе означало бы в сущности писать книгу заново. Авторский текст в переводе сохранен полностью. Мы позволили себе изменить действующих лиц лишь в одном примере, который был составлен автором в духе «холодной войны». Мы решили обратить острие сатиры автора в обратную сторону, надеясь на то, что склонность автора к юмору позволит ему оценить и нашу шутку.

При разборе примеров читателю следует помнить, что каждый пример представляет определенный тип задач, которые на практике могут встретиться далеко не в столь шутливой форме. Известно, например, что классическая задача линейного программирования о минимизации линейной формы при линейных ограничениях часто иллюстрируется шутливым примером подбора корма для цыплят. По-видимому, иногда эзоповский язык нужен для того, чтобы оставить в тени те реальные применения теории игр, которые не допускаются к опубликованию.

Книга Вильямса читается легко, позволяет без большого труда усвоить основные идеи теории игр и дает читателю возможность самому решать несложные задачи и, что гораздо важнее, правильно, с пониманием дела, формулировать задачи. В этом несомненное достоинство книги.

Это, однако, не означает, что одной книги Вильямса достаточно для серьезного усвоения теории игр. Сам автор правильно назвал свою книгу букварем. Таковым она и является.

Теория игр значительно обширнее, чем то, что можно узнать о ней из предлагаемой книги. Для читателей, которые после изучения букваря сочтут нужным продолжить изучение теории игр, мы рекомендуем литературу, приведенную в конце книги.

Мы надеемся, что издание русского перевода оригинальной книги Вильямса принесет пользу в деле популяризации математических методов исследования операций в нашей стране.

И. Полетаев

*Посвящается Эвелин, которая
даже прочитала эту книгу...*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Идея создания этой книги возникла однажды во время разговора группы людей, занимавшихся в течение нескольких лет проблемами развития и применения теории стратегических игр. Хотя эти люди интересовались непосредственно и в первую очередь применениями теории в военном деле, особенно в военно-воздушных силах, их косвенные интересы были значительно шире, практически безграничны.

Смысл обсуждения состоял в следующем: теория игр сильно выиграла бы от того, что большое число людей ознакомилось бы с ее сущностью; в свою очередь, эти люди смогли бы извлечь пользу от знакомства с теорией игр. В настоящее время с этой теорией знакома узкая группа профессионалов, занятых ее развитием. Другая, более широкая группа слышала о ней и представляет, хотя зачастую довольно туманно, ее цели и характер, причем представители этой группы вынуждены принимать или отвергать идеи теории игр, руководствуясь недостаточными знаниями. Поэтому казалось, что стоит попытаться перекинуть мост через пропасть, разделяющую математическую деятельность профессиональных жрецов-ученых и вынужденно слепую реакцию интеллигентного дилетанта, которому не довелось познакомиться с математическими тонкостями.

Сознавая, что разговор не должен на этом закончиться, группа решила поручить кому-нибудь написать такую книгу. После того как они перебрали многих превосходных, но несколько рассеянных кандидатов, я с удивлением обнаружил, что выбор пал на меня. Возможно, стоит перечислить те качества, которые позволили мне выиграть (или проиграть) на этих выборах: во-первых, я был всегда под рукой и доступен каждому; ведь всем научным работникам хорошо известно, что администратор всегда под рукой. Во-вторых, хотя я и был в течение нескольких лет связан чувственными отношениями с областью теории игр, тем не менее я оставался полным невеждой относительно большинства ее наиболее технических аспектов и вряд ли смог бы во время сочинения книги узнать о них достаточно много, чтобы серьезно испортить тот материал, который необходимо было довести до читателя. В-третьих, я занимал превосходное положение как с организационной точки зрения, так и благодаря прирожденной склонности сберегать энергию; это позволяло мне свободно обращаться к моим коллегам за помощью и советом, и такое разделение труда, по-видимому, устраивало всех.

Мои намерения относительно характера книги, ее цели и стиля, а следовательно и ее читателей, менялись несколько раз во время ее сочинения. В конце концов оказалось, что мы создали букварь — самоучитель по теории игр. Мы надеемся, что вы сможете раскрыть его и, преодолевая естественные затруднения, которыми сопровождаются любые интеллектуальные усилия, мучительные, но не смертельные, научитесь формулировать и решать простые задачи в соответствии с принципами теории игр.

Нам кажется, что это само по себе достаточно хорошо. Мы надеемся также, что приводимые примеры окажутся достаточно интересными, поскольку они предназначены для возбуждения воображения. Черпая материал для этих примеров из самых разнообразных областей деятельности, мы хотели поощрить вас рассмотреть некоторые из ваших собственных проблем в свете теории игр. Больше, пожалуй, нечего сказать в защиту этих примеров, так как они частенько бедны по содержанию и несколько непочтительны по тону. Сделать их одновременно простыми и богатыми по содержанию было трудно, а их тон является, во-первых, нашей защитой от экспертов в областях, затронутых в примерах (они-то понимают бедность их содержания), а, во-вторых, средством удержать читателя от сна.

В книге не содержится математики, выходящей за пределы простой арифметики с включением понятия отрицательных чисел. Иначе говоря, все, что требуется от читателя, — это уметь складывать, вычитать, умножать и делить положительные и отрицательные числа, причем обычно целые числа. Из текста исключена математическая символика, — что является очевидным достоинством книги, — хотя это и представило для автора сильнейшие затруднения. Тем не менее не должно быть никаких иллюзий: не каждому, даже при сильном желании, удастся формулировать и решать трудные задачи теории игр, так как в конце концов она является очень сложной наукой. Однако многие смогут научиться разбираться в некоторых проблемах. Еще больший круг людей сможет оценить возможности и пределы теории.

Мы полагаем, что теория игр по мере ее развития может стать одним из важнейших методов исследования и глубоко проникнуть во многие области жизни. Чтобы из желаемого это могло превратиться в действительное, должно быть выполнено несколько условий. Одно из них состоит в том, чтобы потенциальный потребитель теории игр ознакомился с ней и взял от нее все, что эта теория может дать на сегодня, или же подсказывал направления ее развития, ставя перед теорией игр те или иные задачи, с тем, чтобы она, в конце концов, могла оказать ему реальную помощь.

Я очень боюсь, что не смогу в полной мере выразить свою благодарность. Я без зазрения совести требовал от всех моих друзей и в особенности от моих коллег идей для примеров. Очень часто я брал эти идеи и применял их весьма странным образом, используя имена действующих лиц, сходные (а иногда и одинаковые) с именами моих благодетелей. Это позволило скрасить скучную работу по сочинению книги, и, таким образом, они оказали мне двойную помощь.

Однако боязнь кого-нибудь пропустить при перечислении (а это неизбежно, когда у тебя так много кредиторов) не может удержать меня от попытки опубликовать все мои долги. Прежде всего, неоценимую помощь в моем образовании оказали внушительные рукописи М. Э. Дрешера из РЭНД-корпорейшн и Дж. К. Маккинзи (работавшего ранее в РЭНД-корпорейшн, а затем в Стэнфордском университете), в которых суммированы десятки статей как моих коллег, так и других авторов. Я весьма признателен

за отдельные идеи Р. Э. Беллману, Р. Л. Белзеру, Н. К. Долки, Дж. М. Дэнскину, У. Х. Флемингу, Д. Р. Фулкерсону, Мельвину Хауснеру, Олафу Хельмеру, С. М. Джонсону, Абрахаму Каплану, А. М. Муду, Э. У. Пэк-сону, Э. С. Кваду, Р. Д. Шпехту и Дж. Венделю — все из РЭНД-корпорейшн, а также Э. У. Баранкину из Калифорнийского университета, Д. Х. Блекуэллу из Говардского университета, С. К. Клини из Висконсинского университета, Оскару Моргенштерну и А. У. Тэккеру из Принстонского университета, Ф. М. Морзу из Массачусетсского технологического института, Р. М. Троллу из Мичиганского университета и К. Б. Томпкинсу из университета Джорджа Вашингтона.

Следующие лица, помимо некоторых из перечисленных выше, прочли и комментировали (многие из них весьма подробно) рукопись: Бернард Броди, Дж. У. Браун, Р. У. Клюитт, Ф. Р. Коллбом, Дж. Б. Дантциг, М. М. Флуд, О. А. Гросс, К. Хастингс (младший), Б. У. Хейдон, С. П. Джефрис, Дж. Л. Кеннеди, Дж. А. Кершоу, Дж. С. Кинг (младший) и Р. А. Вагнер, — все из РЭНД-корпорейшн, а также Э. Ф. Беккенбах из Калифорнийского университета, генерал-майор в отставке Дж. Р. Кук, К. Ф. Мостеллер из Гарвардского университета и, по всей вероятности, другие.

Особенно я обязан Уоррену Уиверу из Рокфеллеровского фонда, который, побуждаемый дружбой и интересом к теме, очень подробно ознакомился с рукописью. Его прямодушные требования ясности изложения всегда представляли большую ценность, а иногда заставляли меня испытывать чувство досады, особенно в тех случаях, когда его стиль и искусство служили задаче достижения ясности в большей мере, чем мои.

РЭНД-корпорейшн позволила мне организовать свою службу так, чтобы иметь возможность выполнить свою задачу и написать книгу.

Само собой разумеется, что, когда автор такой небольшой книги обязан столь многим столь большому числу людей, единственное, на что он вправе претендовать, как на свое собственное, — это на ошибки, имеющиеся в книге. В подобной ситуации «Совершенный стратег» немедленно образовал бы коалицию с природой и разделил бы с ней ответственность за них.

Дж. Д. Вильямс.

«...тем не менее я убежден, что, рассматривая эти вещи ближе, читатель вскоре увидит в них не только простые игры, но и основание для интересных и глубоких размышлений».
Гюйгенс, 1657 г.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

Природа вопроса

Хорошо известно, что в настоящее время существует много способов начать книгу. Большинство из них оказываются при ближайшем рассмотрении просто плохими. Но нас терзает мысль, что где-то среди них, под спудом, лежат один-два способа, обладающие следующими благородными качествами: читателям сообщается в чистейшей прозе (хотя они могут и не подозревать об этом), о чем собирается рассказать автор, и одновременно это звучит для них как зов Лорелеи. После этого читатели разделяются на две группы. Первая, наиболее обширная и счастливая, не отрывается от книги до последней страницы, даже если ей прозят неисчислимые бедствия. В дальнейшем эти люди будут всегда благосклонно думать и отзываться о книге и, несомненно, будут иметь у себя по одному экземпляру книги в каждой комнате. Наиболее краткая характеристика второй группы заключается в том, что эта группа отличается от первой. На читателей этой группы книга действует как сильное снотворное, успокаивая все неприятные страсти. Полусонные, они откладывают книгу в сторону, и у них остается единственное желание поскорей подарить ее кому-нибудь.

Если бы нам удалось придумать подобную стратегию дебюта, то в ней превосходно воплощались бы тема и цель



нашей книги, так как на протяжении всей книги мы будем заниматься методами выбора наилучших стратегий даже в тех случаях, когда слово «стратегия» используется не в общепринятом смысле.

Нас интересуют такие положения, при которых люди преследуют взаимно противоположные цели, короче говоря, — конфликтные ситуации. Вопрос о том, как начать

эту книгу, совершенно очевидно, принадлежит к числу конфликтных ситуаций, поскольку интересы читателя и автора также противоположны, конечно, не в острой форме, но тем не менее определенно противоположны. Ведь мы надеемся вовлечь вас в тяжкий процесс мыслительной работы, в то время как вы, рассудительный человек, у которого достаточно много других забот, жаждете лишь отдыха или удовлетворения своего любопытства. Подобное столкновение интересов составляет сущность тех ситуаций, которые мы будем изучать.

Существенным является и другой элемент, который также имеется в нашем случае: каждый из нас может до *некоторой степени* управлять ситуацией. Вам доступны многие способы. Вы можете, например, швырнуть этой книгой в кота, вызвав тем самым раздражение как у автора, так и у кота и достигнув этого ценой некоторых издержек отчасти за счет чувства собственного достоинства и, уж несомненно, за счет ухудшения взаимоотношений с котом. Другой выход для вас — бегло просмотреть книгу, обойдя тяжелые места, и так далее. У автора также имеются некоторые способы управления, такие, как выбор содержания и манеры изложения... Не стоит, однако, об этом распространяться... В нашем примере имеются и другие характерные элементы: некоторые стороны ситуации не подчинены ни вам

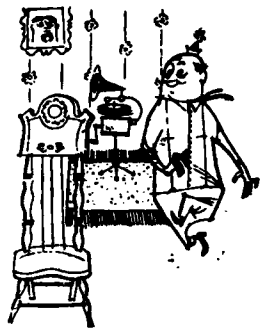


ни мне. Например, множество событий нашей прошлой жизни, а также различные внешние взаимодействия могут сыграть существенную роль во время сочинения и чтения книги. Данная частная проблема отыскания оптимального способа начать книгу имеет еще и другие особенности, о которых мы не скажем больше ничего, кроме того, что задача оказалась весьма трудной, иначе мы бы решили ее.

Поскольку ограничения, касающиеся содержания вопроса, столь немногочисленны и некатегоричны, можно сделать вывод, что круг конфликтных ситуаций, которые мы собираемся рассматривать, примечателен своей широтой. В принципе нет никаких возражений против рассмотрения обмена водородными бомбами между Марсом и Землей или любовной истории в стиле Баррет-Браунинг*. Соревнование может быть по характеру экономическим или представлять игру «музыкальные кресла»**. Или это может быть одной из бесчисленных стычек, происходящих в ходе обычной войны. Из этого не следует, что у нас есть патентованное средство против стратегических несчастий во всех этих областях, хотя есть надежда, что наш метод может оказаться полезным в любой из них.

Представляемый нами метод может быть назван привлекательным именем *Теория игр* или, если не бояться длинных выражений, *Теория стратегических игр*. Если вы впервые встречаетесь с подобным невероятным сочетанием слов, то у вас, очевидно, сразу возникает вопрос: Почему? Дело в том, что эта теория получила такое название потому, что изучение игр является полезной отправной точкой при изучении стратегии. Но такой ответ не помогает, так как вновь раздается: Почему?

Потому что игры содержат много такого, что является общим для всех конфликтов, и сравнительно легко поддаются описанию и изучению. (В данном случае, используя слово «игра» в названии теории, мы будем называть



* Элизабет Баррет-Браунинг (1800—1861 гг.) — английская поэтесса, автор религиозно-морализаторских поэм. — *Прим. пер.*

** Игра, в которой несколько игроков маршируют под музыку вокруг небольшого числа стульев, и как только музыка прекращается, каждый старается занять место на стуле. — *Прим. пер.*

игрой любой конфликт, если он будет рассматриваться в свете этой теории.)

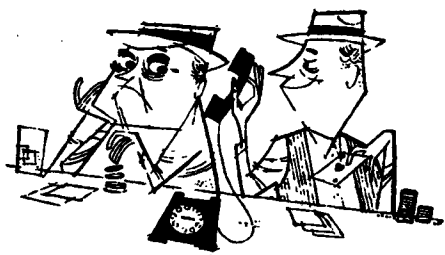
Чтобы проиллюстрировать эту мысль, рассмотрим игру в покер, обращая внимание на те ее особенности, которые характерны, скажем, для военного конфликта. Итак, вы и четверо других изучаете своих партнеров, несомненно, надеясь достичь выигрыша. Мы сразу же замечаем, что интересы игроков противоположны: каждый желает выиграть, и поскольку выигрыш для одного обязательно означает проигрыш для других, то интересы игроков взаимно противоположны. Это составляет основу конфликта. Мы замечаем, что некоторые элементы игры зависят целиком от личного выбора и находятся полностью под вашим управлением. И так как то же самое справедливо для каждого игрока, то, следовательно, имеются элементы, которыми вы не можете управлять, и, что еще хуже, они управляются людьми, интересы которых враждебны вашим. И, наконец, имеются такие элементы игры, которые, в соответствии с правилами, находятся вне власти любого из игроков, например порядок карт в колоде. Эти элементы можно рассматривать как находящиеся под контролем природы*, которая является воплощением солидности и стабильности, немного насмешливо относится к вашим важным делам, но не испытывает к вам сознательной вражды. Все это хорошо известные черты любой конфликтной ситуации.

Другим важным фактором является состояние информации, или разведки, по военной терминологии, которая обычно несовершенна и поэтому приносит много неприятностей: мы не знаем, какие карты на руках у соседа. Имеется также возможность обмана, когда вы или ваши противники пытаетесь ввести друг друга в заблуждение относительно ваших намерений и сил. Вам могут прийти в голову и другие аналогии — людей время от времени даже убивают.

Однако аналогии не должны заходить слишком далеко. Вы можете вспомнить многие особенности военного дела, которые никак не отражаются при игре в покер. Один танк может иногда в бою подбить два танка, в то время как два валета в покере всегда бьют туза. Можно, конечно, так модифицировать покер, чтобы при раскрытии карт бы-

* Автор здесь и в дальнейшем под природой подразумевает случайный характер явлений реальной жизни и, видимо, для удобства изложения персонализирует ее. — *Прим. пер.*

ли возможности подобного рода. Можно, скажем, установить правило, по которому туз бьет любую «пару» вплоть до валетов всякий раз, когда при раскрытии карт раздается телефонный звонок от жены одного



из игроков. Однако остается фактом то, что игры не отражают всей сложности военных действий или других конфликтных ситуаций повседневной жизни. Именно поэтому их и используют в качестве отправного пункта при изучении стратегии. Ведь на первых стадиях разработки теории невозможно одновременно рассматривать множество переплетающихся между собой факторов.

По-видимому, ясно, однако, что в играх содержатся некоторые основные элементы, которые имеются почти в любой существенной конфликтной ситуации. Значит ли это, что мы узнаем много полезного, начиная изучение с развлекательных игр? Не обязательно. Может оказаться, что военные, экономические и социальные ситуации настолько сложны, что к ним нельзя приложить игровые концепции. Это тем более вероятно, что существующая в настоящее время теория игр не в состоянии справиться с реальными развлекательными играми без их упрощений. Поэтому мы ограничены сегодня областью очень простых реальных игр и выхолащенных версий таких сложных игр, как покер.

Может показаться странным, что кто-то расходует драгоценную энергию на изучение и развитие теории игр, да еще хочет и вас вовлечь в это дело! Причиной этих занятий теорией игр являются надежда и вера, которые мы черпаем из успехов, имевших место в прошлом. Ведь разработка искусственно упрощенных теорий является одним из важнейших научных методов, особенно в так называемых точных науках, широко использующих математический анализ. Если биофизик может успешно использовать упрощенную модель клетки, а космолог — упрощенную модель вселенной, то мы с полным основанием можем ожидать, что упрощенные игры могут оказаться ценной моделью более сложных конфликтов.

Безусловно, смертность среди подобных теорий выше,

чем та, которую могла бы вынести любая военная организация во время *своих* действий, и даже вполне успешные теории в действительности далеко не бессмертны. Самое большее, чего можно ожидать от такой теории, — это ее применимости к некоторым ограниченным проблемам и в должное время.

Один исторический пример

Полезно, пожалуй, вспомнить одну успешную научную абстракцию, которая может служить примером героического свехупрощения.

Предположим, что мы можем в целях изучения законов движения небесных тел солнечной системы заменить каждое из них точкой. Предположим далее, что каждая точка обладает массой, равной массе заменяемого ею небесного тела. Каждая пара точек испытывает взаимное притяжение. Мы можем вычислить силу притяжения, умножая массу одной точки на массу другой и деля произведение на квадрат расстояния между точками. Предположим, наконец, что мы можем пренебречь всем остальным и что наша теория не так уж глупа, иначе мы бы никогда не вспоминали о ней.

И действительно, эта теория, теория тяготения, в течение двух с половиной столетий была достаточной, чтобы предсказывать движение планет, — и это в условиях непрерывного контроля со стороны специалистов по позиционной астрономии, которые, следует честно признать, довели точность до крайних пределов. Самое неприятное расхождение с теорией произошло в отношении орбиты Меркурия, которая по необъяснимым причинам отклонялась от предсказанной траектории на одну пяти тысячную радиана за *столетие*, указывая на то, что теория, в конце концов, приближительна. Это расхождение было объяснено усовершенствованной теорией, разработанной Эйнштейном.

Некоторые уроки и параллели

Элементы теории тяготения, изложенные выше, пришли в голову, конечно, не сразу после того, как на нее упало яблоко. К тому времени благодаря главным образом трудам Тихо Браге имелось много сведений относительно действительного поведения планет. Кеплер извлек из них несколько простых правил. Имея это все в своем распоряжении и призвав на помощь новое математическое изобре-

тение — дифференциальное исчисление, Ньютон вскоре и пришел к упомянутой выше абстракции. Он имел несчастье применить ее сразу к исследованию движения Луны, и это стоило ему нескольких лет неудовлетворенности своей теорией, так как расчеты не совпадали с действительностью.

В этом примере для нас содержится несколько полезных уроков. Первый состоит в том, что теории могут быть очень простыми, в то время как явления, которые они моделируют, далеко не столь просты. Никто из предполагавших, что движение планет управляется простыми законами, не брал на себя смелость предсказывать положение планет. У наших предков было достаточно оснований называть их Странниками*. Второй урок заключается в том, что теория может быть очень общей, охватывая большое разнообразие явлений, не будучи при этом бесплодной. Теория тяготения имеет более широкое приложение, чем указано выше, так как она применима ко *всем* частицам, обладающим массой, а не только к небесным телам солнечной системы. Третий урок: теории часто, или даже обычно, несовершенны, хотя теория, приведенная в качестве примера, оказалась в этом отношении необычайно хорошей. Следующий очень важный урок заключается в том, что теория затрагивает только один из интересующих нас факторов, могущих оказывать влияние на движение тел, более того, этим фактором часто можно пренебречь. Например, сила притяжения между двумя самолетами, летящими в тесном строю, эквивалентна весу пепла сигареты длиной около полутора миллиметров.

Еще один урок касается того, как важно иметь в своем распоряжении существенные научные данные. В этом отношении Ньютон был в несколько лучшем положении, чем мы, пытающиеся создать абстракции в такой области, как конфликт. Ведь большинство данных, которыми мы располагаем, относится к отдельным людям, их физической и умственной структуре, здоровью, способностям и так далее и в гораздо меньшей степени к обобщенным харак-



* Странниками в Англии в старину называли блуждающие звезды, планеты. — *Прим. пер.*

теристикам социальных групп. *Взаимоотношения* между людьми как индивидуумами, входящими в состав групп, или между группами людей еще не изучены в сколько-нибудь удовлетворительном объеме. А эти взаимоотношения и являются тем материалом, из которого возникает конфликт.

Последний урок или, по крайней мере, интересное замечание состоит в том факте, что Ньютон почти одновременно разработал теорию тяготения и новую область математики — дифференциальное исчисление, без которого теория была бы практически неприменимой. Действительно, дифференциальное исчисление играло решающую роль во всех физических науках в течение четверти тысячелетия. Весьма заманчиво поразмыслить над тем, вызовет ли теория игр к жизни новую математическую дисциплину, которая сыграет аналогичную роль при изучении взаимоотношений между людьми. Было бы преждевременно утверждать это, так как до сих пор очень мало было такого, что можно было бы признать совершенно новым, а во многом можно различить заимствования из существующих ветвей математики. Это, однако, может произойти и, пожалуй, даже должно произойти, если только приложение метода достигнет полного расцвета. Интересно отметить, что первоначальная разработка теории игр принадлежит одному из действительно великих математиков и разносторонних умов наших дней — Джону фон-Нейману*.

Теория игр очень похожа по духу на теорию тяготения. Обе пытаются рассматривать широкий класс явлений в соответствии с абстрактными моделями. Ни одна из этих теорий не стремится моделировать все те сложные явления, которые могут встретиться в любой ситуации. Одна из них занимается действиями живых существ лишь в той степени, в какой это касается некоторых произвольных действий. Так, теория тяготения может дать великолепные ответы на вопросы относительно общих перемещений летчика, находящегося на высоте 12 000 метров без самолета, парашюта или какого-нибудь другого приспособления. Тео-

* Первая статья фон-Неймана по теории игр была опубликована в 1928 г., но первое подробное изложение теории появилось в 1944 г. («Теория игр и экономического поведения» Джона фон-Неймана и Оскара Моргенштерна, издательство Принстонского университета). Проблемный характер этого сочинения был тогда же оценен некоторыми обозревателями, такими, как А. Х. Коупленд, который писал: «Потомки будут рассматривать эту книгу как одно из важнейших научных достижений первой половины двадцатого столетия» («Бюллетень Американского математического общества», 1945, т. 51, стр. 498—504).

рия игр, с другой стороны, больше интересуется стратегией, применяя которую, летчик очутился в таком положении, а также вопросами оптимальности возможных стратегий. Иначе говоря, она вступает в область принятия решений и свободной воли.

Это сравнение с теорией тяготения будет неполным, если не затронуть вопроса о сравнительной полезности и ценности (в общем смысле) обеих теорий (не говоря уже об их социальной значимости). Одна вполне созрела и прочно утвердилась в качестве весьма полезного приближения к реальности, в то время как другая представляет собой здорового малыша, которого может унести чума или который может вырасти и занять важное положение, но сегодня он может дать очень немного. Вполне законно, что он немного шумлив, как и всякий малыш.

После того как мы позволили вам ощутить горький вкус математики, которая может встретиться при изучении теории, мы спешим заверить вас, что наше изложение будет на уровне букваря, т. е. элементарного пособия для обучения чтению. Мы четко представляем себе, что ваши знания математики не выходят за пределы обычной арифметики. Если бы это было не так, то из простого милосердия следовало бы попросить вас закрыть эту книгу.

Некоторые замечания относительно метода

Иногда говорят, что теоретический анализ явлений значительно усложняется, если в рассматриваемых явлениях участвуют люди. Наша относительная отсталость в этих вопросах, по-видимому, служит подтверждением этого мнения. Те небольшие успехи, которые достигнуты сегодня в этом направлении, теряются среди страстных протестов и утверждений о том, что эта задача слишком трудна. Стремлению к простой теории (под простой теорией подразумевается несколько аксиом и правил преобразования в более или менее количественном представлении) мы обязаны любителям, обычно ученым-физикам. Ученые, занятые по профессии исследованием человека и его деятельности, часто рассматривают таких любителей как преждевременно развившихся детей, которые, не понимая истинной сложности человека и его деяний, глядят невинными глазами и воображают, что их игрушечные мечи будут разить живых драконов точно так же, как и неодушевленных. Поскольку ученые, занимающиеся теорией игр,

принадлежат, очевидно, к числу именно таких детей, то вы, несомненно, предвидите, что сейчас мы сделаем некоторые успокоительные замечания и, по всей вероятности, за счет профессионалов, иначе мы не поднимали бы этого вопроса. Если вы подумали именно так, то это доказывает, насколько в жизни все просто, и придает вам репутацию многообещающего исследователя человеческой натуры.

Для ученого, занимающегося теорией игр, движущей силой не обязательно является незнание истинной сложности конфликтных ситуаций, в которых принимает участие человек, потому что он почти наверняка пытался бы теоретизировать, если бы его знания не были столь несовершенны. Напротив, мы убеждены в том, что его уверенность, даже, пожалуй, безрассудная отвага, объясняются его знанием того, что проблемы неодушевленного мира давно оставили далеко позади как его самого, так и его методы. Он не мог начать изучение этих ситуаций, рассматривая их через микроскоп и одновременно сохраняя широкое поле зрения, потому что все терялось в обилии деталей и в сложности их сочетаний. С тех пор, однако, как он достиг некоторых успехов, он надеется, что громоздкость и сложность не могут полностью скомпрометировать его методы.

Он отдает себе также отчет в том, что его успехи не всеобъемлющи, спорадичны и его знания значительно менее совершенны, чем это кажется непосвященным новичкам; к категории непосвященных относятся, конечно, и те, которые думают, что постичь одушевленный мир много труднее, чем неодушевленный, потому что даже неодушевленный мир познан столь «великолепно». Ведь современные физики

имеют самые туманные представления относительно некоторых элементарных частиц (хотя это и не помешало им успешно создать атомную бомбу). Их любимая частица, электрон, покрыта тайной; они не могут ответить даже на такой элементарный вопрос, где он находится в настоящий момент и, одновремен-



но, куда он движется; хуже того, они пришли к убеждению, что на такой вопрос никогда нельзя будет дать строгий ответ. У математиков имеются свои слабые места. Например, после нескольких веков работы они все еще не знают, какое минимальное число цветов требуется для того, чтобы нарисовать географическую карту так, чтобы соседние страны не были окрашены в одинаковый цвет. Справедливости ради следует сказать, что они догадываются, что это число равно четырем, но доказать этого не могут.

За последнее столетие физики дополнили свой колчан новой стрелой, которая до сих пор была лишь вспомогательным оружием в бою, а именно математической статистикой. В настоящее время они начали находить для нее более важные применения, и имеются признаки того, что в дальнейшем ее роль в качестве метода изучения одушевленного мира будет возрастать. Теория игр имеет много точек соприкосновения с математической статистикой. Самым ранним доказательством ее мощи и показателем широты применения является ее успех при учете годового распределения числа смертельных случаев в прусской армии из-за брыкания лошадей *. Если вы начнете протестовать, что поведение лошадей легче предугадать, чем поведение людей, то мы по секрету сообщим вам, что метод применим в такой же степени к распределению числа смертель-

* Данные собраны по десяти армейским корпусам за период в 20 лет (1875—1894 гг.). Ежегодно происходило следующее количество смертельных случаев в каждом корпусе:

Число смертельных случаев	Количество месяцев, в течение которых происходили события, указанные в первом столбце	
	наблюдаемое	вычисленное
0	109	109
1	65	66
2	22	20
3	3	4
4	1	1

Вычисленные значения получены на основании единственного предположения, что в среднем один смертельный случай происходил раз в 20 месяцев, и на основании того, что статистическая теория особенно хорошо применима к редким событиям.



ных случаев среди лошадей, забитых пруссаками до смерти. Все страховое дело является примером применения статистической теории к некоторым аспектам человеческой деятельности. Отчетные балансы страховых компаний представляют красноречивое доказательство ее успехов. Неверно, что человеческие поступки совершенно нельзя предсказать.

Чего же мы можем ожидать от теории игр? Несомненно, она чересчур проста для того, чтобы охватывать все стороны любой военной, экономической или социальной ситуации. С другой стороны, она достаточно обща, чтобы освещать ряд критических аспектов многих интересных конфликтных ситуаций.

В настоящее время необходимо сделать несколько важных вещей. Первое — развивать дальше теорию, чтобы можно было решать более трудные и более разнообразные проблемы; эту задачу должны решить ученые. Второе — найти такие ситуации, к которым можно было бы с пользой применить существующую теорию. Одно из назначений этой книги состоит в том, чтобы увеличить число людей, которые, имея представление об элементах теории, могли бы распространить применение теории на те проблемы, с которыми они сталкиваются в своей работе. (Те читатели, которые будут особенно упорными, смогут сами формулировать и решать простые задачи.) Другой задачей является сбор данных в области человеческих взаимоотношений с тем, чтобы усовершенствовать основания для теории.

Игроки и люди

Перейдем, наконец, к самой теории игр. Мы начнем с рассмотрения покера и будем продолжать это занятие ровно столько, чтобы успеть ввести некоторые понятия и

терминологию, которыми будем пользоваться на протяжении всей книги. Вы и четверо других все еще сидите за столом с колодой карт, некоторой суммой денег или другими ценностями и с заранее согласованным кодексом правил, которыми предусмотрены все возможные ситуации. Правила указывают, как следует сдавать карты, кто и когда может делать ходы, как ценятся различные комбинации при раскрытии карт и как следует распоряжаться банком.

Одной из очевидных вещей в данной ситуации является то, что в игре принимает участие пять игроков. Однако здесь может быть больше очевидности, чем истины, поскольку двое из игроков могут образовать коалицию перед началом игры, договорившись делить поровну все выигрыши и проигрыши. Если они так сделали, то резонно предположить, что они будут играть в своих общих интересах, насколько им позволят обстоятельства. Так, если один из участников коалиции видит, что у его партнера хорошие шансы на выигрыш при раскрытии, то сделает все зависящее от него, чтобы помочь партнеру. Если имеется только три неспасовавших игрока, то он может даже пасовать, чтобы тяжесть объявления легла на игрока, не входящего в их коалицию. Или же он может повысить ставку, чтобы увеличить банк, даже если знает, что с его картами ему не выиграть. Короче говоря, участники этой коалиции будут действовать как один игрок с двумя головами.

В том случае, когда два игрока образовали коалицию, очевидно, целесообразно считать, что в игре принимают участие четыре игрока, а не пять. Таким образом, мы пришли к заключению, что *имеет смысл считать число групп с противоположными интересами*, а не число людей, сидящих за столом. Согласно этому принципу бридж* следует считать игрой с двумя игроками, так как в ней имеется две группы интересов. Можно отметить, что слово «игрок» в том смысле, в каком мы его применяем, служит для обозначения как юридических лиц и организаций, так и обычных людей.

Вы можете, кроме того, рассматривать покер как парную игру или игру с двумя игроками, в которой вы являетесь одним из игроков, а остальные четыре партнера — вторым игроком. Если они смотрят на это иначе, чем вы, то они не получают никакой выгоды, а вы не понесете никаких потерь от союза, придуманного вами для них. Будет

* Или доминио. — Прим. ред.

похоже на то, как будто бы они создали коалицию со слабыми внутренними связями или коалицию, обладающую каким-то дефектом, который сделал ее неэффективной.

Число игроков или, точнее, число групп интересов, имеющих в игре, является одной из основных характеристик игры в теории игр. От этого числа зависит весь характер ситуации и приемы изучения. Имеется три значения числа игроков, которые следует различать: один, два и более двух.

Примером игры с одним игроком является пасьянс, который раскладывают для развлечения и в котором присутствует единственное заинтересованное лицо — вы. Даже если вы будете платить по цене, скажем, один доллар за карту из колоды некоему лицу, которое пожелает, быть может, заплатить вам по пяти долларов за каждую уложенную на место карту, то и в этом случае ничего не меняется: в расчет приходится принимать только случайные события, а не ходы разумного противника. С точки зрения теории игр игры с одним игроком неинтересны. Их решение очень ясно, по крайней мере в принципе: вы просто-напросто выбираете оптимальный способ действий, который приносит вам наибольшую выгоду, и действуете по этому плану. Если имеются случайные события, вы выбираете такой способ, который приносит вам наибольшую выгоду в среднем, и действуете этим способом. Вы можете пожаловаться на то, что мы упускаем огромное количество практических трудностей, и будете правы.

Однако игры с одним игроком (включая пасьянс) можно рассматривать как особый вид игр с двумя игроками, в которых вы — один из игроков, а природа — второй. Такая точка зрения может быть весьма полезной, даже если вы не верите, что природа — это враждебное существо, которое только и ищет случая перехитрить вас. Например, вы можете недостаточно знать «привычки» природы, когда выбираете способ, обеспечивающий вам наибольший выигрыш в среднем. Или может случиться, что вы знаете способы действий, доступные природе, но не знаете, как часто она использует каждый из них. В этом случае теории игр есть что сказать: она приведет вас к наиболее экономичной, осторожной игре, как мы увидим дальше.

Большой интерес представляет игра с двумя реальными игроками — парная игра. Она часто встречается в жизни, и ее решение часто в наших силах как в принципе, так и в практическом смысле. Она представляет собой обычную

конфликтную ситуацию. У вас есть противник, который, как вы должны предположить, обладает разумом и хочет у вас выиграть. Если вы выбрали некоторый способ действий, который кажется вам выгодным, он может раскрыть ваши планы, расставить вам ловушки и извлечь для себя выгоду из вашего частного выбора. Многие ситуации, которые, строго говоря, не являются играми с двумя игроками, можно рассматривать как таковые. Примером может служить покер с пятью игроками; в этой игре вы можете приписать все интересы, которые имеются за столом, двум «игрокам» — себе и всем остальным. Большая часть того, что сделано на сегодня в теории игр, относится к парным играм.

Если число различных игроков, т. е. групп интересов, больше двух, необходимо принять во внимание качественно новые явления. Принципиально новым будет то, что в процессе игры может меняться состав играющих по мере того, как создаются и разрушаются временные коалиции, или же некоторые игроки могут образовать на определенном этапе игры постоянную коалицию, если это им выгодно. Это может случиться и в покере и, таким образом, скомпрометировать наше представление о покере как об игре с двумя игроками. Вы можете, например, объединиться с остальными игроками, не показывая вида, но всерьез, против одного игрока, которому сильно везет. Причиной тому может быть ваше опасение, что он покинет вас, унося с собой все деньги, или же вы захотите, чтобы выиграл и тот, кому мало везет. Наши знания в области игр с числом игроков больше двух менее совершенны, чем в области парных игр. Этот вопрос весьма сложен и в сущности выходит за пределы данной книги.



Платеж

Мы уже указывали, что число игроков, принимающих участие в игре (понимая под «игроком» определенную группу интересов), является одним из важных критериев при классификации и изучении игр. Другим критерием является платеж. Что произойдет в конце игры? Что происходит, скажем, в конце партии покера? В этом случае обычно происходит обмен капиталами. Если игроков двое, скажем,

вы (Синие) и мы (Красные), то если бы вы выиграли 10 долларов, то мы проиграли бы тоже 10 долларов. Другими словами,

Выигрыш Синих = Прогрышу Красных

или, что то же,

Выигрыш Синих — Прогрыш Красных = 0.

Мы можем написать это еще иначе

*Платеж Синих + Платеж Красных = 10 долларов —
— 10 долларов = 0,*



если уговориться, что выигрыши — положительные числа, а проигрыши — отрицательные.

Не всегда получается в точности, что сумма платежей равна нулю. Если, например, игрок, который сорвал банк, должен выделить 10% выигрыша на выпивку или на другие расходы, такие, как взятка постовому полисмену на углу, то в этом случае сумма платежей не равна нулю; в самом деле

*Платеж Синих + Платеж Красных = 9 долларов —
— 10 долларов = — 1 доллар.*

Приведенные выше два случая иллюстрируют фундаментальное различие между играми: весьма существенно, равна или не равна нулю сумма платежей всех игроков, считая выигрыши положительными платежами, а проигрыши — отрицательными. Если она равна нулю, то игру называют *игрой с нулевой суммой*. Если она не равна нулю, то игра называется (у математиков временами не хватает воображения) *игрой с ненулевой суммой*. Значение этого

различия легко видеть. В игре с нулевой суммой мы имеем дело с добротной, четкой, замкнутой системой; оба игрока и ценности заперты в одной комнате. Требуются, конечно, определенные усилия, чтобы разобраться в такой игре и решить ее. Игра с ненулевой суммой содержит все трудности игры с нулевой суммой плюс дополнительные неприятности, вызванные необходимостью учитывать новые факторы. Эти новые факторы можно учесть, если добавить фиктивного игрока — снова природу или, скажем, полисмена. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned}\text{Платеж Синих} &= 9 \text{ долларов,} \\ \text{Платеж Красных} &= -10 \text{ долларов,} \\ \text{Платеж полисмена} &= 1 \text{ доллар.}\end{aligned}$$

Поэтому теперь

$$\begin{aligned}\text{Платеж Синих} + \text{Платеж Красных} + \text{Платеж полисмена} &= \\ &= 9 \text{ долларов} - 10 \text{ долларов} + 1 \text{ доллар} = 0,\end{aligned}$$

что представляет собой в некотором роде игру с тремя игроками и с нулевой суммой, причем роль третьего игрока напоминает роль камня, подвешенного вам на шею. Но вспомним, что игры с тремя игроками не пользуются у нас такой же симпатией, как парные игры, из-за того, что в них имеются трудности, связанные с возможностью образования коалиций. Этих трудностей нет в играх с нулевой суммой, особенно если последние являются парными играми.

Салонные игры, такие, как покер, бридж и шахматы, обычно являются играми с нулевой суммой. Многие другие конфликтные ситуации можно также рассматривать как игры с нулевой суммой. Большая часть достижений теории игр на сегодня относится к играм этого типа. Хотя в области игр с ненулевой суммой была проведена и проводится некоторая работа, тем не менее такие игры выходят за пределы нашей книги. Неприятным случаем, представляющим особый интерес, является парная игра, в которой номинально одинаковые платежи представляют различную пользу для игроков. Подобная ситуация встречается часто даже в салонных играх.

Стратегии

Слово «стратегия», точно так же как слово «игрок», имеет в теории игр значение, несколько отличное от обычного. В повседневной жизни это слово обозначает особенно искусный и умный план, в то время как в теории игр оно обозначает любой *исчерпывающий* план. *Стратегия есть некоторый план, настолько исчерпывающий, что он не может быть нарушен действиями противника или природы*, так как все, что может предпринять противник или природа, вместе с набором ваших возможных действий, является частью описания стратегии.

Итак, стратегия в теории игр отличается в двух важных отношениях от стратегии в обычном смысле: она должна быть абсолютно исчерпывающей и она может быть в высшей степени неудачной, потому что единственное, что от нее требуется, — это исчерпывающая полнота. Так, в покере все стратегии должны предусматривать то обстоятельство, что у вас на руках может оказаться королевский набор* карт пиковой масти, а некоторые из стратегий будут требовать, чтобы вы сразу же пасовали. Последние не являются доблестными стратегиями, тем не менее они остаются стратегиями, — в конце концов, объявлял же один игрок в бридж «7 без козыря», имея на руках 13 пиковых карт. В игре, которая поддается полному анализу, мы можем в принципе, если не фактически, предусмотреть все возможности и поэтому можем перечислить все возможные стратегии.

Теперь мы назовем еще один критерий, по которому можно классифицировать игры, а именно: число стратегий, имеющихся в распоряжении каждого игрока. Так, если Синие имеют три стратегии, а Красные — пять, то игра называется игрой «3×5» (читается «игра три на пять»).

Когда мы говорили о числе игроков, то особенно отмечали некоторые числа — один, два и больше двух. Аналогично можно различать критические значения числа стратегий. Очень важно различать две категории. К первой относятся игры, в которых игрок, имеющий *наибольшее* число стратегий, имеет их все же конечное число; это означает, что он может пересчитать их и закончить пересчет в пределах некоторого интервала времени. Ко второй категории относятся те игры, в которых по крайней мере один

* Королевский набор — туз, король, дама, валет и десятка одной масти.— *Прим. пер.*

игрок имеет в своем распоряжении бесконечно много стратегий или, если слово «бесконечно много» вас пугает, в которых по крайней мере один игрок имеет число стратегий, превышающее любое определенное число, которое вы можете назвать (к слову сказать, это как раз то, что математик понимает под «бесконечно большим» числом).

Хотя бесконечные игры (как называют последнюю категорию игр) охватывают много интересных и полезных применений, теория таких игр трудна. «Трудность» здесь означает, что существует по крайней мере несколько задач, которые математики не знают, как решить. Кроме того, это означает, что мы не знаем, как о них рассказать вам в пределах скромных педагогических границ этой книги. Подобные игры требуют для их анализа применения математики на уровне дифференциального исчисления и выше, много выше. Поэтому мы решили ограничиться здесь конечными играми.

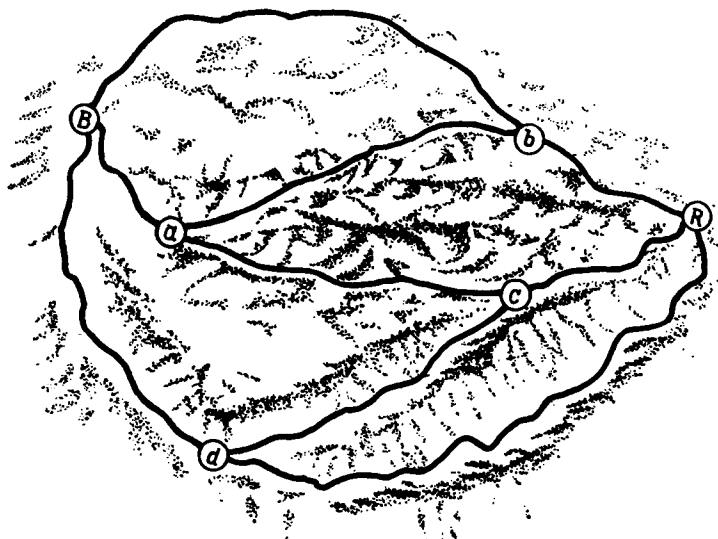
В последующих главах мы нашли удобным различать три случая конечных игр, а именно такие игры, в которых игрок, имеющий наименьшее число стратегий, имеет их точно две, точно три и больше трех. Кроме того, соображения относительно экономии труда, усталости и благополучия заставили нас выработать особый взгляд на игры, имеющие больше десяти стратегий.

Платежная матрица

Теперь мы в состоянии завершить описание игр, т. е. конфликтных ситуаций, в форме, требуемой для проведения анализа методами теории игр. Мы напомним вам о всех ограничениях, указанных нами ранее, для того, чтобы направить дальнейшее изложение на тот класс игр, который будет изучен в этой книге. Итак, наше изложение относится, в первую очередь, к конечным парным играм с нулевой суммой.

Игроками будут Синие и Красные. У каждого из них есть несколько возможных стратегий, которые мы считаем известными; перенумеруем их в целях опознавания. Стратегии будут называться «Синие-1», «Синие-2» и так далее до «Синие-9», в частном случае. Стратегии Красных будут носить названия, скажем, «Красные-1» и до «Красные-5». Такую игру мы назовем игрой 9×5 («девять на пять»). Чтобы показать, что такая игра 9×5 существует, рассмотрим пример игры, которую можно осуществить на помещенной ниже карте дорог.

Правила игры требуют, чтобы Синие перемещались от точки B до точки R по изображенной на карте системе дорог, не возвращаясь назад в точку B и не проходя дважды по одному и тому же участку дороги. Для Красных правила другие: они должны перемещаться от точки R до точки B , передвигаясь всегда в западном направлении. Возможно, что Синие не желают встретиться с Красными и меньше ограничены в своем поведении. Вы можете легко



проверить, что для Синих имеется 9 маршрутов, а для Красных — 5*.

Правила должны также содержать сведения, по которым можно определить, что произойдет в конце каждой партии: каков будет платеж, если, скажем, Синие применили стратегию Синие-7, а Красные — стратегию Красные-3? Имеется $9 \times 5 = 45$ таких пар и, следовательно, 45 возможных значений платежа, и все их необходимо знать. Каковы бы ни были значения, вполне возможно за-

* Чтобы не расстраивать вас на этом начальном этапе изучения теории игр, мы перечислим сами все эти маршруты. Синие могут перемещаться по следующим маршрутам, начиная от точки B и кончая точкой R :

$b, bac, bacd, ab, ac, acd, dcab, dc, d.$

Красные могут перемещаться по маршрутам:

$b, ba, ca, cd, d.$

писать эту информацию в виде следующей бухгалтерской формы:

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1					
	2		-8			
	3					
	4					
	5					
	6				3	
	7					
	8					
	9					

Подобная таблица, в каждой клетке которой указан платеж, называется *платежной матрицей*. Условимся, что положительные числа в клетках матрицы означают выигрыш Синих и, следовательно, проигрыш Красных и наоборот. Таким образом, если в платежной матрице имеются числа 3 и -8, как показано на нашем чертеже, это означает, что если Синие применяют стратегию Синие-6, а Красные — стратегию Красные-4, то Синие выигрывают 3 единицы, в то время как, если стратегия Синие-2 применена против стратегии Красные-2, Красные выигрывают 8 единиц.

После того как первоначальная задача приведена к такому виду, можно применить анализ на основе теории игр, так как вся существенная информация представлена описанием стратегий, которые перечислены по краям матрицы, и значений платежей (элементов матрицы), размещенных в ее клетках. Это и есть модель конфликта, применяемая в теории игр, и справедливость последующего анализа целиком зависит от того, насколько эта форма представления — набор стратегий и платежная матрица — соответствует действительности.

Следует, пожалуй, подробнее разъяснить наше последнее утверждение. Ограничим наше внимание на некоторое время двумя сложными объектами. Первый из них — реальная конфликтная ситуация, в которой принимают участие Синие и Красные. Она включает правила, законы, запреты, которые действуют *в жизни*, — все, что имеет значение для действительной игры. Второй объект тоже реальный, но значительно проще: это правила, которые *мы записали*, стратегии, которые мы перенумеровали и описали *на бумаге*, платежная матрица, которую мы *построили*. Между этими двумя объектами имеется связь, мы надеемся, существенная связь. Второй объект — знаки на бумаге — является абстракцией первого. Мы можем обнаружить некоторые неочевидные свойства второго объекта, используя методы теории игр, и эти свойства могут представлять некоторую ценность для первого объекта — реальной игры. Все будет зависеть от справедливости абстракции.

Главной темой этой книги будет изучение того, как теория игр обращается со вторым объектом — абстрактной моделью. Трудности и вопросы, которые возникнут при этом, будут в принципе техническими, а не теоретическими. Это будут вопросы изобретательности при обращении со сложными математическими проблемами или вопросы о том, какими средствами избежать утомительного труда; в общем, это будут гимнастические упражнения высшего класса. Перед тем как перейти к сравнительно приятному времяпрепровождению, мы должны вспомнить, что все стало просто и легко только после того, как мы проскользнули мимо многих реальных трудностей, а именно мимо трудностей формулирования задачи.

С одной из таких трудностей, являющейся критическим пунктом теории игр, поскольку дело касается ее применения к конфликтным ситуациям реальной жизни, мы встречаемся, когда пытаемся заполнить клетки матрицы значениями платежей. Хотя в дальнейшем нам встретятся случаи, когда требования будут не столь жесткими, в общем случае мы должны предположить, что платеж может быть измерен, в принципе, численно, что мы знаем, как его измерить и что мы измерили его с достаточной точностью. Единицы измерения должны быть одними и теми же во всех клетках, и эти единицы должны иметь простые раз-

мерности. Иными словами, мы не готовы иметь дело с долларами в одной клетке, граммами урана — в другой и с человеческими жизнями — в третьей, если только, конечно, нам не случится узнать «обменный курс» этих объектов и мы не сможем избавиться от разнородности единиц измерения. Если платеж в каждой клетке содержит несколько чисел, представляющих различные предметы: несколько долларов, некоторое количество урана и несколько жизней, мы по-прежнему будем в затруднении, за исключением особых случаев. Это затруднение может возникнуть и в обыкновенной игре. Рассмотрим, например, игру между двумя мастерами. Ставками в этом случае будут денежные суммы и престиж. Если у нас нет «обменного курса» между деньгами и престижем, то наш анализ будет затруднен.

Другой принципиальной трудностью в связи с реальными задачами является вопрос о достаточно четкой постановке задачи для того, чтобы стало возможным полностью перечислить возможные действия игроков. При этом следует избегать устранения из условий задачи тех важных влияний, которые она испытывает со стороны реального окружения.

Другие опасности будут отмечаться в дальнейшем время от времени, как только наши рассуждения натолкнутся на какую-нибудь подводную скалу. Не следует, однако, перегибать палку и в другую сторону, так как модель не должна быть обязательно абсолютно точным слепком ситуации реальной жизни для того, чтобы быть полезной. Мы увидим, что в этом отношении в ряде случаев будет иметь место значительная свобода.

Критерий

Вечной трудностью при создании математических моделей (в отличие от деревянных) является болезнь, которую можно назвать затруднением с выбором критерия. Каков тот критерий, с помощью которого можно вывести суждение о предпочтительном исходе игры или с помощью которого должно быть выведено такое суждение?

Для иллюстрации того, какое изобилие возможных критериев может быть в самом простом случае, представим себе домашнюю хозяйку, которой нужно купить на пять долларов мяса. Какое мясо она должна покупать? Если ее критерием является просто количество, то она должна покупать самые дешевые сорта мяса и измерять «платеж» в килограммах. Если она заинтересована в раз-

Нообразии, она должна купить минимальные количества нескольких сортов, начиная с самых дешевых, и измерять «платеж» числом сортов мяса, которое она купила. Она может, наконец, интересоваться содержанием белков, жиров или калорий. Она может пытаться удовлетворить различные прочие условия или выполнить некоторые ограни-



чения, накладываемые вкусами, запретами и т. д. Ее могут интересовать минимальные усилия при приготовлении пищи, и в этом случае она может сказать: «Мне нужно на пять долларов жареного мяса. Прошу доставить его, как только вы будете в наших краях».

Вообще говоря, проблема критериев состоит из двух вопросов: что измерять и как вести себя на основе этих измерений. Теории игр нечего сказать по первому вопросу, но она дает ясные и определенные рекомендации относительно выбора поведения на основе сделанных измерений.

Она утверждает, что имеется определенный ответ на вопрос о том, каким должно быть поведение разумных людей, если они приняли данную платежную матрицу. Понятие об определенном способе действия, которого должны придерживаться люди, не относится к обязатель-



ствам, основанным на законе и этике. Скорее оно относится к своеобразной математической морали или по крайней мере к принципу бережливости, который утверждает, что *главная цель игрока заключается в том, чтобы получить*

наверняка как можно больший выигрыш перед лицом искусного противника, который преследует противоположную цель. Такова наша модель разумного поведения. Как со всеми моделями, сапоги следует примерять при каждом ином применении, чтобы убедиться в том, что они достаточно хорошо сидят. Однако хорошо известно, например из военной практики, что можно далеко уйти и в плохо подогнанных сапогах.

Проследим, каковы будут следствия применения этой модели к игре с нулевой суммой, представляющей собой, как вы помните, замкнутую систему, в которой денежные вклады просто переходят от игрока к игроку. Пожалуй, никто не обидится (кроме Красных), если мы предположим на некоторое время для упрощения нашего изложения, что все платежи в матрице *положительны*. Это означает, что все возможные стратегии, доступные игрокам, будут влиять теперь только на то, сколько денег отдадут Красные в конце игры Синим. Это явно нечестно по отношению к Красным, но мы заставим их пострадать ради общих интересов.

Теперь с точки зрения теории игр *Синие* хотят действовать так, чтобы наименьший выигрыш, который они могут получить, был как можно больше. Это удовлетворяет требованию надежности. Стремление Красных, наоборот, состоит в том, чтобы сделать как можно меньшей ту наибольшую сумму денег, которую они должны отдать Синим, независимо от действий Синих. Такой философии, если игроки ее придерживаются, достаточно, чтобы определить их выбор стратегий. Если Синие отклоняются от этого выбора, они рискуют получить меньше, чем могли бы получить. А если Красные не придерживаются этого выбора, они могут заплатить больше, чем могли бы заплатить.

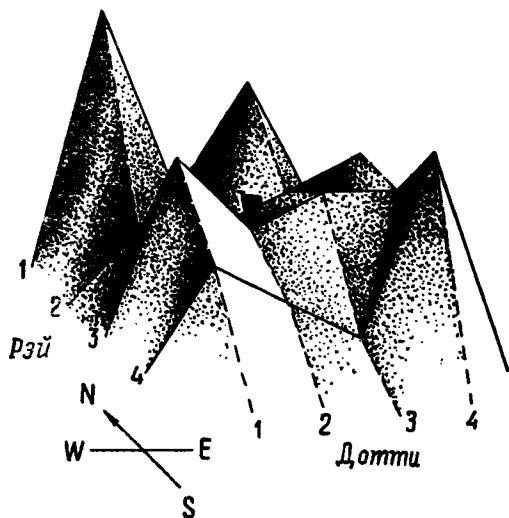
Вышеприведенное рассуждение является центральной идеей теории игр. Всегда найдется способ действия, при котором в любой игре с двумя игроками будет удовлетворяться рассмотренный выше критерий. Однако, как и в случае с домашней хозяйкой, покупающей мясо, это далеко не единственный возможный критерий. Вы можете придумать много других, приписывая, например, вашему противнику различную степень невежества и глупости. Поскольку теория игр не приписывает противнику эти привлекательные качества, она является консервативной (осторожной) теорией.

Обратите внимание на кажущееся различие целей Си-

них и Красных: цели Синих касаются выигрыша, а цели Красных — проигрыша. Это различие не является реальным, поскольку оба игрока руководствуются совершенно одинаковыми рассуждениями. Это кажущееся различие является следствием нашего уговора о том, какое значение имеют положительные и отрицательные числа в платежной матрице. Принятие условия, что Синие всегда заинтересованы в максимуме, а Красные — в минимуме, уменьшит некоторые технические трудности; но давайте не будем платить за это мнемоническое правило убеждением в том, что в положении Синих и Красных отсутствует симметрия.

Пример 1. Туристы

Для усвоения этих идей нам может помочь некоторая физическая модель. Если все платежи положительны, то мы можем рассматривать их как высоты отдельных точек в гористой местности. Различные стратегии Синих и Красных будут тогда соответствовать различным значениям географической широты и долготы этих точек.



Для того чтобы в игре имелись действующие лица и мотивировки, предположим, что муж и жена (назовем их Рэй и Дотти, потому что конкретность всегда помогает) задумали совершить туристический поход и что Рэй любит лазить по вершинам, а Дотти предпочитает низменности.

Область их интересов пересечена крест-накрест сетью дорог, по четыре в каждом направлении. Туристы договорились разбить лагерь на перекрестке дорог. Далее они договорились, что Рэй выбирает дорогу с востока на запад, а Дотти — дорогу с севера на юг, что совместно определяет перекресток. Если теперь теория игр их не спасет, то они умрут от разочарования.

Точки пересечения на дорогах, доступных Рэю, имеют следующие высоты (в тысячах футов):

<i>Рэй</i>	1	7	2	5	1
	2	2	2	3	4
	3	5	3	4	4
	4	3	2	1	6

Будучи разумным человеком, желающим просто получить как можно больше из этого предприятия, он, естественно, должен предпочесть дорогу Рэй-1, имеющую пересечения на высотах 7, 2, 5 и 1, так как только на ней есть пик высотой 7 тысяч футов. Но он сразу соображает, что это — неосуществимая мечта. Он не смеет принять этот план, который сулит ему многое, но который может привести



к неудаче, если Дотти проявит должное искусство при своем выборе. Отбрасывая предположение, что она может действовать не подумав, он вынужден в своих собственных интересах обратить особое внимание на низины и спуски, которые портят местность, с его точки зрения. Это изучение приводит его, наконец, к выбору дороги Рэй-3, на которой имеется низина, наиболее привлекательная в данном районе, а именно на высоте 3-х тысяч футов. Выбирая дорогу Рэй-3, он может гарантировать, что лагерь будет разбит на высоте *по крайней мере* 3-х тысяч футов. Лагерь мог бы быть и выше, если бы Дотти была немного беззаботнее.

Его жена, однако, как он догадывается, настолько же умна в этих вещах, как и он сам. Критические высоты, встречающиеся на ее дорогах, перечислены в следующей таблице:

Дотти			
1	2	3	4
7	2	5	1
2	2	3	4
5	3	4	4
3	2	1	6

После изучения этой таблицы она сразу поняла, что не стоит тратить времени на мечты о дорогах Дотти-3 и Дотти-4, на которых имеются глубокие долины и которые нравятся ей больше всего. Будучи реалистом, она изучает вершины, которые встречаются на ее дорогах, решив выбрать такую дорогу, на которой расположены наиболее низкие вершины. Это приводит ее, наконец, к дороге Дотти-2, где ночевка на высоте 3-х тысяч футов — самое худшее для нее, что может случиться.

Теперь мы замечаем, что произошло что-то вроде совпадения. Рэй выбрал стратегию (Рэй-3), которая гарантирует ему, что лагерь будет на высоте 3-х тысяч футов или более, а Дотти выбрала такую стратегию (Дотти-2), которая обеспечивает ей отдых на высоте 3-х тысяч футов или менее. Иными словами, каждый игрок может получить стоянку на высоте 3-х тысяч футов, имея перед собой умно-

го противника. Он может добиться лучшего результата, если его противник будет более беззаботным.

Если гарантированные минимальный и максимальный платежи для Синих и Красных в точности равны, как это произошло в нашем случае, то говорят, что игра имеет *седловую точку*, и игроки должны применять те стратегии, которые соответствуют этой точке. Если кто-нибудь из них отклонится от стратегии, определяемой седловой точкой, он понесет ненужные потери. Если оба игрока отклонятся от нее, то ситуация становится совершенно неопределенной и кто-нибудь будет ее жертвой.

Обратите внимание на то, что наличие седловой точки приводит к заключению о необязательности в данном случае мер по соблюдению секретности. Как Рэй, так и Дотти могут открыто объявить о своем выборе (если он такой, каким должен быть), и противник не сможет использовать эту информацию для того, чтобы принудить второго игрока выбрать место для лагеря хуже, чем на высоте 3-х тысяч футов.

Мы заметили, что существование седловой точки в смысле теории игр напоминает что-то вроде совпадения. Седловая точка соответствует перевалу или седловине в горах, а почти каждая сложная горная система имеет много перевалов. Дело, однако, заключается в том, что горный перевал должен обладать некоторыми специальными качествами, чтобы его можно было квалифицировать как седловую точку в смысле теории игр. Во-первых, дорога, на которой находится перевал (т. е. верхняя точка), должна идти с севера на юг, т. е. должна быть в распоряжении того игрока, который желает, чтобы платеж был как можно меньше. Во-вторых, севернее и южнее перевала не должно быть более высоких точек. В-третьих, западнее и восточнее перевала не должно быть более низких точек. Эти условия крайне необходимы, так как горный перевал — это *локальная* особенность местности, и требуются некоторые дополнительные качества, чтобы эта точка приобрела всеобщие свойства и стала лучшей во всей окрестности.

Хотя в дальнейшем мы всегда будем исследовать игры на наличие седловых точек, они, вообще говоря, встречаются не часто. В игре 4×4 , такой, как рассматриваемая, имеется примерно один шанс из десяти, что в матрице, составленной из случайных чисел, имеется седловая точка.

В нашем случае всего лишь незначительное изменение матрицы в одной из многих точек может исключить седло-

вую точку. Если, например, изменить высоту пересечения дорог Дотти-2 и Рэй-4 с 2-х тысяч футов на 6 тысяч футов, то характер игры будет совсем иным. В этой игре наши элементарные рассуждения относительно выбора стратегий оказываются несостоятельными. Если Рэй рассуждает как прежде, он снова выберет дорогу Рэй-3, что гарантирует ему лагерь на высоте 3-х тысяч футов или выше. Но Дотти, следуя прежним рассуждениям, на этот раз вынуждена будет выбирать дорогу Дотти-3, что гарантирует ей на этот раз лагерь на высоте 5-ти тысяч футов или менее.

		Дотти			
		1	2	3	4
Рэй	1	7	2	5	1
	2	2	2	3	4
	3	5	3	4	4
	4	3	6	1	6

Таким образом, между тремя и пятью тысячами футов образовался разрыв, в котором ситуация оказалась неконтролируемой. Ваша интуиция может подсказать вам, что должен существовать способ ведения игры, который поможет перекрыть получившийся разрыв. Такой выход, действительно есть, но мы должны начать наше изучение с простейших ситуаций. Попутно заметим, что хорошее ведение игры теперь требует принятия более строгих мер по соблюдению секретности, чем это требовалось в игре с седловой точкой. В частности, игроки должны объявлять свои выборы стратегий одновременно или в запечатанных конвертах. Что они должны написать в этих конвертах, остается неясным.

ГЛАВА 2

ИГРЫ С ДВУМЯ СТРАТЕГИЯМИ

ИГРЫ 2×2

Введение

Мы должны приступить к изложению технической стороны решения игр как можно деликатнее. Игра 2×2 выглядит вполне подходящей для этой цели.

Вспомним наше требование, чтобы игра сводилась к платежной матрице, т. е. прямоугольной (возможно, квадратной) таблице чисел, строки и столбцы которой соответствуют различным стратегиям, доступным игрокам. Совершенно очевидно и обратное, т. е. то, что *любая* прямоугольная таблица чисел может рассматриваться как платежная матрица некоторой игры. Мы можем даже придумать игру, которая имела бы такую платежную матрицу. Поэтому мы будем иногда ограничиваться рассмотрением свойств отдельных матриц и следствий этих свойств, не заботясь о тех реальных играх, которые они представляют. Исключая, таким образом, содержание игр, мы можем без помех заняться техническими вопросами.

Мы все время будем искать *решения* игр. Это означает, что мы будем пытаться выяснить, какую стратегию или какие стратегии должны применять игроки, причем в том

случае, когда потребуется применение более одной стратегии, нас будет интересовать вопрос, в каком порядке их применять, потому что на практике в каждый данный момент может быть использована только одна стратегия.

Любая игра из тех, которые мы будем рассматривать, имеет решение, т. е. всегда имеется хороший способ вести игру, и мы можем найти его, если только работа не окажется чрезмерно трудоемкой.

Мы начнем с простейших платежных матриц и позднее постепенно перейдем к более сложным. В этой главе внимание будет уделено играм 2×2 , но мы не ограничимся только этими играми. Мы встретимся с играми 2×3 , 2×4 и практически со всеми играми, в которых *один* из игроков имеет только две стратегии.

Условимся о следующем: стратегии Синих мы будем перечислять и нумеровать с левой стороны платежной матрицы, а стратегии Красных — сверху*. Все платежи будут отнесены к Синим, т. е. *положительное число в клетке матрицы обозначает платеж Синим от Красных, а отрицательное — платеж Красным от Синих*. Читателю лучше считать себя Синим. Тогда положительные числа будут означать, что он получает платеж, а отрицательные числа — что он платит.

Случайные отклонения

Начнем с очень простого случая:

		Красные	
		1	2
Синие	1	0	0
	2	0	0

Вспомним значение этой таблицы: целые числа слева от матрицы представляют просто *номера* стратегий Синих, т. е. два способа действий, которые имеются в этой игре для Синих. Точно также числа сверху матрицы обозначают первую и вторую стратегии Красных. Числа в клетках говорят нам о платежах, которые будут иметь место, если будут выбраны соответствующие стратегии.

* То есть стратегии Синих представляют собой строки матрицы, а стратегии Красных — столбцы. — *Прим. ред.*

Наша игра, пожалуй, выглядит самой скучной игрой на свете. Но, по крайней мере, это честная игра. Игроки совершенно не в состоянии влиять на результаты, потому что в любом случае, что бы они ни делали, платеж должен равняться нулю. Но так ли это?

Шила в мешке не утаишь: когда мы описывали в первой главе, как составляются платежные матрицы, мы допустили упрощение, о котором вы узнаете теперь при изучении игры 2×2 .

В матрице перечислены все стратегии Синих и Красных, т. е. все возможные способы действий, которые свободно могут выбирать как Синие, так и Красные. Этот список является исчерпывающим, т. е. все возможные последовательности действий, умные или глупые, представлены соответствующими стратегиями. Но следует ли из этого, что в каждой клетке матрицы могут записываться только одни и те же числа? А как обстоит дело со случайными явлениями—«ходами природы», если вам угодно? Совершенно очевидно, что применение какой-нибудь одной стратегии Синими и другой стратегии Красными не гарантирует того, что платеж будет единственным, т. е. *одинаковым во всех случаях*. Игра может быть такой, например, что стратегии игроков определяют только, кому из игроков достается платеж, но величину платежа определяет природа, которая для этого использует колесо рулетки.

Итак, что же означает число 0 в клетке матрицы? Либо число 6, либо—2, либо что-нибудь иное? Оно может быть постоянным числом; при этом возможен один и только один исход игры при использовании соответствующей пары стратегий. Но если игра такова, что при определенных стратегиях каждого игрока платеж может быть каким-нибудь одним из нескольких чисел, тогда число, записанное в матрице, есть среднее значение платежа, величина которого управляется случаем. Это очень важное обстоятельство, и для полной ясности мы рассмотрим пример.

Предположим, что одна пара стратегий приводит к трем возможным исходам: в одном случае Синие *выигрывают* 8, в другом — Синие *выигрывают* 24 и в третьем — Синие *теряют* 8. Было бы неправильно записать в соответствующей клетке платежной матрицы число 8, которое яв-



ляется просто средним значением чисел 8, 24 и —8, потому что природа может чувствовать неодинаковое расположение к ним. Если, например, в качестве случайного механизма выбрать подбрасывание монеты и считать, что число +8 (выигрыш Синих) будет соответствовать выпадению герба, число —8 (проигрыш Синих) — выпадению решетки, а число +24 — постановке монеты на ребро, то, имея в своем распоряжении современные тонкие монеты, можно считать последний случай совершенно невероятным и отбросить его, а вероятности выпадения герба и решетки считать одинаковыми. В этом случае истинное среднее значение получится в результате сложения +8 и —8 и деления суммы на два, т. е. $\frac{8-8}{2} = 0$. Это значение и следует

записать в матрицу. Если же подбрасывается монета, толщина ребра которой составляет приблизительно одну треть диаметра, то выпадение герба, решетки и установление на ребро будут равновероятны, и тогда в качестве платежа должно быть записано число $\frac{8+24-8}{3} = 8$. Вообще числа

следует взвешивать в соответствии с количеством случаев, благоприятствующих появлению этих чисел. Например, если благоприятные случаи выпадения чисел 8, 24 и —8 относятся друг к другу как 1:3:4, то соответствующее среднее значение будет равно

$$\frac{1 \times 8 + 3 \times 24 + 4 \times (-)}{1+3+4} = \frac{8+72-32}{8} = 6.$$

Найденное нами таким образом среднее значение называется математиками *ожидаемым значением*. Совершенно очевидно, что такое словоупотребление требует особого разъяснения. Мы *не ожидаем*, что при использовании данной пары стратегий мы обязательно будем иметь платеж, в данном случае 6. Наоборот, такой платеж фактически никогда не будет иметь места в результате одной партии игры, но мы ожидаем, что среднее значение платежа стремится к 6. Смысл ожидаемой величины можно понять, если рассуждать следующим образом: если Синие хотят играть с Красными, используя данную пару стратегий, им следовало бы получать наперед справедливое вознаграждение от Красных, равное 6. Если выплачивается другая сумма, то игра становится нечестной для одного из игроков, который будет тогда проигрывать больше, чем выигрывать.

Расчислив себе дальнейший путь этим необходимым отступлением, вернемся к матрице:

		Красные	
		1	2
Синие	1	0	0
	2	0	0

Теперь мы знаем, что за нулями в клетках матрицы могут скрываться случайные события с переходящими выигрышами и проигрышами. Мы используем этот пример для иллюстрации одного из слабых мест или одного из скрытых ограничений теории игр. Предположим, что в верхней правой и нижней левой клетках нет соответствующих им случайных событий, так что соответствующие платежи в каждой партии в точности равны нулю. Предположим далее, что нуль в верхней левой клетке является средним значением платежа, основанным на равной вероятности выпадения чисел $+1$ и -1 , а нуль в нижней правой клетке является средним значением двух равновероятных чисел $+1000$ и -1000 . Так как капитал игрока не безграничен, он с полным основанием будет остерегаться стратегии 2 (которая может разорить его за один раз) и будет предпочитать стратегию 1. Таким образом, использование нами ожидаемых значений (т. е. средних значений за большое число партий) для сокращения описания влияния случайности в игре включает молчаливое предположение, что игрок может выдержать временные капризы случайности и не избегать их.

Как быть, если это предположение разойдется с фактами? Вероятно, специалист по теории игр не сможет прийти нам на помощь. Он заявит, что возникшие трудности касаются исключительно нас самих, а не его, что мы попали в беду только потому, что проявили беззаботность при назначении величины возможных платежей, а это совсем не его область. Поскольку мы считаем полное разорение тоже случайным явлением, как и обычный проигрыш, то мы, по-видимому, неверно поступили в выборе платежей, а именно в определении их реальной ценности для игроков. При подсчете платежей в качестве единиц измерения могут оказаться и доллары, и человеческие жизни; так или иначе найдутся некоторые удобные единицы, которые позволят нам производить числовые расчеты, а не решать несравненно более сложную проблему оценки и сравнения нечисловых понятий. Чтобы обеспечить это, необходимо разработать такую шкалу значений, которая лучше всего отражала бы

полезность или вред различных возможных исходов игры для игрока.

Однако если нам удастся это сделать, то весьма маловероятно, чтобы платежи Синим и Красным остались одинаковыми по величине и противоположными по знаку. Иными словами, исчезнут основные признаки игры с нулевой суммой. Отсюда мы делаем вывод: если игроки предпочитают один платеж другому при их одинаковом среднем значении, то шкалы должны быть исправлены, а раз мы это сделаем, то вряд ли игра будет по-прежнему представлять простой обмен ценностями. Другими словами, она станет, по всей видимости, игрой с ненулевой суммой, а как мы уже говорили раньше, наши знания в этой области весьма невелики.

После только что сказанного вам может показаться, что теория игр является довольно слабой и несовершенной теорией. «Ожидаемое» значение выигрыша не всегда может служить надежным основанием для принятия решения и для действий. И этот факт заставил нас, в свою очередь, понять, что у нас нет сколько-нибудь хорошей системы сравнения желательности или нежелательности тех или иных исходов игры. К тому же все эти вопросы возникают как раз тогда, когда мы стоим на пороге изучения теории игр, когда мы только что собираемся приступить к рассмотрению наиболее простых игр с нулевой суммой и с двумя стратегиями.

Если вы сильно разочарованы всем этим, то можете, в конце концов, бросить эту книгу, и это вам сделать легче, чем выключить телевизор. Но те из вас, которые наберутся смелости продолжать изучение, убедятся в дальнейшем, что, несмотря на свои недостатки, теории игр есть что сказать интересного и полезного.

Впредь мы будем полагать, что у игрока достаточно средств, чтобы противостоять отдельным капризам судьбы, так что ожидаемые (средние) значения могут вполне служить ему для руководства в игре.

Рассмотрим теперь игру:

		<i>Красные</i>	
		1	2
<i>Синие</i>	1	5	5
	2	5	5

Если Синие применяют свою первую стратегию против второй стратегии Красных, то Красные должны заплатить Синим 5 единиц. Это положение сохраняется при любом выборе стратегий. Поэтому данная игра очень мало отличается

ся от предыдущей. Существенным отличием будет то, что игра будет нечестной по отношению к Красным. Она станет честной, если в дополнение к условиям самой игры Синие согласятся платить Красным 5 единиц каждый раз, когда они начинают новую партию. В этой игре, как и в предыдущей, очевидно, не имеет значения, какая применяется стратегия, потому что платеж будет в точности один и тот же, независимо от выбора стратегий. В этой игре разведка (в военном смысле) также бесполезна, т. е. предварительное знание планов противника не приносит никакой пользы, и без него можно вполне обойтись. Это свойство, как мы увидим в дальнейшем, присуще многим играм, если игроки применяют хорошие стратегии.

Отметим, между прочим, что матрицы того вида, какой мы рассматривали, подобны матрицам, которые получают для игр на счастье. В чистой игре на счастье платежи не только выглядят все одинаковыми, но они и на самом деле одинаковы. Это означает, что если платежами являются ожидаемые величины, то они все основаны на одних и тех же числах и на одних и тех же случайных событиях. Этим они отличаются от игр, основанных на искусстве, или от стратегических игр, в которых игроки могут хотя бы в малой степени влиять на исход игры.

Чтобы избежать незнакомых понятий, мы на время будем обходиться без отрицательных чисел в платежных матрицах. Такие игры по существу являются нечестными по отношению к Красным, которым приходится все время платить да платить. Вы можете рассматривать эти игры как ситуации, в которые Красные попадают против своей воли, но, попав в них, они желают провести игру как можно экономнее для себя. Или же рассматривайте их как ситуации, в которых Красные могут потребовать компенсацию, если только они знают, как ее вычислить.

Седловые точки

Перейдем теперь к игре, в которой игроки имеют возможность выбрать следующие стратегии:

		Красные	
		1	2
Синие	1	6	5
	2	5	4

Напомним основное рассуждение теории игр: Синие желают выиграть как можно больше, но не могут рассчитывать на великодушные Красные. Поэтому они по очереди исследуют каждую свою стратегию, чтобы узнать, как много они могут выиграть, даже если Красные заглядывают им через плечо. Они предполагают, что какую бы они ни выбрали стратегию, Красные всегда сделают наилучший контрход. Поэтому Синие выписывают наихудшие платежи, которые они могут получить при каждом из своих выборов, а именно:

		<i>Минимумы строк</i>	
<i>Синие</i>	1	6	5
	2	5	4
			5*
			4

Из них они предпочитают наибольший—5 единиц, который мы и обозначаем звездочкой. Итак, Синие имеют основание считать, что их хорошей стратегией является первая стратегия.

Красные, с другой стороны, исследуют столбцы, чтобы узнать, как им быть. Их основные воззрения, включая и уважение к противнику, такие же, как у Синих, за исключением того, что они желают, чтобы их платеж был как можно меньше. При изучении каждой из своих стратегий они допускают, что Синие могут разгадать их интересы и предпринять наилучшие контрмеры, доступные Синим. Поэтому Красные выписывают самые худшие (т. е. самые большие) платежи, которые могут иметь место при использовании ими каждой из своих стратегий:

		<i>Красные</i>	
		1	2
		6	5
		5	4
		6	5*
<i>Максимумы столбцов</i>			

Из них они, естественно, предпочтут наименьший платеж—5 единиц, отмеченный звездочкой. Итак, если они применяют свою вторую стратегию, их потери никогда не превысят 5.

Снова нам встречается такое же совпадение, как в примере с туристами: Синие и Красные однозначно разыскали такие стратегии, которые гарантируют определенный платеж при игре против умного противника (в нашем случае — 5 единиц), и каждый из них знает, что платеж будет для него более выгодным (по сравнению с 5 единицами), если противник будет вести себя неразумно. Такая ситуация называется *седловой точкой*.

Вообще, когда *наибольший из минимумов строк равен наименьшему из максимумов столбцов*, говорят, что игра имеет *седловую точку*. В этом случае игроки должны придерживаться стратегий, которые пересекаются в седловой точке.

Для того чтобы исследовать, имеется ли седловая точка, каждый игрок должен обследовать игру как со своей точки зрения, так и с точки зрения противника. Он выписывает минимумы всех строк и обозначает звездочкой наибольший из них. Затем выписывает максимумы всех столбцов и обозначает звездочкой наименьший из них. Если оба отмеченных числа совпадают, то у игры имеется седловая точка, и игроки должны придерживаться тех стратегий, которые соответствуют отмеченным строке и столбцу.

Смешанные стратегии

Испробуем этот магический способ, который привел нас к решению предыдущего примера, на другой игре. Рассмотрим такую игру:

		Красные		Минимумы строк
		1	2	
Синие	1	3	6	3
	2	5	4	4*
Максимумы столбцов		5*	6	

Наибольшее значение минимумов строк равно 4, что соответствует второй стратегии Синих; если Синие примут эту стратегию, то они никогда не получат платежа меньше 4 единиц. Наименьшее значение максимумов столбцов равно 5 при использовании Красными своей первой стратегии; ее применение гарантирует Красных от потерь, превышающих 5 единиц.

Итак, здесь нет седловой точки, и мы стоим перед неисследованной ситуацией. Синие могут гарантировать себе выигрыш не менее 4 единиц. Красные уверены, что они не потеряют более 5 единиц. Вы могли бы сказать, что эти числа как раз то, что достаточно хорошие игроки могут получить наверняка; для этого требуется только простейший здравый смысл. Пространство между ними — это охотничье угодье, где мастер своего дела может получить добавочную добычу.

Рассмотрим снова положение Синих. Если они примут первую стратегию, то Красные могут раскрыть их действия и снизить выигрыш Синих до 3 единиц. Если же они примут вторую стратегию, то их выигрыш может упасть до 4 единиц. Однако, подвергая аналогичному изучению положение Красных, Синие могут выиграть в конце каждой партии то 5, то 6 единиц, вместо 3—4 единиц. При этом им по-прежнему открыты только стратегии Синие-1 и Синие-2.

Дилемма сама по себе дает ключ к решению. Поскольку Синие должны что-нибудь делать и поскольку постоянное применение ими какой-нибудь одной стратегии позволит Красным получить незаконную экономию, Синие должны рассмотреть остающуюся альтернативу: применять обе стратегии. Но в каждой отдельной партии они вынуждены применять какую-нибудь одну из двух стратегий, потому что по определению каждая стратегия представляет собой законченный образ действий, и применение одной стратегии исключает применение другой. *Поэтому Синие должны попеременно применять то одну, то другую стратегию.*

Другими словами, им нужна более сложная стратегия, содержащая в качестве своих элементов первоначальные стратегии. По терминологии теории игр такая стратегия называется *смешанной стратегией*, а ее элементы, которые мы до сих пор называли просто стратегиями, носят название *чистых стратегий*. Чистая стратегия — это одна из тех, которые были перенумерованы и которой вы будете придерживаться в какой-нибудь партии игры. Смешанная стратегия руководит вашим выбором чистых стратегий.

Вы, по всей вероятности, сразу замечаете, что подобный образ действий может поставить вас в такое положение, когда становится необходимым соблюдать меры по сохранению секретности. Ведь если Красные узнают, какой стратегии будут в действительности придерживаться Синие, то они смогут извлечь из этого для себя выгоду. Позже мы

увидим, что *необходимые* меры по сохранению секретности совершенно четко определены: Синие должны держать в секрете свое решение относительно того, какую стратегию они предполагают применять в каждой отдельной будущей партии. *Они могут, однако, позволить Красным получить полную информацию об их предыдущих действиях, а также относительно их смешанной стратегии.* Если эта стратегия правильна, то Красные не могут помешать Синим получить то, что допускается для них игрой. То же справедливо и в отношении положения Красных.

Мы предположили, что наш противник умный и хорошо осведомлен. Тем более важно, чтобы он не узнал, какую чистую стратегию вы собираетесь применить в следующей партии. Существует известный метод, являющийся надежной защитой против такого противника, метод, предложенный нам самой природой игры, а именно *принимать решение относительно выбора стратегии на основании какого-нибудь подходящего случайного события (жребия).* Поэтому случайный механизм того или иного вида является существенной частью хорошей смешанной стратегии. При этом противник лишен возможности узнать наперед о ваших действиях, потому что ваш образ действий неизвестен вам самим точно так же, как и вашему противнику. Вернемся теперь к нашему примеру:

		Красные	
		1	2
Синие	1	3	6
	2	5	4

Предположим на мгновение, что смешанная стратегия Красных определяется результатами подбрасывания монеты: игрок придерживается первой стратегии, когда выпадает герб, и второй стратегии — при выпадении решетки. Если эта стратегия применяется против первой стратегии Синих, то Красные будут примерно половину игры платить по 3 единицы и половину игры — по 6 единиц. Поэтому «ожидаемое» значение платежа, или его среднее значение, взятое за некоторый промежуток времени, будет равно:

$$\frac{1 \times 3 + 1 \times 6}{1 + 1} = 4\frac{1}{2}.$$

(Здесь единицы представляют относительные частоты применения чистых стратегий, которые задаются подбрасыванием монеты, а именно 1 : 1. Мы перемножили каждый платеж на относительную частоту применения стратегии, благоприятствующей выпадению этого платежа, сложили эти произведения и разделили на сумму относительных частот.)

Попробуем теперь применить смешанную стратегию, задаваемую подбрасыванием монеты, против второй стратегии Синих. В этом случае средний платеж равен, как прежде,

$$\frac{1 \times 5 + 1 \times 4}{1 + 1} = 4\frac{1}{2}.$$

Итак, руководствуясь при принятии решения подбрасыванием монеты, Красные могут обеспечить средний платеж в $4\frac{1}{2}$ единицы против любой стратегии Синих. Этот результат для Красных лучше, чем при выборе первой стратегии, когда они должны были бы платить 5 единиц (напоминаем, что цель Красных состоит в том, чтобы сделать платеж как можно меньше).

Понятие *смешанных стратегий*, по которым игрок должен придерживаться то одной чистой стратегии, то другой, причем *решение в каждом отдельном случае должно определяться каким-нибудь подходящим жребием*, является одним из основных понятий теории игр. Мы можем сказать наперед, что смешанные стратегии лежат в основе большинства игр и они оказываются несостоятельными только в некоторых особых случаях.

Вам может показаться, что применение случайного механизма при выборе способа действий является несколько безответственной операцией, особенно когда исходы игры имеют важное значение. В действительности здесь нет никакой безответственности: все те бесспорные рассуждения, которые должны предшествовать принятию решения, имеют здесь место. Случайный механизм появляется тогда, когда задача уже сформулирована, платежи назначены и подсчитаны относительные частоты, которые управляют случайным механизмом, а следовательно, и выбором стратегий. Таким образом, случайный механизм является орудием вашей воли, а не вашим хозяином. Тот факт, что завершающим звеном в процессе принятия решения является машина, которая не в состоянии глубоко мыслить, не имеет значения. Бомба также не является очень умным орудием. По правде говоря, и бомбардир может иногда думать больше о какой-нибудь блондинке, чем о выборе

цели. Разумеется, если проследить всю цепь событий в обратном направлении, то спокойнее предположить, что где-то имела место целеустремленная умственная деятельность.

Относительные частоты

Когда мы немного позднее узнаем, как определять смешанные стратегии, мы будем всегда выражать результаты в виде *относительных частот*. Так, например, может оказаться, что Синие должны использовать свои две стратегии с частотами, относящимися как 8:5. Это означает, что в длинной последовательности игр Синие применяют первую стратегию в восьми партиях на каждые пять партий, в которых применялась вторая стратегия. У нас, однако, будет часто возникать неясность, если мы не дадим предмету названия. С этого момента мы будем именовать числа, составляющие относительные частоты, просто *частотами* (oddmoment). Так, если относительные частоты равны 8:5, то мы, говоря о числе 8, будем называть его частотой. Ной Уэбстер* убедил нас в том, что такое словоупотребление почти допустимо и законно. С математической точки зрения понятие «частота» является чудовищным изобретением, так как относительные частоты 8:5 эквивалентны относительным частотам 16:10 (или 24:15, или 4:2½ и т. д.); это наводит на мысль, что частота 8 может быть эквивалентна частоте 16. Поэтому не имеет никакого значения, какое положительное значение вы приписываете частоте. Никто не сможет убедить вас, что это неверно. Однако, когда мы применяем это слово, подразумевается, что мы намереваемся в свое время составить целую систему этих чисел, используя при этом общую сравнительную шкалу. Этот вопрос всплыл потому, что при подсчете относительных частот мы вычисляем частоты поодиночке. И иногда нам требуется ссылаться на одну из них.

В целях удобства мы будем применять нулевые частоты для обозначения того, что некоторые стратегии не применяются. Так, отношение 3:0:2 означает, что первая и третья стратегии должны применяться с относительными частотами 3:2, в то время как вторая стратегия вообще не используется.

* Автор популярного толкового словаря. — Прим. ред.

Правила для определения относительных частот

Мы не собираемся давать вам *логического* обоснования, как находить правильные смешанные стратегии, потому что мы не знаем, как это сделать, не прибегая к математике. Мы дадим вам, однако, собрание чисто эмпирических правил, которые позволяют подсчитать хорошую смешанную стратегию с помощью нескольких простых, хотя иногда и весьма утомительных, арифметических действий. Порядок расчета для игры 2×2 следующий:

Первый шаг. Проверьте игру на наличие седловых точек, что нетрудно сделать. Для этого достаточно сравнить максимум минимальных значений строк с минимумом максимальных значений столбцов и убедиться в том, что они не равны друг другу. Если седловая точка имеется, то на этом ваш труд заканчивается, и наилучшей стратегией является та чистая стратегия, при которой стратегии Синих и Красных пересекаются в седловой точке.

Второй шаг. Если в игре нет седловых точек, то наилучшей стратегией является смешанная стратегия. Забудьте о седловой точке и действуйте следующим образом.

Начните с рассмотрения стратегии Красных. Рассмотрите первую и вторую стратегии Красных, используя платежную матрицу с числами из последнего примера:

Красные	
1	2
3	6
5	4

Вычтите из чисел первой строки числа второй и запишите результаты в клетках новой матрицы:

Красные	
1	2
-2	2

Тогда частота применения первой стратегии будет равна
60

тому числу, которое стоит в заштрихованной клетке следующей матрицы:

Красные

1

	2
--	---

в то время как частота применения второй стратегии будет равна числу в другой клетке, той, которая заштрихована в следующей матрице:

Красные

2

-2	
----	--

Одно из этих чисел всегда будет отрицательно; не обращайте внимания на минус. Записанные числа дают относительные частоты применения Красными своих стратегий, т. е. 2:2; это означает, что обе стратегии должны применяться с одинаковыми частотами, т. е. в отношении 1:1. Иными словами, Красные должны выбирать свои стратегии, используя механизм, дающий равные вероятности, например подбрасывание монеты.

Обратите особое внимание на любопытную симметрию заштрихованных клеток: частота применения первой стратегии Красных находится *не* в столбце Красные-1, а в столбце Красные-2.

Изложенное нами эмпирическое правило определения относительных частот немного сложнее, чем оно могло бы быть, но оно послужит основой для некоторых других правил, которые понадобятся нам при изучении более сложных игр. С педагогической точки зрения разумнее, чтобы вы перенесли эти тяготы на раннем этапе изучения теории. Правила для определения оптимальных стратегий Синих точно такие же, с той лишь разницей, что все повернуто на 90°. Иллюстрируем это на том же примере:

Синие

1	3	6
2	5	4

вычтите второй столбец из первого, что даст

<i>Синие</i>	1	-3
	2	1

Тогда числа в заштрихованной клетке

<i>Синие</i>	1	
	2	1

и в заштрихованной клетке

<i>Синие</i>	1	-3
	2	

и есть частоты применения первой и второй стратегий Синих соответственно. Синие должны применять смешанную стратегию, в которой первая стратегия должна применяться в три раза реже, чем вторая, т. е. в отношении 1 : 3.

Теперь подбрасывание монеты уже не даст нам требуемых относительных частот. Мы вернемся к вопросу о практически применимых случайных механизмах, которые давали бы нужные относительные частоты, в конце этой главы.

Описанный метод настолько прост, что возникает опасность его недооценки. Приведем для практики еще один пример:

		<i>Красные</i>	
		1	2
<i>Синие</i>	1	7	3
	2	2	11

(Это не игра в кресп*, несмотря на похожие цифры.)

* Кресп — азартная американская игра с двумя костями. — Прим. пер.

Вначале проверим игру на седловую точку:

		Красные		
		1	2	Минимумы строк
Синие	1	7	3	3*
	2	2	11	2
		Максимумы столбцов		
		7*	11	

Так как числа, помеченные звездочками, не равны, то седловой точки нет. Очень важно не забывать этой проверки, потому что, если бы имелась седловая точка, наша работа на этом бы и закончилась. Кроме того, *метод, который мы используем для нахождения смешанных стратегий, обычно дает неправильные результаты, если его применить к игре, имеющей седловую точку.*

Итак, забудем проделанную работу и начнем сначала, на этот раз с отыскания смешанных стратегий для Красных:

		Красные	
		1	2
	1	7	3
	2	2	11

Вычитая элементы второй строки из элементов первой, получим:

		Красные	
		1	2
	1	5	-8
	2		

Поэтому частота применения первой стратегии будет равна числу в заштрихованной клетке:

		Красные	
		1	2
	1		-8
	2		

а частота применения второй стратегии—числу в заштрихованной клетке:

Красные	
1	2
Синие	1
5	

Таким образом, относительные частоты будут 8:5 в пользу более частого применения первой стратегии, т. е. Красные должны применять первую и вторую стратегии в отношении 8:5. Аналогично находим, что Синие должны применять свои первую и вторую стратегии в отношении 9:4.

Цена игры

Время от времени мы отмечали, что в каждой игре имеется некоторый определенный платеж, который получает хороший игрок, играя против хорошего игрока. Этот платеж называется *ценой игры*. Вы не можете в среднем выиграть больше цены игры, если только ваш противник не делает ошибок. Если это положительное число, то оно равно той сумме, которую Синие должны заплатить Красным после каждой партии для того, чтобы игра была честной. Многие салонные игры, будучи честными, имеют цену игры, равную нулю.

В игре с седловой точкой цена игры совпадает с платежом в седловой точке. Так, в игре

		Красные		Минимумы строк
		1	2	
Синие	1	6	5	5*
	2	3	4	3
		Максимумы столбцов	6	5*

цена игры равна 5 потому, что если игроки играют правильно, т. е. применяют первую стратегию Синих против второй стратегии Красных, то Синие неизменно будут получать 5 единиц.

В играх 2×2 , требующих применения смешанных стратегий, цена игры равна среднему платежу, который полу-

чается в результате применения оптимальной смешанной стратегии одного из игроков против какой-нибудь *одной* чистой стратегии другого игрока. Так, в игре

		Красные	
		1	2
Синие	1	3	6
	2	5	4

в которой, как мы нашли раньше, Красные должны применять обе стратегии с одинаковой частотой, руководствуясь, например, подбрасыванием монеты, средний платеж против первой стратегии Синих будет

$$\frac{1 \times 3 + 1 \times 6}{1 + 1} = 4\frac{1}{2}.$$

Это и есть цена игры. Если мы вычислим средний платеж для оптимальной смешанной стратегии Синих (вспомним, что частоты равны 1 : 3) против, скажем, первой стратегии Красных, результат будет тот же:

$$\frac{1 \times 3 + 3 \times 5}{1 + 3} = 4\frac{1}{2}.$$

В играх 2×2 , требующих применения смешанных стратегий, средний платеж всегда один и тот же ($4\frac{1}{2}$ в нашем случае), если оптимальная смешанная стратегия одного игрока применяется против одной из чистых стратегий другого. Этот средний платеж и есть *цена игры*. Мы можем использовать обратное положение и по постоянству цены игры судить о правильности выбора относительных частот: если предполагаемые оптимальные смешанные стратегии не дают одинаковых средних платежей при использовании против каждой из чистых стратегий противника, то предположение неверно и относительные частоты не являются наилучшими.

Влияние изменения масштаба

Найдем решение для трех простых игр, частично для практики, а частично для того, чтобы продемонстрировать некоторые общие правила:

		Красные		Относительные частоты Синих
		1	2	
Синие	1	8	1	2
	2	4	6	7
Относительные частоты Красных		5	4	

		Красные		Относительные частоты Синих
		1	2	
Синие	1	11	4	2
	2	7	9	7
Относительные частоты Красных		5	4	

		Красные		Относительные частоты Синих
		1	2	
Синие	1	16	2	2
	2	8	12	7
Относительные частоты Красных		5	4	

Все три игры по странному стечению обстоятельств требуют применения одних и тех же смешанных стратегий: для Синих в отношении 2:7, а для Красных в отношении 5:4. Почему же все эти три игры должны играть одинаково? Заметим, что вторая игра может быть получена из первой, если к каждому платежу первой прибавить 3 единицы:

8	1
4	6

 $+3 =$

11	4
7	9

а третья может быть получена из первой умножением каждого платежа на 2:

8	1	$\times 2 =$	16	2
4	6		8	12

Эти игры иллюстрируют следующее общее правило: *на способ ведения игры не оказывает влияния прибавление ко всем платежам постоянной величины или умножение всех платежей на положительное постоянное число.*

Цена же игры во всех трех случаях получается разной:

$$\frac{5 \times 8 + 4 \times 1}{5 + 4} = 4\frac{8}{9},$$

$$\frac{5 \times 11 + 4 \times 4}{5 + 4} = 7\frac{8}{9} = 4\frac{8}{9} + 3,$$

$$\frac{5 \times 16 + 4 \times 4}{5 + 4} = 9\frac{8}{9} = 4\frac{8}{9} \times 2.$$

Итак, в то время как способ ведения игры не подвержен влиянию прибавления ко всем платежам постоянного числа или умножения всех платежей на постоянное число, цена игры при этом изменяется.

Смысл этого явления состоит в том, что при прибавлении постоянного числа ко всем платежам изменяется только степень несправедливости игры, а при умножении всех платежей на постоянное число изменяется только валюта, в которой исчисляются платежи.

Хорошая игра против плохой

Теперь мы знаем относительно игры 2×2 почти все, за исключением того, что случится, если один игрок (скажем, Синие) играет, пользуясь оптимальной стратегией, а другой (Красные) — нет. При этом мы должны различать два случая.

Первый случай. Если в игре имеются седловые точки (т. е. оптимальными стратегиями являются чистые стратегии), то Красные будут действовать с расточительной щедростью, если они не применяют своей оптимальной чистой стратегии.

Второй случай. Если оптимальными стратегиями являются смешанные стратегии, то независимо от того, что делают Красные, хорошая игра Синих будет поддерживать все время один и тот же средний платеж. Аналогично, если Красные придерживаются правильной смешанной страте-

гии, то результат будет в любом случае одним и тем же, независимо от того, как играют Синие. Для игр с большим числом стратегий, таких, как игры 2×3 , ответ будет другим, несколько более удовлетворительным.

До сих пор мы оперировали с цифрами и клетками матриц с помощью немногих основных правил. Эти неживые схемы мы рассматривали как игры. Чтобы переменить обстановку, мы предложим вам несколько более живых примеров. Если вы и раньше удивлялись приложению названия «игра» к некоторым нашим примерам, то помещаемые ниже примеры могут поддержать ваше изумление. Философия заключается в том, что почти все может оказаться просто игрой.

Пример 2. Бомбардировочная операция

Облачим обычную игру 2×2 в форму гипотетической военной задачи. Предположим, что два бомбардировщика Синих вылетели на задание. Один из них несет бомбы, а другой — оборудование для создания помех радиолокационным станциям, аппаратуру для определения ущерба, нанесенного объекту, или еще что-либо. Бомбардировщики летят в таком строю, что первый из них находится под значительно более эффективной защитой пушек второго бомбардировщика, чем второй — под защитой первого бомбардировщика. Имеются опасения, как бы носитель бомб не был сбит в результате атак истребителей Красных, а вопрос о сохранении носителя бомб доминирует над всеми остальными соображениями. Проблема заключается в следующем: какой из бомбардировщиков должен быть носителем бомб, первый или второй, и какой из них должен быть атакован истребителями Красных?

Здесь возможны следующие стратегии:

Синие-1 — носитель бомб в менее выгодном положении,

Синие-2 — носитель бомб в более выгодном положении,

Красные-1 — атаковать бомбардировщик в менее выгодном положении,

Красные-2 — атаковать бомбардировщик в более выгодном положении.

Предположим, что шансы носителя бомб выжить равны 60 из 100, если он будет атакован в менее выгодном положении, 80 из 100, если он будет атакован в более выгодном положении, и 100, если он не будет атакован. Эта ситуация может быть представлена матрицей.

		Красные		Относительные частоты Синих
		1	2	
Синие	1	60	100	20
	2	100	80	40
Относительные частоты Красных		20	40	

Если мы подвергнем эту игру такому же анализу, как предыдущие игры, то окажется, что как Красные, так и Синие должны менять свои стратегии, что относительные частоты для обоих одинаковы и что на 20 случаев применения первой стратегии должно приходиться 40 случаев применения второй стратегии. Другими словами, Синие должны предпочесть помещение бомбардировщика в защищенное положение в отношении 40:20, а Красные должны предпочтительно (также в отношении 40:20) атаковать самолеты, летящие в защищенном положении. (Само собой разумеется, что относительные частоты 40:20 равноценны относительным частотам 2:1). Цена игры для Синих будет

$$\frac{20 \times 60 + 40 \times 100}{20 + 40} = 86\frac{2}{3}\%$$

Итак, если Синие применяют для выбора своих стратегий некоторый подходящий случайный механизм вместо того, чтобы делать то, что кажется естественным, они могут надеяться, что 86 $\frac{2}{3}$ % их бомб достигнут цели вместо 80 %. Выигрыш, таким образом, составляет около 8 %.

Пример 3. Коктейль «Дайквир»

В предыдущем примере выгода от применения смешанных стратегий составила 8 %. Это не значит, что выгода будет всегда такой скромной. Рассмотрим следующий эпизод, произошедший в одном баре. Алекси Олаф убивали время между полетами.

—Я знаю одну чудесную игру,—сказал Алекс.—Мы будем показывать друг другу пальцы, один или два. Если у нас обоих окажется по одному пальцу, то ты покупаешь мне рюмку Дайквир. Если у нас совпадут по два пальца, ты покупаешь мне две рюмки. Если же число пальцев у нас не совпадет, я возьму с тебя всего-навсего 10 центов. Это поможет нам провести время.



Олаф остался совершенно невозмутимым.

— Мне кажется, что это очень скучная игра, во всяком случае вначале.

Он уставился в потолок и некоторое время беззвучно шевелил губами. Затем произнес:

— Если ты перед каждой партией будешь платить мне 42 цента в качестве частичной компенсации за все те рюмки вина по 55 центов каждая, которые я должен покупать тебе, то я с удовольствием проведу время с тобой.

— Сорок один цент,— сказал Алекс.

— Хорошо,— вздохнул Олаф.— Ты должен был бы платить 42 цента по крайней мере один раз за каждые 30 партий, но я надеюсь, что наша игра не затянется так долго.

В этой игре платежная матрица имеет следующий вид (стратегия Алекс-1 означает один палец и т. д.):

		Олаф	
		1	2
Алекс	1	55	10
	2	10	110

К счастью, Олаф сразу заметил, что игра является несправедливой по отношению к нему. Поэтому он настоял на компенсации, которая сделала игру справедливой при условии, что он будет играть правильно.

Как же должен он играть? Произведем обычные вычисления:

		Олаф		Относительные частоты Алекса
		1	2	
Алекс	1	55	10	100
	2	10	110	45
Относительные частоты Олафа		100	45	

Итак, Олаф должен применить смешанную стратегию, показывая то один палец, то два в отношении 100 : 45. Если

он поступит так, в то время как Алекс все время показывает один палец, то его средние потери на одну партию составят

$$\frac{100 \times 55 + 45 \times 10}{100 + 45} = 41 \frac{1}{29}.$$

Аналогично, если Алекс все время показывает два пальца, Олаф будет в среднем терять

$$\frac{100 \times 10 + 45 \times 110}{100 + 45} = 41 \frac{1}{29}.$$

Итак, в действительности его потери в среднем составят $41 \frac{1}{29}$ цента, независимо от того, что делает Алекс. Стало быть, применяя смешанные стратегии в отношении 100:45 (или 20:9), Олаф может стабилизировать игру и подсчитать величину компенсации, которую он должен потребовать с Алекса для того, чтобы игра была честной.

Наилучшей стратегией для Алекса является также смешивание стратегий в отношении 100:45, что позволит ему в среднем надежно получать $41 \frac{1}{29}$ цента после каждой партии. Заметьте, что Алекс может гарантировать себе выигрыш всего лишь 10 центов, если он придерживается какой-нибудь одной чистой стратегии, которую Олаф немедленно разгадывает. Если сравнить эти 10 центов со средним выигрышем в $41 \frac{1}{29}$ цента, который гарантируется применением смешанной стратегии, то будет очевидно, что мы имеем случай, когда смешанная стратегия на несколько сотен процентов лучше чистой стратегии.

В общем случае, если платежи в одной паре клеток по диагонали малы по сравнению с платежами в клетках другой диагонали, то необходимо применять смешанную стратегию.

Пример 4. Речная история

К Стиву подошел неизвестный человек, который предложил ему сыграть в «орел — решку». Стив ответил, что сейчас слишком жарко для таких интенсивных упражнений. Тогда незнакомец предложил:

— Хорошо, тогда ляжем и будем одновременно произносить «орел» или «решка», а чтобы это было интересно, я буду платить вам 30 долларов каждый раз, когда я скажу «решка», а Вы — «орел», и 10 долларов, когда будет наоборот. А для того чтобы игра была справедливой, Вы

будете платить мне 20 долларов всякий раз, когда мы назовем одинаковую сторону монеты.



Будучи предупрежденным окружающими (они плыли на пароходе по Миссисипи), Стив подумал, что ему следует, пожалуй, скорее позвать полицию, а не играть с этим человеком. Этот вопрос занимал его больше, чем сама игра. Поэтому он дал себе труд произвести следующие вычисления:

		Незнамец		Относительные частоты Стива
		Орел	Решка	
Стив	Орел	-20	30	30
	Решка	10	-20	50
Относительные частоты незнакомца		50	30	

$$\text{Цена игры для Стива} = \frac{30 \times (-20) + 50 \times 10}{30 + 50} = -1,25.$$

Таким образом, самое лучшее, на что он мог надеяться, даже применяя наилучшую смешанную стратегию чередования «орла» и «решки» в отношении 3:5, это на средний проигрыш в 1,25 доллара за каждую партию, так что его подозрения оправдались.

Пример 5. Наступление и оборона

У Синих имеется два оборонительных сооружения. Они могут успешно оборонять какое-нибудь одно из них, но не

оба вместе. Красные, в свою очередь, могут атаковать тоже только одно сооружение, а не оба одновременно. Одно из сооружений имеет важность в три раза большую, чем другое. Какие стратегии должна применять каждая из сторон?

Пусть значение менее важного сооружения оценивается 1 единицей. Тогда, если уцелеют оба сооружения, то платеж будет 4, если уцелеет более важное сооружение, платеж будет 3 и, если уцелеет менее важное сооружение, платеж будет 1. Обозначив оборону (или атаку) менее важного сооружения первой стратегией, имеем следующую матрицу:

		Красные	
		1	2
Синие	1	4	1
	2	3	4

Здесь нет седловой точки, в чем легко убедиться, выписав минимумы строк и максимумы столбцов. Поэтому здесь требуется применить смешанную стратегию. Произведем обычные вычисления:

		Красные		
		1	2	
Синие	1	4	1	Относительные частоты Синих
	2	3	4	
Относительные частоты Красных		3	1	

Поэтому Синие должны отдать предпочтение обороне своего более важного сооружения в отношении 3 : 1, в то время как Красные должны атаковать менее важное сооружение в три раза чаще, чем более важное. Цена игры равна $3 \frac{1}{4}$.

Этот пример кажется с первого взгляда похожим на пример с бомбардировщиками, но обратите внимание на то, насколько отличаются стратегии. В данном случае Красным выгоднее атаковать менее важный объект.

Пример 6. Проблема встречи у мюзик-холла

Однажды зимой Сэм и Джина договорились встретиться около шести часов вблизи мюзик-холла. Если он придет слишком рано и ее еще не будет на месте, ему придется ездить вокруг квартала в слякоть, преодолевая уличное движение, до тех пор, пока она не появится. Он считает,



что подобное положение должно быть оценено как -1 . Если же она придет раньше, чем он, она замерзнет и промокнет. В этом случае его ожидает удовольствие, которое он оценивает как -3 . Итак, игра будет следующей:

		Джина		Относительные частоты Сэма
		Рано	Поздно	
Сэм	Рано	0	-1	3
	Поздно	-3	0	1
Относительные частоты Джинны		1	3	

Эта игра требует смешанной стратегии. Сэм должен приезжать рано и поздно в отношении $3:1$. Средний платеж равен $-3/4$.

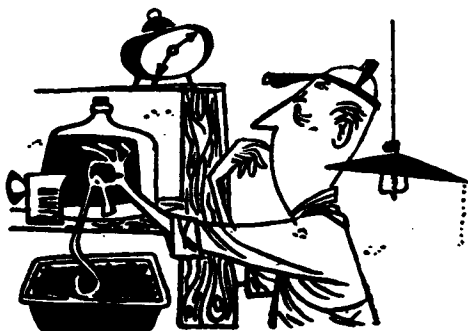
Решение, которое теория игр дает для Джинны, а именно смешанная стратегия с относительными частотами $1:3$ в пользу опоздания, представляет только академический

интерес. Ведь она, безусловно, не заинтересована, в том, чтобы испортить удовольствие Сэму. В платежах заинтересован Сэм, а она лишь играет роль природы.

Пример 7. Темная комната

Голди в темной комнате проявляет незаменимый негатив — портрет младенца в возрасте восьми минут. Он не выспался, и в его обычно безупречной технике возникают погрешности. Он напевает себе под нос, ожидая, когда пройдут 15 минут.

Вдруг он прекращает пение.



Какой у него проявитель? Нормальный или тот, который он разбавил недавно для печатания. Он реагирует на этот вопрос сначала англо-саксонскими выражениями, а затем начинает анализировать положение.

Если проявитель нормальный, то 15 минут как раз то, что надо. Оценим этот случай в 10 единиц! Если он разбавлен, Голди может рискнуть применить закон обратной пропорциональности, хотя он, к сожалению, обычно приводит к неудаче. Так как он разбавил проявитель вдвое, то, если он будет проявлять 30 минут, качество негатива пострадает только немного, и этот исход может быть оценен в 9 единиц. Но предположим, что он проявляет 15 минут в разбавленном проявителе. Тогда получится слабый неконтрастный негатив (не очень здорово, но с ним еще кое-что можно сделать). Эта ситуация получает оценку в 6 единиц. А чем грозит ему проявление в течение 30 минут в нормальном проявителе? Крудное зерно, вуаль, контрастность, как на синьке. Такой исход может получить оценку не более 2 единиц.

Итак, матрица игры может быть записана в следующем виде:

		Природа		Относительные частоты Голди
		1	2	
Голди	1	10	6	7
	2	2	9	4

В этой игре имеются следующие стратегии:

Голди-1—проявлять 15 минут,

Голди-2—проявлять 30 минут,

Природа-1 — нормальный проявитель,

Природа-2 — разбавленный проявитель.

Оказывается, что требуется применить смешанную стратегию с относительными частотами 7 : 4 в пользу более короткого времени проявления.

При такой стратегии его ожидание выигрыша будет равно цене игры:

$$\frac{7 \times 6 + 4 \times 9}{11} = 7\frac{1}{11}.$$

Строго говоря, он должен был бы чередовать свои стратегии. Но так как он верит в то, что улучшение или ухудшение качества негатива примерно пропорционально времени, то он может использовать понемногу от каждой стратегии и проявлять в течение

$$\frac{7 \times 15 + 4 \times 30}{11} = 20\frac{5}{11} \text{ минуты.}$$

Пример 8. День рождения



После особенно напряженного трудового дня Фрэнк спешит домой. Тут ему внезапно приходит в голову, что у Китти сегодня день рождения! А может быть нет? Все магазины уже закрыты, кроме цветочного. Если ее день рождения не сегодня и он не принесет никакого подарка, то положение будет нейтральным, т. е. платеж будет равен 0.

Если у неё не день рождения и он ворвется с букетом цветов, то он рискует подвергнуться испытанию на трезвость, но он все еще будет на высоте положения, и такой исход может быть оценен как 1. Если у неё действительно день рождения и он вовремя вспомнил о нем, то это может быть справедливо оценено как 1,5 единицы. Если же в этом случае он не принесет ничего, то он погибший человек, и его положение может быть оценено как —10 единиц.

Итак, он мысленно составляет платежную матрицу

		<i>Природа</i>		<i>Относительные частоты Фрэнка</i>
		<i>Не день рождения</i>	<i>День рождения</i>	
<i>Фрэнк</i>	<i>без подарка</i>	0	—10	0,5
	<i>с цветами</i>	1	1,5	10

и видит, что относительные частоты его смешанной стратегии составляют 10 : 0,5 или 20 : 1 в пользу цветов.

В этом примере содержится непредусмотренный предметный урок, за который читатель должен благодарить одного любителя придираяться, оказавшегося среди первых читателей рукописи. К несчастью, в этом случае автор забыл проверить матрицу на седловую точку, а ведь она, конечно, есть: Фрэнк должен в любом случае приносить цветы. Точно так же должен поступать и читатель, вопреки укоренившимся у него привычкам.

Вероятность того, что случайно выбранная матрица может иметь седловую точку, довольно велика в случае малых матриц. Шансы составляют 2 : 1 в пользу седловой точки в случае игры 2×2 ; 3 : 7 — для игры 3×3 и 4 : 31 — для игры 4×4 . Они падают до одной тысячной в случае игры 9×9 .

Пример 9. Лотошник

Меррил получил разрешение на продажу темных очков и зонтиков на стадионе Янки. Успех его предприятия, совершенно очевидно, сильно зависит от погоды.



Он знает по опыту, что может продавать примерно 500 зонтиков во время дождя и около 100 зонтиков в хорошую погоду. В последнем случае он может также рассчитывать на продажу 1000 темных очков. Зонтики он покупает по 50 центов, а продает их по одному доллару. Очки стоят ему 20 центов, а продает он их за 50 центов. Он хочет вложить в это предприятие 250 долларов. Все, что не продано, является для него чистым убытком (дома с товаром играют ребяташки).

Он суммирует все эти факты в следующую таблицу прибыли:

		Продажа происходит при		Относительные частоты
		дожде	ясной погоде	
Закупка в расчете на	дождь	250	-150	5
	ясную погоду	-150	350	4

и должен немедленно собраться с духом, потому что игра оказалась со смешанными стратегиями, и он должен суметь выбрать стабилизирующую стратегию, которая предохранит его от капризов погоды.

Решая игру, он находит, что должен покупать товары в расчете на дождь или на ясную погоду согласно относительным частотам 5 : 4 и что цена игры равна

$$\frac{5 \times 250 + 4 \times (-150)}{9} = 72,22 \text{ доллара.}$$

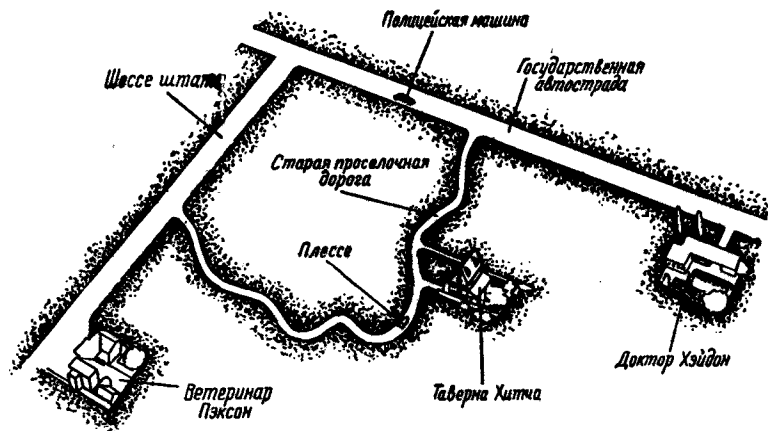
Вместо того чтобы руководствоваться относительными частотами*, он решает вложить $\frac{5}{9}$ своего капитала в товары для дождливого дня, а $\frac{4}{9}$ капитала — в товары для ясной погоды. Итак, он покупает на 161,11 доллара зонтиков (включая зонтики на 22,22 доллара из программы солнечного дня) и на 88,89 доллара темных очков и готовится получить устойчивую прибыль в 72,22 доллара.

Пример 10. Полицейская машина

Этот пример несколько более живой. Полицейский диспетчер передавала по радио информацию дежурной машине № 2, патрулировавшей по государственной автострате, так быстро, как только она могла произносить слова:

* Особенности этого альтернативного метода рассмотрены позднее на стр. 240.

— ...только что выехал на кадиллаке из таверны Хитча по старой проселочной дороге. Направление бегства неизвестно. Имеются подозрения, что Плессе серьезно ранен, но у него есть половинные шансы на спасение, если он быстро доберется до какого-нибудь хорошего доктора, вроде доктора Хэйдона. Его может спасти даже ветеринар Пэксон, но тогда его шансы уменьшатся вдвое. Он застрелил офицера Флада, у которого большая семья.



Помощник шерифа Гендерсон, наконец, отцепил запутавшийся микрофонный шнур от пулемета и своего ботинка 45-го размера и ответил:

—Понял. Мы сможем перехватить его, если он направляется к Хэйдону. У нас пятьдесят шансов из ста перехватить его на шоссе штата, если он едет к ветеринару. Мы должны его перехватить, потому что нам не догнать его. Недавно у помощника шерифа Рута заела коробка скоростей на заднем ходе у этой штуки (машины), и с тех пор наша скорость просто срам для всего департамента.

Из динамика снова послышался шум штабной рации, но на этот раз вместо музыкального голоса диспетчера раздался хриплый голос шерифа Липпа:

—Если вам известно еще что-нибудь, не говорите по радио. У него в кадиллаке приемник первого класса. Перехватите его!

Внезапно Руту в голову пришла какая-то мысль, и он прекратил возню с ручкой переключения скоростей.

—Гендерсон, сегодня нам может не понадобится пулемет, но нам нужен карандаш. Ведь это как раз игра два

на два. Диспетчер сообщила нам всю муть, которая нам нужна.

— Ты собираешься использовать ее догадки?

— А у тебя есть лучшее? У нее есть интуиция. Кроме того, это сведения из штаба. Давай посмотрим... Предположим, что мы направились к Хэйдону. Предположим, что Плессе сделал то же. Тогда мы спасаем превосходного бандита, если ты опять не начнешь стрелять. Но если он поедет к Пэксону, имеется три шанса из четырех, что старик убьет его.

— Не доходит.

— Ну, это совсем просто. Ведь у Хэйдона имеются половинные шансы на его спасение. А если он поедет к Пэксону, шансы будут вдвое меньше. Половина половины будет одна четверть. Поэтому шансы, что он умрет, равны трем четвертям, т. е. единица минус четверть. Понятно?

— Ну, конечно!

— Теперь, если мы поедем к Пэксону, тут труднее разобраться. Прежде всего он может поехать к Хэйдону, и в этом случае мы должны только рассчитывать на доктора, что он убьет его, а вероятность этого равна всего половине.

— Ты должен вычесть половину из единицы.

— Я так и сделал. Теперь предположим, что он также мчится к Пэксону. Тогда может произойти одно из двух. Первое—мы поймаем его; шансы на это равны половине. Второе— нам не удастся перехватить его; вероятность этого также равна половине, но имеется вероятность, равная трем четвертям, того, что ветеринар прикончит его. Итак, общая вероятность того, что он достанется нам, а не доктору, равна половине от трех четвертей, т. е. трем восьмым. Добавь к этому половинную вероятность того, что нас он не перехитрит, и мы будем иметь вероятность в семь восьмых.

— Мне совсем не нравятся эти штуки. Пока мы тут занимаемся всякой чепухой, он ускользнет от нас.

— Успокойся! Ведь ему тоже надо все рассчитать, а он находится в значительно более тяжелом состоянии, чем мы. Итак, что же мы имеем?

		Кадиллак направляется к	
		Хэйдону	Пэксону
Дежурная машина направляется к	Хэйдону	1	$\frac{3}{4}$
	Пэксону	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$

— Дробные числа не очень удобны при этом освещении. Давай умножим все на восемь. Я слышал, что это ничему не повредит, но даст некоторое упрощение.

		<i>Кадиллак</i>	
		<i>Хэйдон</i>	<i>Пэксон</i>
<i>Патруль</i>	<i>Хэйдон</i>	8	6
	<i>Пэксон</i>	4	7

— Теперь ясно, что это не простое дело...

— Я знал это. Мы не можем придерживаться какой-то одной стратегии. Мне придется поэтому подсчитать наилучшую смешанную стратегию.

		<i>Кадиллак</i>		<i>Относительные частоты патруля</i>
		<i>Хэйдон</i>	<i>Пэксон</i>	
<i>Патруль</i>	<i>Хэйдон</i>	8	6	3
	<i>Пэксон</i>	4	7	2
<i>Относительные частоты кадиллака</i>		1	4	

— Да... Три к двум в пользу Хэйдона. Скажи, сколько показывает секундная стрелка на твоих часах?

— Двадцать восемь секунд.

— О'кей! Поехали к Хэйдону. Эту машину было бы легче разворачивать, если бы у нее не было такого длинного багажника...

— Это колдовство с секундной стрелкой — просто глупость, — проворчал Гендерсон. — Почему мы сразу не поехали к Хэйдону?

— Это затронуло бы наши шансы, в данном случае немного, но все же... Если бы у нас было единственное решение ехать к Хэйдону, то Плессе мог бы ускользнуть от нас, поехав к Пэксону и имея 75%-ный риск. Теперь же он должен действовать с 80%-ным риском, независимо от того, что он предпримет. Теперь насчет часов: первые 30 секунд и последующие 20 секунд относятся как 3:2.

Выводы по методам решения игр 2×2

Чтобы подытожить технический материал первой части этой главы, мы решим еще один пример.

Рассмотрим игру:

		Красные	
		1	2
Синие	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
	2	$\frac{1}{2}$	0

Мы желаем узнать, как следует действовать в этой игре. Предположим, что мы не любим дробей и отрицательных чисел. Мы знаем, что на ведение игры не оказывает влияния умножение всех чисел матрицы на одно и то же постоянное число или прибавление к каждому элементу матрицы одного и того же постоянного числа. Поэтому, чтобы устранить возникшую неприятность, умножим все числа матрицы на какое-нибудь удачно выбранное число, например на 12. Это улучшит внешний вид нашей матрицы:

		Красные	
		1	2
Синие	1	-4	3
	2	6	0

Чтобы избавиться от отрицательных чисел, прибавим к каждому элементу, скажем, 4. Это даст следующую матрицу:

		Красные	
		1	2
Синие	1	0	7
	2	10	4

Теперь мы подготовили все для решения. Начнем, конечно, с проверки на седловую точку:

		Красные		
		1	2	Минимумы строк
Синие	1	0	7	0
	2	10	4	4*
		Максимумы столбцов		
		10	7*	

Максимин равен 4, а минимакс — 7. Седловой точки нет, поэтому наша работа не закончена. Начнем с изучения положения Красных:

		Красные	
		1	2
	1	0	7
	2	10	4

Вычитая элементы один из другого, получим:

		Красные	
		1	2
	1	-10	3
	2		

Поэтому относительные частоты стратегий Красные-1 и Красные-2 даны в следующих квадратах:

		1	2
	1		3
	2	-10	

Одно из чисел отрицательно, но мы всегда пренебрегали знаком относительных частот. Поэтому наиболее выгодной стратегией для Красных является (если все было сделано правильно) смешанная стратегия 3 : 10.

Нашей следующей задачей будет вычисление относительных частот для Синих.

		Синие	
		1	2
	1	0	7
	2	10	4

Вычитая каждый элемент из другого слева направо, имеем:

Синие	1	
	2	

Относительные частоты даны в квадратах:

1		2	
			

Итак, Синие должны применять смешанную стратегию с относительными частотами 6 : 7, если все верно.

Проверим правильность наших расчетов, испытывая каждую смешанную стратегию против каждой чистой стратегии противника. Стратегия Синих 6 : 7, применяемая против стратегии Красные-1, дает

$$\frac{6 \times 0 + 7 \times 10}{6 + 7} = \frac{70}{13},$$

а против стратегии Красные-2

$$\frac{6 \times 7 + 7 \times 4}{6 + 7} = \frac{70}{13}.$$

С другой стороны, стратегия Красных 3 : 10, примененная против стратегии Синие-1, дает

$$\frac{3 \times 0 + 10 \times 10}{3 + 10} = \frac{70}{13},$$

а против стратегии Синие-2

$$\frac{3 \times 10 + 10 \times 4}{3 + 10} = \frac{70}{13}.$$

Итак, все в порядке. Синие и Красные должны играть согласно относительным частотам 6 : 7 и 3 : 10 соответственно.

Является ли число $\frac{70}{13}$ ценой игры? Нет. Вспомните, что мы умножили каждое число на 12 и прибавили к каждому числу 4. Мы сможем получить цену игры, если сделаем

то же в обратном порядке. Поскольку раньше мы прибавляли 4, то теперь будем вычитать 4, т. е.

$$\frac{70}{13} - 4 = \frac{70 - 52}{13} = \frac{18}{13}.$$

Далее, поскольку мы раньше умножали на 12, будем теперь делить на 12, т. е.

$$\frac{18}{13} : 12 = \frac{18}{13 \times 12} = \frac{3}{26}.$$

Итак, цена нашей игры равна $\frac{3}{26}$, что можно проверить, испытывая смешанные стратегии на первоначальной игре. Возьмем, скажем, смешанную стратегию Синих 6:7 против стратегии Красные-2; это дает

$$\frac{6 \times 1/4 + 7 \times 0}{6 + 7} = \frac{3}{26},$$

что и следовало ожидать.

Ниже мы даем ряд упражнений для тех, что захочет поупражняться, так как это, вероятно, наилучший способ закрепить новые идеи. Ответы даны в конце книги.

Упражнения 1

Определить относительные частоты и цену следующих игр:

1.

		Красные	
		1	2
Синие	1	7	4
	2	1	2

2.

		Красные	
		1	2
Синие	1	5	8
	2	6	7

3.

		Красные	
		1	2
Синие	1	-5	-8
	2	-6	-7

4.

		Красные	
		1	2
Синие	1	2	4
	2	8	6

5.

		Красные	
		1	2
Синие	1	1	2
	2	4	3

6.

		Красные	
		1	2
Синие	1	1	2
	2	3	4

7.

		Красные	
		1	2
Синие	1	1	3
	2	4	2

8.

		Красные	
		1	2
Синие	1	0	2
	2	3	1

9.

		Красные	
		1	2
Синие	1	-1	1
	2	2	0

10.

		Красные	
		1	2
Синие	1	-3	1
	2	3	-1

11.

		Красные	
		1	2
Синие	1	4	-4
	2	-4	4

12.

		Красные	
		1	2
Синие	1	4	-5
	2	-5	4

13.

		Красные	
		1	2
Синие	1	4	5
	2	5	4

14.

		Красные	
		1	2
Синие	1	5	88
	2	88	5

15.

		Красные	
		1	2
Синие	1	4	-5
	2	-4	5

16.

		Красные	
		1	2
Синие	1	4	-5
	2	-3	5

17.

		Красные	
		1	2
Синие	1	1	3
	2	7	5

18.

		Красные	
		1	2
Синие	1	1	-3
	2	-7	5

19.

		Красные	
		1	2
Синие	1	1	100
	2	1000	10

20.

		Красные	
		1	2
Синие	1	3	-3
	2	-4	4

ИГРЫ $2 \times m$

Игры, в которых один игрок имеет *две* стратегии, а другой — *много* стратегий, сокращенно называются «играми два на m » и записываются как «игры $2 \times m$ ». Буква m может быть любым целым числом больше двух. Этим играм будет посвящена остальная часть этой главы. К счастью, для их решения практически не требуется знать ничего, кроме способов решения игр 2×2 .

Седловые точки

Игры $2 \times m$ всегда имеют либо седловую точку (т. е. хорошую *чистую* стратегию), либо хорошую смешанную стратегию, основанную на *двух* чистых стратегиях. Поэтому они могут быть сведены к играм 2×2 . Это может быть выполнено различными способами.

Вначале всегда надо проверить, нет ли седловой точки; этот процесс не представляет трудностей, и если такая точка имеется, работа оказывается законченной. Напомню, что для этого мы выписываем минимумы всех строк и выбираем наибольший из них. Затем выписываем максимумы всех столбцов и выбираем наименьший из них. Если эти

два числа, называемые максимином и минимаксом, равны, то имеется седловая точка, и их общее значение и есть цена игры. Предположим, что имеется следующая игра:

		Красные		Минимумы строк
		1	2	
Синие	1	4	4	4
	2	5	3	3
	3	6	5	5*
	4	1	3	1
	5	5	4	-4
Максимумы столбцов		6	5*	

У нее есть седловая точка: Синие-3 против Красные-2, потому что максимин равен минимаксу и равен 5.

Доминирование

Если в игре нет седловой точки, тогда исследуйте стратегии того игрока, который имеет много стратегий. При этом может броситься в глаза, что некоторые из них настолько хуже других, что ими никогда не будут пользоваться. Предположим, что Синие являются игроком со многими стратегиями. Если одна из его стратегий превосходит другую на основании сравнения каждой клетки с клеткой попарно, то первая стратегия является доминирующей, а вторая должна быть исключена из матрицы. Это исключение можно производить даже тогда, когда у доминирующей стратегии имеются элементы, равные элементам другой стратегии. В качестве примера рассмотрим игру:

		Красные	
		1	2
Синие	1	2	5
	2	4	3
	3	3	6
	4	5	4
	5	4	4

Из сравнения стратегий Синие-1 и Синие-3, т. е.

<i>Синие</i>	1	2	5
	3	3	6

ясно, что стратегия Синие-3 является доминирующей. Аналогично, сравнивая стратегии Синие-2 и Синие-4, а также Синие-4 и Синие-5, т. е.

<i>Синие</i>	2	4	3
	4	5	4

<i>Синие</i>	4	5	4
	5	4	4

мы видим, что стратегия Синие-4 доминирует в обоих случаях. Поэтому игра может быть приведена к следующему виду:

		<i>Красные</i>	
		1	2
<i>Синие</i>	3	3	6
	4	5	4

Точно так же, если Красные имеют много стратегий и если один столбец доминирует над другим на базе сравнения клетки с клеткой, то доминирующий столбец может быть исключен (напоминаем, что Красные заинтересованы в возможно меньших платежах).

Полезность этого принципа для упрощения игр очевидна. Он может быть использован, конечно, и в играх 2×2 , но в том случае, когда имеется доминирующая строка или столбец, одновременно имеется и седловая точка.

Смешанные стратегии

Если в игре нет седловой точки, проверьте на доминирование стратегии того игрока, у которого много стратегий. Если игрок, имеющий больше двух стратегий,—Синие, то исключите все худшие (подчиненные) стратегии. Если та-

ким игроком являются Красные, удалите все *доминирующие* стратегии. Тогда оставшаяся игра (она, конечно, может не измениться по сравнению с первоначальной игрой, так как в ней может не оказаться ни одного доминирования) содержит игру 2×2 , обладающую тем свойством, что ее решение является одновременно решением игры $2 \times m$. Теория того, как найти такую критическую игру 2×2 , необычайно проста, в то время как ее *практическое применение* может оказаться весьма утомительным — нужно просто найти эту игру.

В этом случае приходится брать какую-нибудь одну игру 2×2 (из матрицы $2 \times m$), решать ее и подставлять решение в первоначальную игру. Если смешанная стратегия игрока с двумя стратегиями пригодна против любой стратегии игрока со многими стратегиями, то решение найдено. Слово «пригодна» означает, что игрок с двумя стратегиями получает по крайней мере столько же (а обычно больше), играя против каждой стратегии другого игрока, сколько он получал бы, играя против двух стратегий, оставшихся в выбранной (редуцированной) игре 2×2 .

Попытаемся разъяснить последнее положение. В игре 2×2 , которая требует смешанных стратегий, мы нашли, что игрок, применяющий правильную смешанную стратегию, выигрывает одно и то же, играя против любой из двух чистых стратегий противника. Мы тогда предупредили, что это не слишком хорошо, но в дальнейшем может наступить улучшение дел. Теперь оно наступило. В игре $2 \times m$ один из игроков по-прежнему выигрывает то же (цену игры) против любой из чистых стратегий, входящих в оптимальную (смешанную) стратегию противника, но он выигрывает больше, играя против любой из остальных чистых стратегий противника. Имеются исключения, когда выигрыши одинаковы и при игре против некоторых или против всех остальных стратегий, но обычно игрок получает больше.

Призовем на помощь пример:

		Красные				
		1	2	3	4	Минимумы строк
Синие	1	1	7	0	3	0*
	2	4	8	-1	6	-1
Максимумы столбцов		4	8	0*	6	

Здесь минимакс и максимин равны (нуль), т. е. игра имеет седловую точку.

Это — честная игра, потому что ее цена равна нулю. Лучшими стратегиями являются Синие-1 против Красные-3.

Возьмем другую игру:

		Красные							Минимумы строк
		1	2	3	4	5	6	7	
Синие	1	-6	-1	1	4	7	4	3	-6
	2	7	-2	6	3	-2	-5	7	-5*
Максимумы столбцов		7	-1*	6	4	7	4	7	

Здесь максимин равен -5 , а минимакс равен -1 и седловой точки нет. Однако стратегии Красные-3, Красные-4, Красные-5 и Красные-7 доминируют над стратегией Красные-2 и дают для них худшие результаты; поэтому эти стратегии вычеркиваются, и игра может быть сведена к следующей матрице:

		Красные		
		1	2	6
Синие	1	-6	-1	4
	2	7	-2	-5

в которой мы должны искать такую игру 2×2 , решение которой удовлетворяло бы игре 2×3 и в дальнейшем автоматически удовлетворяло бы первоначальной игре 2×7 .

Начнем с первой игры 2×2 :

		Красные	
		1	2
Синие	1	-6	-1
	2	7	-2

Найдем для нее испытанными методами решение $9:5$ для Синих и $1:13$ для Красных.

Цена игры будет:

$$\frac{9 \times (-6) + 5 \times 7}{9 + 5} = -\frac{19}{14},$$

если Синие играют с относительными частотами 9:5 против стратегии Красные-1. Она, конечно, такая же и при игре против стратегии Красные-2:

$$\frac{9 \times (-1) + 5 \times (-2)}{14} = -\frac{19}{14}.$$

Настоящее испытание найденного решения начинается тогда, когда мы проверяем смешанные стратегии Синих 9:5 против оставшейся стратегии Красных (Красные-6). Результат должен быть больше, чем $-\frac{19}{14}$, или равен этому числу. Надо всегда надеяться на это, потому что разочарование в случае, если найденное решение будет неверно, может оставить глубокие следы. Оптимальная смешанная стратегия Синих (9:5), примененная против стратегии Красные-6, дает Синим

$$\frac{9 \times 4 + 5 \times (-5)}{9 + 5} = \frac{11}{14},$$

что, безусловно, больше, чем $-\frac{19}{14}$. Так что оптимальной стратегией для Синих является смешанная стратегия 9:5, а для Красных—1:13:0:0:0:0:0. В нашем примере первая же испробованная игра 2×2 оказалась правильной. Совершенно очевидно, что жизнь не всегда столь хороша. Если бы нам не удалось исключить несколько стратегий по принципу доминирования, то в нашем случае имелось бы $\frac{7 \times 6}{2}$ игр 2×2 , и нам пришлось бы испробовать 21 игру, прежде чем найти правильное решение. Вообще в игре $2 \times m$ имеется $\frac{m(m-1)}{2}$ игр типа 2×2 .

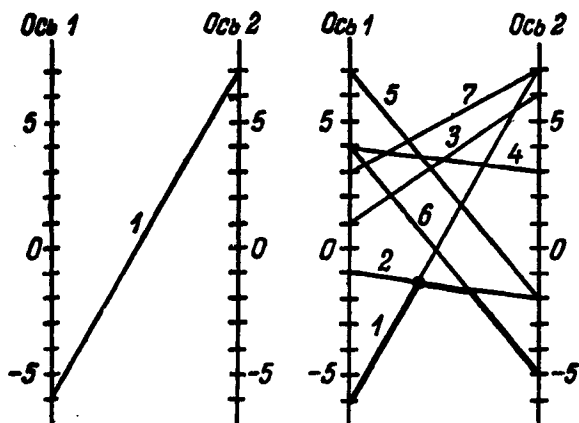
Графическое решение

Хотя мы не желаем обременять вас специальными приемами, все же не можем не привести один из них для того, чтобы оживить решение игр $2 \times m$. И мы хотим сделать это как можно раньше для того, чтобы вы уже знали об этих

приемах до того, как они станут особенно полезны нам при рассмотрении более сложных игр. Используем последний пример, т. е.

		Красные						
		1	2	3	4	5	6	7
Синие	1	-6	-1	1	4	7	4	3
	2	7	-2	6	3	-2	-5	7

Отложим на двух параллельных вертикальных осях платежи первой стратегии красных (—6 и 7) и соединим прямой линией эти точки, как показано на рисунке слева. Сделаем то же самое для всех остальных стратегий Красных на одном и том же графике, как показано на рисунке справа:



Получилось немного сложно, но зато весьма полезно! Обведем теперь жирной линией нижнюю границу получившейся фигуры, а затем найдем и отметим *наивысшую точку* этой жирной линии. Линии, пересекающиеся в этой точке соответствуют тем чистым стратегиям, которые должны применять Красные в своей смешанной стратегии.

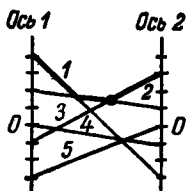
На нашем графике в этой точке пересекаются линии 1 и 2, поэтому смешанная стратегия Красных должна быть основана на применении стратегий Красные-1 и Красные-2, что согласуется с ранее полученными результатами. Как

только найдена пара активных стратегий, нетрудно уже из получившейся при этом игры 2×2 определить оптимальные стратегии Синих и Красных в первоначальной игре $2 \times m$. Обратите внимание на то, что этот простой график позволил нам немедленно определить (правда, после часовых поисков линейки) существенную игру среди двадцати одной игры 2×2 .

Если вам попала игра $m \times 2$, в которой у Синих имеется много стратегий, то графический метод определения существенных стратегий Синих очень похож на только что описанный: обведите жирной чертой границу графика *сверху* и отметьте *самую низшую* точку этой границы. Линии, проходящие через эту точку, указывают критические стратегии Синих.

Вычертим в качестве примера график игры

	<i>Красные</i>	
	1	2
1	4	-3
2	2	1
3	-1	3
4	0	-1
5	-3	0



Из графика видно, что смешанная стратегия Синих должна быть основана на чистых стратегиях Синие-2 и Синие-3.

Наступило время привести несколько иллюстративных примеров.

Пример 11. Игра в слова

Голдсен и Кершоу в соответствии со своими естественными наклонностями затеяли битву слов. Кершоу, надеясь получить экономическую выгоду, предложил в конце концов создавать слова в соответствии со следующей схемой:

—Предположим, что Вы делаете выбор между буквами a и i , а я, независимо от Вас, буду выбирать одну из букв f , t или x . Если обе буквы образуют какое-нибудь слово, то я буду платить Вам один доллар и, кроме того, дополнительное вознаграждение в размере трех долларов,

если это слово — существительное или местоимение. В тех редких случаях, когда буквы не образуют слова, Вы платите мне два доллара.

— Я никогда не берусь за такого рода дела, прежде чем не подвергну тщательному исследованию всю операцию, в частности методами теории игр, — ответил Голдсен. — Подождите, пожалуйста, минутку...

Затем он составляет платежную матрицу*

		Кершоу			Минимумы строк
		<i>f</i>	<i>t</i>	<i>x</i>	
Голдсен	<i>a</i>	-2	1	4	-2*
	<i>i</i>	1	4	-2	-2*
Максимумы столбцов		1*	4	4	

и проверяет ее на седловую точку. Однако наибольшее значение минимумов строк (-2) не равно наименьшему значению максимумов столбцов (1); поэтому у матрицы нет седловой точки. Перед тем как перейти к отысканию смешанной стратегии, он замечает, что стратегия Кершоу *f* подчинена его стратегии *t*, т. е. для Кершоу буква *t* хуже, чем буква *f* при поэлементном сравнении. Поэтому справедливо предположить, что Кершоу не будет применять буквы *t*. Вследствие этого остается матрица:

		Кершоу		Относительные частоты Голдсена
		<i>f</i>	<i>x</i>	
Голдсен	<i>a</i>	-2	4	3
	<i>i</i>	1	-2	6
Относительные частоты Кершоу		6	3	

из которой видно, что Голдсен должен произвольно выбирать *a* и *i* в отношении 3:6 (или 1:2). Кершоу, который предложил игру, знает, что он должен выбирать буквы *f*, *t* или *x* с относительными частотами 6:0:3, т. е. он дол-

* В этой матрице образуются следующие слова: *at* — при; *ax* — топор, *if* — если, *it* — оно. Прим. пер.

жен вдвое чаще называть букву f , чем x , и совершенно не называть букву t .

Голдсен, однако, все еще не решил, играть ему в эту игру или нет.

— Подождите еще немного. Я подсчитаю цену игры, старина, — пробормотал он. — Теперь посмотрим, если он называет f , я выигрываю в среднем около $\frac{1 \times (-2) + 2 \times 1}{3} = 0$. Это

немного, но не убийственно. Если он будет называть t , я получу $\frac{1 \times 1 + 2 \times 4}{3} = 3$ доллара. Это уже неплохо... Если он

называет x , я получаю $\frac{1 \times 4 + 2 \times (-2)}{3} = 0$. Гм, ... это, кажется, исключительно справедливая игра. Вы меня удивили. Сыграем?

Пример 12. Спортивный набор *

Два американских летчика на Ближнем Востоке (назовем их Джо и Билл, хотя их настоящие имена засекречены) от безделья раздобыли в офицерском клубе коробку со спортивным набором. В ней было несколько пачек сигарет «Пол—Мол», револьвер, один патрон и правила игры в русскую рулетку. (Забавно, что русские часто называют ее французской, французы называют ее испанской рулеткой и так далее, но больше всего играют в нее в Америке**.) Чтобы убить время, они придумали игру и решили сыграть. В начале партии каждый игрок ставит пачку сигарет. Как старший по званию, Джо ходит первым. Он может добавить две пачки в банк и передать револьвер Биллю или же добавить одну пачку, прокрутить барабан, приставить револьвер к своему виску и нажать на спуск и—будь на то божья воля!—после этого вручить револьвер своему противнику. Если Билл получит револьвер, у него имеется та же альтернатива: он может вернуть револьвер обратно, добавив, конечно, две пачки в банк, или же поставить одну пачку и испытать счастье с револьвером на себе. После этого партия закончена. Каждый из игроков получает половину банка, если, конечно, оба остались в живых. В противном случае уцелевший забирает весь банк.

* В переводе дается несколько измененный вариант примера. — *Прим. ред.*

** Это явление всеобщее. Так, сосиски во Франкфурте называют венскими, а в Вене — франкфуртскими. Искусственные горы в Америке называют русскими, а в России — американскими и т. д. — *Прим. ред.*



У Джо имеется две стратегии: 1) он может пасовать или 2) играть. У Билла имеется четыре стратегии: 1) он может пасовать, не обращая внимания на решение Джо или 2) он может играть, также не обращая на него внимания, или 3) он может повторить то, что сделал его противник, или 4) он может сделать обратное тому, что сделал Джо.

Составление платежной матрицы этой игры элементарно, и чтобы не наскучить читателю, мы предлагаем произвести ее проверку в качестве упражнения. (Вот это остроумно! *).

* Вам может показаться это нечестным, потому что мы обещали ограничиться элементарной арифметикой, а вот уже не в первый раз на свет выскакивает нечто более серьезное — теория вероятностей, например. В действительности, в основании нашей книги находится солидный математический фундамент. Даже такие вещи, которые мы с вами делали со спокойной совестью совершенно автоматически, подвергались детальному обсуждению в крайне специализированных журналах, статьи в которых написаны на таком языке, который не всякий признает за английский. А процесс абстракции и моделирования, с помощью которого мы переходим от реального мира к игровым матрицам, может потребовать глубоких знаний существа изучаемых проблем, более широких познаний в области математики, больше изобретательности и временами может заставить вас просидеть до поздней ночи. Мы стараемся разрешить эту проблему следующим образом: рассматриваем различные стороны теории игр и устанавливаем чисто арифметические правила. Физическая сторона и матрицы игр выявляются простыми рассуждениями, если это возможно. В противном случае мы втайне используем тот аппарат, который требуется, и представляем вам законченный результат — готовую матрицу.

Вот она, эта матрица *:

		Джо		Минимумы строк
		1	2	
Билл	1	0	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$
	2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}^*$
	3	0	$\frac{1}{18}$	0
	4	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$
Максимумы столбцов		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}^*$	

Максимин и минимакс равны, и поэтому игра имеет седловую точку для стратегий Билл-2 — Джо-2 (Б2—Д2). Это означает, что как Джо, так и Билл должны всегда стрелять. Это означает также, что игра нечестная по отношению к Джо.

* Составление матрицы действительно представляет собой хорошее упражнение и требует элементарных знаний теории вероятностей. После того как читатель попытается сделать эту работу самостоятельно, он может сверить свои результаты с нижеследующим рассуждением.

В револьвере (системы Смит и Вессон) 1 патрон на 6 гнезд. Вероятность выстрела при случайном положении барабана $\frac{1}{6}$, вероятность «осечки» $\frac{5}{6}$. Вычислим элементы матрицы. Пачка сигарет равна единице.

Клетка Д1—Б1 (оба не стреляют). Оба вносят по 3 пачки (одна ставится в начале партии, две — при ходе), стало быть, в банке 6 пачек, которые делятся на две равные части и возвращаются игрокам. Выигрыш каждого за вычетом ставки: $3-3=0$ («при своих»).

Клетка Д2—Б1 (Джо стреляет, Билл — нет). Билл вносит 3 пачки, Джо — 2, в банке 5 пачек. Если Джо убий (вероятность равна $\frac{1}{6}$), Билл получает 5, если Джо остался цел (вероятность равна $\frac{5}{6}$), Билл получает $\frac{5}{2}$. Ожидание выигрыша Билла за вычетом его ставки:

$$\frac{1}{6} \times 5 + \frac{5}{6} \times \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{12}.$$

Клетка Д1—Б2 (Джо не стреляет, Билл стреляет). В банке 5. Если Билл убий (вероятность $\frac{1}{6}$), он ничего не получает (все забирает Джо). Если он цел (вероятность $\frac{5}{6}$), то его выигрыш будет $\frac{5}{2}$. Ожидание выигрыша Билла за вычетом его ставки:

$$\frac{1}{6} \times 0 + \frac{5}{6} \times \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{12}.$$

Клетка Д2—Б2 (оба стреляют). В банке 4. Если Джо убий (вероятность $\frac{1}{6}$), Билл получает 4. Если Джо цел (вероятность $\frac{5}{6}$), то Билл может быть убит или нет. В первом случае [сложное событие,

Наша игра представляет нечто большее, чем простой пример еще одной игры $2 \times m$, так как она обладает одним особым свойством: в тот момент, когда игроки принимают решение, у них имеется полная информация обо всем, что произошло перед этим. Анализ, произведенный математиками, показал, что *у любой игры с совершенной информацией имеется седловая точка*. Поэтому не удивительно, что и наша игра имеет седловую точку. Такие игры могут также иногда иметь хорошие решения в смешанных стратегиях.

Шахматы являются другим примером игры с совершенной информацией. При игре в шахматы всегда имеется одна чистая стратегия, дающая результаты, которые, по крайней мере, не хуже, чем для любой смешанной стратегии. Мы не знаем этой чистой стратегии с седловой точкой. Точно так же мы не знаем, приведет ли она к выигрышу белых, или черных, или к ничейному результату, потому что игра слишком сложна и громоздка для анализа. Даже простое перечисление всех стратегий совершенно невозможно, так как их приближенное число содержит больше нулей, чем вы смогли бы написать за всю свою жизнь. Если бы мы знали решение, то не было бы никакого интереса играть в такую игру.

Бридж и покер, которые также не поддаются на сегодняшний день точному анализу, не являются играми с совершенной информацией. Исход случайного процесса—сдачи карт—только частично известен участникам игры при розыгрыше партии. Хорошая игра здесь безусловно должна состоять из смешанных стратегий.

состоящее из двух независимых, — Джо цел, Билл убит (вероятность $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$) Билл не получает ничего. Во втором случае (вероятность $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$) Билл получает 2. Ожидание выигрыша Билла с учетом ставки:

$$\frac{1}{6} \times 4 + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6} \times 0 + \frac{5}{6} \times 2 \right) - 2 = \frac{1}{18}.$$

Остальные клетки повторяют перечисленные, и остальная часть матрицы отличается только взаимным расположением клеток.

Заметим, что в платежной матрице автор учитывает только пачки сигарет. Очевидно, жизнь в соответствии с «американским образом жизни» привлекает летчиков настолько мало, что ценность сигарет превалирует. — *Прим. ред.*

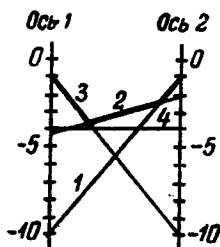
Пример 13. Высококачественный проигрыватель

Фирма Ганнинг и Капплер производит усилители, дающие высококачественное воспроизведение звука в полосе свыше 10 000 герц. Их работа сильно зависит от параметров небольшого дефицитного конденсатора. Фирме этот конденсатор нормально стоит 1 доллар, но она затрачивает 10 долларов при замене неисправного конденсатора у потребителя.

При решении этой проблемы у фирмы имеется несколько альтернатив: во-первых, им известен метод проверки конденсаторов, который гарантирует выявление неисправности в трех случаях из четырех, но, к сожалению, применение этого метода стоит 1 доллар; во-вторых, они знают и другой весьма надежный и очень дешевый способ проверки, но в девяти случаях из десяти он приводит к пробою исправных конденсаторов. Фирма может, наконец, покупать конденсаторы повышенного качества по 4 доллара и с полной гарантией. Задача фирмы состоит в правильном выборе среди этих возможностей. Она сводится к решению следующей игры 4×2 :

		Природа	
		Конденсатор	
		дефектный	исправный
Фирма Ганнинг и Капплер	1) без проверки	-10	-1
	2) Проверка за 1 доллар	-1 $\frac{3}{4}$	-2
	3) Надежный метод проверки	-1	-10
	4) Конденсаторы с гарантией	-4	-4

С помощью графического метода или метода проб (если вы его предпочитаете)



мы находим, что активными стратегиями являются вторая и третья стратегии. Поэтому мы вычисляем для них относительные частоты:

		Природа		Относительные частоты Г. и К.
		Дефектный	Исправный	
Фирма Г. и К.	2	$-\frac{7}{4}$	-2	9
	3	-1	-10	$2\frac{1}{4}$

Частоты применения второй и третьей стратегий относятся как $9:2\frac{1}{4}$ или как $4:1$. Поэтому смешанные стратегии первоначальной игры относятся как $0:4:1:0$. Иначе говоря, каждый раз, когда фирма проверяет конденсаторы, она должна с помощью жребия выбрать либо метод, стоящий 1 доллар, либо надежный метод, причем первый метод должен применяться в четыре раза чаще, чем второй. Итак, фирма должна подвергать все конденсаторы проверке и не покупать гарантированных конденсаторов по 4 доллара.

Цена игры равна

$$\frac{4 \times (-2) + 1 \times (-10)}{5} = -3,60 \text{ доллара.}$$

Это — средняя стоимость одного конденсатора, если природа окажется немилостливой.

Способы бросания жребия (случайные механизмы)

У вас может возникнуть недоуменный вопрос, где же найти такой случайный механизм, который бы давал относительные частоты, необходимые в играх со смешанными стратегиями. Подбрасывание монеты может применяться при относительных частотах $1:1$. Игральная кость может помочь при частотах $1:5$; $2:4$ и так далее до $5:1$. Колода карт может обслуживать частоты $1:12$ (например, все тузы против нетузов), $3:10$ (например, карты-картинки против карт-чисел) и т. д. Секундная стрелка ваших часов может прекрасно служить для выбора случайных чисел от 0 до 59, если только вы не смотрели на часы недавно и не знаете наперед, даже приблизительно, ответа. Но на практике могут потребоваться любые сочетания чисел в качестве относительных частот, и у нас должен иметься общий метод их получения. Поэтому мы сделаем краткий экскурс в эту область.

Механизмом, удовлетворяющим вышеуказанному требованию, является таблица случайных чисел. Ниже дан пример такой таблицы:

35	07	53	39	49
56	62	33	44	42
36	40	98	32	32
57	62	05	26	06
07	39	93	74	08
68	98	00	53	39
14	45	40	45	04
07	48	18	38	28
27	49	99	87	48
35	90	29	13	86

Тот факт, что числа сгруппированы попарно, не имеет никакого иного значения, кроме стремления облегчить чтение. Вы можете начинать с любой точки большой таблицы такого сорта, отсчитывать числа вверх или вниз, вправо или влево, группировать числа по три и более и всегда иметь один и тот же результат: бессмысленность, неожиданность, случайность. Хотя для получения этих цифр затрачена большая работа мысли, предполагается, что в самих числах нет ни капли смысла. (Приведенная нами таблица является частью таблицы, состоящей из миллиона случайных чисел, полученных с помощью особой электронной рулетки. Небольшая часть этой таблицы приведена в Приложении.)

Было бы неверно предположить, что вы можете сами из головы написать случайную последовательность чисел. Привычки, предрассудки, любовь к порядку и так далее — все это будет препятствовать тому, чтобы эти числа были действительно случайными. Впрочем, вы могли бы получить превосходные результаты, заставив писать числа идиота (в полном медицинском смысле этого слова).

Как использовать эти таблицы, чтобы получить желаемые относительные частоты? Возьмем в качестве иллюстрации относительные частоты 5:2 для первой и второй чистых стратегий некоторой игры. Для того чтобы найти точку таблицы, с которой вы начнете читать случайные числа, ткните несколько раз пальцем наугад в ту же таблицу и определите номера страницы, строки и столбца; теперь найдите эту страницу, столбец и число. Предположим, что у вас получилось десятое число восьмого столбца на первой странице. Если это число равно 0, 1, 2, 3 или 4, то применяйте в игре первую стратегию. Если оно равно 5 или 6, то применяйте вторую стратегию. Если это число равно

7, 8 или 9, то отбросьте его и возьмите число под ним (или над ним, только решите это заранее) и используйте его для определения номера стратегии. Для следующей партии игры возьмите число ниже последнего, уже использованного, и поступайте, как прежде, применяя первую стратегию, если число равно 0, 1, 2, 3 или 4; вторую стратегию, если оно равно 5 или 6, и переходя на другую строку (вверх или вниз в соответствии с ранее принятым условием), если оно равно 7, 8 или 9. Аналогично, если относительные частоты в игре равны 85:9, определите снова начальную *пару* чисел. Если она является числом в пределах от 00 до 84, применяйте первую стратегию. Если же она попадает в диапазон от 85 до 93, то применяйте вторую стратегию. Если она находится в пределах от 94 до 99, то отбросьте ее и возьмите следующую пару.

Иногда желательно несколько модифицировать этот метод. Например, в случае относительных частот 7:4, сумма которых равна 11, вам приходится применять двухразрядные числа, охватывающие диапазон от 00 до 99. Но в этом случае вам пришлось бы отбрасывать все числа от 11 до 99 и ваш труд был бы весьма непродуктивным. Здесь можно поступить так: разделите наибольшее двухразрядное число, т. е. 99, на сумму относительных частот, т. е. на 11. Ответ в нашем случае будет равен 9. В общем случае это будет смешанная дробь. Теперь умножьте относительные частоты на это число, т. е. на 9. Это даст $7 \times 9 = 63$ и $4 \times 9 = 36$. Полученные числа дают хорошую основу для определения относительных частот. Теперь вы станете применять первую стратегию, если вам попадется число в диапазоне от 00 до 62, и вторую стратегию для чисел в диапазоне от 63 до 98. Число 99 вы будете отбрасывать.

Выводы по методам решения игр $2 \times m$

Перед тем как оставить вас наедине с упражнениями, мы дадим краткий обзор техники решения игр $2 \times m$. Для этой цели рассмотрим игру:

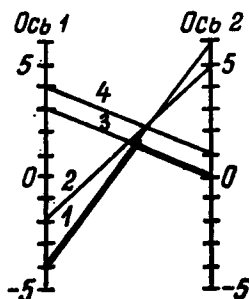
		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	-4	-2	3	4
	2	6	5	0	1

Нет ли здесь седловой точки? Исследуем матрицу на максимумы и минимумы:

		Красные				Минимумы строк
		1	2	3	4	
Синие	1	-4	-2	3	4	-4
	2	6	5	0	1	0*
Максимумы столбцов		6	5	3*	4	

Они равны соответственно 0 и 3; седловой точки нет.

Мы замечаем, что стратегия Красные-4 хуже, чем стратегия Красные-3, при поэлементном сравнении. Поэтому мы можем ее сразу исключить. Мы хотим, однако, найти активную пару стратегий графическим способом, при котором стратегия Красные-4 будет исключена автоматически. Нанесем все четыре стратегии Красных на график.



Наивысшая точка нижней границы находится на пересечении стратегий Красные-1 и Красные-3. Они и являются активными стратегиями. Сокращенная игра будет:

		Красные	
		1	3
Синие	1	-4	3
	2	6	0

В игре нет седловой точки. Поэтому вычислим смешанные стратегии. Относительные частоты для Синих основаны на матрице:

<i>Синие</i>	1	-7
	2	6

а для Красных—на матрице:

<i>Красные</i>	
1	3
-10	3

Таким образом, для Синих оптимальная смешанная стратегия основана на относительных частотах 6 : 7, а для Красных—на относительных частотах 3 : 10. Возвращаясь к первоначальной игре 2 × 4, мы видим, что оптимальная стратегия Синих должна быть 6 : 7, а для Красных 3 : 0 : 10 : 0.

Цену игры можно найти, применяя стратегию Синих 6 : 7 против любой из чистых стратегий Красных, входящей в смешанную стратегию, т. е. против стратегий Красные-1 или Красные-3. Используя, например, стратегию Красные-1, найдем, что цена игры равна:

$$\frac{6 \times (-4) + 7 \times 6}{6 + 7} = \frac{18}{13}.$$

Упражнения 2

Определить относительные частоты и цену для следующих игр:

1.

		<i>Красные</i>		
		1	2	3
<i>Синие</i>	1	7	0	3
	2	2	-1	-6

2.

		<i>Красные</i>			
		1	2	3	4
<i>Синие</i>	1	-2	-6	-5	-1
	2	-3	-7	-6	-2

3.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	4	0	2
	2	6	7	1

4

		Красные							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Синие	1	11	18	24	30	24	20	21	23
	2	24	30	24	23	21	17	18	20

5.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	2	2	3	4
	2	4	3	2	2

6.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	10	7	11	0
	2	-8	-2	-9	1

7.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	5	-2	3	7	0
	2	0	5	2	2	6

8.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	1	-3	5	-7	9
	2	-2	4	-6	8	-10

9.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	-1	3	-5	7	-9
	2	2	-4	6	-8	10

10.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	9	-5	7	1	-3
	2	-10	4	-8	-6	2

11.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	8	0	6	7
	2	3	6	3	1

12.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	4	6	0
	2	3	0	7

13.

		Красные					
		1	2	3	4	5	6
Синие	1	0	9	8	7	4	2
	2	10	1	2	3	6	8

14.

		Красные	
		1	2
Синие	1	1	3
	2	5	7
	3	9	11

15.

		Красные	
		1	2
Синие	1	1	5
	2	2	4
	3	3	3
	4	4	2
	5	5	1

16.

		Красные	
		1	2
Синие	1	-1	-3
	2	-5	-7
	3	-9	-11

17.

		Красные	
		1	2
Синие	1	-2	3
	2	3	-2
	3	0	0

18.

		Красные	
		1	2
Синие	1	-2	3
	2	3	-2
	3	1	1

19.

		Красные	
		1	2
Синие	1	-1	5
	2	-3	1
	3	0	-3
	4	-3	0
	5	1	-3
	6	5	-1

20.

		Красные	
		1	2
Синие	1	9	1
	2	7	5
	3	8	3
	4	5	9
	5	6	7

ГЛАВА 3

ИГРЫ С ТРЕМЯ СТРАТЕГИЯМИ

ИГРЫ 3×3

Нравоучительное отступление

Было бы крайне утомительно пытаться объяснить, как решаются большие игры, такие, например, как 10×10 , имея в своем распоряжении только арифметику и не смея прикасаться к неисчерпаемым богатствам высшей математики. Трудности, которые бы нам встретились, можно сравнить с трудностями обучения умного, но совершенно неграмотного ребенка тому, как представить с помощью Спенсеровых строф * названия племен американских индейцев, причем инструкции ему передавать по телефону на каком-нибудь редком диалекте с помощью другого ребенка. Продолжая нашу аналогию, можно сказать, что научиться решать игры 3×3 — это то же, что научиться писать слово «КОТ», используя для обучения те же средства. Мы питаем надежду, что автор и читатель при разрешении этой задачи будут действовать сообща.

Перед тем как приступить к изучению игр 3×3 , было бы полезно сделать краткий обзор разработанной нами

* Спенсерова строфа — особая форма стихов, разработанная в XVI веке английским поэтом Э. Спенсером. — *Прим. пер.*

техники решения проблемы. Как вы примените теорию игр, столкнувшись с конфликтной ситуацией, предоставляющей несколько альтернативных решений?

Прежде всего, вы перечислите *все* возможности (последовательные выборы), которые открыты совместно вам и вашему противнику. При этом вы должны включить в рассмотрение случайные события, обусловленные вмешательством природы, и учесть их, если это возможно. Строго говоря, этот первый шаг обычно невозможен, но он может стать и возможным и достаточно правильным, если вы рассмотрите только те возможности, которые действительно имеют существенное значение. Именно в этом пункте искусство и способность к здравому суждению человека, создающего математическую модель, подвергаются наиболее серьезному испытанию. Любой дурак сможет в любой заданной ситуации перечислить больше факторов, чем сам бог сможет разобрать. Например, Ньютон должен был бы принять во внимание тот факт, что планеты несколько сплюснуты у полюсов, что на некоторых из них есть горы, что по крайней мере одна из них покрыта деревьями и что на ней имеются термиты и прочие приятные и неприятные вещи. Требуется здравый смысл, чтобы решить, в каком месте прервать перечисление этих факторов. На практике вы должны прервать перечисление, как только здравый смысл подскажет вам, что в модель введено достаточно факторов, чтобы вы смогли с ее помощью хоть что-нибудь узнать об интересующей вас проблеме.

После перечисления стратегий игроков вы должны подсчитать или оценить платежи, связанные с каждой парой стратегий, Синих и Красных, или догадаться о них. Иногда эти платежи устанавливаются правилами игры. Иногда вам придется вычислить их с помощью теории вероятностей или какого-нибудь другого метода логической дедукции. Иногда (а в жизни это случается невероятно часто) вам придется использовать полностью все ваши способности к правильному суждению для того, чтобы оценить эти платежи или предположить их величину. Но вы должны иметь их и иметь в форме чисел, перед тем как двигаться дальше. (Действительные возможности в этой области рассмотрены в нескольких примерах, встречающихся в книге, и несколько подробнее в двух разделах, начиная со стр. 225.)

Если платежи известны, может быть составлена платежная матрица, и вы готовы начать анализ. Какова цель

этого анализа? Определить, как лучше всего вести данную игру и какова цена этой игры, т. е. прикинуть, как много вы можете выиграть или проиграть, если вы и ваш противник играют правильно. Вопрос, как играть, равнозначен вопросу, какую применять стратегию или какие отобрать стратегии, чтобы из их числа, используя подходящий случайный механизм (характеристики которого вы должны определить), выбирать те, которые нужно применять в каждой данной партии.

Вернемся теперь к играм 3×3 . Некоторые из них решаются просто, а некоторые — нет. Вам придется перепробовать целую батарею различных методов всякий раз, когда вы встретитесь с новой игрой, и поддержкой для вас будет только твердая уверенность в том, что решение действительно *существует*. К счастью, многие из этих игр приводятся к уже знакомым нам играм 2×2 . К несчастью, ту часть, которая не сводится к играм 2×2 , придется заучивать наизусть, как это и принято при пользовании букварем. Это весьма печально, но, по нашему мнению, неизбежно, так как при этом простые правила заменяют сложные математические рассуждения. В конце концов, когда вы несколько лет тому назад научились извлекать квадратный корень из числа, вы по всей вероятности не имели никакого представления о том, как в действительности происходит этот процесс. Автор этой книги, во всяком случае, так и не узнал этого. И весьма немногие водители автомашин обладают глубокими познаниями в области двигателей внутреннего сгорания.

Седловые точки

Первое, что надо сделать,—это проверить игру на седловую точку и надеяться на то, что она имеется. Эта процедура очень проста и не занимает много времени. Например, игра может иметь следующий вид:

		<i>Красные</i>		
		1	2	3
<i>Синие</i>	1	3	0	2
	2	-4	-1	3
	3	2	-2	-1

Пробежите взглядом матрицу, найдите минимумы каждой строки, отметьте самый большой из них. Точно так же найдите максимумы каждого столбца и отметьте наименьший из них. Это дает вам

		Красные			Минимумы строк
		1	2	3	
Синие	1	3	0	2	0*
	2	-4	-1	3	-4
	3	2	-2	-1	-2
		Максимумы столбцов			
		3	0*	3	

Если два отмеченных вами числа одинаковы, как в нашем случае, то ваша работа закончена, так как эти числа определяют оптимальную стратегию для каждого игрока. Если имеется седловая точка, то каждый игрок должен применять ту чистую стратегию, которая соответствует седловой точке, Синие-1 и Красные-2 в нашем случае. Больше того, отмеченные звездочкой числа равны цене игры. В нашем случае она оказалась равной нулю, т. е. игра справедлива для обоих игроков. Обратите внимание на то, что ни один из игроков не понесет потерь, если он все время придерживается своей оптимальной стратегии, но он тотчас же потерпит убытки, если свернет с пути истинного.

Доминирование

Рассмотрим теперь следующую игру:

		Красные			Минимумы строк
		1	2	3	
Синие	1	3	0	2	0
	2	4	5	1	1*
	3	2	3	-1	-1
		Максимумы столбцов			
		4	5	2*	

Этот набор цифр выглядит ничем не лучше и не хуже, чем матрица предыдущей игры, поэтому мы попытаемся найти седловую точку. Строки дают максимум, равный 1, а столбцы — минимум, равный 2. Поэтому все наши труды оказались напрасными. Впрочем, не совсем напрасными, потому что эти два числа говорят нам, что цена игры больше единицы и меньше двух.

Проверим игру на наличие доминирующих стратегий, т. е. посмотрим, нет ли такой чистой стратегии, применять которую Синим (или Красным) было бы совсем глупо.

Синие желают, чтобы платеж был как можно больше. Поэтому стратегия Синие-2 лучше стратегии Синие-3 при поэлементном сравнении. Раз так, то зачем вообще рассматривать стратегию Синие-3? Вычеркнем ее! Точно так же Красные, которые заинтересованы в том, чтобы платежи были как можно меньше, видят, что стратегия Красные-1 всегда хуже, чем стратегия Красные-3, и поэтому исключают ее из рассмотрения.

В результате этих операций у нас остается игра 2×2 , а именно:

		Красные	
		2	3
Синие	1	0	2
	2	5	1

которую мы умеем решать, т. е.

		Красные		Относительные частоты Синих
		2	3	
Синие	1	0	2	4
	2	5	1	2
Относительные частоты Красных		1	5	

Поэтому решением игры 3×3 будет:

		Красные			Относительные частоты Синих
		1	2	3	
Синие	1	3	0	2	4
	2	4	5	1	2
	3	2	3	-1	0
Относительные частоты Красных		0	1	5	

Синие должны применять свои стратегии с относительными частотами 4:2:0, а Красные — с относительными частотами 0:1:5. Частота, равная нулю, означает, что эта стратегия вообще не используется.

Если бы нам удалось исключить по принципу доминирования только одну стратегию, то осталась бы игра 2×3 , а не игра 2×2 , но мы уже научились решать и такие игры.

Как вы видите, понятие доминирования так же как и понятие седловой точки, для игр 3×3 точно такое же, как для игры $2 \times m$. Выводы из этого следующие: если у игры 3×3 имеется седловая точка, оптимальная стратегия совпадает с чистой стратегией. Если седловой точки нет, но имеется подчиненная строка или столбец (или и то и другое вместе), то оптимальной стратегией является смешанная стратегия, основанная на двух чистых стратегиях.

Цена игры

Собственную оценку игры 3×3 , т. е. цену, которую может гарантировать вам хорошая игра, если она длится достаточно долго, можно найти также посредством естественного расширения метода, применявшегося в играх 2×2 : подсчитайте средний платеж, если, скажем, оптимальная смесь стратегий Синих применяется против одной из чистых стратегий, входящих в оптимальную смесь стратегий Красных. Так, в последнем примере Синие получают в среднем (играя против стратегии Красные-2):

$$\frac{4 \times 0 + 2 \times 5 + 0 \times 3}{4 + 2 + 0} = \frac{5}{3}.$$

Цена игры будет такой же при игре против стратегии Красные-3. Оптимальная смешанная стратегия Красных гаран-

тирует потери Красных равные $\frac{5}{3}$, при игре как против стратегии Синие-1, так и против стратегии Синие-2.

Если один из игроков применит одну из своих запрещенных стратегий (Синие-3 или Красные-1), то результат станет хуже. Так, нарушение правила Красными даст Синим

$$\frac{4 \times 3 + 2 \times 4 + 0 \times 2}{4 + 2 + 0} = \frac{10}{3},$$

а если это сделают Синие, то их платеж станет

$$\frac{0 \times 2 + 1 \times 3 + 5 \times (-1)}{0 + 1 + 5} = -\frac{1}{3},$$

т. е. Красным удастся выиграть $\frac{1}{3}$ в игре, которая по существу несправедлива для них. Как вы видите, мы подошли к играм, в которых плохой игрок не может рассчитывать только на то, что его противник применяет оптимальную стратегию, чтобы получить цену игры, как это было в играх 2×2 со смешанными стратегиями. В сложных играх тот факт, что ваш противник играет с умом, ни в коем случае не выручает вас, если вы играете неразумно. Наоборот, как и следовало ожидать, вы должны платить за то, что играете безрассудно.

Три активные стратегии

До сих пор мы рассматривали решение игр 3×3 , имеющих либо одну активную стратегию (при наличии седловой точки), либо две активные стратегии (при доминировании). Теперь мы раскроем вам секрет решения игр 3×3 , у которых имеется три активные стратегии. Прежде чем использовать этот метод, обязательно проверьте игру на седловую точку и доминирование, потому что если *имеется либо то, либо другое, то наш метод недействителен*. Подобно хирургическим методам, он является последним средством, которое следует применять только в том случае, если никакие другие средства не помогают.

Рассмотрим игру

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	6	0	6
	2	8	-2	0
	3	4	6	5

Проверим ее на седловую точку и доминирование. Безусловно! Значит, мы подошли к новому правилу.

Для начала ограничимся рассмотрением игры Красных и определим частоты, с которыми они должны применять свои стратегии. (Я помню, что вы—Синие, но мы должны проделать работу как для Синих, так и для Красных, а мы чувствуем, что немного легче начать с Красных.) Прежде всего, вычтем каждую строку из предыдущей строки, т. е. каждый платеж из платежа, который находится выше его, и запишем результаты вычитания в новую группу клеток:

<i>Красные</i>		
1	2	3
-2	2	6
4	-8	-5

Относительная частота для стратегии Красные-1 определяется с помощью чисел, оставшихся в заштрихованных клетках после вычеркивания столбца Красные-1 в предыдущей матрице:

<i>Красные</i>		
1		
	2	6
	-8	-5

Численное значение частоты равно разности между произведениями чисел по диагоналям:

2			6
	-5	минус	-8

то есть

$$2 \times (-5) - 6 \times (-8) = 38.$$

Число 38 представляет собой относительную частоту применения стратегии Красные-1. Если окажется, что она равна -38, мы оставим без внимания знак минус и будем по-прежнему считать искомым числом 38. Однако вниматель-

но относитесь ко всем знакам, пока вы не закончили вычисление относительных частот.

Точно таким же способом мы можем получить относительные частоты для стратегий Красные-2 и Красные-3. Для стратегии Красные-2 вычеркнем столбец Красные-2 из заштрихованной матрицы, в результате чего получим

Красные
2

-2		6
4		-5

Из этой матрицы мы видим, что относительные частоты для стратегии Красные-2 определяются матрицей

-2	6
4	-5

Здесь разность произведений по диагоналям равна
 $(-2) \times (-5) - 4 \times 6 = -14$,

так что относительная частота стратегии Красные-2 равна 14. Аналогично находим, что относительная частота для стратегии Красные-3 равна 8. Объединяя результаты, получаем, что оптимальная смешанная стратегия Красных должна подчиняться относительным частотам $38 : 14 : 8$.

Оптимальную смешанную стратегию для Синих мы найдем аналогичным способом, рассматривая столбцы вместо строк. Вычитая каждый столбец из предыдущего, т. е. каждый платеж из платежа слева, получаем матрицу

1	6	-6
Синие 2	10	-2
3	-2	1

Относительные частоты для стратегии Синие-1 находятся из матрицы

Синие	1		
		10	-2
		-2	1

что дает величину $10 \times 1 - (-2) \times (-2) = 6$. Точно так же мы найдем относительные частоты для стратегий Синие-2 и Синие-3, т. е. 6 и 48. Поэтому оптимальной смешанной стратегией Синих будет 6:6:48.

Итак, теперь мы имеем то, что, как мы надеемся*, является искомым решением, а именно:

		Красные			Относительные частоты Синих
		1	2	3	
Синие	1	6	0	6	6
	2	8	-2	0	6
	3	4	6	5	48
Относительные частоты Красных		38	14	8	

Можно произвести сокращение на общие множители для обеих групп относительных частот. Так, сокращая на общий множитель 6, получаем для Синих относительные частоты 1:1:8. Аналогично, сокращая на 2 для Красных, получаем относительные частоты 19:7:4.

Последним этапом решения игры с тремя активными стратегиями, и весьма *существенным этапом*, является проверка найденных относительных частот. Действительно ли они обладают необходимыми качествами правильного решения? Напомним, что оптимальная смешанная стратегия одного игрока должна обеспечивать один и тот же платеж против каждой чистой стратегии противника, входящей в его оптимальную смешанную стратегию, т. е. в данном

* Выражение «надеемся» применено потому, что при вычислениях мы могли ошибиться. Более серьезное затруднение рассматривается в следующем разделе.

случае против всех его стратегий. Вычисления очень просты.

Если Синие используют смешанную стратегию 1:1:8 против стратегии Красные-1, то их средний выигрыш будет равен

$$\frac{1 \times 6 + 1 \times 8 + 8 \times 4}{1 + 1 + 8} = \frac{23}{5}.$$

Играя против стратегии Красные-2, они получают также

$$\frac{1 \times 0 + 1 \times (-2) + 8 \times 6}{1 + 1 + 8} = \frac{23}{5},$$

а против стратегии Красные-3 —

$$\frac{1 \times 6 + 1 \times 0 + 8 \times 5}{1 + 1 + 8} = \frac{23}{5}.$$

Пока все хорошо. Проверим теперь смешанную стратегию Красных 19:7:4 против стратегии Синие-1. Они теряют:

$$\frac{19 \times 6 + 7 \times 0 + 4 \times 6}{19 + 7 + 4} = \frac{23}{5}.$$

То же они теряют, играя против стратегий Синие-2 и Синие-3.

Итак, мы решили игру; ее цена равна $\frac{23}{5}$ или $4\frac{3}{5}$. Мы уверены в том, что мы действительно нашли правильное решение, потому что средний платеж получается одним и тем же, когда смешанной стратегии любого из игроков противопоставляется любая чистая стратегия, входящая в оптимальную смешанную стратегию другого игрока.

Игры, с которыми вам лучше бы не встречаться

Время от времени, оказывается, встречаются случаи, когда весь арсенал средств решения игр 3×3 становится непригодным. Иначе говоря, в платежных матрицах некоторых игр имеются тонкости, нарушающие универсальность методов, которые мы вам предложили.

Коснемся этого вопроса вкратце на примере*. Вспомним некоторые стороны вопроса о доминировании. Некото-

* Более глубокое изложение этого вопроса вы найдете позднее, на стр. 217.

рые чистые стратегии могут быть, совершенно очевидно, хуже других. Поэтому их не следует применять. Однако иногда может встретиться чистая стратегия, которая хуже некоторой удачной *смеси* других чистых стратегий, и поэтому она также не должна применяться. Если вам встретится один из этих случаев, то наши методы оказываются несостоятельными. Существуют и другие неприятности, аналогичные по природе только что рассмотренным, которые могут вызвать неудачу. Но мы в состоянии справиться с ними.

Возможная неудача при использовании метода решения игры 3×3 всегда связана с наличием запрещенной стратегии. По некоторым причинам, иногда неясным, та или другая чистая стратегия должна быть исключена. И это является основой нашего метода решения задачи в подобных случаях, очень громоздкого, конечно, но надежного.

Исключите какую-нибудь одну (любую) стратегию и затем найдите решение остающейся игры. После этого испытайте найденное решение, подставляя его в первоначальную игру. Если оно подходит, то вы добились своего. Если оно не подходит, попробуйте исключить какую-нибудь другую стратегию. Снова найдите решение остающейся игры и подставьте решение в первоначальную игру. Рано или поздно это приведет к успеху.

Рассмотрим следующую игру:

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	6	0	3
	2	8	-2	3
	3	4	6	5

Она выглядит ничем не хуже предыдущего примера. Действительно, изменены только два числа. Мы поступаем, как обычно: убеждаемся в том, что в игре нет ни седловой точки, ни доминирования. Тогда мы приступаем к процедуре решения игр с тремя активными стратегиями, описанной в предыдущем разделе, и находим ответ $0:0:0$ для Синих и $4:4:8$ для Красных. Это очень неприятный ответ, так как оказывается, что Синие не желают применять ни одну

из имеющихся стратегий, что просто недопустимо, потому что мы хотим знать, как они должны играть, если они будут играть. Нам еще повезло, так как сразу видно, что что-то не в порядке. Могло бы случиться, что относительные частоты выглядели бы вполне заслуживающими доверия, например $3:7:5$, а на самом деле они были бы ложными. Это обнаружилось бы только тогда, когда мы попробовали бы проверить полученное решение вычислением цены игры.

Начнем наши попытки поправить дело с исключения стратегий Синие-1. Это приведет нас к следующей игре:

		Красные		
		1	2	3
Синие	2	8	-2	3
	3	4	6	5

Ищем решение игры типа 2×2 для получившейся игры 2×3 . Начнем с игры

		Красные	
		1	2
Синие	2	8	-2
	3	4	6

Находим решение приведенной игры

		Красные			Относительные частоты Синих
		1	2	3	
Синие	2	8	-2	3	2
	3	4	6	5	10
Относительные частоты Красных		8	4	0	

Подставим это решение в первоначальную игру, сократив частоты на общие множители:

		<i>Красные</i>			<i>Относительные частоты Синих</i>
		1	2	3	
<i>Синие</i>	1	6	0	3	0
	2	8	-2	3	1
	3	4	6	5	5
<i>Относительные частоты Красных</i>		2	1	0	

Является ли это решением? Чтобы ответить на вопрос, вычислим цену игры, если Синие играют против стратегии Красные-1:

$$\frac{0 \times 6 + 1 \times 8 + 5 \times 4}{0 + 1 + 5} = 4\frac{2}{3}.$$

Она остается такой же при игре против стратегий Красные-2 и Красные-3. (Было бы неудивительно, если бы Синие выиграли больше, чем $4\frac{2}{3}$, играя против стратегии Красные-3, но в нашем примере этого не произошло.) С другой стороны, Красные, играя против стратегии Синие-1, проигрывают

$$\frac{2 \times 6 + 1 \times 0 + 0 \times 3}{2 + 1} = 4$$

и это вполне понятно, потому что Красные будут достигать лучшего результата, т. е. проигрывать меньше, чем цена игры, если Синие применяют стратегию, которая не входит в их оптимальную смешанную стратегию. Если же Красные играют против стратегий Синие-2 и Синие-3, то они проигрывают точно $4\frac{2}{3}$.

Итак, мы нашли решение игры. Каждый игрок может гарантировать, придерживаясь вычисленной смешанной стратегии (0:1:5 для Синих и 2:1:0 для Красных), средний платеж, равный $4\frac{2}{3}$, если только противник использует чистые стратегии, входящие в его оптимальную смешанную стратегию, и по крайней мере не хуже этого результата, если противник применит исключенную стратегию.

К несчастью, все это объяснение заняло очень много времени, в то время как сама работа очень простая. Итак,

если вы все еще успеваете следовать за нами, то, используя аналогию, приведенную в начале главы, можно сказать, что вы научились писать слово «КОТ», несмотря на ужасную систему связи.

Здесь нам, вероятно, следует рассмотреть вопрос, который время от времени всплывает на поверхность. Хорошая игра, т. е. применение оптимальной смешанной стратегии, например, Синими, иногда представляет гарантию получить цену игры для обоих игроков, так как многочисленные способы игры, которые могут использовать Красные против оптимальной смешанной стратегии Синих, дают такие же результаты, как и их оптимальная смешанная стратегия. Однако эта политика, гарантирующая успех, является надежной только для Синих, т. е. для игрока, применяющего оптимальную смешанную стратегию. Красные могут делать что угодно против оптимальной смешанной стратегии Синих только тогда, когда их (Красных) оптимальная смешанная стратегия (которую, как мы предполагаем, они не используют) содержит *все* чистые стратегии. Только тогда Красные могут безнаказанно использовать любую чистую стратегию, какой бы она ни была, против оптимальной смешанной стратегии Синих. Но если некоторые чистые стратегии исключены из оптимальной смешанной стратегии Красных, то Красные не смеют применять ни одну из этих *запрещенных* стратегий против оптимальной смеси Синих.

Таким образом, использование смешанных стратегий не означает автоматического и полного страхования противника от ненужных потерь с его стороны. Скорее оно автоматически и полно обеспечивает вас от ненужных жертв с вашей стороны во всех случаях. И в дополнение к этому оно заставляет противника нести ущерб в тех случаях, когда в его распоряжении имеются плохие стратегии и он их использует. Оно, к сожалению, не гарантирует того, что эти штрафы будут максимальны.

Пример 14. Игра «камень — бумага — ножницы»

Одной из игр, подвергшихся анализу на начальной стадии развития теории игр, была детская игра под названием «Камень — бумага — ножницы»*. Ее решение интуитивно

* Мои неутомимые советчики сразу указали на китайский вариант этой игры: человек съедает петуха, петух поедает червяка, червяк пожирает человека.

является очевидным; было интересно проверить метод на заранее известном результате.

Два игрока одновременно называют (или обозначают жеста́ми) один из трех предметов. Если оба называют один и тот же предмет, партия кончается вничью. В противном случае выигрыш определяется тем условием, что ножницы режут бумагу, камень разбивает ножницы, а бумага покрывает камень. Платежная матрица этой игры поэтому будет

		<i>Красные</i>		
		<i>Ножницы</i>	<i>Бумага</i>	<i>Камень</i>
<i>Синие</i>	<i>Ножницы</i>	0	1	-1
	<i>Бумага</i>	-1	0	1
	<i>Камень</i>	1	-1	0

Здесь нет ни седловой точки, ни доминирующей стратегии. Смешанную стратегию Красных находим из матрицы

		<i>Красные</i>		
		<i>Ножницы</i>	<i>Бумага</i>	<i>Камень</i>
	<i>Ножницы</i>	1	1	-2
	<i>Бумага</i>	-2	1	1

которая получается в результате вычитания каждой строки из предыдущей. Относительная частота для ножниц основана на матрице

		<i>Красные</i>		
		<i>Ножницы</i>	<i>Бумага</i>	<i>Камень</i>
	<i>Ножницы</i>		1	-2
	<i>Бумага</i>		1	1

то есть

$$1 \times 1 - 1 \times (-2) = 3.$$

Для стратегии Красные-Бумага используется матрица

*Красные
Бумага*

1		-2
-2		1

то есть

1	-2
-2	1

что дает

$$1 \times 1 - (-2) \times (-2) = -3.$$

Для стратегии Красные-Камень используется матрица

*Красные
Камень*

1	1	
-2	1	

что приводит к

$$1 \times 1 - 1 \times (-2) = 3.$$

Благодаря симметрии игры результаты для Синих будут такими же. Поэтому игроки должны применять все свои чистые стратегии с одинаковыми частотами, т. е. $1:1:1$. (Так как наш метод может дать осечку, мы должны всегда проверять полученные результаты.)

Пример 15. Топливная проблема

В один из знойных летних вечеров блуждающие мысли Ганса натолкнулись на проблему угольных запасов на зиму. В случае нормальной зимы для отопления его дома



требуется около 15 тонн, но бывали годы, когда он сжигал только 10 тонн, и такие годы, когда он сжигал даже 20 тонн. Он вспомнил также, что цены на уголь колеблются в зависимости от погоды и составляют соответственно 10, 15 и 20 долларов за тонну в случае мягкой, нормальной и суровой зимы. В настоящее время, однако, он может купить уголь по 10 долларов за тонну.

Что же делать? Следует ли ему покупать сейчас весь уголь или только часть? Весной он, возможно, переедет в Калифорнию и не сможет взять с собой излишки угля. Он изучил все долговременные прогнозы погоды, даже те, которые исходили от животных*.

Он рассмотрел три чистые стратегии, а именно: купить 10, 15 или 20 тонн в настоящее время, а остальное, если потребуется, позже. Стоимости различных альтернатив сведены в следующую матрицу:

		<i>Зима</i>			<i>Минимумы строк</i>
		<i>Мягкая</i>	<i>Нормальная</i>	<i>Суровая</i>	
<i>Запас в тоннах</i>	10	-100	-175	-300	-300
	15	-150	-150	-250	-250
	20	-200	-200	-200	-200*
<i>Максимумы столбцов</i>		-100	-150	-200*	

У этой игры имеется седловая точка, соответствующая запасу в 20 тонн. (Если бы у Ганса была хотя бы неболь-

* О том, какая степень поэтической свободы была позволена автору со стороны критиков его рукописи, можно судить по следующему замечанию: «Животные не занимаются предсказанием погоды в летние вечера, особенно в жаркие вечера».

шая климатологическая информация, он смог бы извлечь из этого пользу для себя. Мы возвратимся к подобной ситуации ниже в этой главе. См. пример «Умение подойти к больному».)

Пример 16. Наследник

Джордж получил наследство и должен уплатить государству налог на наследство в сумме 100 000 долларов. Он имеет право, однако, уплатить этот налог в течение года. Естественно, что он решил оттянуть платеж до конца года с тем, чтобы извлечь как можно больше прибыли, вкладывая свой капитал в дело. Он обратился к фирме «Новик и К°», в способностях которой не сомневался, с просьбой представить ему соответствующие факты и цифры, относящиеся к его задаче. Фирма представила ему расчеты относительно прибыли, которую он может получить, вкладывая свой капитал в различные отрасли, и которая зависит от политической атмосферы, предсказывать которую фирма не берется:

	В случае		
	войны	холодной войны	мира
Облигации	2 900	3 000	3 200
Военное производство	18 000	6 000	- 2 000
Торговое дело	2 000	7 000	12 000

Джордж как-то догадался, что это—игра между ним и природой. Он является игроком, заинтересованным в максимальной прибыли, а природа, в той мере, в какой она заинтересована, заботится о получении им минимальной прибыли.

У игры нет ни седловой точки, ни доминирования. Поэтому мы пробуем обычный метод решения игр 3×3 , но получаем бессмыслицу, т. е. получаем относительные частоты, которые не обладают характеристиками, требуемыми для правильного решения. Поэтому мы переходим к игре 2×2 и после некоторых поисков пробуем такую матрицу:

	Война	Холодная война
Военное производство	18 000	6 000
Торговое дело	2 000	7 000

Она дает нам относительные частоты 5 : 12 для стратегий Джорджа и 1 : 16 для природы. Это решение годится для исходной игры, и, таким образом, мы получим:

	<i>Война</i>	<i>Холодная война</i>	<i>Мир</i>	<i>Относительные частоты Джорджа</i>
<i>Облигации</i>	2 900	3 000	3 200	0
<i>Военное производство</i>	18 000	6 000	-2 000	5
<i>Торговое дело</i>	2 000	7 000	12 000	12
<i>Относительные частоты природы</i>	1	16	0	

Джордж может бросить жребий в соответствии с относительными частотами или же он может вложить $\frac{5}{17}$ капитала в 100 000 долларов в военное производство и $\frac{12}{17}$ — в торговое дело. Цена игры составляет примерно 6 700 долларов.

В этом примере (так же, как и в некоторых более ранних примерах) мы сделали нечто, что может показаться отступлением от наших собственных правил, а именно мы разрешили интерпретировать относительные частоты как физическую смесь чистых стратегий в одной партии игры. Иначе говоря, мы позволяем игроку применить одновременно немного от одной чистой стратегии и немного от другой, вместо того чтобы использовать лишь одну стратегию, именно ту, которую ему подсказывает соответствующий жребий.

Совершенно очевидно, что при этом мы нарушили некоторый принцип. Иначе физическая смесь не была бы возможной. Любой возможный набор действий должен быть представлен в виде какой-то чистой стратегии так, чтобы возможность применения физической смеси не могла быть подвергнута сомнению.

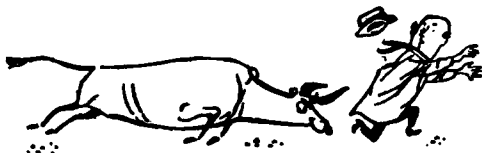
Эта аномальная ситуация объясняется тем, что существует некоторая бесконечная (непрерывная) * игра, которая тесно связана с конечной игрой, рассмотренной выше. В бесконечной игре игрок может вкладывать капитал бесконечным числом способов в комбинации ценных бумаг (мы пренебрегаем практическими ограничениями, касающимися делимости ценных бумаг и денег). Кроме того, частичный доход от каждого вида ценных бумаг пропор-

* То есть игра, имеющая бесконечно много чистых стратегий (как, например, при выборе точки на непрерывном отрезке). — Прим. ред.

ционален купленному количеству их, а полный доход равен сумме частичных доходов. Такие ситуации можно рассматривать либо как бесконечные игры, которые, как оказывается, имеют седловые точки, либо как конечные игры, которые обычно требуют применения смешанных стратегий. Истолковывая последние как физическую смесь, мы приходим к решению, которое эквивалентно седловой точке в соответствующей бесконечной игре.

Пример 17. Раздел имущества скотовладельцев

Долки и Каплан собираются ликвидировать свою скотоводческую ферму, потому что Каплан чувствует, что его все больше оттирают на задний план. Они распродали нормальными способами свое стадо, кроме трех призовых быков с кличками Даллан, Далкан и Далкин.



Поделить этих животных представляет серьезную проблему, так как они стоят очень дорого (они легко могли бы быть проданы за 20, 30 и 40 тысяч долларов соответственно), но владельцы не допускают даже мысли о том, что животные попадут в чужие руки. Одновременно никто из них не желает выплачивать другому такие большие деньги. Каждый из них считает выигрышем владение животными и проигрышем, если животные попадут к партнеру. Им понадобилось некоторое время, чтобы разработать схему решения, приемлемую для них обоих.

Наконец, они сошлись на следующем: каждый из них должен взять из колоды карт двойку, тройку и четверку, что должно символизировать ставки в 20, 30 и 40 тысяч долларов соответственно. Затем на кон будет поставлен первый бык, и каждый из партнеров должен выбрать и раскрыть карту, символизирующую его ставку. Чья ставка будет больше, тот и выигрывает быка. После этого ставят на кон другого быка, и на него точно так же делаются ставки из оставшихся карт и так далее. Быки должны ставиться на кон в случайном порядке. В случае ничьей—быка убивают. Как должны играть партнеры? В каком порядке

они должны раскрывать свои карты или, может быть, им следует положиться каким-то образом на случай?

Анализ такой игры немного запутан. Поэтому мы дадим его только вкратце. Анализу должна подвергнуться какая-нибудь одна из трех игр 3×3 в зависимости от того, какое животное выберут первым. Каждый платеж в этих играх 3×3 равен, в свою очередь, цене игры 2×2 . Для того чтобы посмотреть, как это получается, предположим, что начали со старого Даллана, стоящего 2 единицы. Предположим, что оба партнера раскрыли двойки. Бедное животное погибает, но никто из партнеров не считает себя ни в выигрыше, ни в проигрыше. Если после этого следует Далкан, а затем Далкин, то возможности будут следующие:

Долки раскрывает сначала

3, а затем 4 4, а затем 3

*Каплан
раскрывает
сначала 3, а затем 4
 4, а затем 3*

$0 + 0$	$-3 + 4$
$3 - 4$	$0 + 0$

Эта игра может быть представлена в следующем виде:

0	1
-1	0

У нее имеется седловая точка в верхнем левом углу; ее цена равна нулю. Результат не изменится, если два последних быка проследуют в обратном порядке. Этот нуль, сложенный с результатом первого хода, который тоже равен нулю, и будет платежом в верхнем левом углу игры 3×3 , в которой Даллан выходит первым:

*Долки раскрывает
сначала*

2 3 4

*Каплан
раскрывает
сначала*

<i>2</i>	0	$-1/7$	$23/7$
<i>3</i>	$1/7$	0	$-1/7$
<i>4</i>	$-23/7$	$1/7$	0

Остальные клетки заполняются точно так же. Итак, Каплан и Долки должны выбрать свои первые карты так, чтобы выиграть эту игру. Это требует от обоих игроков применения смешанной стратегии 1:23:1. Последующие выборы карт управляются игрой 2×2. Цена всей игры в целом равна нулю, т. е. это — справедливая игра.

Если же первым выходит Далкан, то игра будет:

		Долки раскрывает сначала		
		2	3	4
Каплан раскрывает сначала	2	0	-1	$\frac{5}{3}$
	3	1	0	-1
	4	$-\frac{5}{3}$	1	0

и, наконец, если первым выводит Далкина, то

		Долки раскрывает сначала		
		2	3	4
Каплан раскрывает сначала	2	0	$-\frac{13}{5}$	$-\frac{1}{5}$
	3	$\frac{13}{5}$	0	$-\frac{13}{5}$
	4	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{5}$	0

Эти игры требуют смешанных стратегий 3:5:3 и 0:0:1 соответственно.

Главная ценность этого примера, помимо того, что он дает вам превосходную схему распределения скота, вызвавшую у вас определенные эмоции, состоит в том, что он демонстрирует, с какой сложностью анализа может быть связана простая на первый взгляд задача. За исключением ситуаций, которые в самом деле просты, для решения задачи обычно требуются искусные руки (и, по всей вероятности, крепкая спина).

Пример 18. Свидание

Дэвид и Джон хотят назначить Энн свидание. Никто из молодых людей не знает точно, когда она будет дома. Известно, что она с равной вероятностью может возвратиться домой в 3, 4 и 5 часов. Энн отдает предпочтение Дэйви, поэтому, если Джон позвонит первым, она попросит его подождать несколько минут, чтобы дать возможность Дэйви застать ее дома. Если же Дэйви не позвонит в течение этого времени, то Энн сама позвонит Джону и примет его приглашение. Вечер, который они собираются провести, не обещает быть особенно шумным, так как у юношей есть всего по 10 центов, которые они должны истратить на разговор по телефону-автомату.

Платежную матрицу можно составить на основании элементарных понятий теории вероятностей. Например, если Дэйви позвонит в 3 часа, а Джон в 5 часов, то для Дэйви вероятность встретиться с Энн равна $\frac{1}{3}$, а для Джона $\frac{2}{3}$. Следовательно, платеж для Дэйви будет $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$. Общая матрица будет

		Джон звонит в		
		3	4	5
Дэвид звонит в	3	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
	4	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	5	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1

После безуспешных поисков седловой точки и доминирования мы устанавливаем, что это — игра с тремя активными стратегиями. Применяя стандартный метод и упрощая вычисления умножением всех платежей на 3, мы находим, что Дэвид должен применять частоты 2:2:1, а Джон — частоты 10:4:1. Цена игры равна $\frac{1}{5}$ в пользу Дэвида.

Этот положительный результат для Дэвида является, безусловно, результатом предпочтения, оказываемого ему со стороны Энн. Чтобы ответить на вопрос, сколько свиданий будет иметь Дэйви, сколько Джон и сколько вечеров Энн должна будет остаться в одиночестве, необходимо немного потрудиться. Оказывается, что относительные частоты, благоприятствующие этим событиям, будут

97 : 52 : 76. Так что если бы игра была повторена 225 раз, то число событий совпало бы с относительными частотами, т. е. у Дэвида состоялось бы 97 свиданий, а у Джона 52. Эни пришлось бы поскучать в одиночестве 76 вечеров. Заметьте, что $\frac{97-52}{225} = \frac{1}{5}$, и это является удовлетворительной проверкой правильности нашего решения.

Выводы по методам решения игр 3×3

Имеется два существенно новых пункта в технике решения игр 3×3 , которых не требовалось при решении игр 2×2 . Это, во-первых, исключение стратегий по принципу доминирования и, во-вторых, использование процедуры определения относительных частот для игр с тремя активными стратегиями. Общий порядок решения игр 3×3 должен быть следующий:

1. Проверьте игру на седловую точку. Иначе говоря, сравните наибольшее значение минимумов строк (*максимин*) с наименьшим значением максимумов столбцов (*минимакс*); если они равны, значит седловая точка имеется.

2. Если седловой точки нет, попытайтесь понизить порядок игры, используя принцип доминирования. Все числа в некоторой строке могут оказаться меньшими чисел другой строки или равными им для Синих, или же все числа некоторого столбца могут быть большими чисел другого столбца или равными им для Красных. Если так, то исключите неполноценную строку (или столбец) и ищите решение остающейся игры 2×3 или 3×2 .

3. Если оба вышеописанных метода не подходят, то используйте технику с заштрихованными клетками, т. е. предположите, что в решение входят все три стратегии и попробуйте определить относительные частоты для оптимальной смешанной стратегии. После этого *проверьте полученный результат*.

4. Если все три метода потерпели неудачу, предположите, что решение игры 3×3 совпадает с решением одной из игр 2×2 , которые в ней содержатся. Перепробуйте их одну за другой до тех пор, пока ваши старания не увенчаются успехом, или до тех пор, пока вы не перепробуете их все.

5. Если потерпели неудачу все четыре метода, это значит, что вы где-то совершили ошибку. Это плохо! Помните, что нижеследующие упражнения содержат возможности для совершения ошибок.

Упражнения 3

Определите относительные частоты и цену следующих игр:

1.

		Красные		
		1	2	3
1	1	1	4	7
Синие 2	2	1	7	4
3	3	4	7	4

2.

		Красные		
		1	2	3
1	1	1	2	3
Синие 2	2	8	9	4
3	3	7	6	5

3.

		Красные		
		1	2	3
1	1	1	2	1
Синие 2	2	2	7	4
3	3	1	0	6

4.

		Красные		
		1	2	3
1	1	6	-10	3
Синие 2	2	4	4	4
3	3	7	11	-5

5.

		Красные		
		1	2	3
1	1	0	1	1
Синие 2	2	1	0	1
3	3	1	1	0

6.

		Красные		
		1	2	3
1	1	-1	1	0
Синие 2	2	0	-1	1
3	3	1	0	-1

7.

		Красные		
		1	2	3
1	1	0	2	1
Синие 2	2	2	0	2
3	3	1	2	0

8.

		Красные		
		1	2	3
1	1	1	1	3
Синие 2	2	1	3	2
3	3	3	2	2

9.

Красные

	1	2	3
1	3	5	2
Синие 2	0	6	8
3	4	1	3

10.

Красные

	1	2	3
1	7	0	-5
Синие 2	0	1	4
3	-5	3	6

11.

Красные

	1	2	3
1	0	1	2
Синие 2	1	0	1
3	2	1	0

12.

Красные

	1	2	3
1	4	3	2
Синие 2	3	4	3
3	2	3	4

13.

Красные

	1	2	3
1	-6	5	0
Синие 2	2	1	3
3	1	2	0

14.

Красные

	1	2	3
1	0	4	1
Синие 2	-7	2	1
3	6	-5	-1

15.

Красные

	1	2	3
1	-7	4	2
Синие 2	0	2	1
3	6	-5	-1

16.

Красные

	1	2	3
1	1	4	7
Синие 2	1	7	4
3	5	7	4

17.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	1	3	2
	2	0	7	4
	3	3	8	1

18.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	3	1	6
	2	2	2	0
	3	8	0	3

19.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	1	3	5
	2	2	4	4
	3	6	1	1

20.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	3	1	6
	2	2	4	2
	3	1	5	4

21.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	6	4	3
	2	0	2	8
	3	1	6	3

22.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	8	0	7
	2	3	3	8
	3	3	6	1

23.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	3	0	7
	2	4	6	0
	3	3	4	3

24.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	203	403	103
	2	303	3	103
	3	3	103	303

25.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	4	6	0
	2	0	3	10
	3	3	6	6

26.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	2	4	0
	2	1	4	10
	3	5	10	4

27.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	5	5	0
	2	4	7	8
	3	2	2	10

28.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	3	6	0
	2	5	3	2
	3	2	1	6

29.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	3	5	0
	2	4	4	1
	3	1	1	6

30.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	3	2	4
	2	0	4	1
	3	1	3	4

31.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	3	2	4
	2	4	3	2
	3	2	4	3

ИГРЫ $3 \times m$

Метод решения

Игры $3 \times m$, в которых у одного игрока имеется три чистые стратегии, а у другого — их много, решаются с использованием методов, применяемых при решении игр

3×3 , подобно тому, как игры $2 \times m$ решаются с использованием методов, применяемых для решения игр 2×2 . Каждая игра $3 \times m$ обязательно имеет решение либо типа игры 3×3 , либо типа игры 2×2 или седловую точку. Ваша задача заключается в том, чтобы найти подходящую составляющую игру 3×3 или 2×2 , решить ее и доказать, что частоты, найденные подобным образом, представляют решение первоначальной игры.

Вы должны, безусловно, начинать с проверки на седловую точку, потому что это просто сделать и потому что вы не можете допустить такого положения, когда седловая точка имеется, а вы этого не знаете. Если же седловой точки нет, проверьте игру на доминирование, для того чтобы исключить из анализа явно непригодные строки и столбцы. Если вам удастся исключить таким образом одну из стратегий игрока, имеющего три стратегии, задача немедленно сводится к отысканию решения типа 2×2 для игры $2 \times m$.

Если у игры $3 \times m$ нет седловой точки и исключение стратегий по принципу доминирования не дает ее существенного сокращения, то в этом случае вам придется поработать над ней подольше. Вы должны будете просмотреть все возможные игры 3×3 и 2×2 , пока не найдете такую игру, решение которой было бы одновременно решением первоначальной игры $3 \times m$.

Поскольку в последней главе мы уже обременили себя графическим приемом отыскания активных стратегий игр 2×2 , содержащихся в игре $2 \times m$, то используем теперь это обстоятельство. Будем искать решение типа 2×2 для игры $3 \times m$, разбивая ее на игры типа $2 \times m$. Проверьте стратегии Синих 1 и 2 против всех m стратегий Красных. Затем точно так же проверьте стратегии Синих 2 и 3 против всех m стратегий Красных и, наконец, стратегии Синих 3 и 1 также против всех стратегий Красных.

Если имеется игра типа 2×2 , решение которой удовлетворяет первоначальной игре, вы можете легко отыскать ее с помощью графического метода. Так как это очень просто, то вам следует попробовать найти решение подобного типа, прежде чем искать решение типа 3×3 . Даже если эта проверка потерпит неудачу, она обладает моральной ценностью, потому что, когда вы после этого приступите к отысканию решения типа 3×3 , вы будете определенно *знать*, что такое решение существует. А это

уже совсем другое дело. Кроме всего прочего, чертить графики само по себе является развлечением.

Для того чтобы освоиться с матрицами игр $3 \times m$, рассмотрим несколько примеров таких игр. Начнем со следующей достаточно пухлой матрицы:

		Красные								Минимумы строк
		1	2	3	4	5	6	7	8	
Синие	1	6	0	2	0	7	1	2	3	0
	2	3	0	2	-5	4	8	-3	1	-5
	3	1	3	5	1	7	2	4	6	1*
Максимумы столбцов		6	3	5	1*	7	8	4	6	

Обычная рутинная процедура — отыскать минимумы строк и максимумы столбцов и затем найти наибольший минимум и наименьший максимум — приводит к неожиданному финалу: это чудовище, оказывается, *имеет седловую точку*! Оптимальными стратегиями являются стратегия Синие-3 против стратегии Красные-4. Цена игры равна 1 в пользу Синих.

Вы уже не ожидаете столь счастливого конца в следующем примере:

		Красные			Минимумы строк
		1	2	3	
Синие	1	-7	-11	-7	-11
	2	-7	-90	-7	-90
	3	-9	-10	-9	-10*
	4	-7	-12	-7	-12
Максимумы столбцов		-7	-10*	-7	

Но седловая точка снова имеется, и это показывает, что вы не должны никому верить и всегда должны проверять игру на седловую точку.

Теперь рассмотрим игру

		Красные					Минимумы строк
		1	2	3	4	5	
Синие	1	3	5	-2	2	1	-2
	2	3	6	-1	2	4	-1
	3	4	3	6	7	8	3*
Максимумы столбцов		4*	6	6	7	8	

Здесь, наконец, мы не находим седловой точки, но уже поверхностная проверка показывает, что стратегия Синие-2 лучше стратегии Синие-1. Это дает нам

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	2	3	6	-1	2	4
	3	4	3	6	7	8

В этой матрице стратегия Красные-3 лучше, чем стратегии Красных 4 и 5, так что в результате исключения мы получаем матрицу

		Красные		
		1	2	3
Синие	2	3	6	-1
	3	4	3	6

с которой нам и предстоит поработать. Эта игра содержит следующие три игры типа 2×2 : Красные-1 и Красные-2; Красные-2 и Красные-3; Красные-3 и Красные-1. Решение одной из них должно быть решением исходной игры. Не-

трудно было бы проверить их все, но первая из них, а именно:

		Красные		
		1	2	
Синие	2	3	6	1
	3	4	3	3
		Относительные частоты Красных		
		3	1	

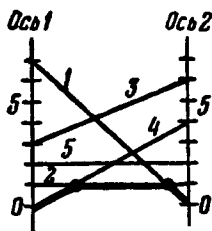
к счастью, оказалась решением исходной игры. Таким образом, общее решение будет $0:1:3$ для Синих и $3:1:0:0:0$ для Красных. Рассмотрим еще одну игру:

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	7	1	3	0	2
	2	0	1	6	4	2
	3	1	2	0	5	5

Здесь нам на помощь не приходит ни седловая точка, ни доминирование. Попробуем поэтому найти решение типа 2×2 . Первую игру 2×5

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	7	1	3	0	2
	2	0	1	6	4	2

можно представить в виде графика



Изучение этого графика показывает, что мы имеем патологический случай, потому что на графике имеется горизонтальная линия, представляющая стратегию Красные-2. Правило использования графиков для решения игры заставляет нас сосредоточить внимание на высшей точке нижней границы. В данном случае две точки пересечения Красные-2, Красные-4 и Красные-1, Красные-2 оспаривают друг у друга эту честь. Игры 2×2 , основанные на стратегиях Красные-2, Красные-4 и Красные-1, Красные-2, имеют седловые точки, но у игры 2×5 седловой точки нет. Поэтому эти седловые точки не могут быть решением игры 2×5 . Игры 2×2 , однако, наряду с седловыми точками содержат решения в смешанных стратегиях. Эти решения следующие:

		Красные		
		2	4	
Синие	1	1	0	3
	2	1	4	1
		Относительные частоты Красных		
		4	0	

		Красные		
		1	2	
Синие	1	7	1	1
	2	0	1	6
		Относительные частоты Красных		
		0	7	

Частоты применения стратегий Красные-1 и Красные-4 в этих играх, оказывается, равны нулю. Это означает, что Синие должны использовать смесь 3:1 (или 1:6), в то время как Красные должны придерживаться стратегии Красные-2; они могут также использовать стратегии Красные-1 или Красные-4, но с нулевой частотой! Такой ответ может привести вас в замешательство. Мы еще вернемся позже (много позже) к этому вопросу, а сейчас не стоит терять на это время, потому что ни одно из решений этой игры 2×5 не удовлетворяет игре 3×5 .

Поэтому попытаем счастья с другой игрой 2×5 :

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	2	0	1	6	4	2
	3	1	2	0	5	5

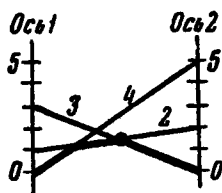
Стратегии Красные-2, Красные-4 и Красные-5 доминируют, в результате чего остается игра

		Красные		Относительные частоты Синих
		1	3	
Синие	2	0	6	1
	3	1	0	6
Относительные частоты Красных		6	1	

решение которой совершенно не подходит для исходной игры 2×5 . Поэтому пробуем последнюю игру 2×5

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	7	1	3	0	2
	3	1	2	0	5	5

Стратегии Красные-1 и Красные-5 доминируют, поэтому мы имеем право на график нанести только стратегий Красные-2, Красные-3 и Красные-4:



Из получившегося графика ясно видно, что мы должны рассматривать только игру 2×2 , основанную на стратегиях Красные-2 и Красные-3:

		Красные		
		2	3	Относительные частоты Синих
Синие	1	1	3	2
	3	2	0	2
		Относительные частоты Красных		
		3	1	

Это, хвала небесам, и есть решение игры 2×5 , но оно, увы, не подходит для исходной игры 3×5 .

Мы едва переносим это ужасное несчастье: до сих пор нам так и не удалось ничего узнать относительно решения этой игры 3×5 , кроме того, что у нее нет ни седловой точки, ни решения типа 2×2 . Единственная выгода из всего этого состоит в том, что мы теперь знаем, что игра имеет решение типа 3×3 .

Итак, снова за черную работу. Придется еще немного попотеть над решением. Попробуем игру

		Красные			
		1	2	3	Минимумы строк
Синие	1	7	1	3	1*
	2	0	1	6	0
	3	1	2	0	0
		Максимумы столбцов			
		7	2*	6	

Седловой точки нет. Доминирования нет. Поэтому определим относительные частоты стратегий Красных из матрицы

		Красные		
		1	2	3
	1	7	0	-3
	2	-1	-1	6

Частота применения стратегии Красные-1 будет

0	-3
-1	6

$$= 0 \times 6 - (-3) \times (-1) = -3.$$

то есть 3. Остальные частоты стратегий Синих и Красных находятся точно так же. Для Синих они равны 7 : 10 : 32, а для Красных 3 : 39 : 7. Это и есть решение первоначальной игры 3×5. Итак, работа закончена, и нам не пришлось решать остальные девять игр типа 3×3, которые содержатся в первоначальной матрице

		<i>Красные</i>					<i>Относительные частоты Синих</i>
		1	2	3	4	5	
<i>Синие</i>	1	7	1	3	0	2	7
	2	0	1	6	4	2	10
	3	1	2	0	5	5	32
<i>Относительные частоты Красных</i>		3	39	7	0	0	

Общепринято в научных сочинениях говорить о важных вещах ровно столько же, сколько о несущественных, а именно один раз, и после этого пребывать в уверенности, что важная информация запечатлена в мозгах читателей. Это — одно из чудес науки, так как позволяет экономить место в журналах и поощряет ученых писать о своих исследованиях. Это также обеспечивает сочинению некоторую долговечность, так как пройдут годы, прежде чем оно будет понято до конца.

Если вы привыкли к такому стилю, то мы вам уже, наверное, до боли намозолили своими бесконечными повторениями о седловых точках. Вам кажется, вероятно, что если вы встретите еще раз напоминание о седловых точках, то начнете ругаться или плакать. Настоящей причиной всех этих неприятностей является кошмар, который регулярно посещает автора: мы представляем себе бедного, но честного читателя, который решил чуточку познакомиться с теорией игр и с решением небольших игр и который попал в беду. Может быть он оказался на одной



льдине с полярным медведем, у него незаряженное ружье, и единственно, чего он желает, это умереть с умом, а может быть, он находится в своем кабинете и перед ним нет ничего более смертоносного, чем наши матрицы, которые он решил усвоить. Может быть, он пропустил мимо ушей, когда мы в первый раз говорили о каком-нибудь приеме или о каком-нибудь понятии. Может быть, он и слушал в тот раз наши объяснения, но они были ему непонятны. Каковы бы ни были его затруднения, лечение очень простое: повторить то, что уже рассказывалось, еще раз. Теперь вы должны понять, почему мы так поступаем.

Пример 19. Морской окунь и профессор

Герой этой истории — блестящий молодой центрархонид (микроптерус), которого люди без воображения описывают, как «похожую на окуня рыбу, которая очень ценится в качестве пищи». Злодей в этом рассказе — рыболов-любитель Клини. Персонажи хорошо известны под именами Окунь и Профессор. Вместе с несколькими насекомыми и водой они образуют комплекс естественных условий среды.

Насекомые (шершни, стрекозы и шмели) также высоко ценятся (рыбами) в качестве еды. Они не одинаково часто встречаются на поверхности водоема. Если профессор добавит одно насекомое (вместе с крючком) к какому-нибудь из видов насекомых, а окунь вздумает полакомиться именно этим видом, то вероятности попасться на крючок

относятся друг к другу как 2:6:30. Это означает, что в воздухе стрекоз в 5 раз больше, чем шмелей, а шершней в 3 раза больше, чем стрекоз*. Вопрос состоит в том, чем должен питаться окунь и какую приманку должен применять профессор? Платежная матрица этой игры:

*Профессор применяет
в качестве приманки*

шершни стрекозы шмели

<i>Окунь лакомится</i>	<i>шершнями</i>	-2	0	0
	<i>стрекозами</i>	0	-6	0
	<i>шмелями</i>	0	0	-30

В игре нет ни седловой точки, ни доминирования. Составим заштрихованную матрицу для окуня:

<i>Шершни</i>	-2	0
<i>Стрекозы</i>	6	-6
<i>Шмели</i>	0	30

Поэтому он будет питаться шершнями с частотой

<i>Шершни</i>		
	6	-6
	0	30

= 180.

* Можно сказать: $15n$ шершней, $5n$ стрекоз и n шмелей, причем n достаточно велико, так что профессор, прибавив одно насекомое, практически не меняет их относительные количества. Тогда вероятности попасться на крючок равны $\frac{1}{15n}$, $\frac{1}{5n}$ и $\frac{1}{n}$. Но буква n является плохим другом занятому человеку. Поэтому мы умножаем все вероятности на $30n$, получая 2:6:30. Почему мы умножили именно на $30n$? Ну, во-первых, а почему бы и нет? и, во-вторых, чтобы избежать дробей позднее, когда профессор начнет пользоваться новой приманкой, которая может быть принята за любое насекомое, но одновременно может вызвать вдвое большее подозрение и поэтому вероятности попасться на эту приманку относятся друг к другу как 1:3:15.

стрекозами с частотой

Стрекозы	-2	0
	0	30

$= 60$

и шмелями с частотой

Шмели	-2	0
	6	-6

$= 12$

или, если сократить на 12, то его смешанная стратегия должна быть $15:5:1$. Можно показать, что профессор применяет ту же стратегию. Цена игры отрицательна для окуня, а именно $-10/7$.



Рыболовы очень любят экспериментировать и покупать, а иногда даже и использовать новую приманку, если только это не червяки. Профессор купил чудесную новую искусственную муху, которую можно принять за любое из

трех насекомых. Но одновременно она вызывает у рыбы вдвое большие подозрения, и это уменьшает ее эффективность. Добавление новой приманки меняет игру:

		Профессор			
		Шершни	Стрекозы	Шмели	Искусственная муха
Окунь	Шершни	-2	0	0	-1
	Стрекозы	0	-6	0	-3
	Шмели	0	0	-30	-15

Окунь должен теперь придерживаться стратегии 3 : 1 : 0, что немного отличается от прежней стратегии: шмели стали слишком опасными! Профессор должен придерживаться стратегии 7 : 2 : 0 : 1 и не должен насаживать на крючок шмелей. Его новая приманка используется только на 10%. Цена игры теперь равна $-\frac{30}{20}$, т. е. весьма не на много лучше для профессора в сравнении с $-\frac{30}{21}$ — ценой исходной игры. Это подтверждает хорошо известную истину: рыбная ловля обходится очень дорого!

Пример 20. Умение подойти к больному

Пациент страдает от некоторой хорошо известной болезни, настолько хорошо известной, что существует пять ее вариантов, вызываемых пятью видами бактерий. Доктор Вендель затрудняется поставить диагноз на основании одного осмотра.

Он снова щупает пульс у больного. Доверие пациента возрастает на одну ступень, потому что эта повторная проверка пульса является свидетельством внимания и серьезности врача. Если бы он, однако, знал истинную подоплеку этой уловки доктора, его доверие немедленно бы уменьшилось: доктору нужно было просто-напросто посмотреть на секундную стрелку своих часов, так как он нуждался в каком-нибудь случайном



числе. Это доказывает, что основания для доверия могут быть весьма обманчивы, хотя доктор, действительно, заслуживал полного доверия своего пациента. У него просто не было времени научить его одновременно и медицине, и теории игр.

У доктора имеется три лекарства. Применение первого из них гарантирует на 50% победу над четырьмя видами бактерий. Второе лекарство наверняка уничтожает только один из этих четырех видов. Третье — гарантирует на 50% гибель другого из этих четырех, но зато дает полную гарантию против пятого вида бактерий.

Платежная матрица будет:

		Виды бактерий				
		1	2	3	4	5
Лекарство	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	2	1	0	0	0	0
	3	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1

С точки зрения природы бактерии 1 и 2 являются не лучшими по сравнению с бактериями 3 и 4, а эти последние совершенно равноценны с точки зрения борьбы против них. Итак, наша игра сводится к следующей:

		Виды бактерий	
		4	5
Лекарство	1	$\frac{1}{2}$	0
	2	0	0
	3	0	1

Доктору не требуется быть гением, чтобы рассмотреть, что в этой сокращенной игре Лекарство-2 не лучшее по сравнению с двумя другими. Поэтому матрица будет:

		Виды бактерий		Относительные частоты доктора
		4	5	
Лекарство	1	$\frac{1}{2}$	0	1
	3	0	1	$\frac{1}{2}$
Относительные частоты природы		1	$\frac{1}{2}$	

Относительные частоты составляют $1 : \frac{1}{2}$ или $2 : 1$ в пользу Лекарства-1. Поэтому смешанная стратегия доктора должна быть $2 : 0 : 1$. Цена игры равна $\frac{1}{3}$, и природа не сможет никакими своими капризами уменьшить цену игры ниже этого среднего значения.

Здесь, пожалуй, стоит немного отвлечься и показать, как меняется ситуация, если доктор немного знает стратегию природы. Так как природа не мстительна, она не покарает его за то, что он использует эти знания.

Пусть из опыта известно, что природа применяет смешанную стратегию, и виды бактерий появляются в соответствии с относительными частотами $1 : 3 : 3 : 2 : 5$. Теперь доктор может подсчитать, что может ему дать в среднем применение каждой из его стратегий. Например, если он постоянно применяет Лекарство-1, его средний выигрыш будет равен (в соответствии с исходной матрицей):

$$\frac{1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 5 \times 0}{1 + 3 + 3 + 2 + 5} = \frac{\frac{9}{2}}{14} = \frac{9}{28}.$$

При использовании Лекарства-2 его средний выигрыш будет:

$$\frac{1 \times 1 + 3 \times 0 + 3 \times 0 + 2 \times 0 + 5 \times 0}{14} = \frac{2}{28}.$$

При использовании Лекарства-3 он будет равен $\frac{13}{28}$. Поэтому игра теперь имеет следующий вид:

		Природа
Доктор	1	$\frac{9}{28}$
	2	$\frac{2}{28}$
	3	$\frac{13}{28}$

и совершенно ясно, что доктор будет применять Лекарство-3. Цена этой игры равна $\frac{13}{28}$, что больше $\frac{1}{3}$, т. е. цены первоначальной игры. Таким образом, та дополнительная информация, которой теперь обладает доктор, приносит ему определенную пользу. Это справедливо всегда в играх против природы. Чем больше вы знаете о ней, тем лучше вы можете играть против нее.

Эти рассуждения можно продолжить немного дальше: если природа в действительности использует смешанную стратегию $1:3:3:2:5$, как мы предположили, а доктор по своему невежеству по-прежнему применяет смешанную стратегию $2:0:1$, которая была предписана ему теорией игр (в игре без информации), он выигрывает все же больше, чем $\frac{1}{3}$, т. е. больше цены первоначальной игры. Это объясняется тем, что природа использует не свою лучшую стратегию*. Мы видели, что применение ею стратегии $1:3:3:2:5$ приводит игру к виду

	<i>Природа</i>
<i>Доктор</i> 1	$\frac{9}{28}$
2	$\frac{2}{28}$
3	$\frac{13}{28}$

Если доктор применяет смешанную стратегию $2:0:1$ в соответствии с выводами первоначального анализа, то его средний выигрыш будет

$$\frac{2 \times \frac{9}{28} + 0 \times \frac{2}{28} + 1 \times \frac{13}{28}}{2 + 0 + 1} = \frac{31}{84}.$$

Итак, можно сделать следующий вывод. Если игра проходит так, как ее представляет себе доктор, и природа ведет себя самым опасным образом, то доктор выигрывает $\frac{1}{3} = 0,333$. Если природа применяет стратегию $1:3:3:2:5$, он выигрывает $\frac{31}{84} = 0,369$. Если же он знает стратегию природы, то он может перейти от стратегии $2:0:1$ к стратегии $0:0:1$ и выиграть $\frac{13}{28} = 0,464$. Таким образом, его дополнительные знания приносят ему выигрыш примерно 26%.

* То есть применяет те чистые стратегии, которые не входят в оптимальную смешанную стратегию (виды бактерий 1, 2 и 3). — Прим. ред.

В жизни могут встретиться также ситуации, при которых частичная информация и применение техники теории игр могут дать хороший результат, даже если игроку не известно точное значение цены игры.

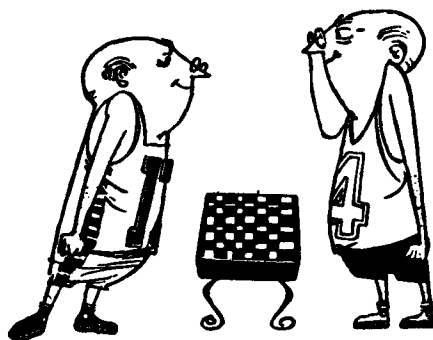
Пример 21. Шахматисты

Две команды, каждая по три человека, собрались, чтобы сыграть по две партии в шахматы. Это событие известно как матч Баранкина, Боденхорна и Брауна против Беллмана, Брауна и Брауна. Мы сожалеем, что здесь так много Браунов, но такова жизнь. Однако никакой путаницы не произойдет для умеющих разгадывать загадки.

Браун может обыграть Баранкина. Баранкин может обыграть Беллмана, а Беллман обыгрывает Боденхорна. В остальном игроки равны. В последний момент один из Браунов заболевает. Всю эту информацию можно свести в следующую таблицу:

	баранкин	боден- хорн	браун
беллман	-1	1	0
браун	1	0	0

Каждая команда должна выбрать двух игроков и порядок, в котором они должны играть. Чтобы компенсировать как-то болезнь Брауна, было решено, что капитан команды Браун может, если пожелает, играть обе игры за свою неполную команду.



Теперь возможности стали (если буквами БаБо обозначить, что Баранкин играет первую игру, а Боденхорн—вторую и т. д.):

	(1) бабо	(2) бабр	(3) боба	(4) бобр	(5) брба	(6) брбо
бебр	-1	-1	2	1	1	0
брбе	2	1	-1	0	-1	1
брбр	1	1	1	0	1	0

В этой игре нет седловой точки, но стратегия (1) доминирует над стратегией (2), а стратегия (3) доминирует над стратегией (5). Поэтому игра принимает вид:

	(2)	(4)	(5)	(6)
бабо	-1	1	1	0
боба	1	0	-1	1
бобр	1	0	1	0

Сравнительно небольшие усилия приводят к следующим решениям: неполная команда должна перемешивать свои стратегии согласно относительным частотам 1:1:1. У второй команды имеется два решения: 0:1:0:2:0:0 или 0:0:0:0:1:2.

Выводы по методам решения игр $3 \times m$

Методы решения игр $3 \times m$ очень мало отличаются от методов решения игр 3×3 . Вы начинаете, как обычно, с поисков седловой точки, и если ее найти не удастся, попробуйте исключить некоторые строки или столбцы, используя принцип доминирования. Если и это не приведет вашу игру к такому типу, с которым вы умеете обращаться, т. е. к играм типа 2×2 , $2 \times m$ или 3×3 , то дальше вы можете следовать по одному из двух путей:

1. Выберите какую-нибудь игру 3×3 , входящую в состав исходной игры, и подставьте ее решение в исходную

игру $3 \times m$. Повторяйте эту операцию до тех пор, пока это не приведет вас к успеху.

2. Разбейте игру на три игры $2 \times m$, основанные на стратегиях Синие-1 и Синие-2, Синие-2 и Синие-3, Синие-1 и Синие-3, и с помощью графического метода ищите решение такой игры типа 2×2 , которое удовлетворяет игре $2 \times m$ и, будем надеяться, первоначальной игре $3 \times m$. Если эти попытки будут неудачными, то такого решения типа 2×2 не существует, и вы должны воспользоваться первым путем.

Упражнения, которые последуют за этим разделом, являются наилучшими из всех, с которыми вам пришлось встретиться. Впервые ваши страдания сравниваются с нашими.

Упражнения 4

Определите относительные частоты и цены следующих игр:

1.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	1	7	3	4
	2	5	6	4	5
	3	7	2	0	3

2.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	1	2	3	5
	2	10	11	12	4
	3	9	8	7	6

3.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	1	6	2	5
	2	5	1	6	2
	3	2	5	1	6

4.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	6	0	1	2
	2	0	3	1	0
	3	2	0	3	1

5.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	1	0	1	0
	2	0	1	0	1
	3	1	0	0	1

6.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	0	1	2	3
	2	3	2	1	0
	3	0	2	1	3

7.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	8	0	6	7
	2	3	3	4	8
	3	3	6	3	1

8.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	3	4	0	2
	2	6	1	3	0
	3	2	5	3	6

9.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	1	3	5	3	1
	2	4	2	0	0	2
	3	1	2	1	4	4

10.

		Красные					
		1	2	3	4	5	6
Синие	1	4	3	3	2	2	6
	2	6	0	4	2	6	2
	3	0	7	3	6	2	2

11.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	8	2	-4
	2	4	1	-2
	3	0	0	0
	4	-4	-1	2
	5	-8	-2	4

12.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	0	-17	-34
	2	-2	-15	-35
	3	-20	-22	-24
	4	-3	-15	-35
	5	-40	-27	-14
	6	-5	-21	-30

13.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	-1	0	1
	2	1	0	0
	3	1	-1	0
	4	5	-4	-2
	5	0	0	1
	6	0	1	0
	7	25	-13	-12

14.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	3	5	1
	2	-6	2	0
	3	5	4	3
	4	-7	3	6

15.

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	3	1	4
	2	1	5	9
	3	2	5	5
	4	3	5	8

ГЛАВА 4

ИГРЫ С ЧЕТЫРЬМА И БОЛЕЕ СТРАТЕГИЯМИ

Решение игр с четырьмя и более стратегиями может показаться вам не очень приятным занятием, если только ваша любовь к арифметике не переходит в патологию. Однако сами игровые ситуации, будучи весьма интересными, до некоторой степени компенсируют вычислительные неприятности. *После* решения большой игры человек, как правило, испытывает определенное чувство удовлетворения.

Решения с помощью догадок

Наилучший способ найти решение для большой игры — это прибегнуть к догадке. Если вы можете догадаться о решении, исходя из структуры задачи, или если вы получили какой-нибудь подающий надежды намек из любого источника, проверьте вашу догадку. Для этого просто подсчитайте средний платеж, когда, скажем, Синие применяют свою предположительно правильную смешанную стратегию поочередно против каждой из чистых стратегий Красных. Если Ваша догадка верна, то должны иметь место два обстоятельства: во-первых, все эти платежи должны быть равны, за исключением, возможно, больших платежей, которые могут получить Синие, играя против чистых стратегий Красных, не входящих в оптимальную сме-

шанную стратегию Красных; во-вторых, этот же платеж должен снова появиться тогда, когда Красные применяют свою оптимальную смешанную стратегию против каждой чистой стратегии Синих; но платеж может быть меньше (а это лучше для Красных) при игре против такой стратегии Синих, которая не входит в оптимальную смешанную стратегию Синих.

Приводимый ниже пример может показать, что все это гораздо легче на словах, чем на деле.

Рассмотрим следующую игру 5×5 :

		<i>Красные</i>				
		1	2	3	4	5
<i>Синие</i>	1	0	1	0	2	0
	2	3	0	0	1	2
	3	0	0	2	1	2
	4	1	3	0	0	1
	5	1	2	3	1	0

Если вы седьмой сын седьмого сына, у вас есть кристальный шар необычайной чистоты и вы счастливчик из счастливых, то вас может осенить мысль, что Красные должны смешивать свои стратегии в соответствии с относительными частотами $4 : 35 : 6 : 57 : 40$.

Пригодность этих чисел в качестве решения может быть установлена следующим образом: предположите, что они верны, и вычислите цену игры. Для удобства перепишем матрицу в следующей форме:

	4	35	6	57	40
0	0	1	0	2	0
3	3	0	0	1	2
0	0	0	2	1	2
1	1	3	0	0	1
1	1	2	3	1	0

Теперь, рассматривая одновременно одну строку, умножьте частоты на соответствующие платежи, сложите все эти произведения вместе и получившуюся сумму разделите на сумму относительных частот. Так, при игре против первой стратегии Синих (первая строка) средний платеж равен:

$$\frac{4 \times 0 + 35 \times 1 + 6 \times 0 + 57 \times 2 + 40 \times 0}{4 + 35 + 6 + 57 + 40} = \frac{149}{142}.$$

При игре против второй стратегии Синих он равен (произведения с множителем нуль опущены)

$$\frac{4 \times 3 + 57 \times 1 + 40 \times 2}{142} = \frac{149}{142}.$$

При игре против стратегии Синие-3

$$\frac{6 \times 2 + 57 \times 1 + 40 \times 2}{142} = \frac{149}{142},$$

против стратегии Синие-4

$$\frac{4 \times 1 + 35 \times 3 + 40 \times 1}{142} = \frac{149}{142}$$

и против стратегии Синие-5

$$\frac{4 \times 1 + 35 \times 2 + 6 \times 3 + 57 \times 1}{142} = \frac{149}{142}.$$

Теперь совершенно ясно, что источник вашей информации относительно смешанной стратегии Красных достоин уважения, так как устойчивость результата при ее применении Красными — выплата $149/142$ единиц — выглядит не лишенной смысла. Мы не доказали еще, однако, что наши относительные частоты являются наилучшими, так как может оказаться, что оптимальная смешанная стратегия Синих обеспечит им выигрыш, по крайней мере $148/142$ вместо $149/142$. Поэтому мы должны найти также относительные частоты для стратегий Синих. Если вы смогли раздобыть приведенный выше набор частот для Красных, то можно предположить, что вы точно так же без особого труда узнаете частоты и для Синих — 28 : 33 : 31 : 21 : 29. После этого вы можете удостовериться в том, что платеж Синим равен по-прежнему $149/142$.

Каждое решение игры должно проверяться точно таким же способом. В этом состоит ваша единственная защита против капризов арифметических расчетов и против других слабостей человека и метода.

Седловые точки

Если у большой игры имеется одна или более седловых точек, то ее решение легко находится. Например:

		<i>Красные</i>				<i>Минимумы строк</i>
		<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	
<i>Синие</i>	<i>1</i>	6	5	6	5	5*
	<i>2</i>	1	4	2	-1	-1
	<i>3</i>	8	5	7	5	5*
	<i>4</i>	0	2	6	2	0
<i>Максимумы столбцов</i>		8	5*	7	5*	

Наибольший минимум строк равен 5, наименьший максимум столбцов равен также 5. Это значит, что имеется седловая точка. В данном случае их имеется даже четыре. (Обратите внимание на то, что *если имеется несколько седловых точек, то все они имеют одно и то же значение.*) Итак, Синие могут применять чистую стратегию Синие-1 или Синие-3. Красные могут соответственно применять стратегии Красные-2 или Красные-4. Они могут, если желают, смешивать обе стратегии любым образом. Цена игры равна 5.

Доминирование

Точно так же, как и в малых играх, всегда имеет смысл произвести проверку на наличие доминирующих столбцов и подчиненных строк. Если такие окажутся, они могут быть вычеркнуты из игровой матрицы или им могут быть приписаны нулевые относительные частоты. Например, приводимая ниже матрица является, по существу, матрицей игры 3×3 . Строки или столбцы, не отмеченные звездочкой,

менее желательны, нежели строки или столбцы, отмеченные звездочкой, с соответствующих точек зрения обоих игроков.

		Красные						
		1	2	3	4	5	6	
Синие	1	3	5	7	2	3	6	
	2	7	5	5	4	5	5	*
	3	4	6	8	3	4	7	*
	4	5	0	3	4	4	2	
	5	7	2	2	3	5	3	
	6	6	3	4	5	6	5	*
			*		*	*		

Из этого примера должно быть ясно, что поиск доминирующих стратегий является, хотя и простой в принципе, но весьма утомительной операцией.

Случай, когда все стратегии активные

Как и в случае игр 3×3 , после проверки на седловые точки и на доминирование мы делаем пробное предположение, что все стратегии являются активными в оптимальной смешанной стратегии, и пытаемся найти их относительные частоты. Чтобы выполнить это, мы должны добавить к технике решения игр типа 3×3 еще один технический прием. Мы расскажем о нем на примере игры 4×4 :

		<i>Красные</i>			
		1	2	3	4
<i>Синие</i>	1	1	7	0	3
	2	0	0	3	5
	3	1	2	4	1
	4	6	0	2	0

Позднее станет ясно, что этот прием может быть распространен на игры с любым числом стратегий.

Как обычно, начнем с решения задачи за Красных. Прежде всего, вычтем из каждого платежа платеж, расположенный ниже него, точно так же, как мы это делали при решении игр 2×2 и 3×3 . Это дает нам

<i>Красные</i>			
1	2	3	4
1	7	-3	-2
-1	-2	-1	4
-5	2	2	1

Относительные частоты для какой-нибудь одной чистой стратегии зависят от того, что останется после вычеркивания из заштрихованной матрицы столбца, представляющего эту чистую стратегию. Так, относительные частоты, например, для стратегии Красные-1 определяются с помощью следующих цифр:

1			
	7	-3	-2
	-2	-1	4
	2	2	1

Определять относительные частоты из подобных заштрихованных матриц столь же просто, в принципе, даже для сложных игр, как сосчитать по одному до миллиона. На каждом этапе решения вы совершенно точно знаете, что вы будете делать дальше. Все это, безусловно, гораздо легче проделать, чем разъяснить на словах. К сожалению, мы должны начать с объяснений.

Для определения относительных частот, заложенных в какой-нибудь заштрихованной матрице, мы должны заменить некоторые числа в матрице нулями. В частности, мы должны *заменить все числа какой-нибудь строки (или*

какого-нибудь столбца), за исключением одного, нулями, применяя для этого совершенно определенный узаконенный способ. Так, мы можем преобразовать матрицу 3×3

7	-3	-2
-2	-1	4
2	2	1

в матрицу следующего вида:

*		
0		
0		

или

0	*	0

где заштрихованные клетки могут содержать соответствующие числа, возможно, совсем не такие, какие были вначале. Отмеченная звездочкой клетка показывает тот элемент строки или столбца, который не приравнивается нулю. Эти замечания приложимы также и к большим матрицам. Так, если нам встретилась матрица следующего вида:

мы можем пожелать превратить ее в матрицу

0	*	0	0

Откуда этот интерес к нулям? Он, конечно, чисто утилитарный, потому что, как только мы получили матрицу такого вида, мы можем не обращать внимания на все клетки вправо, влево, вниз и вверх от клетки со звездочкой, а сама клетка со звездочкой может быть вынесена из матрицы в качестве множителя. Так, матрица

*		
0		
0		

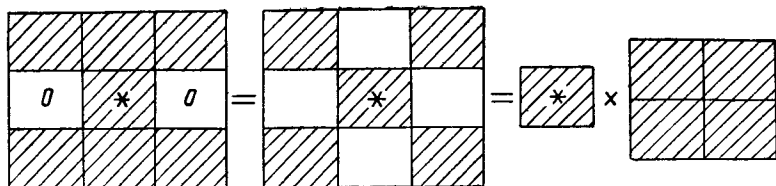
эквивалентна матрице

*		

что, в свою очередь, эквивалентно выражению

$$\begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Точно так же



(на последней ступени клетки, лежащие на периферии, смыкаются).

Такой процесс немедленно превращает матрицу типа 3×3 в матрицу типа 2×2 , умноженную на число в клетке, отмеченной звездочкой. А мы уже знаем, как производить расчеты с матрицами типа 2×2 : надо вычислить разность между произведениями элементов по диагонали. В случае матрицы 4×4 процесс должен быть произведен дважды для того, чтобы уменьшить матрицу до матрицы типа 2×2 (с двумя множителями) *.

Убедив вас в желательности иметь нули, расположенные в некоторых стратегических точках заштрихованной части матрицы, мы переходим теперь к способам получения таких нулей. При этом мы будем руководствоваться следующими правилами:

1. Вы можете складывать числа любой строки с числами любой другой строки, клетка с клеткой.

2. Вычитание имеет те же «права», что и сложение. Поэтому вы имеете право вычитать числа любой строки из чисел другой строки, используя тот же поклеточный принцип.

3. Перед прибавлением чисел одной строки к числам другой вы можете умножить их на какое угодно число.

4. Столбцы и строки совершенно равноправны. Поэтому все, что было только что сказано относительно строк, справедливо и в отношении столбцов.

5. При использовании этих правил надо проявить максимальное искусство.

* Этот процесс не так уж глуп и произволен, как может показаться с первого взгляда. В действительности имеется строгая математическая теория, которая приводит к нему и подтверждает его справедливость. Если вы когда-нибудь изучали в курсе алгебры, как вычисляются детерминанты, то вы узнали этот процесс еще до того, как приступили к чтению этого примечания.

Значение пятого правила заключается в том, что задача упрощается, если правильно выбирать те клетки матрицы, числа в которых преобразуются в нули. Поэтому тщательно выбирайте подходящую точку для начала.

Вернемся к матрице

7	-3	-2
-2	-1	4
2	2	1

и приложим к ней наши новые принципы. Последняя строка содержит две двойки и одну единицу (пятое правило). Применяя вычитание (второе правило) и немного умножения (третье правило), мы должны суметь получить нули в нужных местах. Начнем с вычитания столбца 2 из столбца 1:

10	-3	-2
-1	-1	4
0	2	1

Это дает нам первый нуль. Мы можем получить второй нуль рядом с первым, умножая последний столбец на 2 и вычитая его из второго столбца, т. е.:

10	1	-2
-1	-9	4
0	0	1*

а это как раз то, что мы стремимся получить, так как последняя строка теперь состоит из нулей, за исключением одной клетки. Но

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 10 & 1 & -2 \\ \hline -1 & -9 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1^* \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 10 & 1 & \\ \hline -1 & -9 & \\ \hline & & 1^* \\ \hline \end{array} = \\
 = \begin{array}{|c|} \hline 1^* \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline 10 & 1 \\ \hline -1 & -9 \\ \hline \end{array} = \\
 = 1 \times [10 \times (-9) - 1 \times (-1)] = -89.$$

Число 89 есть относительная частота стратегии Красные-1 игры, встретившейся на стр. 163. Если вы уже начали гордиться пониманием этого процесса, вам предоставляется возможность доказать его при вычислении относительной частоты для стратегии Красные-2.

Вычеркивая второй столбец в первоначальной заштрихованной матрице, т. е. в матрице

<i>Красные</i>				
	1	2	3	4
1	1	7	-3	-2
-1	-1	-2	-1	4
-5	-5	2	2	1

получаем

1	-3	-2
-1	-1	4
-5	2	1

Эта матрица определяет относительную частоту стратегии Красные-2. Вторая строка обещает легкий путь для получения нулей. Поэтому мы начнем с вычитания второго столбца из первого, что дает

4	-3	-2
0	-1	4
-7	2	1

Затем мы умножаем второй столбец на 4 и прибавляем его к третьему столбцу

4	-3	-14
0	-1*	0
-7	2	9

Это эквивалентно

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & -14 \\ \hline & -1^* & \\ \hline -7 & & 9 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -1^* \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & -14 \\ \hline -7 & 9 \\ \hline \end{array} = \\
 = -1 \times [4 \times 9 - (-7) \times (-14)] = -62.$$

Это и есть относительная частота стратегии Красные-2. Далее находим, что относительные частоты стратегий Красные-3 и Красные-4 равны соответственно 119 и 83.

Для того чтобы определить оптимальную смешанную стратегию Синих, мы должны вернуться к первоначальной матрице, т. е. к матрице

<i>Синие</i>	1	1	7	0	3
	2	0	0	3	5
	3	1	2	4	1
	4	6	0	2	0

и образовать новую заштрихованную матрицу вычитанием каждого платежа из его левого соседа:

<i>Синие</i>	1	-6	7	-3
	2	0	-3	-2
	3	-1	-2	3
	4	6	-2	2

Вычеркивая первую строку, получаем

0	-3	-2
-1	-2	3
6	-2	2

Эта матрица определяет величину относительной частоты для стратегии Синие-1. Нули, необходимые для ее определения, могут быть получены шестикратным прибавлением второй строки к третьей строке. Это дает

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -3 & -2 \\ \hline -1^* & -2 & 3 \\ \hline 0 & -14 & 20 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & -3 & -2 \\ \hline -1^* & & \\ \hline & -14 & 20 \\ \hline \end{array} = \\
 \\
 = \begin{array}{|c|} \hline -1^* \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline -3 & -2 \\ \hline -14 & 20 \\ \hline \end{array} = \\
 \\
 = -1 \times [(-3) \times 20 - (-14) \times (-2)] = 88.$$

Относительные частоты для стратегий Синие-2, Синие-3 и Синие-4 определяются таким же образом. Окончательный результат можно представить в виде следующей матрицы:

		Красные				Относительные частоты Синих
		1	2	3	4	
Синие	1	1	7	0	3	88
	2	0	0	3	5	86
	3	1	2	4	1	78
	4	6	0	2	0	101
Относительные частоты Красных		89	62	119	83	

Необходимо, конечно, проверить, являются ли найденные относительные частоты действительным решением игры. Мы проделали это и не возражаем, чтобы и вы произвели эту проверку. Цену игры можно найти, применяя оптимальную смешанную стратегию Красных против, например, стратегии Синие-2 (несомненно, что оптимальная смешанная стратегия любого игрока может применяться против любой чистой стратегии, входящей в смешанную стратегию второго игрока), т. е.

$$\frac{119 \times 3 + 83 \times 5}{89 + 62 + 119 + 83} = \frac{772}{353}.$$

Поэтому средний выигрыш Синих при правильной игре должен составлять немного более двух единиц на партию.

Перед тем как оставить вас в ошолбенении перед следующей серией упражнений, мы хотели бы познакомить вас еще с одним примером, требующим двойного применения метода сокращения матрицы. В игре

		<i>Красные</i>				
		1	2	3	4	5
<i>Синие</i>	1	0	1	0	2	0
	2	3	0	0	1	2
	3	0	0	2	1	2
	4	1	3	0	0	1
	5	1	2	3	1	0

мы предоставляем вам самим убедиться, что в ней нет ни седловых точек, ни доминирования (а может быть есть?). Затем, обращая свое внимание на смешанную стратегию Красных, мы вычитаем каждый платеж из платежа, расположенного непосредственно над первым платежом. Это дает нам

		<i>Красные</i>				
		1	2	3	4	5
	1	-3	1	0	1	-2
	2	3	0	-2	0	0
	3	-1	-3	2	1	1
	4	0	1	-3	-1	1

Предположим теперь в целях иллюстрации, что мы желаем найти относительную частоту для стратегии Крас-

ные-3. После вычеркивания столбца Красные-3 получилась матрица следующего вида:

-3	1	1	-2
3*	0	0	0
-1	-3	1	1
0	1	-1	1

Оказывается, вторая строка уже имеет требуемый для нас вид: все платежи равны нулю, за исключением одного. Поэтому мы можем немедленно сократить матрицу, начиная с исключения платежей, расположенных правее, левее, ниже и выше платежа 3*:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 1 & -2 \\ \hline 3^* & & & \\ \hline & -3 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 3^* \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -2 \\ \hline -3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Для сокращения матрицы 3×3 мы обращаем внимание на числа во втором столбце. Совершенно очевидно, что мы можем получить требуемые нули сложением третьей строки с первой, а затем — со второй строкой. Выполняя эти действия, получим:

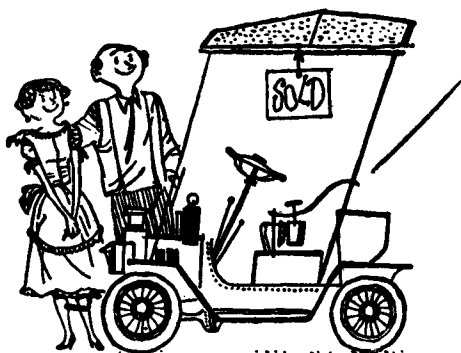
$$\begin{array}{|c|} \hline 3^* \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -2 \\ \hline -3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 3^* \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 0 & -1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline 1 & -1^* & 1 \\ \hline \end{array} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{array}{|c|} \hline 3^* \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \\ \hline & \begin{array}{|c|} \hline -1^* \\ \hline \end{array} &
 \end{array} = \\
 &= \begin{array}{|c|} \hline 3^* \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline -1^* \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} = \\
 &= 3 \times (-1) \times [2 \times 2 - (-2) \times (-1)] = -6.
 \end{aligned}$$

Вы, может быть, уже узнали эту шестерку, которая является относительной частотой стратегии Красные-3, потому что это как раз тот пример, который вы в начале главы решили по догадке.

Пример 22. Подержанный автомобиль

Глэдин и Дон получили в наследство автомобиль стоимостью 800 долларов. Так как оба они заядлые индивидуалисты и не желают иметь дело с общественной собственностью, они согласились решить вопрос о том, кому достанется машина с помощью объявленных ставок



в запечатанных конвертах. Тот из них, кто предложит более высокую сумму, получает автомобиль и уплачивает

эту сумму другому наследнику. Если же назначенные суммы окажутся одинаковыми (что вполне возможно, так как они договорились, чтобы ставки отличались друг от друга не менее чем на сто долларов), то вопрос о владельце определяется жеребьевкой с помощью монеты. При этом они ничего не платят друг другу. У Глэдин на руках имеется 500 долларов, в то время как у Дона есть 800 долларов. Как следует им назначать свои ставки?

В случае, когда вопрос о владельце решается с помощью монеты, их шансы на выигрыш одинаковы. Так как машина стоит 800 долларов, то эти шансы можно оценить в 400 долларов.

Обладая этой информацией, мы можем заполнить платежную матрицу ожидаемыми выигрышами Глэдин (в сотнях долларов):

		Ставки Дона									Минимумы строк
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	
Ставки Глэдин	0	4	1	2	3	4	5	6	7	8	1
	1	7	4	2	3	4	5	6	7	8	2
	2	6	6	4	3	4	5	6	7	8	3
	3	5	5	5	4	4	5	6	7	8	4*
	4	4	4	4	4	4	5	6	7	8	4*
	5	3	3	3	3	3	4	6	7	8	3
Максимумы столбцов		7	6	5	4*	4*	5	6	7	8	

Прежде всего проверяем игру на седловую точку и немедленно находим, что таковая имеется, потому что максимум и минимум равны 400 долларам. В действительности игра содержит четыре седловые точки: каждый игрок должен назначать либо 300, либо 400 долларов. Ставка в 300 долларов несколько привлекательнее, потому что при этом проигрыш одного из них, того, кто играет неправильно, увеличивается.

Пример 23. Опрыскиватели

Ликвидируется фирма по опрыскиванию деревьев Харриса и Дэнскина. Партнеры хотят приобрести у компании ее главное имущество: воздушный компрессор стоимостью 400 долларов и четвертьтонный грузовик—пикап, стоящий 600 долларов. Они решили организовать закрытые торги (как в примере 22), причем цены должны назначаться через 200 долларов за каждый объект продажи. В случае ничьей вопрос о владельце решается с помощью карт: тот, у кого при раскрытии карт в покере окажутся лучшие карты, выигрывает. Вырученная в результате торгов сумма является активом фирмы и поэтому делится между партнерами поровну.



Мы будем обозначать каждую стратегию назначения цены с помощью индекса, состоящего из двух цифр, например 42, обозначающих, что за компрессор назначена цена 400 долларов, а за грузовик — 200 долларов.

После этого уже легко вычислить платежную матрицу (для Харриса) в сотнях долларов. Если, например, Харрис ставит 22, а Дэнскин 06, то Харрис получает компрессор стоимостью 400 долларов и половину активов, т. е. $\frac{2+6}{2} = 4$. Итак, заплатив 2, он получает 8, и его прибыль равна 6. При одинаковых ставках платежи подсчитываются как половина номинальной стоимости обоих предметов,

отображая, таким образом, капризность исходов игры в покер. Игровая матрица будет иметь вид:

		Дэнскин												Минимумы строк
		00	02	04	06	20	22	24	26	40	42	44	46	
Харрис	00	5	3	4	5	4	2	3	4	5	3	4	5	2
	02	7	5	4	5	6	4	3	4	7	5	4	5	3
	04	6	6	5	5	5	5	4	4	6	6	5	5	4
	06	5	5	5	5	4	4	4	4	5	5	5	5	4
	20	6	4	5	6	5	3	4	5	5	3	4	5	3
	22	8	6	5	6	7	5	4	5	7	5	4	5	4
	24	7	7	6	6	6	6	5	5	6	6	5	5	5*
	26	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	5	5	5*
	40	5	3	4	5	5	3	4	5	5	3	4	5	3
	42	7	5	4	5	7	5	4	5	7	5	4	5	4
	44	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6	5	5	5*
	46	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5*
Максимумы столбцов		8	7	6	6	7	6	5*	5*	7	6	5*	5*	

При проверке быстро обнаруживается, что эта игра 12×12 изобилует седловыми точками. Имеется целых 16 точек, соответствующих стратегиям 24, 26, 44 и 46. Любая из них обеспечивает справедливые шансы для каждого из партнеров, но некоторые из них приносят более чувствительное наказание противнику при плохой игре с его стороны. Ставки в 200 и 400 долларов за компрессор и грузовик соответственно могут принести Харрису чистую прибыль в 700 долларов, если Дэнскин будет играть невнимательно. Если такие цены назначил Дэнскин, то при невнимательной игре Харрис может получить чистую прибыль всего 300 долларов. Если они не придерживаются седловых точек, то их платежи могут изменяться в пределах от 200 до 800 долларов.

Так как цена игры равна 500 долларам для Харриса, может показаться, что игра несправедлива в отношении Дэнскина. На самом деле эта игра симметричная: капитал

фирмы составляет 1000 долларов, и Дэнскин получает половину его.

Примечания, которые мы сделали к этому и предыдущему примерам относительно того, что одна хорошая стратегия может быть иногда лучше другой хорошей стратегии, могут легко разжечь жаркие споры в любой группе знатоков теории игр. Строгие жрецы этого культа будут возражать, что принцип минимакса — равенства максимина и минимакса в случае седловой точки — является единственным правилом и критерием в своде доктрин, известном под названием теории игр. И далее, поскольку этот критерий удовлетворен, можно больше ничего не говорить. В применении к настоящей ситуации эта точка зрения означает, что мы приходим к седловой точке в результате предположения, что наш противник достаточно умен, чтобы оценить ее преимущества.

«Согласившись с этой точкой зрения, давайте не будем отклоняться в сторону, — говорят они, — и утверждать, что одна седловая точка лучше другой, потому что противник может не придерживаться стратегии с седловой точкой».

Автор симпатизирует этим взглядам, но не очень.

Пример 24. Цветной покер

Мёл и Рэй не умеют как следует считать, и это мешает им играть в обычный покер. Они, однако, хорошо разбираются в цветах и поэтому придумали следующий вариант игры: каждый ставит в банк перед игрой 1 доллар, после чего из перетасованной колоды сдается по одной карте каждому из них — это все, что они получают. Черная карта считается лучше красной, в остальных отношениях все карты одинаковы для этих неучей.

Мёл, первый игрок, может *пасовать* или *поставить* в банк 1 доллар. Если он пасовал, производится раскрытие карт и банк переходит к тому, у кого более сильная карта. Если карты одинаковы, то банк делится поровну. Если он делает ставку, то Рэй может пасовать (проигрывая при этом), поставить 1 доллар (вынуждая при этом раскрыть карты) или увеличить ставку, поставив 2 доллара.

Если Рэй ставит 2 доллара, то Мёл может пасовать (проигрывая при этом) или поставить 1 доллар (вынуждая раскрыть карты).

Таким образом, каждый игрок может рисковать одним, двумя и тремя долларами в каждой партии, и его страте-

гии определяются суммами, которые он рискует поставить на красную и на черную карту соответственно. Цифрами в скобках (1, 3) мы будем обозначать такую стратегию, при которой игрок желает рисковать одним долларом на красную карту и до трех долларов — на черную. Имеется девять стратегий такого рода для каждого игрока.

Составление платежной матрицы является простым, но утомительным делом. Для каждой пары стратегий мы проделаем вычисления следующего рода [в качестве примера проведем подсчеты для стратегии Мёл-(2,2) против стратегии Рэй-(3,2)]:

		<i>Рэй имеет</i>	
		<i>красную карту и ставит 3 доллара</i>	<i>черную карту и ставит 2 доллара</i>
<i>Мёл имеет</i>	<i>красную карту и ставит 2 доллара</i>	-2	-2
	<i>черную карту и ставит 2 доллара</i>	-2	0

Обе левые клетки соответствуют случаям, когда Мёл проигрывает 2 доллара, потому что поддается на блеф со стороны Рэя, который назначил высокую ставку. Верхняя правая клетка представляет проигрыш в 2 доллара при раскрытии карт, потому что у Рэя карта лучше. Нижняя правая клетка представляет случай равных карт и, как результат, ничью. В колоде содержится одинаковое количество красных и черных карт, поэтому шансы, благоприятствующие каждому из четырех событий, которые представлены клетками, одинаковы. Поэтому средняя цена игры при использовании стратегии Мёл-(2,2) против стратегии Рэй-(3,2) равна

$$\frac{1 \times (-2) + 1 \times (-2) + 1 \times (-2) + 1 \times 0}{1 + 1 + 1 + 1} = -\frac{6}{4}.$$

Это означает проигрыш $\frac{6}{4}$ для Мёла. Так как ставки исчисляются в долларах, эти четверти представляют собой 25-центовые монеты. Удобнее исчислять платежи в матрице в этих монетах; так что числа в клетках приведенной ниже матрицы обозначают число 25-центовых монет, которые переходят из рук в руки (в среднем).

		Рэй									Минимумы строк
		1,1	1,2	1,3	2,1	2,2	2,3	3,1	3,2	3,3	
Мёл	1,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0*
	1,2	1	0	-2	2	1	-1	-2	-3	-5	-5
	1,3	1	0	0	2	1	1	3	2	2	0*
	2,1	3	0	0	2	-1	-1	0	-3	-3	-3
	2,2	4	0	-2	4	0	-2	-2	-6	-8	-8
	2,3	4	0	0	4	0	0	3	-1	-1	-1
	3,1	3	0	-1	2	-1	-2	2	-1	-2	-2
	3,2	4	0	-3	4	0	-3	0	-4	-7	-7
	3,3	4	0	-1	4	0	-1	5	1	0	-1
Максимумы столбцов		4	0*	0*	4	1	1	5	2	2	

Анализ, к счастью, оказался неутомительным: с самого начала мы обнаруживаем четыре седловые точки, соответствующие стратегиям Мёл-(1,1) или (1,3) против Рэй-(1,2) или (1,3). Таким образом, ни один из игроков не должен блефовать, объявляя высокую ставку при наличии на руках плохой карты, но при хороших картах Мёл может делать заниженные ставки (а Рэй — средние).

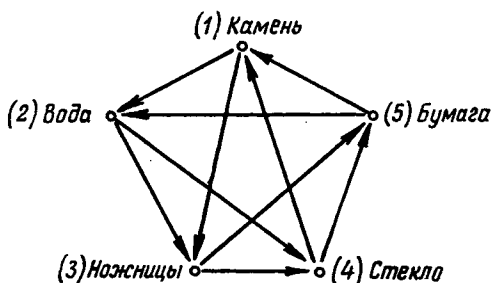
Цена игры в седловых точках равна нулю, т. е. игра является справедливой. Это немного неожиданно, учитывая несимметрию игры и платежной матрицы. Этот пример дает вам понятие о тех трудностях, с которыми мы встретились бы при анализе обычного покера.

Пример 25. Для детей старшего возраста

В третьей главе мы рассматривали детскую игру под названием «Камень — бумага — ножницы». Ее можно превратить двумя различными способами в игру с пятью элементами для детей старшего возраста. У одной из них имеется интуитивное очевидное решение, а у другой — нет.

Назовем эту игру «Камень — вода — ножницы — стекло — бумага». Каждому ребенку известно, что вода смачивает камень и бумагу, ножницы стоят дороже, чем вода и камень, стекло более хрупкое, чем вода и ножницы, бумага гибче, чем ножницы и стекло, а камень толще, чем

стекло и бумага. Эти соотношения можно выразить с помощью следующего рисунка, на котором стрелками указаны направления подчинения:



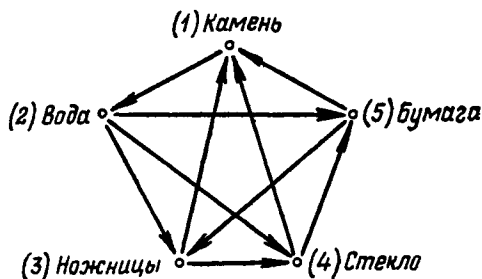
Если обозначить выигрыш, проигрыш и ничью соответственно как 1, -1 и 0, а стратегии — числами, приведенными на рисунке, то платежная матрица будет иметь следующий вид:

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	0	-1	-1	1	1
	2	1	0	-1	-1	1
	3	1	1	0	-1	-1
	4	-1	1	1	0	-1
	5	-1	-1	1	1	0

После безуспешной проверки на седловые точки и доминирование метод, применяемый при наличии всех актив-

ных стратегий, дает решение $1:1:1:1:1$ для каждого игрока, т. е. они должны использовать все свои стратегии с одинаковой частотой.

Если переменить направления трех стрелок (см. рисунок



слева), полагая, например, что бумага горит лучше воды, что ножницы режут бумагу и камень разбивает ножницы, о платежная матрица принимает вид:

		<i>Красные</i>				
		1	2	3	4	5
<i>Синие</i>	1	0	-1	1	1	1
	2	1	0	-1	-1	-1
	3	-1	1	0	-1	1
	4	-1	1	1	0	-1
	5	-1	1	-1	1	0

Основательно потрудившись, вы найдете, что решение для игры «Камень — вода — ножницы — стекло — бумага» будет уже 3 : 3 : 1 : 1 : 1.

Пример 26. Судебный исполнитель

Гэри, судебный исполнитель, стережет то одну дверь, то другую, надеясь поймать Стива и вручить ему повестку, когда тот будет выходить из дома. Скотт, друг Стива, находится также в доме и желает помочь Стиву. С ними никогда еще не случалось таких неприятностей, и что совсем плохо — они не могут узнать Гэри в толпе.

Они могут выйти из дома через любую дверь, причем любой из них может выйти первым. Гэри может вручить повестку либо первому, либо второму при появлении кого-нибудь из них в дверях, которые он стережет, но если он попытается вручить повестку Скотту, то Стив, увидев это из окна, проскользнет через другой выход. Вручение повестки Стиву расценивается как 1 в пользу закона, а промах — как 0.

У Гэри имеется четыре чистые стратегии: он может сторожить любую из дверей и вручать или не вручать повестку первому человеку, которого он увидит выходящим из дверей.



Стив обладает более богатой и более сложной коллекцией стратегий. Две из них состоят в том, что он выходит первым из какой-нибудь одной двери. Если он применил одну из этих стратегий, то не требуется принимать никаких последующих решений. У него есть еще четыре стратегии, одна из которых состоит в том, что он посылает Скотта через какую-нибудь дверь и наблюдает за дальнейшими событиями. Если Скотту вручат повестку, он выходит через другую дверь, а если к Скотту никто не подойдет, он должен *последовать* за ним и надеяться на лучший исход. Всего имеется четыре стратегии такого типа, состоящие в появлении Скотта в парадной или задней двери и в следовании за ним через ту же дверь или уходе через другую.

В результате мы имеем игру 4×6 . После того как определены чистые стратегии, написать платежную матрицу уже нетрудно. Буквами *П* и *З* обозначено использование Стивом парадной и задней двери, а буквами *п* и *з* — то же самое для Скотта.

		Стив и Скотт					
		<i>П</i>	<i>З</i>	<i>п, П</i>	<i>п, З</i>	<i>з, З</i>	<i>з, П</i>
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
парадная	первому (1)	1	0	0	0	0	1
	второму (2)	0	0	1	0	0	0
задняя	первому (3)	0	1	0	1	0	0
	второму (4)	0	0	0	0	1	0

Наши обычные методы решения действуют превосходно, так как здесь имеется четыре активные стратегии в хорошей смешанной стратегии. В этой игре имеется несколько основных смешанных стратегий: Стив может играть с относительными частотами $1:1:1:1$ для любых четырех стратегий, образующих матрицу 4×4 , содержащую по одной единице в каждой строке и в каждом столбце, например стратегий *З*, *4*, *5* и *6*.

Оптимальная смешанная стратегия Гэри будет $1:1:1:1$, а цена игры равна $\frac{1}{4}$ в пользу Гэри. Если бы Стив был в здании один, то цена игры повысилась бы до $\frac{1}{2}$. Поэтому содействие Скотта является весьма ценным.

Пример 27. Игра с монетами

В этой игре принимают участие два игрока, каждый из которых либо зажимает в кулаке монету, либо нет, после чего каждый игрок угадывает, какова сумма денег, зажатых в кулаках обоих играющих. Каждому игроку доступны четыре стратегии:

- а) не зажимать в кулаке монету, считать, что сумма равна нулю;
- б) не зажимать монету, считать, что сумма равна 1;
- в) зажимать монету, считать, что сумма равна 1;
- г) зажимать монету, считать сумму равной 2.

Считая ничью нулем, а выигрыши и проигрыши для Синих $+1$ и -1 соответственно, имеем следующую игру:

		<i>Красные</i>			
		1	2	3	4
<i>Синие</i>	1	0	1	-1	0
	2	-1	0	0	1
	3	1	0	0	-1
	4	0	-1	1	0

У этой игры нет ни седловых точек, ни доминирования, а метод, применяемый при наличии всех активных стратегий, дает нулевые относительные частоты для всех стратегий. Итак, у нас возникают неприятности: должна иметься какая-то малая игра, входящая в игру 4×4 , решение которой удовлетворяет всей игре в целом. Среди игр 2×4 , входящих в основную игру, имеется игра

		<i>Красные</i>			
		1	2	3	4
<i>Синие</i>	2	-1	0	0	1
	3	1	0	0	-1

Легко прийти к выводу, что стратегии Синие-2 и Синие-3 должны играть с относительными частотами $1:1$,

а Красные должны применять свои стратегии с частотами $1:0:0:1$. Это решение является одновременно и решением всей игры.

Обратим внимание, однако, на то, что найденная оптимальная смешанная стратегия не является единственно возможной, так как для игры 2×4 (которая тоже входит в основную игру):

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	0	1	-1	0
	4	0	-1	1	0

также имеется решение, которое удовлетворяет первоначальной игре, а именно $1:0:0:1$ и $0:1:1:0$ для Синих и Красных соответственно.

Итак, мы знаем теперь два способа проводить эту игру: смешивать стратегии 1 и 4 или стратегии 2 и 3, причем, какую бы пару стратегий вы не выбрали, смешивайте их, руководствуясь указаниями равновероятного жребия. Ясно также, что мы можем пойти дальше и получить более общее решение, основанное на обеих смешанных стратегиях, а именно применять все четыре стратегии в любой смеси с единственным условием, чтобы относительная частота для стратегии Синие-1 была такой же, как и для стратегии Синие-4, а для Синие-2—такой же, как для стратегии Синие-3. (То же самое и для Красных.) Так, смешанная стратегия $7:3:3:7$ является такой же хорошей стратегией для любого из игроков, как стратегия $3:7:7:3$ или любая подобная комбинация чисел.

Мы в первый раз обращаем ваше внимание на то, что игра может иметь более чем одну оптимальную смешанную стратегию, но на самом деле мы уже встречались с этим свойством раньше, когда имели обилие седловых точек, при которых оптимальными были чистые стратегии. Этот принцип является общим и очевидным: если у игры имеется несколько решений, причем каждое из них является либо чистой, либо смешанной стратегией, то они могут, в свою очередь, смешиваться любым способом.

Пример 28. «Административная» дилемма

Главарь шайки только что показал свое искусство в общении с отмычками и уже запустил обе руки в несго-

раемый шкаф. Он застыл на месте, когда новый член шайки, Тигр Сесиль, вытащил что-то из кармана и спрятал руку под стол.

—В чем дело, Сесиль?

—Вот что, Поль. Будет очень мило с твоей стороны, если ты сделаешь мне небольшой подарок в честь того, скажем, что я вступил в вашу компанию. Ты должен подарить мне все, что ты захватил, а также и свой пугач. Не теряй времени на раздумье о том, что у меня в руке. Это всего-навсего...

Может быть Сесиль собирался сказать «пистолет». С другой стороны, он мог назвать какую-нибудь невинную вещь, например трубку. Во всяком случае, Поль поставлен перед сложной административной задачей. Какие здесь могут быть возможности?

Поль чувствует, что деньги в этой ситуации играют сравнительно малую роль. Более важными ставками являются его жизнь и престиж. Начав с самых мрачных предположений, он перечисляет возможности:

а) столкнуться с пистолетом и быть застреленным;

б) испугаться трубки, о которой Сесиль сказал, что она — трубка;

в) испугаться трубки, о которой Сесиль сказал, что она — пистолет;

г) испугаться пистолета, о котором Сесиль сказал, что он — пистолет;

д) испугаться пистолета, о котором Сесиль сказал, что он — трубка;

е) столкнуться с трубкой, о которой Сесиль сказал, что она — трубка;

ж) столкнуться с трубкой, о которой Сесиль сказал, что она — пистолет.

Поль решил оценить эти возможности по шкале, простирающейся от 0 до 10. Самую ужасную возможность (а) он оценивает как 0, а свой триумф (возможность ж) как 10. Назначение цены другим возможностям является неблагодарной задачей, которая может испортить вам настроение. Но вспомним, что и Поль страдает точно так же*.



* В гл. 5 имеются два раздела, начинающиеся со стр. 225, в которых затрагиваются вопросы важности измерения или оценки платежей и требующейся при этом точности.

Он решает оценить пятью очками тот случай, когда он окажется полностью одураченным, а остальные возможности — шестью, семью, восемью и девятью очками. У Сесилия четыре стратегии: он может вытащить пистолет или нет, и он может сказать «пистолет» или нет. У Поля имеется также четыре стратегии: он может верить или не верить в то, что сказал Сесиль, или он может поверить сообщению о пистолете и не верить другим сообщениям или наоборот. В результате получается игра:

		<i>Сесиль</i>			
		$\begin{smallmatrix} n, P \\ (1) \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} n, T \\ (2) \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} T, P \\ (3) \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} T, T \\ (4) \end{smallmatrix}$
<i>Поля</i>	<i>ВП, ВТ (1)</i>	7	0	6	9
	<i>ВП, НТ (2)</i>	7	8	6	5
	<i>НП, ВТ (3)</i>	0	0	10	9
	<i>НП, НТ (4)</i>	0	8	10	5

Здесь буквами обозначено:

n и *t* — пистолет и трубка,

P и *T* — сообщение Сесилия («пистолет» или «трубка»),

В и *Н* — вера и неверие в сообщение.

Так, например, вторая чистая стратегия Сесилия состоит в том, чтобы вынуть пистолет и сказать, что у него в руке трубка. Первая чистая стратегия Поля заключается в том, что он верит сообщению Сесилия, и это оказывается его последним актом в жизни.

Решение проводится стандартными методами. Мы пытаемся найти решение игры типа 4×4 , и это не приносит нам ничего, кроме неприятностей. Поэтому мы ищем решение типа 3×3 . Так как стратегии Поля-3 и Сесиль-3 выглядят как-то непривлекательно, мы исключаем их, и это приносит удачу. Решением для Поля является смешанная стратегия 7:17:0:4. Цена игры равна 6. Сесиль может довести платеж до этого значения, применяя смешанную стратегию 0:1:0:2. (Кроме решения 7:17:0:4, у Поля имеются другие решения 1:3:0:0 и 3:21:4:0.)

Может показаться удивительным тот факт, что Поля не придерживается только стратегии Поля-2, т. е. верить в «пистолет» и не верить в «трубку». Это объясняется тем, что он высоко ценит свой престиж. Если бы он не

ценил его столь высоко, т. е. если бы, назначая платежи по шкале измерения, он сгруппировал бы все платежи, за исключением нулевого, вблизи 10, но сохранил бы порядок их на шкале, тогда относительная частота стратегии Поль-2 возрасла бы. Например, если применить шкалу платежей

0; 9,5; 9,6; 9,7; 9,8; 9,9 и 10

(т. е. придать фактору престижа слабое значение), то решение в этом случае будет уже $291:9411:0:192$ или практически $3:99:0:2$. Другое решение будет $3:99:0:0$. Итак, даже в этом случае он не должен слепо придерживаться только второй стратегии. В этой игре Сесиль должен применить смешанную стратегию $0:4:0:98$, т. е. он должен всегда говорить, что у него в руке трубка, и это почти всегда должно быть правдой*.

Пример 29. Проблема полковника Блотто

Командир боевой части, который раньше опасался, что не вступит в соприкосновение с Красными, теперь опасается, что у него получился с ними чересчур тесный контакт, так как его роты в обоих передовых постах вот уже 10 минут ведут боевые действия с противником.

Когда он планировал эту операцию, разведывательный отдел штаба оценил силы противника в 600 человек, по данным же его собственной разведки они составляют 1000 человек (по всей вероятности, 5 рот). Поэтому его два стрелковых батальона (6 рот) имеют теперь преимущество всего только на одну роту вместо преимущества вдвое, на которое он рассчитывал. Он отдал приказание: «Уничтожить максимальное число солдат противника при минимуме своих потерь». Представитель штаба соединения, полковник, прикрепленный к части на время проведения операции, втихомолку ухмылялся, когда командир зачитал эту невозможную директиву своим батальонным и ротным командирам, что еще больше укрепило «любовь» командира к посещениям части представителями штаба.

Его роты «Бэкер» и «Дог» вступили в соприкосновение с противником на некотором расстоянии от главных

* Настоящий пример должен решаться, как игра с ненулевой суммой, ибо Сесиль заинтересован в деньгах, а не в подрыве престижа Поля, и, таким образом, для Сесили платежная матрица в этой игре, строго говоря, не совпадает с платежной матрицей для Поля. Такого рода игры вкратце разобраны в тексте ниже (см. стр. 248.) — *Прим. ред.*

сил в направлении на северо-восток и на северо-запад соответственно. Остальные четыре роты были в резерве и могли быть использованы для поддержки в любом месте. Пока он ожидал прибытия батальонных командиров, он размышлял о том, что предпринял бы этот офицер из штаба соединения, который в настоящую минуту терся спиной о дерево, если бы ответственность лежала на нем.

— Клянусь, он чувствовал бы себя менее спокойно, — думал командир.

— А каково Ваше мнение обо всем этом, полковник? Не напоминает ли это Вам какой-нибудь эпизод из времен Второй Пунической войны?

— Это очень любопытно, но положение действительно мне что-то напоминает, что-то более далекое, чем Пунические войны. Слыхали вы когда-нибудь о теории игр?

— Не имею никакого понятия.

— Мне пришлось провести как-то летом некоторое время в одной компании. Среди прочих вещей там много говорили о теории игр, математических штуках, имеющих некоторое отношение к военным делам. Они рассматривали один пример, называвшийся, проблемой полковника Блотто. Вы извините меня, но это была довольно непочтительная и недисциплинированная компания... Так или иначе, но этот Блотто столкнулся почти с такой же ситуацией.

— И что же рекомендовала ему теория игр? Вести переговоры?

— Хуже! Они утверждали — запомните, это *не моя* идея, — что Вы должны следить вот за этим муравьем, нет, вон за тем, что ползет по Вашей карте. Как только он достигнет масляного пятна, посмотрите на секундную стрелку Ваших часов. Если она показывает 6 секунд или менее, Вы должны разделить поровну свои силы между угрожаемыми пунктами. Если она будет показывать между 6 и 30 секундами, передайте весь резерв Дэну; если между 30 и 54 секундами, то передайте резерв Гарри; и, наконец, если между 54 и 60 секундами, то разыщите другого муравья.

— Черт побери!... Попробуем так и сделать.

Проследим теперь за анализом ситуации. У Синих имеется 6 рот, а у Красных — 5 рот. Они вступают в сражение в двух пунктах. Для Синих открыты следующие возможности: разделить свои силы в отношении 5:1; 4:2; 3:3; 2:4 и 1:5. Красные могут разделить свои силы в отношении 4:1; 3:2; 2:3 и 1:4. Предполагаем, что при оди-

наковых силах получается ничья; побеждает тот, у кого больше сил. Платеж равен числу разбитых рот противника минус число собственных потерь. Это, кажется, подходит к характеру ситуации и не противоречит приказаниям, отданным командиром Синих сил и являющимся, строго говоря, бессмысленными. Платежная матрица будет:

		<i>Красные</i>			
		41	32	23	14
<i>Синие</i>	51	4	2	1	0
	42	1	3	0	-1
	33	-2	2	2	-2
	24	-1	0	3	1
	15	0	1	2	4

(Мы обозначили числом 51 разделение сил в отношении 5:1 и т. д.)

Нахождение решения несколько затруднительно. Так или иначе мы доходим до попытки решить следующую игру 4×4 :

		<i>Красные</i>			
		41	32	23	14
<i>Синие</i>	51	4	2	1	0
	42	1	3	0	-1
	33	-2	2	2	-2
	15	0	1	2	4

которая получается исключением четвертой стратегии Синих. Метод, применяемый нами, когда все стратегии активные, дает решение, удовлетворяющее первоначальной игре, а именно 4:0:1:0:4 для Синих и 3:48:32:7 для Красных. На основании симметрии игры видно, что можно получить другое, но подобное решение, если исключить вторую стратегию Синих. Это приводит, как и прежде, к решению 4:0:1:0:4 для Синих, но к решению 7:32:48:3 для Красных

Хотя это не имеет особого смысла, за исключением того, чтобы сделать относительные частоты более удобочитаемыми, можно скомбинировать * эти оба решения для Красных и получить их оптимальную стратегию в виде 10:80:80:10, т. е. 1:8:8:1. Результаты можно представить в следующем виде:

		<i>Красные</i>				<i>Относительные частоты Синих</i>
		41	32	23	14	
<i>Синие</i>	51	4	2	1	0	4
	42	1	3	0	-1	0
	33	-2	2	2	-2	1
	24	-1	0	3	1	0
	15	0	1	2	4	4
<i>Относительные частоты Красных</i>		1	8	8	1	

Таким образом, Синие должны отдавать предпочтение наиболее неравномерному разделению сил с относительными частотами 8:1. Они не должны применять промежуточные разделения сил. С другой стороны, Красные, наоборот, должны чаще придерживаться почти равномерного разделения, чем применять неравномерное разделение.

Цена игры (плата в пользу Синих) равна $\frac{14}{9}$, т. е. между одной и двумя ротами. История с муравьем, картой и секундной стрелкой представляет собой жребий, необходимый для того, чтобы получить относительные частоты 4:1:4, в которых нуждаются Синие.

Наш пример можно продолжить дальше. Предположим, что после двух сражений произойдет третье сражение между оставшимися в живых. Мы можем спросить: как командиры должны планировать свои первоначальные бои, чтобы получить наилучший результат в конце операции?

В соответствии с принятыми нами правилами та сторона, которая вступит в окончательное сражение с наибольшим числом рот, побеждает противную сторону. Поэтому окончательный платеж будет равен первоначаль-

* См. стр. 223 относительно многократных решений.

ным силам противника * минус те свои роты, которые были потеряны в двух первых боях **. Если оставшиеся силы равны, то больше потерь не будет. На основании этих правил и исходя из первоначальной матрицы, получим игру, характеризующую создавшуюся новую ситуацию:

		<i>Красные</i>				<i>Относительные частоты Синих</i>
		41	32	23	14	
<i>Синие</i>	51	5	4	4	4	10
	42	5	5	3	-1	0
	33	-5	5	5	-5	1
	24	-1	3	5	5	0
	15	4	4	4	5	10
<i>Относительные частоты Красных</i>		2	19	19	2	

Здесь решение для Красных снова получается в результате комбинации двух решений, а именно 1:7:12:1 и 1:12:7:1. Цена игры равна $^{85}/_{21}$.

Сравнивая эти результаты с предыдущими, мы видим, что такая ситуация, учитывающая все бои, требует, чтобы Синие еще больше концентрировали силы на одном участке. Относительные частоты в пользу концентрации теперь составляют 20:1 вместо 8:1.

Пример 30. Морра

Существует игра под названием «Морра», которую, поскольку она имеет название, изобрели не мы. С помощью этой игры мы можем продемонстрировать как силу, так и слабость теории игр. Ее сила в том, что игроки нуждаются в помощи теории игр для выбора стратегии, так как маловероятно, чтобы они натолкнулись на хорошую схему игры случайно. Ее слабость в том, что для получения этой хорошей стратегии требуются громоздкие вычисления.

Игра заключается в следующем: каждый игрок показывает несколько пальцев и одновременно угадывает,

* Все они уничтожены к концу операции. — *Прим. ред.*

** В последнем бою победившая сторона не несет потерь. — *Прим. ред.*

сколько пальцев показывает его противник. Можно показывать один, два или три пальца. Если только *один* из игроков правильно назовет число пальцев, показываемых противником, то его выигрыш будет равен сумме пальцев обоих игроков, которые показываются в данной партии. В остальных случаях платеж равен нулю. (Расчеты, само собой разумеется, ведутся на деньги, а не на пальцы.) Так, если Синие показали три пальца, а назвали один, в то время как Красные показали один, а назвали два пальца, то выигрывают Синие, потому что они угадали правильно; их выигрыш при этом составляет 4 единицы платежа.

Каждый игрок может показать один, два или три пальца и может соответственно назвать один, два или три пальца. Таким образом, у каждого игрока имеется девять возможностей, т. е. девять чистых стратегий. Обозначим эти стратегии двузначными числами, например 32, причем первая цифра указывает, сколько пальцев показал этот игрок, а вторая цифра — какое число пальцев он назвал. Обозначив стратегии подобным образом и подсчитав платежи, мы можем представить игру Морра в виде следующей матрицы 9×9 :

		Красные								
		11	12	13	21	22	23	31	32	33
Синие	11	0	2	2	-3	0	0	-4	0	0
	12	-2	0	0	0	3	3	-4	0	0
	13	-2	0	0	-3	0	0	0	4	4
	21	3	0	3	0	-4	0	0	-5	0
	22	0	-3	0	4	0	4	0	-5	0
	23	0	-3	0	0	-4	0	5	0	5
	31	4	4	0	0	0	-5	0	0	-6
	32	0	0	-4	5	5	0	0	0	-6
	33	0	0	-4	0	0	-5	6	6	0

В этом месте весьма полезной была бы искра гения, потому что непосредственные расчеты весьма запутаны. Наш обычный метод дает ответ в виде нулевых частот для всех стратегий, если его применить непосредственно к игре 9×9 , т. е. ни один из игроков не желает играть. Практически это указывает на то, что одна или несколько чистых стратегий должны быть исключены, после чего и следует искать решения для сокращенной игры.

Имеется 9 игр 8×8 , которые следовало бы рассмотреть (если бы мы не использовали симметрию игры, их было бы 81), 36 игр 7×7 и 84 игры 6×6 . Мы не пойдем по этому пути.

По причинам, имеющим отношение к теории чисел, и имея некоторые понятия об ответе, мы сосредоточиваем наше внимание на 126 играх 5×5 , которые симметричны по своим стратегиям. Нам посчастливилось найти нужную игру после двух попыток. Она получилась в результате исключения первой, четвертой, шестой и девятой стратегий:

		<i>Красные</i>				
		12	13	22	31	32
<i>Синие</i>	12	0	0	3	-4	0
	13	0	0	0	0	4
	22	-3	0	0	0	-5
	31	4	0	0	0	0
	32	0	-4	5	0	0

Используя метод решения, когда все стратегии активные, мы получаем (после сокращения на общий множитель) следующие частоты:

$$0 : 5 : 4 : 3 : 0.$$

Производим проверку и убеждаемся в том, что это решение удовлетворяет не только нашей игре 5×5 , но и всей игре 9×9 .

Итак, разумно играть в Морру следующим образом:

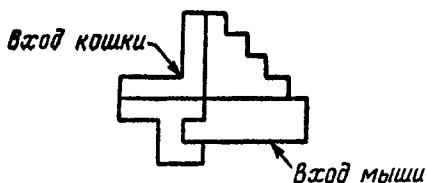
Стратегии	11	12	13	21	22	23	31	32	33.
-----------	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

Относительные частоты	0	0	5	0	4	0	3	0	0.
-----------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Иначе говоря, следует применять такие стратегии: 1) показать один палец и назвать три пальца, 2) показать два и назвать тоже два пальца и 3) показать три и назвать один палец. Все эти стратегии следует применять в соответствии с относительными частотами 5:4:3. Цена игры равна нулю; игра, конечно, честная. Нам кажется, что стоит научиться этой игре ваших друзей, так как решение легко запомнить, но его трудно отыскать по интуиции.

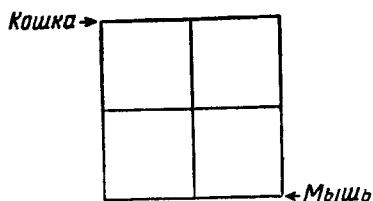
Пример 31. Лабиринт

Кошка и мышь попадают в глухой лабиринт, показанный на рисунке



Они могут огибать углы, но не имеют права возвращаться назад. Они передвигаются с одинаковой скоростью, и им дано время, за которое они могут оббежать четвертую часть лабиринта. После этого, если мышь еще уцелела, можно считать, что она спаслась. Каковы должны быть их стратегии?

Во-первых, они тотчас же поймут, что лабиринт, в который они попали, эквивалентен следующему лабиринту:



и поэтому у них имеется восемь чистых стратегий, которые можно изобразить схематически следующим образом:

<i>Номер стратегии</i>	<i>Кошка</i>	<i>Мышь</i>	<i>Номер стратегии</i>	<i>Кошка</i>	<i>Мышь</i>
1			5		
2			6		
3			7		
4			8		

Если мы установим платеж, равный единице, при исходе партии: «кошка поймала мышь», и платеж, равный нулю, при исходе: «кошка упустила мышь», то кошка будет игроком, желающим получить максимальный платеж, а мышь — игроком, желающим, чтобы платеж был минимальным. Сравнивая различные чистые стратегии, составляем платежную матрицу

		<i>Мышь</i>							
		1	2	3	4	5	6	7	8
<i>Кошка</i>	1	0	0	0	1	0	0	0	1
	2	0	1	1	1	1	1	1	0
	3	0	1	1	1	1	1	1	0
	4	1	1	1	1	1	1	1	0
	5	0	1	1	1	1	1	1	1
	6	0	1	1	1	1	1	1	0
	7	0	1	1	1	1	1	1	0
	8	1	0	0	0	1	0	0	0

Мы сразу замечаем, что пятая стратегия кошки доминирует над первой, второй, третьей, шестой и седьмой, а четвертая стратегия доминирует над восьмой. Кроме того, первая стратегия мыши подчинена ее пятой стратегии, восьмая — четвертой, а вторая, третья, шестая и седьмая стратегии мыши одинаковы. Поэтому игра значительно сокращается:

		Мышь		
		1	2	8
Кошка	4	1	1	0
	5	0	1	1

Такая игра имеет простое решение: кошка должна с одинаковой частотой применять свои четвертую и пятую стратегии, а мышь должна точно так же смешивать свои первую и восьмую стратегии.

Возвращаясь к нашей схеме чистых стратегий, мы видим, что кошка должна делать малые петли, а мышь должна придерживаться внешних коридоров лабиринта.

Пример 32. Мерлин

— Я очень нуждаюсь в вашей помощи, — начала Джиневра. — Эта дрянь Изольда завела отвратительный обычай, чтобы победитель нес ее платок, когда мальчики балуются на турнирах, а мой чемпион частенько заканчивает игру на земле. Это — нарушение субординации, и оно должно прекратиться.



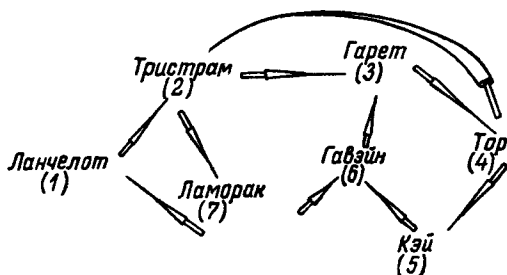
Левая рука Мерлина превратилась в жабу, которая начала квакать. Он слегка вздрогнул и выпрямился в кресле.

— Простите меня, моя дорогая, я немного отвлекся...

Да, да, турниры. Я совсем не следил за ними последнее время. Какие же сейчас шансы у рыцарей?

— Ах, это ужасно сложно, — простонала Джиневра. — Сейчас в городе у нас осталось семь высших рыцарей. Большинство из них делают друг с другом ничьи. Однако некоторые вполне определенно бьют других. Можно вполне рассчитывать на то, что Ланчелот побьет Тристрама, Тристрам побьет Гарета и Ламорака, Ламорак побьет Гавэйна и, я надеюсь, Ланчелота. Гарет победит Тора, Тор побьет сэра Кэя и Тристрама. Однако Кэй имеет превосходство над Гавэйном, а Гавэйн — над Гаретом. Это просто сумасшествие — они такие стойкие в некоторых отношениях, но...

— Однако они нетранзитивны*, — пробормотал Мерлин, рисуя схему, которая выглядела так:



— Эта стрелка от Тора к Тристраму не очень изящна, но не в этом дело. Джин, потерпите немного. Столь запутанное дело заслуживает волшебных сновидений.

Мерлин опустил на сиденье и закрыл глаза. Леди Джиневра сидела совершенно неподвижно, пронизываемая круглыми глазами его приятельницы — маленькой совы, которая устроила себе гнездо в его волосах.

Наконец, старик восторженно вскрикнул и сел прямо.

— О боже! — вздохнул он. — Я всегда чувствую себя измученным, когда совершаю путешествие, даже ненадолго, в двадцатый век. Тем не менее я нашел то, что искал. Имеется штука, которая называется... ну, назовем ее теорией турниров. Не буду утруждать Вас подробностями.

* «Транзитивными» называются в математике упорядочивающие соотношения, обладающие следующим свойством: если Ланчелот бьет Тристрама и если Тристрам бьет Ламорака, то Ланчелот бьет Ламорака (если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$). Эти соотношения не выполняются в схеме Мерлина. — Прим. ред.

Вот что Вы должны делать: положите в урну несколько камней, каждый из которых пометьте цветом рыцаря. Кроме того, и это очень важно, бросьте туда щепотку тонко растертого рога единорога*. Камней, представляющих Кэя и Гавэйна, бросать в урну не надо. Когда Вы пожелаете выбрать рыцаря, потрясите урну, перекувырните ее два раза, из них один раз назад, и вытащите какой-нибудь один камень. Тогда Вы, по крайней мере, удержите свои шансы против Изольды.

— О, это замечательно, Мерлин! Как мне отблагодарить Вас? Скажите, чего бы вы желали?

— Ну,—сказал Мерлин,— вы ведь знаете, мне ничего не стоит удовлетворить почти любое желание.

Произнося эти слова, он поднес ко рту кусок копченой лососины, появившийся внезапно у него в руке. Он отщипнул кусок и продолжал:

— Ну, конечно, Вы можете разок перекувырнуться для меня, когда будете выходить через дверь. Я с удовольствием посмотрю, как вы это делаете без всякого принуждения с моей стороны.

Если обозначить ничьи через нуль, а выигрыши и проигрыши Джиневры через 1 и —1, то платежная матрица будет иметь вид

		<i>Изольда</i>						
		1	2	3	4	5	6	7
<i>Джиневра</i>	1	0	1	0	0	0	0	-1
	2	-1	0	1	-1	0	0	1
	3	0	-1	0	1	0	-1	0
	4	0	1	-1	0	1	0	0
	5	0	0	0	-1	0	1	0
	6	0	0	1	0	-1	0	-1
	7	1	-1	0	0	0	1	0

* Легендарное геральдическое животное. — *Прим. ред.*

В этой матрице номера стратегий обозначают соответствующих рыцарей.

Решение этой игры простое, но утомительное. Проверив последовательно все игры 7×7 и 6×6 , содержащиеся в игре, Вы, наконец, приходите к игре типа 5×5 , основанной на стратегиях 1, 2, 3, 4 и 7. Решение этой игры 5×5 состоит в том, чтобы использовать с одинаковой частотой все пять стратегий. Это решение удовлетворяет также и нашей первоначальной игре. Итак, обе дамы должны применять следующую смешанную стратегию: избирать рыцарей в соответствии с относительными частотами $1:1:1:1:0:0:1$.

Выводы по методам решения игр 4×4

Сделаем обзор наших сведений в области игр 4×4 и игр больших размеров. Наш обычный метод состоит, прежде всего, в поиске седловой точки. Если она имеется, то мы знаем, что наша оптимальная стратегия состоит в использовании чистой стратегии, определяемой седловой точкой. Если же игра не содержит седловой точки, то мы исключаем из матрицы все подчиненные стратегии Синих и все доминирующие стратегии Красных. К сожалению, наша проверка на доминирование сводится к простому осмотру, что во многих случаях может привести к ошибкам. Это особенно относится к тем случаям, которые мы называли случаями скрытого доминирования, когда какая-то комбинация чистых стратегий доминирует над какой-нибудь одной чистой стратегией (или подчинена этой чистой стратегии). Во всяком случае, очистив матрицу до пределов наших возможностей, мы делаем пробное предположение, что все наши стратегии активные, и пытаемся определить оптимальную смешанную стратегию, применяя очень простой и надежный метод. Имеется довольно большая вероятность того, что мы, дойдя до конца, не получим нужного результата из-за ловушек, которыми усеян наш путь.

Какой же маской прикрываются эти трудности? Они имеют в своем распоряжении самый разнообразный гардероб и целый набор фальшивых усов. Мы уже встречали раньше в игре 3×3 случай, когда все относительные частоты для стратегий Синих оказывались равными нулю, что является явно неверным ответом. Ответ может быть правильным, если относительные частоты только для некоторых стратегий равны нулю, но не для всех стратегий одновременно. Очень полезной проверкой правильности реше-

ния является тот факт, что сумма относительных частот (до сокращения на общий множитель) для всех стратегий Синих должна равняться сумме относительных частот для всех стратегий Красных. Если они не равны, то либо отказал метод, либо имеются арифметические ошибки. Поскольку вы не знаете, какая из двух причин является истинной, следует очень тщательно проверить все арифметические действия. Кроме того, неприятности могут обнаружиться, когда мы подсчитываем средний платеж при использовании оптимальной стратегии против каждой чистой стратегии противника: может оказаться, что кто-нибудь из игроков получает больший выигрыш или теряет больше, чем должен был бы (предполагая, что обе стороны играют правильно).

Во всех случаях, когда встречаются такие неприятности и вы уверены в правильности арифметических выкладок, метод лечения должен быть один и тот же и, надо сказать, неприятный: исключите некоторые стратегии, решите получившуюся сокращенную игру и испытайте это решение для первоначальной игры. Если игра очень большая, то вы должны действовать осторожно, призвав на помощь всю свою интуицию и надеясь на удачу, или же спокойно покинуть поле боя, так как могут встретиться совершенно необозримые ситуации, например, в таком случае, когда имеется огромное количество составляющих игр, ожидающих проверки.

Если в первоначальной игре или в той, которая осталась после сокращения матрицы по принципу доминирования, у одного игрока имеется больше чистых стратегий, чем у другого, не требуется применять никаких новых методов. Оба игрока должны иметь оптимальные стратегии, состоящие из такого числа чистых стратегий, которое не превышает количества чистых стратегий, имеющихся в распоряжении того игрока, у которого их меньше. Отсюда следует, что для того чтобы применить метод, когда все стратегии активные, необходимо исключить такое количество стратегий из репертуара игрока с большим числом стратегий, чтобы игра имела квадратную матрицу. Так, игра 5×10 прежде чем вы будете пытаться найти ее решение, должна быть сокращена до игры типа 5×5 , 4×4 или даже еще меньше. Так как здесь имеется много различных возможностей, то эта процедура может оказаться весьма утомительной; может быть, вам даже придется отказаться от решения.

Заканчивая эти ободряющие строки и призывая на помощь добрую волю и господ бога, мы предлагаем теперь самым храбрым из вас проделать несколько упражнений.

Упражнения 5

Определите относительные частоты и цену следующих игр:

1.

		<i>Красные</i>			
		1	2	3	4
<i>Синие</i>	1	7	6	0	2
	2	3	8	2	5
	3	1	0	2	2
	4	3	0	1	3

2.

		<i>Красные</i>			
		1	2	3	4
<i>Синие</i>	1	1	2	3	4
	2	8	7	6	5
	3	7	6	5	4
	4	0	1	2	3

3.

		<i>Красные</i>			
		1	2	3	4
<i>Синие</i>	1	3	5	4	3
	2	3	4	2	1
	3	1	1	3	4
	4	0	5	2	2

4.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	2	2	0	1	0
	2	1	0	-1	1	-2
	3	1	3	-1	4	-1
	4	4	2	0	1	0

5.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	2	3	1	4
	2	1	2	5	4
	3	2	3	4	1
	4	4	2	2	2

6.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	1	7	0	3
	2	0	0	3	5
	3	1	2	3	0
	4	6	0	2	0

7.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	8	0	6	7
	2	3	3	4	8
	3	1	5	9	2
	4	3	6	3	1

8.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	3	4	0	3
	2	5	0	2	5
	3	7	3	9	5
	4	4	6	8	7

9.

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	6	3	0	0
	2	0	0	5	1
	3	1	1	2	0
	4	1	1	7	3
	5	1	1	0	7
	6	0	0	2	0

10.

		Красные							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Синие	1	1	1	1	0	1	6	0	0
	2	7	2	0	0	2	0	1	5
	3	0	3	2	3	3	2	3	3
	4	3	0	8	5	0	0	4	1

11.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	0	1	0	2	0
	2	3	0	0	1	2
	3	0	0	2	1	2
	4	1	3	0	0	1
	5	1	2	3	1	0

12.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	3	3	4	4	8
	2	8	0	6	8	7
	3	1	5	9	5	2
	4	3	6	3	1	1
	5	5	5	0	3	0

13.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	0	4	8	4	1
	2	2	5	2	0	0
	3	1	4	0	8	4
	4	7	-1	5	7	6
	5	2	2	3	3	7

14.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	2	7	7	6	7
	2	6	6	6	9	2
	3	9	4	5	5	9
	4	4	9	3	8	6
	5	7	7	9	3	6

15.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	3	4	0	3	0
	2	5	0	2	5	9
	3	7	3	9	5	9
	4	4	6	8	7	4
	5	6	0	8	8	3

16.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	2	2	5	1	3
	2	0	0	4	3	4
	3	1	2	1	0	6
	4	5	4	5	0	5
	5	3	1	1	6	6

17.

		<i>Красные</i>				
		1	2	3	4	5
<i>Синие</i>	1	5	5	4	5	2
	2	5	4	7	1	6
	3	2	3	4	1	7
	4	3	6	7	3	2
	5	4	4	3	0	2

18.

		<i>Красные</i>				
		1	2	3	4	5
<i>Синие</i>	1	6	4	9	3	7
	2	0	2	9	8	5
	3	5	3	4	2	4
	4	1	6	2	1	8
	5	1	6	1	3	6

19.

		<i>Красные</i>					
		1	2	3	4	5	6
<i>Синие</i>	1	6	4	-2	4	0	5
	2	1	4	1	2	4	6
	3	1	1	4	1	2	-1
	4	0	0	3	-1	1	3
	5	3	2	3	-2	3	-2
	6	1	-1	-1	4	4	-2

20.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	-2	3	1	-1	-1
	2	-1	-3	1	3	0
	3	0	3	-3	-1	1
	4	3	-3	1	-1	0

21.

		Красные						
		1	2	3	4	5	6	7
Синие	1	8	3	1	3	2	5	3
	2	6	6	0	0	2	4	1
	3	0	3	5	6	6	7	6
	4	6	4	9	3	1	0	6
	5	1	6	4	4	3	5	6
	6	7	8	2	1	5	0	0

22.

		Красные				
		1	2	3	4	5
Синие	1	3	1	4	1	6
	2	6	3	1	4	1
	3	1	6	3	-1	4
	4	4	1	6	3	1
	5	1	4	1	6	3

ГЛАВА 5

РАЗНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Эта глава напоминает универсальный магазин. В ней вы найдете некоторые способы и средства для решения игр наряду с кратким упоминанием таких вопросов, подробное рассмотрение которых увело бы нас далеко за пределы, намеченные нами при написании этой книги. Некоторые из затрагиваемых вопросов уже появлялись перед нами и раньше мимолетно, как привидения. Обычно это было тогда, когда нам было некогда исследовать все плохо освещенные закоулки и, таким образом, выставить на свет все привидения.

Мы начнем, однако, с вопроса, который является донекоторой степени логическим продолжением последней главы, хотя и представляет собой полное нарушение наших методов.

Приближения

На протяжении нескольких глав мы упорно пробивались вперед, углубляясь во все более и более сложные игры. Наконец, мы достигли такой точки, когда можем уверенно сказать, что знаем, как решать игры произвольной величины. Точнее говоря, мы овладели методами, дающими решение, если их приложить к игре, у которой перечислены все стратегии и платежи*. Этот факт сам по себе спо-

* Такая форма задания игры обычно называется «игрой в нормальной форме». — *Прим. ред.*

собен произвести достаточно глубокое впечатление, чтобы вызвать взаимные поздравления.

После этого мы должны пойти дальше и признать, что общее состояние дел все же весьма плачевно. Наше положение можно было бы сравнить с положением чиновника министерства финансов, который решил оплатить национальный долг, рассчитываясь бумажками по одному доллару. Отсчитывать бумажки со скоростью, скажем, одной бумажки в секунду, является вполне реальной и понятной операцией, но нашему клерку для выполнения его задачи потребовалось бы сорок тысяч лет с учетом отпусков, болезней и сорокочасовой недели. Когда число стратегий, доступных каждому игроку, лежит в пределах от четырех до десяти (установить точную цифру можно, если только учесть силу вашей интуиции и вашу удачливость), число необходимых расчетных операций становится колоссальным. Например, в игре 10×10 содержится более сорока тысяч игр типа 4×4 .



Ввиду этих трудностей (даже с играми, которые легче решать, чем игры 10×10) может случиться, что даже профессионал в теории игр слегка побледнеет, получив задание найти точное решение игр, порядок которых лежит между 10×10 и 100×100 . На самом деле его положение ужасно. Чтобы показать, что это так, достаточно сказать, что число игр низшего порядка, содержащихся в игре типа 130×130 , равно приблизительно единице с 78 нулями. Это колоссальное число совпадает со знаменитым астрономическим числом протонов, имеющихсся во вселенной согласно подсчетам Эддингтона.

Совершенно очевидно, что мы требуем слишком многого. Научная теория не должна ограничиваться тем, чтобы ставить перед нами неразрешимые задачи, так как проверка всех игр низшего порядка, содержащихся в большой игре, строго говоря, невозможна. Поэтому нам нужен либо более мощный метод анализа, либо мы должны предъявлять к решению менее строгие требования. Так как мы принадлежим к категории людей, боящихся математики, то мы предпочитаем второе. Если мы ослабим требования к точ-

ности решения и ограничимся приближенными решениями, то положение улучшится.

Необходимость идти на такие компромиссы не нова и, кроме того, мы мало теряем в отношении практической полезности наших методов. Ситуацию можно сравнить с положением человека, которому дали длинную доску, пилу, рулетку и приказали отпилить пять отрезков, которые могли бы образовать квадрат с диагональной распоркой, причем все отрезки должны быть точно пригнаны друг к другу. Если он окажется математиком, то бедняга не

сможет никогда выполнить эту задачу, потому что распорка должна быть длиннее сторон квадрата в корень квадратный из двух раз, а это число не помечено ни на одной рулетке. Если он, однако, сбросит свою математическую тогу, а заодно и требование о точной подгонке длин отрезков, то сможет отпилить такие отрезки, которые вполне удовлетворяют любым разумным требованиям.

Приступая к вопросу о приближениях, мы должны принять

предварительное решение. Интересует ли нас отыскание такой смешанной стратегии, которая физически напоминает оптимальную стратегию? Не обязательно! Хотя хорошая форма часто превосходно выглядит, например, при игре в крикет, тем не менее мы должны быть заинтересованы только в получении приближенного значения цены игры. Это условие предоставляет нам некоторую свободу, так как может быть много стратегий, которые обеспечивают достаточно хороший платеж, и мы добьемся только уменьшения их числа, если будем стремиться к тому, чтобы стратегии к тому же еще красиво выглядели. А чем больше таких стратегий, тем должно быть легче отыскать одну из них.

Теперь мы опишем один метод, который является одновременно и достаточно мощным, и вполне математически обоснованным. Вы можете рассматривать его как последовательность отдельных партий игры. На каждой ступени каждый игрок делает такой контрход, который считается наилучшим при учете всех ходов, сделанных до сего вре-



мени его противником. Проще всего этот метод объяснить на примере какой-нибудь конкретной матрицы, однако он является общим и пригоден для любой другой матрицы. Итак, рассмотрим матрицу:

		<i>Красные</i>			
		1	2	3	4
<i>Синие</i>	1	2	3	1	4
	2	1	2	5	4
	3	2	3	4	1
	4	4	2	2	2

Отметьте *любую* строку, какую вы только желаете, звездочкой в конце этой строки (первую, к примеру). Затем перепишите эту строку под матрицей и отметьте звездочкой *наименьшее* число в этой строке:

2	3	1	4	*
1	2	5	4	
2	3	4	1	
4	2	2	2	
2	3	1*	4	

На этом заканчивается первая ступень процесса нахождения приближенного решения. Число 1* стоит в третьем *столбце*. Перепишите этот столбец справа от матрицы и отметьте *наибольшее* число в нем звездочкой, т. е. 5*.

2	3	1	4	* 1
1	2	5	4	5*
2	3	4	1	4
4	2	2	2	2
2	3	1*	4	

Число 5* находится во второй строке; сложите эту строку поэлементно со строкой, написанной под матрицей, запишите сумму в виде новой строки под матрицей и отметьте звездочкой *наименьшее* число (3*) в новой строке:

2	3	1	4	* 1
1	2	5	4	5*
2	3	4	1	4
4	2	2	2	2
2	3	1*		
3*	5	6	8	

На этом заканчивается вторая ступень. Мы включились в этот процесс и продолжаем дальше нашу работу. Затем, так как число 3* стоит в первом столбце, следует сложить этот столбец поэлементно со столбцом справа от матрицы:

2	3	1	4	* 1 3
1	2	5	4	5* 6*
2	3	4	1	4 6
4	2	2	2	2 6
2	3	1*	4	
3*	5	6	8	

Отметим звездочкой наибольшее число, 6*. (Поскольку здесь несколько чисел имеют одинаковые права считаться наибольшими, то не имеет никакого значения, какое из них именно будет отмечено.) Так как число 6* стоит во второй строке, сложим эту строку со строкой, расположенной в самом низу. На этом заканчивается третья ступень. Этот процесс следует продолжать в таком же духе дальше. Для наглядности мы выполним десять таких ступеней. (Обратите внимание на то, что в последнем столбце наибольшее число не отмечено звездочкой.)

2	3	1	4	* 1	3	5	7	10	13	16	19	22	25
1	2	5	4	5*	6*	7	8	10	12	14	16	18	20
2	3	4	1	4	6	8	10	13	16	19	22*	25*	28
4	2	2	2	2	6	10*	14*	16*	18*	20*	22	24	26

2	3	1*	4
3*	5	6	8
4*	7	11	12
8*	9	13	14
12	11*	15	16
16	13*	17	18
20	15*	19	20
24	17*	21	22
26	20*	25	23
28	23*	29	24

В этом месте вы можете задать справедливый вопрос: ну и что дальше? Мы проделали чисто механическую работу, которая под силу ребенку, но до сих пор не имеем понятия относительно ее назначения. Продолжим нашу работу в том же бесстрастном стиле еще на один шаг. Подсчитаем число звездочек в каждой строке и в каждом столбце и напомним эти числа рядом с матрицей

		Красные				Относительные частоты Синих
		1	2	3	4	
Синие	1	2	3	1	4	1
	2	1	2	5	4	2
	3	2	3	4	1	2
	4	4	2	2	2	5
Относительные частоты Красных		3	6	1	0	

Эти числа и есть *приближенные оценки* относительных частот, в соответствии с которыми Синие и Красные должны смешивать свои чистые стратегии, т. е. 1 : 2 : 2 : 5 и 3 : 6 : 1 : 0.

Насколько велика ошибка этих оценок относительных частот? Мы можем судить об этом, проверяя, как будут идти дела у игроков, использующих эти стратегии. Рассматривая нашу таблицу, мы видим из последней строки, что наименьший выигрыш Синих за 10 партий может быть 23, если Красные неизменно применяют свою вторую чистую стратегию. Поэтому средний выигрыш Синих, приходящийся на одну партию, будет самое меньшее 2,3. Аналогично, рассматривая крайний правый столбец, мы видим, что смешанная стратегия Красных может стоить им самое большее 28 (если Синие каждый раз применяют стратегию Синие-3) за 10 партий и в среднем по 2,8 на партию.

Разрыв между числами 2,3 и 2,8 отражает неточность оценок относительно оптимальной смешанной стратегии, так как, если бы применяемая стратегия была оптимальной, каждый из игроков гарантировал бы для себя средний выигрыш или проигрыш, равный одному и тому же промежуточному значению, лежащему между 2,3 и 2,8.

Область неопределенности между 2,3 и 2,8 составляет около 20% величины платежа, что представляет собой довольно большую погрешность. Если продолжить дальше наш процесс, то можно найти лучшие смешанные стратегии. Если увеличить число ступеней с 10 до 20 (как показано ниже):

2	3	1	4	25	29*	32*	35*	38*	39	41	43	45	49	53
1	2	5	4	20	24	26	28	30	35	36	37	38	42	46
2	3	4	1	28*	29	32	35	38	42*	44*	46*	48*	49	50
4	2	2	2	26	28	30	32	34	36	40	44	48	50*	52

28	23	29	24
30	26	33	25*
32	29*	34	29
34	32*	35	33
36	35*	36	37
38	38	37*	41
40*	41	41	42
42*	44	45	43
44*	47	49	44
46	50	53	45*
50	52	55	47*

то смешанные стратегии Синих и Красных станут соответственно $5:2:7:6$ и $6:9:2:3$, и средние выигрыши и проигрыши теперь будут ограничены диапазоном от $\frac{47}{20}$ до $\frac{53}{20}$, т. е. от 2,35 до 2,65. Таким образом, неопределенность платежа уменьшилась с 20 до 12%.

Это уже может считаться удовлетворительным результатом. В противном случае можно продолжать процесс вычисления приближенного решения как угодно долго. По мере возрастания частот будут наблюдаться флюктуации гарантированного платежа, но при этом вычисленные значения будут все ближе и ближе подходить к истинной цене игры.

Точное решение нашей игры будет $8:3:7:9$ для Синих и $5:7:3:3$ для Красных, а цена игры (в пользу Синих) будет $2\frac{5}{9}$.

Итак, если платежная матрица состоит из небольших целых чисел, то наш метод позволяет нам хладнокровно встретиться лицом к лицу с играми 10×10 и даже больше, так как при этом требуются достаточно скромные количества бумаги, карандашей и времени.

Еще о доминировании

Вопрос о доминировании рассматривался в предыдущих главах очень бегло, чтобы не нарушить общую линию рассуждений. Поскольку эта опасность осталась позади, мы можем теперь позволить себе заполнить некоторые пробелы. Чтобы избежать утомительных повторений, мы будем рассматривать все вопросы с точки зрения интересов Синих, предоставив вам самим возможность внести необходимые изменения, когда рассуждения будут касаться Красных.

Мы научились немедленно исключать всякую стратегию, которая подчинена другой. Так, если платежи в одной строке меньше *соответствующих* платежей в другой строке, то мы опускаем первую строку. Мы можем поступать так, если даже некоторые из соответствующих платежей одинаковы. Если все платежи меньше, то положение называется *строгим* доминированием. Если же некоторые из платежей одинаковы, положение носит название *нестрогого* доминирования. Причина, по которой стоит различить эти положения и придумать для них особые названия, состоит в следующем: исключение какой-нибудь строки на основании нестрогого доминирования может вызвать такие незамет-

ные изменения в игре, в результате которых у новой игры будет меньше решений, чем у старой. Поскольку мы ограничиваемся нахождением одного решения, а не всех, мы не нуждаемся в различении степени доминирования.

Ранее упоминалось также, что некоторое счастливое сочетание строк может доминировать над какой-нибудь одной строкой. Так, в игре

		<i>Красные</i>				
		<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
<i>Синие</i>	<i>1</i>	2	3	7	0	2
	<i>2</i>	3	5	7	1	1
	<i>3</i>	2	2	7	2	4

стратегия Синие-1, используемая с частотой 2, подчинена смеси стратегий Синие-2 и Синие-3 с частотами (1 : 1).

Далее, если какой-нибудь столбец доминирует над смесью других столбцов, в которой использовано то же общее число частей или относительных частот, то этот столбец может быть опущен из оптимальной смеси стратегий.

Простых эмпирических правил распознавания подобных ситуаций не имеется, и эти ситуации далеко не всегда очевидны. Нет оснований ожидать, что существуют подобные простые правила, так как задача так же сложна, как отыскание хорошей смешанной стратегии. Тем не менее всегда следует попытаться обнаружить такую ситуацию. Так, в примере 16 «Наследник» (стр. 127) легко видеть, что строка 1 подчинена комбинации строк 2 и 3, взятых с частотами $1/2:1/2$, и поэтому должна быть опущена.

Теперь мы рассмотрим еще один, последний, тип доминирования — матричное доминирование, — которое близко по духу к идее седловой точки. По существу, оно является обобщением понятия о седловой точке. Рассмотрим следующую неприятную на вид матрицу:

1	3	1	4	6
2	0	3	3	1
3	1	3	5	4
-1	-1	6	-1	2
0	-4	0	3	4
2	-1	10	1	2
-3	0	3	4	5

Имеется весьма основательная причина для того, чтобы разделить ее на следующие четыре составляющие матрицы:

1	3	1	4	6
2	0	3	3	1
3	1	3	5	4
-1	-1			
0	-4			
2	-1			
-3	0			

Заштрихованная матрица обладает весьма важным свойством: *каждый* столбец справа от нее доминирует над *каким-нибудь* столбцом заштрихованной матрицы, а *каждая* строка ниже этой матрицы подчинена *какой-нибудь* строке в заштрихованной матрице. Числа, стоящие в клетках остальной части матрицы, не играют никакой роли, если заштрихованная матрица обладает перечисленными выше свойствами, и мы не будем даже трудиться записывать их. Действительно, если заштрихованная матрица обладает

указанными свойствами, то точная величина всех других элементов матрицы перестает иметь значение, и вся игра сводится к заштрихованной матрице

1	3
2	0
3	1

Итак, наша находка стоит того труда, который был затрачен на ее поиски. При выявлении подобных положений следует помнить, что мы можем свободно менять местами любые строки и любые столбцы. Хотя этот прием никогда не мешает знать, вы далеко не всегда можете прийти к счастливому результату. Иногда вам придется забросить все свои обычные занятия и все время тратить только на изучение какой-нибудь огромной матрицы до тех пор, пока вам не улыбнется счастье и матрица не будет решена.

Простые решения

До сих пор мы воздерживались от установления правил, которые применимы только к очень специфическим типам игр. Если теперь мы расскажем об одном-двух таких правилах, то это не внесет путаницы в наше повествование.

Говорят, что игра имеет *простое* решение, если любой из игроков может безнаказанно применять *любую* чистую стратегию против оптимальной стратегии противника. Частным случаем игр подобного типа является игра, в которой оптимальные смешанные стратегии игроков содержат все их чистые стратегии. Для проверки предполагаемой оптимальной стратегии следует, конечно, использовать принцип безнаказанности. Идея простого решения поэтому более понятна, чем понятие активности всех чистых стратегий, так как она включает в себя и некоторые игры с чистыми стратегиями, которые «играются» с нулевыми частотами. Так, в игре 4×4 , например, Синие могут использовать любую чистую стратегию против Красных, если их оптимальные смешанные стратегии суть $3 : 2 : 1 : 7$ и $1 : 5 : 2 : 4$ соответственно. Они могут делать то же самое, если их оптимальные стратегии суть $3 : 0 : 1 : 7$ и $1 : 5 : 0 : 0$, *при условии*, что игра имеет простое решение (и она действительно его имеет).

Например, нижеприведенная игра имеет простое решение, так как каждый игрок может применять *любую* чистую стратегию против оптимальной смешанной стратегии другого игрока:

		Красные			Относительные частоты Синих
		1	2	3	
Синие	1	6	-10	3	0
	2	4	4	4	1
	3	2	11	5	0
Относительные частоты Красных		1	0	2	

Средний платеж всегда будет равен 4.

Как правило, у нас нет такого надежного способа, который позволял бы нам наперед распознавать, что у игры имеется простое решение. Существуют, однако, случаи, когда это возможно. Так, в игре

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	1	4	2	1
	2	-2	4	2	4
	3	7	-2	2	1

сумма элементов каждой строки равна 8, а сумма элементов каждого столбца равна 6. В играх такого вида имеется простое решение, и его легко найти. Это—игра, в которой все чистые стратегии активны и используются с одинаковыми частотами. Так, решение для Синих может быть 1:1:1, а для Красных 1:1:1:1. Цена игры получается, если разделить сумму элементов любого столбца на число стратегий Синих или сумму элементов любой строки на число стратегий Красных, т. е. в нашем случае $\frac{6}{3}$ и $\frac{8}{4}$.

Существует еще один класс игр с простым решением, который мы можем различить заранее, но который требует усилий от автора и читателя. Для этого мы должны постичь значение понятий *диагональ* и *отделившаяся диагональ*.

Диагонали матрицы, такой, например, как

3	0	2	8
9	2	3	0
0	7	2	3
2	3	6	2

можно определить, если переписать ту же матрицу еще один раз под первой и затем начертить наклонные линии так, как показано ниже:

3	0	2	8
9	2	3	0
0	7	2	3
2	3	6	2

3	0	2	8
9	2	3	0
0	7	2	3
2	3	6	2

(если вы поняли, в чем состоит идея, вам совсем не обязательно каждый раз повторять матрицу).

Диагональ называют *отделившейся* от остальной матрицы, если она состоит исключительно из самых больших чисел: ее наименьший элемент должен по меньшей мере равняться самому большому элементу оставшейся части матрицы.

Нам понадобится также магическое число (назовем его M), которое получается умножением числа строк матрицы на самое большое число в оставшейся части матрицы

(после удаления отделившейся диагонали). После этого мы готовы приступить к нашему типу игр с простым решением.

Если матрица содержит отделившуюся диагональ и если сумма платежей каждой строки *или* каждого столбца не меньше магического числа M , то у игры имеется простое решение.

В нашем примере диагональ 9—7—6—8 является отделившейся. Число строк равно 4, а самый большой оставшийся платеж равен 3. Поэтому $M=4 \times 3=12$. Суммы элементов строк и столбцов равны 13, 14, 12, 13 и 14, 12, 13, 13. Все они равны числу $M=12$ или больше его (для строк *и* для столбцов, т. е. даже больше того, что нам требуется). Поэтому игра имеет простое решение. Просто, не правда ли?

Множественные решения

Хотя до сих пор наши интересы ограничивались исключительно проблемой определения *какого-нибудь* одного решения игры, временами было очевидно, что игры могут иметь больше, чем одно решение.

Это положение имеет до некоторой степени лавинный характер: у каждой игры имеется либо точно одно решение, либо у нее их бесконечно много. До сих пор мы оставляли без всяких доказательств многие положения, приводимые в этой книге, но доказательство последнего утверждения настолько просто, что мы не можем удержаться от того, чтобы не привести его. Предположим, что игра имеет по крайней мере два решения (т. е. две оптимальные стратегии). Тогда эти решения могут смешиваться с любыми относительными частотами, а таких частот может быть бесконечно много.

Из вышесказанного может показаться, что определение числа решений — не очень благодарная задача. Она похожа на проблему испытания пороха: он либо полностью не активен, либо взрывается. Тем не менее можно рассматривать задачу так, что она будет иметь больше смысла. Для этого надо иметь в виду, что каждая игра имеет только конечное число *основных* решений.

Основные решения можно определить следующим образом: если квадратная субматрица игры (т. е. сокращенная игра) имеет единственное простое решение, т. е. такое, при котором каждый игрок может применять любую чистую стратегию против оптимальной стратегии противника, да-

ваемой решением, не неся при этом дополнительных потерь, и если это простое решение удовлетворяет также исходной игре, тогда это решение называется основным. У любой игры имеется только конечное число квадратных субматриц (из которых не все имеют простые решения). Поэтому общее число основных решений также должно быть конечным числом. Полное число решений можно получить в результате смешивания всеми возможными способами основных решений.

Рассмотрим пример:

		<i>Красные</i>		
		1	2	3
<i>Синие</i>	1	2	6	0
	2	5	3	6
	3	4	4	3

В этой игре нет седловых точек (в противном случае они были бы основными решениями). Из девяти субматриц 2×2 только две

2	6
5	3

и

6	0
3	6

содержат решения в смешанных стратегиях с участием всех чистых стратегий (т. е. простые решения), причем эти решения удовлетворяют первоначальной игре. Эти решения суть Синие $2:4:0$ против Красные $3:3:0$ и Синие $3:6:0$ против Красные $0:6:3$ (для удобства проверки не было произведено сокращения на общие множители). У матрицы 3×3 также имеется простое решение, а так как эта матрица представляет собственно игру, то это решение является основным. Однако оно, оказывается, совпадает с одним из уже найденных решений, а именно с первым. Поэтому у игры имеется только два различных основных решения, которые после сокращения на общие множители можно представить в следующем виде:

Синие $1:2:0$ против Красные $1:1:0$

Синие 1 : 2 : 0 против Красные 0 : 2 : 1.

Итак, у Синих имеется только одна оптимальная стратегия, а именно 1 : 2 : 0, в то время как Красные могут использовать стратегии 1 : 1 : 0 или 0 : 2 : 1 или *любую смесь этих смешанных стратегий*. Если, например, первой основной стратегии приписать вес 3*, а второй—вес 5, то получим смешанные стратегии 3 : 3 : 0 и 0 : 10 : 5, сочетание которых** даст, в свою очередь, оптимальную смешанную стратегию 3 : 13 : 5.

Убежденный любитель теории игр не сможет устоять против искушения найти основные решения для нижеприведенной игры. Синие имеют пять основных решений, а Красные — одно; они приведены в конце книги.

Упражнение 6

		Красные			
		1	2	3	4
Синие	1	16	-8	9	-3
	2	-20	4	9	-3
	3	25	1	18	-6
	4	-11	13	-18	6

Относительно измерения платежей

Совершенно очевидной трудностью, с которой человек, использующий теорию игр, должен сжиться, является необходимость измерять вещи, которые не дают достаточно надежного основания для их измерения. Это—весьма серьезная трудность, и ее нельзя недооценивать. С другой стороны, почти столь же легко переоценить ее, если не принять во внимание то, как измерения определяют выбор

* То есть умножить все относительные частоты на 3. — *Прим. ред.*

** То есть суммирование полученных после умножения «взвешенных» частот по номерам чистых стратегий: первую с первой и т. д. — *Прим. ред.*

стратегий и исход игр. Рассмотрим несколько шире соображения, относящиеся к этому вопросу.

Из обсуждения вопроса о доминировании совершенно очевидно, что могут возникнуть такие ситуации, при которых не требуются повсеместно точные измерения. Можно, не производя реальных измерений, только посредством качественного сравнения установить, что некоторые строки, столбцы или субматрицы являются подчиненными. При этом может случиться, что исключаемые по принципу доминирования элементы с трудом поддаются измерению. В конце концов, для того чтобы определить высоту самого высокого дерева в лесу, не обязательно измерять все деревья.

Мы отмечали в начале книги, что на оптимальную стратегию игрока не оказывает никакого влияния прибавление постоянной величины к каждому элементу матрицы. Поэтому, если матрица состоит из четырех чисел, например 1, 7, 11 и 1066, то мы не будем играть хуже, если уменьшим каждый платеж на 533 и будем руководствоваться следующими платежами: —532, —526, —522 и 533. Мы отмечали также, что игра не изменяется и в том случае, если все платежи умножаются на любую положительную постоянную величину. В частности, если умножить все числа нашей матрицы на $\frac{1}{13}$, то мы получим платежи $-\frac{40^{12}}{13}$, $-\frac{40^6}{13}$, $-\frac{40^2}{13}$ и 41. Этот процесс прибавления постоянных величин и умножения на постоянные величины может быть продолжен в любом порядке. Поэтому мы свободно можем прибавить ко всем платежам последней матрицы число 40 и можем быть уверены, что игры

1	7	1	и	$-\frac{12}{13}$	$-\frac{6}{13}$	$-\frac{12}{13}$
11	1	1066		$-\frac{2}{13}$	$-\frac{12}{13}$	81
1066	1	7		81	$-\frac{12}{13}$	$-\frac{6}{13}$

совершенно одинаковы с точки зрения выбора стратегий.

Теперь становится ясным, что независимость игровых стратегий от прибавления постоянных величин и от умножения на постоянные величины может до некоторой степени облегчить наши затруднения в отношении точности из-

мерения платежей. Это обстоятельство можно оценить, если рассмотреть платежную матрицу, в которой имеются три различных значения платежей. В этом случае совершенно не важно, какое значение имеют наименьший и наибольший платежи. Единственно, что имеет значение, — это *относительное* положение третьего платежа.

Между прочим, имеется один важный фактор, который зависит от действий, не оказывающих никакого влияния на выбор стратегий, а именно цена игры. Может оказаться важным знать, что цена игры равна 20 вместо 10 или 10 вместо 20. На практике это может оказать воздействие на намерение игрока вступить в игру, если, конечно, у него имеется возможность выбора. Но к выигрышу приведет одна и та же оптимальная стратегия, независимо от суммы выигрыша.

Итак, область, в которой стратегии могут оказаться чувствительными к ошибкам измерений, можно рассматривать как промежуточную территорию между крайними значениями платежей, потому что положения крайних значений могут быть смещены по желанию в любом направлении, не оказывая при этом никакого влияния на стратегии, при условии, что промежуточные значения также будут смещены. Чтобы получить представление о взаимосвязи ошибок измерений, стратегий и цены игры, проделаем небольшой эксперимент.

Начнем с типичной игры 3×3 :

		Красные		
		1	2	3
Синие	1	6	2	0
	2	4	8	4
	3	3	3	10

Платежи имеют значения в пределах между 0 и 10, и в последующем платежи всех других игр будут заключены в этих пределах. Этим мы исключим влияние на цену игры изменений шкалы в результате, например, прибавления постоянной величины или умножения на постоянную величину. Будем теперь имитировать ошибки измерений посредством независимого изменения каждого элемента матрицы

следующим образом: будем прибавлять числа — 1, 0 или +1 по закону равной вероятности, имитируя, таким образом, случайные равновероятные ошибки. Сделаем следующее исключение из этого правила: оставим неизменными крайние значения (0 и 10) и исключим все изменения, которые приводят к платежам, выходящим за пределы этих крайних значений. Целью этого является желание сохранить первоначальную шкалу (от 0 до 10). Применение таблицы случайных чисел превращает нашу матрицу в матрицу

		<i>Красные</i>		
		1	2	3
<i>Синие</i>	1	7	2	0
	2	4	7	5
	3	2	4	10

Этот процесс можно продолжать дальше. Полученную матрицу можно еще раз подвергнуть воздействию случайной ошибки и получить новую матрицу. Она, по всей вероятности, будет меньше похожа на исходную, чем вторая матрица, и так далее. Можно рассматривать третью матрицу как истинную, а исходную—как получившуюся из нее в результате повторного воздействия случайных ошибок. В дальнейшем нам окажется удобнее придерживаться последнего предположения.

Предположим теперь, что мы принимаем участие в какой-нибудь игре, скажем, в первой, в то время как на самом деле играем третью или вторую игру. Вопрос заключается в том, насколько серьезны последствия этой ошибки. Рассмотрим этот вопрос с точки зрения Синих.

Вторая игра (истинная) требует, чтобы Синие использовали свои три чистые стратегии с относительными частотами 22 : 26 : 16, что дает им цену игры $4^{17/32}$. Но Синие, руководствуясь ошибочной, первой, матрицей, считают, что они должны играть с относительными частотами 7 : 7 : 6, и так и поступают. Последствия будут зависеть от того, какую стратегию применяют Красные. Если они последова-

тельно применяют свои первую, вторую и третью чистые стратегии, то Синие будут выигрывать соответственно $4^{9/20}$, $4^{7/20}$ и $4^{15/20}$. Самое худшее, что может с ними случиться, это то, что они выиграют $4^{7/20}$, что на 0,18 меньше, чем $4^{17/32}$, которые они должны были бы выиграть, если бы им была известна истинная матрица.

Наш эксперимент состоит в том, что мы подвергаем первую матрицу воздействию случайных ошибок последовательно 14 раз:

1.

6	2	0
4	8	4
3	3	10

2.

7	2	0
4	7	5
2	4	10

3.

6	2	0
3	6	4
1	3	10

4.

7	1	0
4	7	3
0	4	10

5.

6	2	0
3	7	3
1	5	10

6.

5	3	0
3	7	4
1	4	10

7.

4	3	0
3	7	3
2	5	10

8.

3	3	0
2	8	4
2	4	10

9.

2	3	0
1	8	4
3	3	10

10.

1	2	0
1	8	4
3	4	10

11.

1	1	0
0	8	4
2	5	10

12.

1	2	0
0	8	3
1	4	10

13.

0	3	0
1	8	4
2	5	10

14.

0	2	0
1	7	3
1	5	10

15.

0	3	0
2	7	4
0	4	10

Будем рассматривать теперь каждую из десяти последних игр как истинную, а играть будем в каждом случае в игру, которая отличается от истинной на пять номеров.

Оптимальные стратегии для этих игр будут:

Игра	Синие	Красные	Цена игры
1	7:7:6	14:2:4	$4^{2/5}$
2	22:26:16	40:5:19	$4^{17/32}$
3	25:24:14	36:10:17	$3^{47/63}$
4	34:32:27	51:9:33	$3^{29/31}$
5	36:12:24	41:15:16	$3^{5/6}$
6	33:3:18	36:4:14	$3^{5/9}$
7	4:0:2	5:0:1	$3^{1/3}$
8	8:0:3	10:0:1	$2^{8/11}$
9	0:0:1	1:0:0	3
10	0:0:1	1:0:0	3
11	0:0:1	1:0:0	2
12	0:0:1	1:0:0	1
13	0:0:1	1:0:0	2
14	0:0:1	1:0:0	1
15	0:1:0	1:0:0	2

Общие множители не исключались, так что суммы относительных частот Синих и Красных одинаковы.

Имея эту информацию, вычислим, каковы потери Синих.

*Матрица была подвергнута
воздействию случайных
ошибок следующее число раз*

		1	2	3	4	5
<i>Стратегия Синих основана на игре N</i>	1	0,18	0,30	0,09	0,38	0,46
	2	0,21	0,22	0,30	0,37	0,24
	3	0,57	0,47	0,21	0,16	0,33
	4	0,32	0,41	0,26	0,36	1,05
	5	0,22	0,17	0,23	0,83	1,33
	6	0,06	0,12	0,72	1,33	0,72
	7	0,06	0,67	1,33	0,67	0,00
	8	0,73	1,45	0,73	0,00	1,45
	9	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	10	0,00	0,00	0,00	0,00	2,00

Эта таблица показывает, насколько *может* упасть выигрыш Синих по сравнению с ценой игры (а может и не упасть), если их стратегия основана на одной матрице, в то время как игра протекает согласно другой матрице.

Эта разница должна возрастать по мере перемещения вправо вследствие возрастания ошибок платежей в матрицах. Это предположение подтверждается, так как средние значения разницы по столбцам равны соответственно 0,24; 0,38; 0,39; 0,41 и 0,76.

Из этого эксперимента можно сделать заключение, что даже значительные ошибки в измерении платежей в матрицах, хотя и не являются желательными, однако не обязательно приводят к катастрофе. Примерно в половине случаев наибольшая возможная потеря меньше 0,30 в играх с ценой между 3 и 4, т. е. приблизительно не более 10%.

Все вышесказанное дает основания—по крайней мере автору—надеяться на то, что теория игр может дать важные

результаты даже в тех областях, в которых измерения платежей затруднены.

Качественные оценки платежей

Качественные оценки платежей являются естественным продолжением вопроса, затронутого выше.

Имеется весьма слабая форма измерения, называемая *упорядочением*. Она заключается в расположении платежей по порядку так, как вы разместили бы по порядку в соответствии со степенью нагрева такие предметы, как кусок льда, раскаленный добела кусок металла, чашку кофе, вашу кровь и солнце.

Если вы не в состоянии количественно оценить интересующие вас платежи, но можете расположить их по порядку, тогда не все еще потеряно. Существуют игровые ситуации, для решения которых не требуется ничего большего, чем определение порядка расположения платежей по величине; существуют также такие игры, в которых знание порядка платежей позволяет сделать частичные выводы относительно оптимальных стратегий и цены игры.

Предположим, что вы должны решить игру, платежи которой не ясны, но которые вы в состоянии оценить как плохие (n), удовлетворительные (y), хорошие (x) или отличные (o). Будем рассматривать такую игру так, как будто ее матрица составлена из чисел. Начнем с проверки игры на седловую точку:

		Красные					Минимумы строк
		1	2	3	4	5	
Синие	1	n	y	x	o	x	n
	2	y	y	x	x	o	y^*
	3	n	o	o	o	y	n
	4	y	o	y	n	n	n
Максимумы столбцов		y^*	o	o	o	o	

В этой игре наибольшее значение минимумов строк (или максимин) и наименьшее значение максимумов столбцов (или минимакс) равны. Поэтому Синие должны придерживаться своей второй чистой стратегии, а Красные —

но значения. Они не имеют совершенно никакого значения как для способа ведения игры, так и для ее цены.

Цена игры определяется исключительно платежом, помеченным звездочкой. Поэтому точность измерения этого платежа характеризует точность определения цены игры.

В приводимой ниже игре мы можем сделать *некоторые* выводы относительно оптимальной стратегии:

		Красные			Минимумы строк
		1	2	3	
Синие	1	p	a	y	p
	2	x	y	x	y^*
	3	p	x	p	p
Максимумы столбцов		x^*	a	x^*	

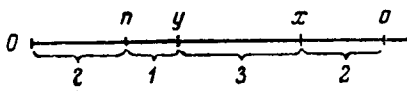
Максимумом является *удовлетворительно*, а минимумом — *хорошо*. В игре нет седловой точки. Но мы узнали, что цена игры лежит где-то посередине между *удовлетворительно* и *хорошо*.

Более того, стратегия Синие-1 доминирует над стратегией Синие-3, а стратегия Красные-3 доминирует над стратегией Красные-1, поэтому игра сводится к следующей матрице:

		Красные	
		1	2
Синие	1	p	a
	2	x	y

Частота применения стратегии Синие-1 пропорциональна разности между *хорошо* и *удовлетворительно*, а частота применения стратегии Синие-2 пропорциональна разности *отлично* минус *плохо*. Поэтому, независимо от того, какие числа будут приписаны этим понятиям, ясно, что Синие должны чаще использовать стратегию Синие-2, чем Синие-1, и не должны использовать стратегию Синие-3.

Положение Красных несколько более неопределенно. Они должны применять стратегию Красные-1 с частотой, пропорциональной разности между *отлично* и *удовлетворительно*, а стратегию Красные-2—с частотой, пропорциональной разности *хорошо* минус *плохо*. Здесь неясно, какая разность больше. Итак, все, что мы можем сказать относительно оптимальной смешанной стратегии Красных, это то, что она основана на стратегиях Красные-1 и Красные-2 и что разница между частотами их применения менее заметна, чем для применения стратегий Синих. Иначе говоря, относительные частоты оптимальной стратегии Красных меньше отличаются друг от друга, чем для оптимальной стратегии Синих. Вы можете легко убедиться в справедливости этого, если припишете оценкам некоторую шкалу значений и сделаете для нее подсчет. Например, для шкалы



относительные частоты для Синих будут 3 : 6, а для Красных 5 : 4.

Пример 33. Порция

В своем «Венецианском купце» Шекспир дал описание далекого предшественника современной игры в скорлупки (*shell game*), облаченного в маскарадный костюм фантазии.

Порция, богатая наследница, не имеет права ни выбрать себе мужа по душе, ни отвергнуть ухаживание нелюбимого ею человека, потому что ее покойный отец пожелал, чтобы претенденты на ее руку и на его состояние выполнили следующее условие: каждый из них должен войти в комнату с тремя ларцами или шкатулками, в одной из которых находится портрет Порции. Он может открыть любую из шкатулок. Тот, кто найдет портрет, будет обладать оригиналом. В отличие от игры в скорлупки, в которой можно спрятать горошину, как только ставки становятся большими, отец действительно положил портрет в одну из шкатулок, так как он всегда был человеком добросовестным; однако претенденты на руку Порции не имеют относительно этого никаких доказательств.

У игры имеются некоторые побочные условия: каждый претендент должен поклясться, что в случае неудачи он никому из остальных претендентов не скажет, какую шка-



тулку он выбрал; это условие должно защитить Порцию от коалиции ее поклонников. Каждый из них, кроме того, должен поклясться, что в случае неудачи он никогда не женится; это условие имеет своей целью, очевидно, сузить круг претендентов, оставив в их числе лишь тех молодых людей, которые считают Порцию (и

ее приданое) незаменимыми для себя. С другой стороны, для тех, кто отваживается на эту игру, имеются весьма важные намеки, из которых они могут извлечь пользу. Шкатулки сделаны из золота, серебра и свинца. На золотой шкатулке имеется надпись: «Тот, кто выберет меня, выиграет то, что желанно для многих мужчин». На серебряной сделана надпись: «Тот, кто выберет меня, получит то, чего он заслуживает», и на свинцовой шкатулке — «Тот, кто выберет меня, должен рискнуть потерять все, что он имеет». И тут-то почти все претенденты выбирали шкатулку, в которой была только пыль. Эта игра принадлежит к играм типа 3×3 следующего вида:

		<i>Отец выбрал шкатулку</i>		
			<i>сереб- злотую</i>	<i>свин- цую</i>
<i>Поклонник выбирает шкатулку</i>	<i>золотую</i>	<i>В</i>	<i>п</i>	<i>п</i>
	<i>серебряную</i>	<i>п</i>	<i>В</i>	<i>п</i>
	<i>свинцовую</i>	<i>п</i>	<i>п</i>	<i>В</i>

В этой матрице буквой *В* обозначен выигрыш Порции, чему претендент на ее руку должен приписать положительную цену, а буквой *п* обозначено вечное безбрачие.

Каждый поклонник может рассматривать эту игру как игру с нулевой суммой или же он может попытаться разгадать замысел отца. Так как, однако, совершенно очевидно, что отец мыслил оригинально, последний подход является малообещающим.

На основании симметрии игры можно сделать заключе-

ние, что выбор на золотую, серебряную и свинцовую шка- тулки должен падать в соответствии с относительными частотами 1 : 1 : 1. Цена игры равна

$$\frac{B + 2n}{3}.$$

Претенденту на руку Порции имеет смысл принимать участие в этой игре, если только $B + 2n$ положительно. Величина B почти наверняка положительная, а величина n , по-видимому, отрицательная. Поэтому решение претендента принять участие в игре должно определяться следующим соотношением (если он является разумным человеком в смысле теории игр): его обожание Порции должно быть по крайней мере вдвое сильнее, чем опасение остаться вечным холостяком. Эта информация не облегчает его выбора; она, однако, более четко определяет значения исходов.

Пример 34. Леди или тигр

На этот пример нас вдохновила история Френка Сток- тона «Леди или тигр?». Мы, однако, приукрасили оригинал, чтобы вместо игры 2×2 получить игру 2×3 .

Король недоволен молодым придворным, потому что принцесса выбрала его своим возлюбленным. Чтобы немного поразвлечься, король приговорил его к испытанию: он должен открыть одну из двух дверей. За одной находится прекрасная молодая леди. За другой сидит прекрасный молодой тигр. Далее повсюду будет предполагаться, что молодой человек предпочитает леди тигру. (Между прочим, он должен жениться на ней.)

Вам может показаться, что у него осталось совсем мало простора для творческих размышлений, однако он чрезвычайно заинтересован в исходе испытания. Наконец, он приходит к заключению, что король предоставил ему бóльшую свободу действий, чем предполагалось. Ведь если он откроет одновременно обе двери, то у него имеются шансы убежать в создавшейся суматохе.

Тем временем принцесса разузнала все замыслы коро- ля, за исключением того, что он намеренно сделал так, что- бы она их узнала. Она подает сигнал молодому придвор- ному, указывая ему ту дверь, которую он должен открыть.

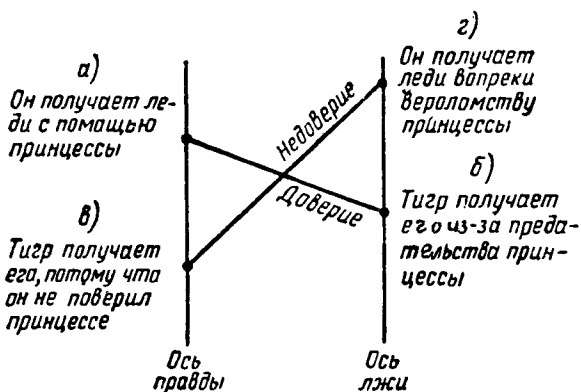
Теперь наш мальчик имеет обильную пищу для творче- ских размышлений. Принцесса, если она любит его доста- точно сильно, может также предпочесть, чтобы он выбрал леди. Но если ее чувство слабо или слишком сильно, то

она может предпочесть, чтобы он провел остаток своей жизни с тигром. У принцессы имеется две стратегии: она может направить его к леди или к тигру. У молодого человека имеется три стратегии: он может выполнить указания принцессы или поступить наоборот. Кроме того, он может попытаться удовлетворить аппетит тигра за счет леди.

Вместо того, чтобы пытаться определить точные значения платежей, которые молодой человек должен приписать различным альтернативам, исследуем задачу с помощью графического метода, рассмотренного нами в гл. 2. Обозначим элементы платежной матрицы буквами:

		<i>Принцесса говорит</i>	
		<i>правду ложь</i>	
<i>Действия</i> <i>молодого человека</i> <i>свидетельствуют</i> <i>а</i>	<i>доверии</i>	<i>а</i>	<i>б</i>
	<i>недоверии</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
	<i>сомнении</i>	<i>д</i>	<i>е</i>

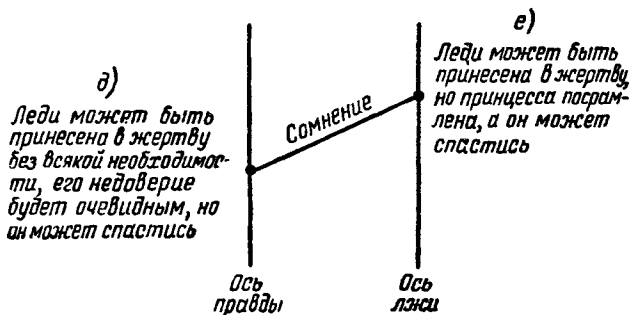
Используем две вертикальные линии в качестве осей платежей, одну для правды, другую для лжи. Высота точек, нанесенных на эти оси, пропорциональна ценности, которую он придает данному событию. Легко понять, как он должен расценивать с качественной точки зрения все события от *а* до *е*.



Если бы он был ограничен применением только двух стратегий, стратегии доверия и стратегии недоверия, то ему,

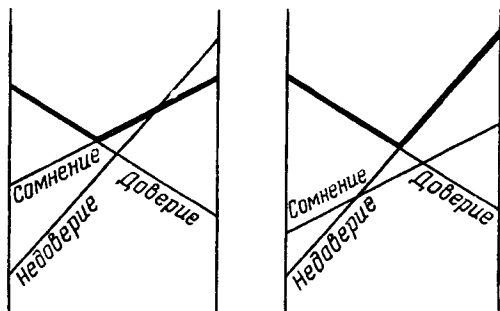
очевидно, пришлось бы применять смешанную стратегию. На это указывает тот факт, что линии пересекаются. (Если бы он расценивал событие *a* выше, чем событие *г*, то с качественной точки зрения это нисколько бы не изменило решения.)

Теперь рассмотрим две оставшиеся возможности. Для этого на график надо нанести дополнительную линию:



Что касается общего характера этой линии, то она, несомненно, поднимается вверх от оси правды к оси лжи.

Затруднения начинаются, когда наступает момент наложить оба графика один на другой. Здесь возникает критический вопрос: как должна проходить линия сомнения, выше или ниже точки пересечения линий доверия и недоверия. Если она проходит выше, то молодой человек должен смешивать стратегии доверия и сомнения. Если же она проходит ниже, то его смешанная стратегия должна состоять из стратегий доверия и недоверия. Эти решения не зависят от того, насколько выше или ниже точки пересечения она проходит. Не зависят они и от того, каков наклон линии сомнения. (Это имеет место при условии,



что она не проходит настолько высоко над остальными линиями, что не пересекает ни одной из них; в этом случае сомнение становится решением типа седловой точки.) Эти положения можно представить графиками, помещенными в конце стр. 239.

Для того чтобы вычислить относительные частоты каждой стратегии, нам потребовалось бы поместить себя на место молодого придворного. Оставим, однако, все терзания и сомнения ему одному...

Игры, которые играют только один раз

Тот факт, что мы на протяжении всей книги избегали одного щекотливого вопроса, может вызвать неудовольствие как у дилетантов, так и у профессионалов, но по диаметрально противоположным причинам. Поэтому нам кажется, что мы по меньшей мере должны выставить этот вопрос на публичное обозрение, даже если это и не вызовет ни у кого бурного веселья.

Читателям из числа дилетантов-любителей может показаться совершенно очевидным, что теория игр несостоятельна в случае игр, которые могут играть лишь один раз, потому что само понятие смешанной стратегии требует многократного повторения партий игры. Эти читатели могут сослаться на некоторые наши примеры, такие, например, как «Леди или тигр», в которых повторение событий совершенно невозможно. Они могут добродушно посмеяться над тем, что мы увлеклись и зашли слишком далеко.

Понятно также, что некоторые из наших читателей-профессионалов могут встревожиться из-за отсутствия обсуждения этого вопроса. Они, однако, будут огорчены, потому что мы до сих пор не высказывались категорически в том смысле, что теория игр должна применяться лишь к играм, которые играют только один раз. Они, вероятно, будут бросать косые взгляды на такие примеры, как «Коктейль Дайквири» или, еще хуже, «Лотошник», в которых игра может повторяться. Эти тоже, пожалуй, скажут, что увлечение заставило нас зайти слишком далеко.

Понадобится очень немного времени, чтобы убедиться в том, что подробное рассмотрение этого вопроса легко может увести нас за пределы, приличествующие букварю. Поэтому мы ограничимся некоторыми пунктами, которые, как мы надеемся, позволят читателю-непрофессионалу разглядеть сквозь туман спасительную сушу.

Мы надеемся, что такой читатель в состоянии принять без доказательств утверждение о том, что строгие матема-

тические положения теории игр были выведены применительно к одной партии игры. Если это принято, то можно без особого труда поверить в то, что теория применима и к играм, которые играют только один раз. Когда мы излагали теорию игр, были основания полагать, что мы говорим все время о повторяющихся событиях. Причина заключалась в том, что для нас подобный подход был удобнее (к тому же он научно оправдан), но совершенно не обязательно было поступать именно так, поскольку метод частот не является обязательным при математических рассуждениях, составляющих основу теории игр.

Все вышесказанное требует от читателя веры по крайней мере в добросовестность автора. С другой стороны, мы можем привести такую аргументацию, которая найдет у вас непосредственный отклик. Рассмотрим неповторяющуюся игру, которая имеет для вас чрезвычайное значение, и при этом ваш противник обладает превосходной сообразительностью. Предположите также, что если ваш противник узнает, какую вы выбрали стратегию, то это будет иметь для вас трагические последствия. Единственным выходом для вас будет использовать для выбора стратегий случайный механизм, или жребий, указание которого не в состоянии постичь или предвидеть разум противника. Ему может, конечно, повезти, и он сможет так или иначе угадать ваш выбор, но вы должны примириться с некоторой долей риска. Теория игр просто указывает характеристики, которыми должен обладать ваш случайный механизм.

Вы можете согласиться и с другой точкой зрения, по которой вы за всю жизнь от колыбели до могилы должны сыграть большое количество одноразовых игр, из которых далеко не все являются роковыми, причем применение смешанных стратегий улучшает тот средний выигрыш, который вы получаете в результате всех партий.

У специалиста по теории игр имеется по этому вопросу две точки зрения, которые могут представлять для вас интерес. Первая заключается в том, что, поскольку теория была разработана в применении к одной партии игры, он не уверен в том, что эта теория совпадает с той, которую он разработал бы, если бы ему сказали, что игра должна играть, скажем, ровно одиннадцать раз. Автору кажется, что в этой точке зрения заключается высокая наука, но в ней слишком много чистой науки для практика, в распоряжении которого еще нет теории игры из одиннадцати партий и который не может ждать появления такой теории.

Однако в случае игр против природы точку зрения чистого ученого нельзя столь легко отбросить, так как длинная последовательность партий данной игры может содержать информацию относительно смешанной стратегии природы, которую не следует игнорировать. Действительно, здесь специалист по теории игр вторгается в область статистика, у которого имеется свой арсенал научных приемов, с помощью которых он может решать различные задачи.

Симметричные игры

Рассмотрим еще один тип игр, обладающих особыми свойствами,—*симметричные* игры. Игра называется симметричной, если в платежной матрице между строками и столбцами существует следующая связь: последовательность элементов в каждой строке точно такая же, как последовательность в соответствующем столбце, за исключением того, что знаки у соответствующих элементов противоположны. Следствием этого определения является то, что элементы главной диагонали должны равняться нулю. Таким образом, матрица

0	2	3
-2	0	-6
-3	6	0

является матрицей симметричной игры. Убедитесь, например, что третья строка $(-3, 6, 0)$ и третий столбец $(3, -6, 0)$ обладают требуемыми свойствами, как и все остальные пары строк и столбцов.

Имеется два полезных замечания относительно симметричных игр. Первое заключается в том, что это—справедливые игры, и так как мы знаем, что цена таких игр равна нулю, вам нет необходимости ее вычислять. Второе замечание состоит в том, что оба игрока могут применять одну и ту же оптимальную стратегию.

Каждая игра может быть преобразована в другую, большую, но симметричную игру. Это может оказаться полезным при вычислениях. Для того чтобы это сделать, необходимо, чтобы у первоначальной игры была положительная цена. Но мы всегда можем достичь этого, прибавляя к каждому платежу большое постоянное число,—это не повлияет на стратегии; нужно только не забыть вычесть эту постоянную из вычисленной цены.

Для демонстрации этого метода рассмотрим игру и две вспомогательные матрицы, составленные из единиц:

		Красные			
		1	2	3	
Синие	1	5	1	3	1
	2	2	4	1	1

1	1	1
---	---	---

Обозначим буквами G , V и H соответственно матрицу игры, вертикальную и горизонтальную матрицы. После этого образуем матрицу такого вида:

0	G	$-V$
$-G^*$	0	H^*
V^*	$-H$	0

Здесь звездочка обозначает команду заменить строки столбцами. Минус обозначает перемену знаков у всех элементов матрицы. Нули представляют матрицы, составленные только из нулей. Подставляя вместо этих символов их значения, получим:

		Красные*					
		1	2	3	4	5	6
Синие*	1	0	0	5	1	3	-1
	2	0	0	2	4	1	-1
	3	-5	-2	0	0	0	1
	4	-1	-4	0	0	0	1
	5	-3	-1	0	0	0	1
	6	1	1	-1	-1	-1	0

Это — матрица симметричной игры. Оба «игрока» этой игры 6×6 могут применять одну и ту же оптимальную стратегию. (Звездочки около названий игроков служат для того, чтобы отличить этих фиктивных игроков от действительных игроков, играющих первоначальную игру.)

Если вы теперь можете найти оптимальную стратегию для этой игры, у которой последний столбец представляет одну из активных чистых стратегий, то стратегии этой игры будут связаны со стратегиями первоначальной игры в соответствии со следующей схемой:

	Синие		Красные			Цена игры
<i>Стратегии первоначальной игры</i>	1	2	1	2	3	
<i>Стратегии симметричной игры</i>	1	2	3	4	5	6

Иначе говоря, относительные частоты применения различных чистых стратегий Синих и Красных равны относительным частотам, связанным с двумя первыми группами чистых стратегий в симметричной игре, а цена первоначальной игры пропорциональна относительной частоте последней чистой стратегии. В данном примере решение симметричной игры будет 3:2:0:2:3:11, что соответствует следующему решению для первоначальной игры:

		<i>Красные</i>			<i>Относительные частоты Синих</i>
		1	2	3	
<i>Синие</i>	1	5	1	3	3
	2	2	4	1	2
<i>Относительные частоты Красных</i>		0	2	3	

Ее цена равна $11/5$.

Линейное программирование

Мы уже имели случай неоднократно убедиться на примерах, приведенных в книге, что теория игр может быть

полезной в широком диапазоне областей человеческой деятельности. Поэтому не должен быть полной неожиданностью тот факт, что она связана также и с развитием теории в различных областях знания. Эта связь оказывается иногда на уровне понятий, а иногда она чисто формальная (в тех случаях, когда применяются одни и те же математические методы). В обоих случаях наличие такой связи приносит пользу, так как взаимообмен идей и методов приводит к обогащению всех областей знания.

В качестве примера такого обмена мы рассмотрим один случай: научные методы административного управления, известные под названием линейного программирования. Пионерами в этой области были военно-воздушные силы США, которые попытались разработать схему рационального планирования и снабжения*. Она должна была обеспечить поступление в различные сроки различных материалов, необходимых для выполнения боевых задач, в различные пункты из различных источников. И все это должно было быть организовано наиболее экономичным способом. С точки зрения расчетов задачи подобного рода могут быть приведены к форме игры, и помещенный ниже пример является иллюстрацией этого.

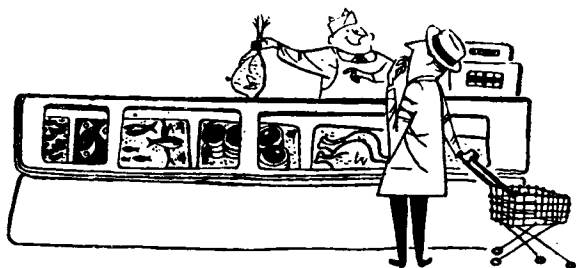
Пример 35. Диета

Джон составил новую диету, основанную главным образом на мясе. Он должен съесть одну унцию** жира на каждые три унции постного мяса. Так как стоимость является одним из важнейших аспектов всякой мясной диеты, он решил подсчитать, сколько ему будет стоить некоторое номинальное количество мяса, ну, скажем, 10 фунтов, составленное из требуемой пропорции жира и постного мяса.

Мясная лавка Данцига поставляет три сорта мяса, которые нравятся Джону. Они содержат 1, 5 и 10 унций жира на фунт и стоят 1,35; 0,85 и 0,65 доллара соответственно.

* Следует отметить, что методы линейного программирования впервые были предложены в 1939 г., т. е. задолго до их появления в США, ленинградским математиком Л. В. Канторовичем («Метод разрешающих множителей»). — *Прим. ред.*

** 1 фунт = 16 унций. — *Прим. пер.*



Все эти факты можно суммировать в трех следующих матрицах (единицами измерения являются унции и центы соответственно):

		<i>Постное мясо</i>		
		<i>Жир</i>		<i>Цена</i>
<i>Сорт мяса</i>	1	1	15	135
	2	5	11	85
	3	10	6	65
<i>Требуемые количества</i>		40	120	

Обозначим матрицы сортов мяса, цен и количеств буквами M , P и Q .

Образуем теперь новую составную матрицу, в которую наши матрицы будут входить в качестве элементов:

0	M	$-P$
$-M^*$	0	Q^*
P^*	$-Q$	0

В этой матрице минус обозначает, что каждый элемент субматрицы должен изменить знак на обратный. Звездочка обозначает, что все строки субматрицы должны быть

заменены столбцами. Нуль обозначает, что субматрица состоит только из нулей. Подстановка значений символов M , P и Q дает новую матрицу:

		Красные					
		1	2	3	4	5	6
Синие	1	0	0	0	1	15	-135
	2	0	0	0	5	11	-85
	3	0	0	0	10	6	-65
	4	-1	-5	-10	0	0	40
	5	-15	-11	-6	0	0	120
	6	135	85	65	-40	-120	0

Так как вы уже не новичок в этих вещах, вы немедленно узнаете здесь игру просто потому, что так можно рассматривать любую матрицу. Наша игра оказалась игрой 6×6 , к тому же игрой симметричной; это обеспечивает то, что игра честная и что любая оптимальная стратегия, подходящая для одного игрока, подходит также и для другого. Кто бы мог подозревать, что ее решение связано с проблемой диеты!

Каждая игра имеет решение, но некоторые задачи линейного программирования этого решения не имеют. Если задача линейного программирования имеет решение, то, оказывается, должна иметься оптимальная стратегия для игры, в которой последняя строка (или столбец), в нашем примере шестая, является активной, т. е. ее относительная частота не равна нулю. Если это условие выполняется, то решение задачи линейного программирования находится делением относительных частот каждой из первых групп чистых стратегий—первой, второй, третьей, в нашем случае—на относительную частоту последней стратегии—шестой, в нашем примере.

В вышеприведенном примере игра должна играть в соответствии с относительными частотами 0:120:0:0:85:11. Так как последняя относительная частота (11) не равна нулю, то задача линейного программирования должна иметь решение.

Действительно, Джон должен купить $0/_{11}$, $120/_{11}$ и $0/_{11}$ фунта мяса имеющихся трех сортов, т. е. он должен купить $10^{10}/_{11}$ фунта мяса по 0,85 доллара за фунт, а от остальных сортов отказаться. Таким образом, за 9,27 доллара он может купить 120 унций постного мяса и около 54 унций жира. Излишки жира по сравнению с требуемым количеством в 40 унций являются неизбежными издержками. Если покупать в точности требуемое соотношение, то это обойдется Джону дороже. (Ведь цены не подгоняются так, чтобы было проще всего решать проблемы диеты.)

Игры с ненулевой суммой *

Мы предполагаем только показать вам природу этих игр. Если бы мы задумали сделать большее, то рисковали бы попасть в математические глубины, более того, в глубины, полные противоречий.

В играх с нулевой суммой платежи представляют собой строгий обмен капиталов: один игрок выигрывает в точности столько, сколько проигрывает другой. Мы использовали этот принцип отчасти в играх против природы, в которых мы подсчитываем стратегии для игрока-человека так, как если бы он играл с противником, согласным с его оценкой платежной матрицы и способным предпринимать разумные контрмеры. Это приводит игрока-человека к сверхосторожным стратегиям. Ему не удастся получить столько, сколько он получил бы, играя против огъявленного тупицы. В принципе существует удовлетворительный способ улучшить это положение, а именно раскрыть стратегию природы (что возможно в ряде случаев), а затем использовать слабые места ее метода.

Игры с ненулевой суммой содержат некоторый элемент, подобный природе. Здесь выигрыши одного игрока не обязательно равны проигрышам другого, так как они оба могут одновременно и проиграть и выиграть. Чтобы сохранить принятую нами форму анализа, мы можем рассматривать природу как фактор, участвующий в игре, поглощая

* Эти игры называются также «разноплатными». Если сумма плат двух игроков не равна нулю, но постоянна, то анализ игры формально может быть сведен к экспериментальной игре с нулевой суммой. Однако если сумма платежей не одинакова для различных элементов матрицы, то имеет место «разноплатная» игра, которая задается двумя платежными матрицами, по одной на каждого игрока. Именно эти игры здесь названы «играми с ненулевой суммой». — *Прим. ред.*

ценности, потерянные игроками, и дополняя их выигрыши. Такая игра описывается двумя матрицами и может иметь следующий вид:

		Природа (Кр.)		
		1	2	3
Синие	1	1	6	2
	2	3	0	3
	3	4	2	0

		Красные		
		1	2	3
Природа (Син.)	1	6	0	3
	2	5	4	3
	3	0	1	4

Таким образом, природа имеет двойное лицо: одно, обращенное к Синим, и другое — к Красным.

Если Синие рассматривают только левую матрицу и считают ее обычной парной игрой с нулевой суммой, то они должны придерживаться смешанной стратегии с относительными частотами 4:6:1 и их выигрыш составит в среднем $2\frac{4}{11}$, причем плательщиком будет Природа (Кр.). Правая матрица может таким же образом привести Красных к применению стратегии 0:1:3 и к проигрышу $3\frac{1}{4}$, который поглощается Природой (Син.). Природа (Син.) и Природа (Кр.) делят свои выигрыши и проигрыши, если угодно.

При игре одного игрока против природы Синие могли бы выиграть больше, чем $2\frac{4}{11}$, если бы они изучили ее поведение и использовали полученные ими сведения. Но в нашем примере Природа (Кр.) является волком в овечьей шкуре, потому что Красные прячутся за ее спиной и контролируют ее стратегию. Здесь имеется коалиция, в которой Красные являются генералом, а Природа (Кр.) — банкиром. Точно такая же связь существует и между Синими с Природой (Син.). Поэтому если Синие отступят от оптимальной стратегии 4:6:1, чтобы выиграть немного побольше, то они могут быть побиты Красными, внимательно наблюдающими за ходом событий.

Но может быть и другой случай. Предположим, что Синие выбрали стратегию 1:0:0, а Красные — стратегию 0:1:0. Выигрыш Синих теперь стал 6 вместо $2\frac{4}{11}$, а проигрыш Красных стал 0 вместо $3\frac{1}{4}$. Итак, оба игрока сыграли значительно лучше, чем прежде: Синие выиграли сколько было возможно, а Красные потеряли так мало, как только можно. Отсюда можно сделать вывод, что *Синие и Крас-*

ные могут со взаимной выгодой образовать коалицию против природы для того, чтобы выиграть у нее как можно больше.

Этот вывод приводит нас к большим затруднениям. Ведь мы имеем дело с классической проблемой, встречающейся среди воров: как разделить добычу? Если коалиция даст больше, чем то, что получают игроки, когда они будут играть независимо друг от друга, то как разделить избыток? Какую систему дополнительных платежей надо разработать, чтобы коалиция преуспевала, чтобы доходы были достаточно велики и чтобы члены коалиции оставались лояльными? В каких случаях игрок должен мириться с менее выгодным результатом ради того, чтобы наказать другого игрока? В этой области была проделана значительная работа в направлении отыскания удовлетворительных критериев, которые позволили бы игроку выбрать наиболее выгодные стратегии—стратегии отдельных партий и систему вспомогательных платежей. Абстрактное творчество, однако, нуждается в серьезном руководстве со стороны практики, реальных ситуаций, встречающихся в действительности, и со стороны лабораторных экспериментов. Эта тема, хотя она и является весьма заманчивой, совершенно определенно выходит за пределы данной книги.

Заключение

Теперь мы в состоянии сделать то, чего мы не могли сделать вначале, а именно дать достаточно точное определение того, что собой представляет теория игр, точно так же, как мы это сделали в первой главе в отношении теории тяготения. Теперь в нашем распоряжении имеется обширный словарь технических терминов, мы достаточно подробно познакомились с анализом и формулировкой задач, поэтому мы сможем понять те мысли, которые показались бы трудными в начале книги.

Приводимые ниже определения теории относятся только к материалу, охваченному в этой книге. Некоторые проблемы подлежат дальнейшему обобщению, такие, как бесконечные игры, игры с ненулевой суммой, игры с n игроками.

Теория игр есть метод анализа конфликтов в соответствии со следующим абстрактным описанием: конфликт представляет собой ситуацию, в которой имеется две группы противоположных интересов. Ее можно рассматривать как игру между двумя игроками, каждый из которых пред-

ставляет одну группу интересов. Каждый игрок имеет конечное число стратегий, из которых он, играя одну партию игры, может выбрать только одну. Общий капитал игроков в конце каждой партии такой же, каким он был в ее начале. Каждый из игроков хочет действовать согласно такому осторожному и надежному плану, который делает его средний выигрыш наибольшим. Этот максимальный средний выигрыш, называемый ценой игры, может быть подсчитан. Каждый игрок, если он играет правильно, может быть уверен в том, что он получит цену игры. Для этого он должен правильно выбрать свою стратегию; существуют методы правильного выбора стратегий. Имеют место различные следствия: игрок *может* скрывать от противника, какую он выбрал стратегию для каждой отдельной партии игры; ему нет никакой необходимости скрывать все остальные сведения, кроме текущего выбора, и т. д.

Математике дают самые различные имена. Часто ее называют королевой и служанкой наук. Хотя иногда высказываются сомнения относительно ее точного социального положения, не возникает никаких разногласий относительно ее пола. Действительно, любая наука, по всей вероятности, предстает в облике прелестной женщины для тех, кто занимается ею. Они считают свою работу чрезвычайно привлекательной, и история научных исследований полна доказательств изменчивости и капризности той, которой они служили.

Более того, ее реакция на попытки подталкивания и руководства является обычно совершенно ошеломляющей. Она движется свободно, но зачастую совершенно в неожиданном направлении. Очень часто люди проводят всю жизнь, пытаясь продвинуть ее в определенном направлении, но безуспешно. С узкой точки зрения их труд можно было бы считать неудачей. Но так как наука все же движется в каком-то направлении, когда ее подталкивают, эти неудачи часто являются основой для совершенно неожиданных успехов в других областях знания.

Можно привести много примеров этого. Некоторые из них широко известны. Мы расскажем в нескольких словах одну из таких историй. Солнечные пятна — гигантские огненные вихри на поверхности солнца — появляются, как известно, периодически. Потоки частиц и освобождаемая при этом энергия оказывают некоторое влияние на землю, например на дальнюю радиосвязь. Предполагают, что сол-

нечные пятна оказывают также влияние и на погоду на земле, но форма этой зависимости остается до сих пор неясной.

Одному астроному по имени А. Э. Дуглас пришла в голову мысль о том, что ежегодный рост деревьев, о котором можно судить по кольцам на срезе ствола дерева, отражает долговременную регистрацию выпадения дождей, а поскольку на погоду оказывают влияние солнечные пятна, то последовательность колец на деревьях должна служить записью солнечной активности.

Он потратил почти сорок лет, интенсивно работая над этой проблемой. Главный эффект, который он искал, был совершенно очевиден по его записям, но детали были в высшей степени запутаны и противоречивы. Настолько противоречивы, что временами весь анализ покрывался туманом неопределенности. Он, однако, составил весьма надежную и точную хронологию колец на стволах деревьев, охватывающую период времени в две тысячи лет и более. Для него это была побочная работа, но она позволяет в настоящее время археологам, используя этот календарь, основанный на кольцах деревьев, весьма точно (с ошибкой не более одного года) определять даты постройки древних зданий, оставшихся от периода ранней цивилизации, по обломкам деревьев, найденным при раскопках развалин, или по куску древесного угля, найденного в очаге.

Теория игр была первоначально разработана математиком, который имел в виду определенные экономические задачи. Первоначальная реакция экономистов на эту работу была весьма сдержанной, но ученые, работающие в военной области, быстро поняли ее возможности и начали подталкивать ее развитие. Линейное программирование явилось обратной связью снова в область экономических наук, и оно нашло широкое применение в деловой жизни и в промышленности. Основные понятия теории игр оказались на передовой линии фронта во время революции в области статистической теории, в которой происходит унификация, казалось бы, совершенно разобщенных областей. Эти понятия начинают находить применение и в общественных науках, где они могут пролить свет на неко-

торые взаимоотношения между людьми. Трудно предсказать, каковы будут следующие шаги теории игр.

Теория игр, несмотря на ее ограничения, имеет в настоящее время приложения. Однако основная заслуга теории игр в том, что она дала ориентацию людям, которые сталкиваются с крайне запутанными проблемами. И хотя теория игр не дает строгого решения этих проблем, по крайней мере в настоящее время и, вероятно, в течение неопределенного срока в будущем, тем не менее она указывает основу и направление усилий, предназначенных для их разрешения. Понятие стратегий, различие между игроками, роль случайных событий, матричное представление платежей, понятие о чистых и смешанных стратегиях и т. д. дают полезную ориентацию людям, которым приходится иметь дело со сложными конфликтными ситуациями.

ТАБЛИЦА СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

11 16 43 63 18	75 06 13 76 74	40 60 31 61 52	83 23 53 73 61
21 21 59 17 91	76 83 15 86 78	40 94 15 35 85	69 95 86 09 16
10 43 84 44 82	66 55 83 76 49	73 50 58 34 72	55 95 31 79 57
36 79 22 62 36	33 26 66 65 83	39 41 21 60 13	11 44 28 93 20
73 94 40 47 73	12 03 25 14 14	57 99 47 67 48	54 62 74 85 11
49 56 31 28 72	14 06 39 31 04	61 83 45 91 99	15 46 98 22 85
64 20 84 82 37	41 70 17 31 17	91 40 27 72 27	79 51 62 10 07
51 48 67 28 75	38 60 52 93 41	58 99 98 38 80	20 12 51 07 94
99 75 62 63 60	64 51 61 79 71	40 68 49 99 48	33 88 07 64 13
71 32 55 52 17	13 01 57 29 07	75 97 86 42 98	08 07 46 20 55
65 28 59 71 98	12 13 85 30 10	34 55 63 98 61	88 26 77 60 68
17 26 45 73 27	38 22 42 93 01	65 99 05 70 48	25 06 77 75 71
95 63 99 97 54	31 19 99 25 58	16 38 11 50 69	25 41 68 78 75
61 55 57 64 04	86 21 01 18 08	52 45 88 88 80	78 35 26 79 13
78 13 79 87 68	04 68 98 71 30	33 00 78 56 07	92 00 84 48 97
62 49 09 92 15	84 98 72 87 59	38 71 23 15 12	08 58 86 14 90
24 21 66 34 44	21 28 30 70 44	58 72 20 36 78	19 18 66 96 02
16 97 59 54 28	33 22 65 59 03	26 18 86 94 97	51 35 14 77 99
59 13 83 95 42	71 16 85 76 09	12 89 35 40 48	07 25 58 61 49
29 47 85 96 52	50 41 43 19 66	33 18 68 13 46	85 09 53 72 82
96 15 59 50 09	27 42 97 29 18	79 89 32 94 48	88 39 25 42 11
29 62 16 65 83	62 96 61 24 68	48 44 91 51 02	44 12 61 94 38
12 63 97 52 91	71 02 01 72 65	94 20 50 42 59	68 98 35 05 61
14 54 43 71 34	54 71 40 24 01	38 64 80 92 78	81 31 37 74 00
83 40 38 88 27	09 83 41 13 33	04 29 24 60 28	75 66 62 69 54
67 64 20 52 04	30 69 74 48 06	17 02 64 97 37	85 87 51 21 39
64 04 19 90 11	61 04 02 73 09	48 07 07 68 48	02 53 19 77 37
17 04 89 45 23	97 44 45 99 04	30 15 99 54 50	83 77 84 61 15
93 03 98 94 16	52 79 51 06 31	12 14 89 22 31	31 36 16 06 50
82 24 43 43 92	96 60 71 72 20	73 83 87 70 67	24 86 39 75 76
96 99 05 52 44	70 69 32 52 55	73 54 74 37 59	95 63 23 95 55
09 11 97 48 03	97 30 38 87 01	07 27 79 32 17	79 42 12 17 69
57 66 64 12 04	47 58 97 83 64	65 12 84 83 34	07 49 32 80 98
46 49 26 15 94	26 72 95 82 72	38 71 66 13 80	60 21 20 50 99
08 43 31 91 72	08 32 02 08 39	31 92 17 64 58	73 72 00 86 57
10 01 17 50 04	86 05 44 11 97	57 23 82 74 64	61 48 75 23 29
92 42 06 54 31	16 53 00 55 40	24 21 94 10 90	08 53 16 15 78
35 54 25 58 65	07 30 44 70 10	31 30 94 93 87	02 33 00 24 76
86 59 52 62 47	18 55 22 94 91	20 75 09 70 24	72 61 96 66 28
72 11 53 49 85	58 03 69 91 37	28 53 78 43 95	26 65 43 78 51

07 42 85 88 63	96 02 38 89 36	97 92 94 12 20	86 43 19 44 85
35 37 92 79 22	28 90 65 50 13	40 56 83 32 22	40 48 69 11 22
10 98 22 28 07	10 92 02 62 99	41 48 39 29 35	17 06 17 82 52
90 12 73 33 41	77 80 61 24 46	93 04 06 64 76	24 99 04 10 99
63 00 21 29 90	23 51 06 87 74	76 86 93 93 00	84 97 80 75 04
40 77 98 63 82	48 45 46 52 69	02 98 25 79 91	50 76 59 19 30
43 21 61 26 08	18 16 78 46 31	94 47 97 65 00	39 17 00 66 29
96 16 76 43 75	74 10 89 36 43	52 29 17 58 22	95 96 69 09 47
70 97 56 26 93	35 68 47 26 07	03 68 40 36 00	52 83 15 53 81
85 81 26 18 75	23 57 07 57 54	58 93 92 83 66	86 76 56 74 65
37 10 06 24 92	63 64 24 76 38	54 72 35 65 27	53 07 63 82 35
53 40 61 38 55	38 51 92 95 00	84 82 88 12 48	25 54 83 40 75
55 17 28 15 56	18 85 65 90 43	65 79 90 19 14	81 36 30 51 73
40 35 38 48 07	47 76 74 68 90	87 91 73 85 49	48 21 37 17 08
18 89 90 96 12	77 54 15 76 75	26 90 78 81 73	71 18 92 83 77
68 14 12 53 40	92 55 11 13 26	68 05 26 54 22	88 46 00 63 52
51 55 99 11 59	81 31 06 32 51	42 58 76 81 49	88 14 79 97 00
92 21 43 33 86	73 45 97 93 59	97 17 65 54 16	67 64 20 50 51
15 08 95 05 57	33 16 68 70 94	53 29 58 71 33	38 26 49 47 08
96 46 10 06 04	11 12 02 22 54	23 01 19 41 08	29 19 66 51 87
28 17 74 41 11	15 70 57 38 35	75 76 84 95 49	24 54 36 32 85
66 95 34 47 37	81 12 70 74 93	86 66 87 03 41	66 46 07 56 48
19 71 22 72 63	84 57 54 98 20	56 72 77 20 36	50 34 73 35 21
68 75 66 17 57	19 98 79 22 22	27 93 67 80 10	09 61 70 44 08
75 02 26 53 32	98 60 62 94 51	31 99 46 90 72	37 35 49 30 25
11 32 37 00 69	90 26 98 92 66	02 98 59 53 03	15 18 25 01 66
55 20 86 34 70	18 15 82 52 83	89 96 51 02 06	95 83 09 54 06
11 47 40 87 86	05 59 46 70 45	45 58 72 96 11	98 57 94 24 81
81 42 28 68 42	60 99 77 96 69	01 07 10 85 30	74 30 57 75 09
21 77 17 59 63	23 15 19 02 74	90 20 96 85 21	14 29 33 91 94
42 27 81 21 60	32 57 61 42 78	04 98 26 84 70	27 87 51 54 80
17 69 76 01 14	63 24 73 20 96	19 74 02 46 37	97 37 73 21 12
05 68 63 02 43	34 12 40 29 36	50 19 77 98 69	86 49 76 87 09
52 99 24 66 50	89 91 05 73 95	46 95 46 75 36	28 96 88 19 36
94 51 89 39 84	81 47 86 77 50	82 54 96 26 76	31 12 34 98 99
00 18 47 21 86	78 90 67 54 80	61 79 88 16 00	80 01 88 47 42
87 46 26 31 65	79 81 66 16 30	57 66 62 90 55	46 51 80 14 87
88 69 25 87 16	12 27 34 81 76	29 80 56 49 94	66 87 26 22 30
20 09 44 29 62	41 38 21 67 68	06 71 13 49 39	19 59 97 62 47
60 93 58 15 04	50 52 08 21 53	13 93 44 68 85	58 31 58 83 66
51 39 28 59 36	43 89 85 05 96	28 54 99 83 27	99 94 32 53 77
54 23 94 19 18	79 52 64 62 74	40 87 16 18 03	25 76 75 54 84
57 89 27 33 94	07 16 09 02 62	47 70 43 83 55	71 70 88 01 17
02 33 07 47 36	53 27 44 44 68	62 61 11 96 98	09 30 42 92 65
76 11 52 92 47	55 34 25 12 99	03 04 78 39 81	11 91 60 92 67
63 31 28 18 86	29 08 52 01 01	26 46 05 05 01	31 73 11 89 38
27 63 22 15 70	34 27 45 64 26	01 76 42 59 59	69 29 38 98 75
06 33 56 21 11	44 01 45 25 67	11 76 25 48 06	02 65 15 29 12
64 14 28 76 76	21 35 88 87 73	31 73 63 16 95	11 52 36 42 13
28 43 62 54 68	75 23 57 53 70	97 15 54 87 06	52 23 92 18 31

09 52 28 38 55	85 97 31 58 88	31 18 14 96 72	17 23 70 40 24
93 71 41 54 14	93 71 20 27 42	32 11 58 26 83	67 18 28 90 30
15 68 15 35 99	58 18 57 38 40	07 06 87 59 47	71 74 36 92 85
77 71 22 39 14	08 90 74 37 68	26 62 27 41 84	75 16 69 67 48
78 45 35 48 44	61 50 90 12 45	02 80 55 26 76	22 51 94 78 48
24 86 06 82 84	19 36 72 90 73	32 30 15 87 01	04 19 33 01 42
37 28 40 68 44	78 88 75 72 76	26 33 95 69 09	39 33 14 21 01
35 48 85 24 73	37 63 43 25 69	95 27 40 95 08	81 01 24 24 13
51 59 55 99 09	35 22 34 49 91	24 27 53 96 32	05 77 79 88 00
90 66 03 51 71	30 02 19 11 20	36 11 64 21 28	69 40 19 41 99
47 50 50 20 08	20 30 08 71 88	96 19 50 70 59	13 26 63 13 89
13 35 00 84 14	64 04 99 43 77	22 40 89 49 58	19 09 55 80 35
33 00 69 26 90	69 24 89 74 43	53 89 62 35 08	16 22 75 69 29
55 21 66 38 86	06 80 41 18 61	22 56 50 24 75	00 25 87 90 18
21 99 12 62 28	14 80 11 91 92	49 43 82 07 72	60 84 66 97 32
71 02 52 82 12	10 47 42 75 22	65 62 03 46 84	00 21 00 48 63
65 52 21 52 42	84 55 47 45 60	20 24 62 69 41	41 29 80 47 63
27 97 55 49 23	90 65 00 61 70	09 43 30 91 67	35 16 63 27 31
07 30 00 97 04	36 09 96 15 77	95 55 27 34 56	16 57 88 81 40
54 35 71 36 89	19 56 90 38 14	76 05 30 51 50	99 12 56 94 42
00 97 70 44 81	42 04 40 86 49	34 82 23 58 43	78 46 88 23 80
13 92 07 87 61	12 31 19 28 08	07 75 30 40 73	58 52 08 00 22
08 39 53 70 43	37 88 03 41 72	04 20 49 44 34	62 79 88 19 02
46 16 66 72 06	01 61 94 37 69	96 77 01 94 40	29 70 04 20 93
87 76 77 76 07	03 74 20 16 13	65 98 96 28 43	10 91 73 44 58
29 88 09 52 88	21 64 44 65 87	06 64 49 47 84	66 99 56 18 12
36 24 83 66 66	14 89 45 92 73	88 95 04 60 77	34 65 11 20 38
12 38 62 96 56	30 47 42 59 64	21 48 29 54 22	02 00 23 36 71
52 06 87 38 01	52 18 81 94 91	55 13 76 10 39	02 00 66 99 13
41 72 75 21 71	56 71 90 60 54	98 44 18 15 29	59 60 76 52 25
49 31 97 45 80	57 47 01 46 00	57 16 83 04 58	23 89 20 78 25
84 78 67 69 63	12 12 72 50 14	71 88 66 53 34	38 01 30 93 79
64 86 69 52 02	43 98 37 26 55	40 41 85 95 04	52 38 30 72 32
11 84 92 64 82	20 46 19 94 50	28 83 37 66 61	47 27 79 29 35
54 96 61 75 94	57 39 37 32 67	37 88 36 21 24	62 19 94 95 42
10 95 93 33 49	80 71 99 67 51	44 88 23 35 92	66 23 41 38 21
22 78 40 77 83	35 90 30 00 91	19 08 21 38 73	07 18 42 15 66
86 03 76 17 91	33 81 56 39 68	45 31 62 92 83	89 31 85 58 06
80 03 76 50 89	85 91 97 43 91	22 78 85 54 33	31 18 87 48 82
72 75 18 43 59	15 76 91 36 15	08 29 38 61 93	05 02 62 12 55
18 53 20 38 74	66 22 07 90 50	29 22 37 05 41	67 11 58 45 84
22 93 62 20 58	49 17 11 10 27	22 68 18 01 10	31 59 50 92 46
66 39 77 65 10	81 15 00 07 04	74 58 09 03 54	43 74 42 21 78
89 73 02 32 72	65 42 03 50 91	69 09 37 13 64	08 10 79 69 52
81 82 17 53 23	96 06 89 17 24	40 45 69 12 34	58 09 06 53 42
94 37 78 25 54	53 58 61 14 32	72 92 76 73 49	83 96 25 89 12
68 48 54 99 91	53 16 51 98 65	61 86 93 30 93	81 12 90 64 81
07 33 00 71 84	86 78 86 45 77	40 04 81 65 20	07 63 81 07 97
10 99 31 49 30	35 07 23 64 29	68 77 39 76 69	28 65 68 99 38
20 80 11 51 78	64 45 38 33 57	09 77 43 07 51	49 74 01 13 85

79 24 13 53 47	66 85 17 92 47	46 13 93 66 89	82 58 71 35 86
43 59 33 95 55	97 34 55 84 94	26 56 69 53 23	32 99 38 99 88
29 52 26 27 13	33 70 11 71 86	06 76 55 71 41	48 61 71 82 82
88 83 64 72 90	67 27 47 83 62	35 38 49 03 80	12 31 78 97 02
65 90 56 62 53	91 48 23 06 89	49 33 37 84 82	36 19 91 13 55
44 79 86 93 71	07 86 58 17 56	45 59 51 40 44	56 80 69 91 26
35 51 09 91 39	32 03 12 79 25	79 81 91 50 54	76 17 41 22 06
50 12 59 32 23	64 20 94 97 14	11 97 16 22 34	74 85 74 64 01
25 17 39 00 38	63 87 14 04 18	11 45 28 93 18	53 08 42 19 93
68 45 99 00 94	44 99 59 37 18	38 74 68 12 71	96 26 09 81 37
93 36 91 30 44	69 68 67 81 62	66 37 80 29 19	34 01 25 00 80
19 36 05 50 49	94 95 17 63 41	84 01 93 06 90	25 65 67 29 96
47 79 88 98 90	06 89 36 54 83	17 70 12 12 92	14 88 01 53 86
69 22 33 20 07	03 51 36 11 49	32 54 69 20 72	62 52 22 15 04
34 51 15 07 21	84 85 03 41 59	97 13 86 19 19	97 78 92 85 75
54 03 15 93 29	58 96 35 22 20	35 29 22 79 24	55 46 74 30 36
66 72 28 55 15	04 72 39 24 11	02 73 70 81 68	30 04 36 34 50
71 05 90 74 96	38 40 41 81 26	28 26 13 78 44	12 54 31 43 98
45 47 88 60 66	31 13 53 32 43	80 57 33 06 06	48 64 45 30 08
97 24 69 11 21	89 43 72 03 93	77 15 38 85 52	26 84 31 28 44
22 98 22 59 36	96 41 73 48 45	85 14 95 75 04	15 05 93 68 49
48 24 36 29 93	47 13 28 52 48	35 22 97 28 37	36 75 27 16 55
93 51 41 49 15	67 96 08 22 03	40 11 72 43 46	32 18 98 70 74
69 70 79 83 03	93 06 91 62 16	60 87 59 75 45	68 65 29 21 60
87 46 79 17 94	70 81 41 27 43	03 76 93 25 51	74 80 14 16 92
81 00 68 14 98	59 37 53 05 02	94 07 79 22 09	31 50 66 96 06
15 45 88 34 81	50 18 74 33 75	94 37 60 06 66	94 14 52 23 99
33 46 91 25 10	23 09 54 80 16	42 35 41 13 47	90 92 00 38 64
67 19 80 71 76	65 99 61 83 17	81 14 94 32 91	10 81 74 43 48
58 03 79 22 61	85 50 45 56 90	10 63 17 82 38	00 15 74 62 59
84 98 36 83 12	25 51 95 61 58	86 30 00 76 89	14 00 67 77 53
35 55 40 29 35	72 88 96 87 72	19 85 03 96 50	65 22 21 55 63
04 36 81 76 32	50 96 27 19 08	94 46 46 64 32	62 24 31 36 74
81 31 16 04 79	69 98 53 09 52	23 92 14 97 30	21 71 89 23 14
03 82 38 98 87	55 82 87 44 52	72 77 52 37 16	42 85 37 47 93
80 42 26 54 37	38 79 75 62 61	27 81 64 67 04	82 73 50 33 39
61 30 74 94 68	43 34 44 37 00	20 20 77 70 88	17 16 72 45 31
83 87 38 25 57	10 00 28 00 93	59 28 30 44 94	60 72 52 14 31
38 11 01 68 55	28 92 29 37 58	88 73 13 63 76	51 38 35 76 19
43 89 29 11 89	87 22 65 69 35	84 76 26 79 96	75 00 00 17 45
93 68 30 96 64	53 92 74 98 85	20 75 49 23 55	57 95 51 09 40
32 74 80 21 21	11 97 29 69 14	28 06 56 95 64	06 83 55 68 45
49 21 19 29 63	38 62 56 53 12	62 17 57 33 53	84 97 21 77 26
63 36 56 42 24	69 47 55 75 12	11 04 45 04 83	68 82 19 74 26
63 57 62 63 73	44 61 04 37 48	00 33 16 34 22	99 62 27 67 57
41 07 84 70 36	65 52 46 84 66	67 15 72 64 19	37 97 81 65 11
70 84 68 95 58	64 17 31 53 81	87 71 35 08 41	46 27 02 65 08
68 80 06 44 92	20 16 23 27 07	10 28 18 25 25	74 15 58 67 49
44 97 78 95 25	51 26 96 37 47	91 36 77 40 33	67 02 06 90 92
79 35 46 38 47	24 39 55 36 79	40 56 03 69 14	69 17 63 19 18

14 95 42 22 99	40 15 65 26 85	29 22 33 83 83	30 31 57 09 99
01 71 19 84 39	09 44 63 39 37	49 09 54 02 38	81 69 71 24 74
62 32 85 53 28	45 73 89 39 40	27 46 62 69 27	53 34 51 13 79
73 00 46 21 09	81 90 77 10 77	57 46 37 00 45	65 12 34 90 70
34 21 88 94 45	05 60 95 23 36	50 55 89 22 42	52 73 28 15 02
99 15 90 19 68	45 88 68 68 75	28 41 39 59 18	44 15 64 69 59
92 85 82 99 49	15 81 79 33 72	56 65 74 31 93	58 13 05 42 73
27 39 69 74 77	65 55 47 16 01	13 12 16 88 67	95 76 35 96 67
37 10 34 53 09	30 12 94 33 80	96 99 68 93 56	22 78 46 01 84
57 34 79 70 12	48 42 82 06 06	60 74 22 22 26	89 99 32 45 97
29 41 72 09 72	84 13 42 91 66	71 99 34 28 19	28 79 91 30 95
70 18 50 54 60	07 35 38 58 55	11 83 80 22 91	89 88 24 16 13
06 39 35 20 17	21 23 62 05 30	14 30 05 53 19	47 90 83 92 32
42 60 59 24 74	09 36 14 24 04	33 72 24 77 22	12 54 72 97 59
26 48 34 88 73	84 26 03 32 85	51 27 58 48 21	87 44 30 24 91
93 60 97 74 25	57 26 86 93 20	13 56 80 08 25	80 83 58 36 39
19 79 00 32 65	68 47 42 96 78	08 45 60 14 75	40 31 77 20 77
63 43 46 72 51	20 51 08 06 27	62 61 86 40 27	64 47 75 04 32
76 63 64 27 71	12 58 35 63 29	59 51 22 52 49	42 18 50 96 22
51 25 87 43 30	47 75 15 26 72	10 99 59 19 22	50 21 71 41 87
13 26 01 42 38	88 39 15 08 58	60 73 55 89 65	58 49 20 96 66
31 81 15 09 35	89 51 01 55 66	22 09 62 63 38	30 24 00 43 43
48 83 26 95 24	32 11 34 66 73	24 96 59 71 07	41 85 68 52 96
32 36 71 84 57	03 31 22 55 64	75 10 99 31 42	91 95 16 88 94
90 34 61 74 76	71 03 92 14 97	64 00 15 42 64	71 66 79 42 62
98 51 30 26 79	69 41 38 20 67	68 25 07 45 01	48 84 60 91 00
08 48 41 56 17	82 79 00 83 24	95 09 12 70 82	73 94 95 95 33
60 04 28 75 62	49 72 82 64 00	10 11 21 06 30	82 87 33 93 12
87 65 38 64 09	09 27 73 83 79	09 93 45 75 87	44 00 52 10 90
35 71 10 03 98	30 49 45 09 23	33 30 85 14 41	13 80 43 26 09
46 48 33 27 22	74 79 96 02 77	09 29 94 26 17	94 65 41 13 15
60 85 80 63 37	20 22 03 49 52	98 21 86 97 10	03 42 79 92 55
70 78 30 14 52	87 66 12 40 28	41 83 04 04 72	46 04 10 89 52
65 34 64 30 42	62 13 43 22 85	35 20 18 56 72	66 68 85 39 48
96 34 95 21 64	23 29 87 22 17	41 64 06 30 18	74 28 09 16 70
63 46 91 34 59	11 09 19 66 46	37 84 93 43 89	55 97 49 94 43
60 57 97 54 98	97 81 58 61 51	60 23 67 57 05	83 33 98 49 23
31 01 87 40 81	01 49 40 61 65	70 80 28 81 89	11 59 41 34 47
00 04 73 38 02	73 34 25 43 38	43 35 49 39 50	54 76 53 75 53
55 75 48 69 00	87 93 10 12 38	15 44 92 88 47	82 63 56 85 43
38 05 83 03 46	35 72 27 88 49	92 82 54 05 36	76 78 04 42 64
06 90 44 32 00	89 09 23 09 74	00 70 16 65 89	04 62 25 13 54
48 43 07 91 89	59 69 69 38 30	59 93 99 51 37	65 79 94 11 47
78 55 65 87 76	35 37 02 47 74	57 49 08 58 05	04 16 80 74 03
07 66 20 77 12	70 41 09 94 28	76 51 36 93 39	33 70 13 21 84
98 74 51 23 38	11 08 80 54 54	06 87 15 01 32	50 01 02 40 89
52 92 38 13 43	14 90 82 38 96	01 52 90 94 99	57 66 00 23 09
35 16 59 31 08	32 06 82 15 47	54 73 97 37 96	14 28 37 69 59
65 22 11 22 07	66 07 95 94 34	94 94 61 72 41	82 75 41 80 73
74 45 35 59 75	85 46 39 45 67	49 80 03 00 54	85 78 02 30 94

03 49 66 06 56	69 73 55 50 53	15 39 38 25 29	15 76 08 97 88
64 25 28 09 87	44 41 63 14 38	26 05 53 00 56	15 22 61 10 81
49 22 51 16 47	69 73 37 99 39	86 30 53 50 43	66 21 97 48 31
62 47 61 93 65	16 56 86 25 09	89 14 62 53 24	22 75 93 56 01
21 11 93 11 66	78 38 51 48 75	86 85 79 94 04	91 54 77 49 34
35 08 65 00 39	71 25 14 57 69	27 90 84 89 44	09 01 75 43 97
33 33 07 87 01	88 53 64 13 98	86 41 32 07 09	41 58 96 36 41
68 34 64 53 55	37 07 24 08 32	33 91 55 38 90	19 88 73 41 08
55 52 63 17 47	57 30 90 92 38	78 74 26 99 71	30 14 87 26 47
86 02 05 57 48	08 63 66 37 73	07 22 80 50 82	72 82 19 10 26

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ

При сравнении своих результатов с решениями упражнений, помещенными ниже, читатель должен принять во внимание следующие замечания:

1. Все относительные частоты даны в простейшей форме, т. е. произведено сокращение на общие множители. Так, относительные частоты $8 : 24 : 16$ записаны как $1 : 3 : 2$.

2. Хотя мы не обращали ваше внимание на это в первых главах книги, многие игры имеют более чем одно основное решение. Мы постарались привести все основные решения для игр первых групп упражнений. Альтернативные решения помечены буквами *a*, *b* и т. д. Не исключена возможность, однако, что вы найдете правильное решение, которого не окажется в нашем списке. В таком случае ваше решение есть комбинация двух или трех наших решений.

Для последних групп упражнений, относящихся к играм 4×4 и больше, мы не пытались дать все решения. К тому времени, однако, когда вы дойдете до этих упражнений, вы уже сами сможете определять, правильно ваше решение или нет.

Так как значения цен игр однозначны, ваши результаты должны всегда совпадать с нашими.

Упражнения 1

Упражне- ние	Синие		Красные		Цена игры
	1	2	1	2	
1	1	0	0	1	4
2	0	1	1	0	6
3	0	1	0	1	—7
4	0	1	0	1	6
5	0	1	0	1	3
6	0	1	1	0	3
7	1	1	1	3	$5/2$
8	1	1	1	3	$3/2$
9	1	1	1	3	$1/2$
10	1	1	1	3	0
11	1	1	1	1	0
12	1	1	1	1	$-1/2$
13	1	1	1	1	$9/2$
14	1	1	1	1	$93/2$
15	1	1	5	4	0
16	8	9	10	7	$5/17$
17	0	1	0	1	5
18	3	1	1	1	—1
19	10	1	10	11	$1010/11$
20	4	3	1	1	0

Упражнения 2

Упражне- ние	Синие		Красные								Цена игры
	1	2	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1	0	0	1	0						0
2	1	0	0	1	0	0					-6
3	3	1	0	1	7						7/4
4	7	9	3	0	0	0	0	13	0	0	293/16
5	1	1	0	1	1	0					5/2
6	10	11	0	0	1	20					11/21
7	5	7	7	5	0	0	0				25/12
8	5	4	5	0	0	1	0				-1/3
9	7	6	0	19	0	0	7				-3/13
10	5	3	0	7	0	9	0				-13/8
11	5	7	0	1	0	1					7/2
12	7	6	0	7	6						42/13
13,а	1	1	4	5	0	0	0	0			5
13,б			3	0	5	0	0	0			
13,в			2	0	0	5	0	0			
13,г			0	1	0	0	4	0			
13,д			0	0	1	0	3	0			
13,е			0	0	0	1	2	0			
13,ж			0	3	0	0	0	4			
13,з			0	0	3	0	0	3			
13,и			0	0	0	3	0	2			

Упражне- ние	Синие								Красные		Цена игры
	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	
14	0	0	1						1	0	9
15	1	0	0	0	1				1	1	3
16	1	0	0						0	1	-3
17	1	1	0						1	1	1/2
18	0	0	1						1	1	1
19	1	0	0	0	0	1			1	1	2
20	1	0	0	2	0				2	1	19/3

Упражнения 3

Упражне- ние	Синие			Красные			Цена игры
	1	2	3	1	2	3	
1,а	0	0	1	1	0	0	4
1,б				1	0	1	
2	0	0	1	0	0	1	5
3	0	1	0	1	0	0	2
4,а	0	1	0	0	0	1	4
4,б				1	0	2	
4,в				0	9	7	
5	1	1	1	1	1	1	2/3
6	1	1	1	1	1	1	0
7	2	3	2	2	3	2	8/7
8	1	2	4	1	2	4	15/7
9	18	5	22	25	9	11	142/45
10	21	19	16	16	31	9	67/56
11,а	1	0	1	1	0	1	1
11,б				0	1	0	
12,а	1	0	1	1	0	1	3
12,б	0	1	0				
13,а	0	1	1	9	21	4	3/2
13,б				1	1	0	
14	7	0	1	1	0	3	3/4
15	0	7	1	1	0	3	3/4
16	1	0	6	3	0	4	31/7
17	0	1	2	1	0	1	2
18	2	5	0	0	6	1	12/7
19,а	0	5	2	3	4	0	22/7
19,б				6	1	7	
20	1	1	0	3	1	0	5/2
21	36	11	10	10	25	22	226/57
22	15	19	40	24	35	15	297/74
23	1	1	1	1	1	1	10/3
24	1	1	1	8	2	11	509/3
25	3	0	4	6	0	1	24/7
26	0	1	9	3	0	2	23/5
27	4	5	0	8	0	1	40/9
28	11	9	15	8	14	13	108/35
29,а	0	5	3	1	4	3	23/8
29,б				5	0	3	
30	4	1	0	2	3	0	12/5
31	1	1	1	1	1	1	3

Упражне- ние	С и н н и е			К р а с н ы е						Цена игры
	1	2	3	1	2	3	4	5	6	
1	0	1	0	0	0	1	0			4
2	0	0	1	0	0	0	1			6
3	1	8	9	9	8	1	0			59/18
4	7	5	1	0	4	3	6			15/13
5,а	1	1	0	1	1	0	0			1/2
5,б				0	1	1	0			
5,в				0	0	1	1			
6,а	1	1	0	1	0	3	0			3/2
6,б				1	0	0	1			
6,в				0	1	1	0			
7	10	9	23	0	5	8	1			55/14
8,а	0	1	1	0	0	1	0			3
8,б	0	1	3							
9,а	3	3	2	17	0	3	12	0		17/8
9,б				11	0	9	0	12		
10,а	1	1	1	1	1	1	0	0	0	10/3
10,б				0	0	0	1	1	1	
10,в				3	2	0	1	0	0	
10,г				4	4	0	0	1	0	
10,д				2	0	0	3	0	1	
10,е				0	1	7	0	0	1	
10,ж				0	4	0	0	7	4	
10,з				0	0	4	1	0	1	

Упражне- ние	С и н н и е							К р а с н ы е			Цена игры
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	
11,а	1	0	0	0	1			1	0	2	0
11,б	0	1	0	1	0			0	2	1	
11,в	0	0	1	0	0						
11,г	0	2	0	0	1						
11,б	1	0	0	2	0						
12,а	0	0	13	0	2	0		3	8	10	—68/3
12,б	13	0	0	0	17	0		4	6	11	
13	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1/3
14	0	0	13	2				1	0	4	17/5
15,а	0	0	0	1				1	0	0	3
15,б	1	0	0	1							

Упражнения 5

Упраж- нение	С и н и е						К р а с н ы е								Цена игры
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	8	
1,а	0	1	0	0			0	0	1	0					2
1,б	0	1	1	0											
2	0	1	0	0			0	0	0	1					5
3,а	1	0	0	0			1	0	0	0					3
3,б							1	0	0	2					
4,а	1	0	0	0			0	0	1	0	0				0
4,б							0	0	0	0	1				
4,в	0	0	0	1			0	0	1	0	0				
4,г							0	0	0	0	1				
5	8	3	7	9			5	7	3	3					23/9
6	76	92	78	89			61	72	161	41					688/335
7	109	130	11	276			132	235	68	91					2101/526
8	0	0	1	2			1	1	0	0					5
9	38	0	0	21	12	0	0	49	8	14					147/71
10	61	72	161	41			76	0	0	92	78	89	0	0	688/335
11	28	33	31	21	29		4	35	6	57	40				149/142
12	520	247	233	348	378		332	849	34	266	245				6703/1726
13	5	51	9	25	19		1096	2086	493	139	764				324/109
14	415	540	660	245	405		273	352	535	665	440				2765/453
15	0	0	1	2	0		1	1	0	0	0				5
16	0	0	0	5	4		0	2	0	1	0				8/3
17	2	0	1	0	0		0	0	0	5	4				11/3
18	36	11	0	0	10		10	25	0	22	0				226/57
19	10	9	23	0	0	0	0	0	5	8	0	1			27/14
20,а	1	1	1	1			0	1	3	0	6				0
20,б							6	5	3	6	0				
21	132	0	235	68	0	91	109	130	11	276	0	0	0		2101/526
22	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1				3

Упражнение 6

С и н и е				К р а с н ы е				Цена игры
1	2	3	4	1	2	3	4	
7	0	0	4					0
17	7	0	12					
0	28	51	65					
28	0	3	17					
0	0	1	1					
				0	0	1	3	

ЛИТЕРАТУРА

На русском языке

Мак-Кинзи Дж. К. Введение в теорию игр. Перевод с английского под ред. Юдина Д. Б. Физматиздат. (Готовится к изданию).

Льюс Р., Райффа Х. Игры и решения. Введение и критический обзор. Перевод с английского под ред. Юдина Д. Б. Изд-во иностранной литературы. (Готовится к изданию).

Блекуэлл Д., Гиршик М. Теория игр и статистических решений. Изд-во иностранной литературы, 1958.

Морз Ф., Кимбелл Дж. Методы исследования операций. «Советское радио», 1956.

Воробьев Н. Н. О коалиционных играх. Доклады АН СССР, т. 124, 1959, стр. 253—256.

Современная математика для инженеров. Под ред. Беккенбаха. Изд-во иностранной литературы, 1959. (Статья Боненблеста Г. Ф. «Теория игр», стр. 216—236.)

Вентцель Е. С. Элементы теории игр. Физматиздат, 1959.

Полетаев И. А. Сигнал. «Советское радио», 1958.

Линейные неравенства и смежные вопросы. Сборник переводов под редакцией Канторовича Л. В. и Новожилова В. В. Изд-во иностранной литературы, 1959. (Там же имеется библиография журнальных статей по теории игр.)

На иностранных языках

Von Neumann J., Morgenstern O. Theory of games and economic behaviour, Princeton, 1953.

Contributions to the theory of games, vol. 1, Editors H. W. Kuhn, A. W. Tucker. Annales of Math. Studies, № 24, Princeton, 1950.

Contributions to the theory of games, vol. 2. Editors H. W. Kuhn, A. W. Tucker. Annales of Math. Studies, № 28, Princeton, 1953.

Contributions to the theory of games, vol. 3. Editors M. Dresher, H. W. Kuhn, A. W. Tucker, P. Wolfe. Annales of Math. Studies, № 39, Princeton, 1957.

Contributions to the theory of games, vol. 4. Editors R. D. Luce, A. W. Tucker. Annales of Math. Studies, № 40, Princeton, 1958.

H. W. Kuhn. Lectures on the theory of games. Annales of Math. Studies, № 37, Princeton, 1957.

Karlin, Samuel. Mathematical methods and theory of games Programming and Economics, 2 vv. Addison—Wesley Publ. Comp., Reading, Massachusetts, 1959.

VIVOS VOCO!

Сетевая образовательная библиотека

<http://vivovoco.nns.ru>

<http://vivovoco.rsl.ru>

<http://www.ibmh.msk.su/vivovoco>