



В.Г.ДЕМИН

**ДВИЖЕНИЕ
ИСКУССТВЕННОГО
СПУТНИКА
В НЕЦЕНТРАЛЬНОМ
ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ**

МЕХАНИКА КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

В. Г. ДЕМИН

**ДВИЖЕНИЕ
ИСКУССТВЕННОГО
СПУТНИКА
В НЕЦЕНТРАЛЬНОМ
ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. Демин В. Г. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1968, 352 стр.

В книге излагаются аналитические и качественные методы исследования движения искусственных спутников в нецентральной поле тяготения, способы построения промежуточных орбит спутника осесимметричной планеты. Основное внимание уделяется задаче двух неподвижных центров и ее модификациям, нашедшим применение в небесной баллистике. Дается классификация форм движения в этой задаче и подробно изучается наиболее важный класс спутниковых траекторий. Приводятся рабочие формулы, пригодные для нужд долгосрочного прогнозирования движения искусственных спутников. Кроме того, рассматривается ограниченная круговая задача трех тел и некоторые модельные задачи небесной баллистики.

Качественные свойства движения (устойчивость, периодичность и почти периодичность) в основном исследуются классическими методами А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова, а также с помощью результатов, полученных В. И. Арнольдом. Специфика применения этих методов проиллюстрирована на отдельных конкретных примерах, взятых из динамики космического полета. Вывод уравнений движения, их преобразование и решение выполняются методами аналитической динамики.

В книге содержатся необходимые сведения из теории ньютоновского потенциала, аналитической динамики и качественных методов небесной механики. Книга рассчитана на научных работников, инженеров и студентов, занимающихся небесной баллистикой и небесной механикой.

Табл. 4. Илл. 21. Библ. 209 наз.

Владимир Григорьевич Демин

Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения

(Серия: «Механика космического полета»)

М., 1968 г., 352 стр. с илл.

Редактор А. А. Могилевский

Техн. редактор Л. А. Пыжова

Корректор А. Ф. Серкина

Сдано в набор 4/1 1968 г. Подписано к печати 12/VI 1968 г. Бумага 84×108^{1/32}.
Физ. печ. л. 11. Условн. печ. л. 18,48. Уч.-изд. л. 17,12.
Тираж 3200 экз. Т-08387. Цена книги 1 р. 28 к. Заказ № 195.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Г л а в а I. Необходимые сведения из аналитической динамики	11
§ 1. Уравнения Лагранжа	11
§ 2. Характеристические функции в динамике	17
§ 3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в криволинейных координатах	22
§ 4. Канонические преобразования. Теорема Якоби	34
§ 5. Интегрирование уравнения Гамильтона — Якоби методом разделения переменных	40
§ 6. Интегрирование уравнения Гамильтона — Якоби в сферических координатах	46
§ 7. Движение в центральном поле сил. Задача двух тел	49
§ 8. Интегрирование уравнения Гамильтона — Якоби в сфероидальных и параболаидальных координатах	56
§ 9. Условно-периодические функции	60
§ 10. Условно-периодические движения	65
§ 11. Задача о возмущенном движении	76
Г л а в а II. Потенциал ньютоновского притяжения абсолютно твердого тела	80
§ 1. Потенциал объемных масс. Уравнение Лапласа	80
§ 2. Сферические функции. Полиномы Лежандра	84
§ 3. Разложение потенциала твердого тела в ряд по сферическим функциям	93
§ 4. Потенциал земного тяготения	99
§ 5. Гравитационные потенциалы других тел солнечной системы	103
Г л а в а III. Методы построения промежуточных орбит	107
§ 1. Постановка задачи	107
§ 2. Задача двух неподвижных центров	109
§ 3. Способ Гарфинкеля	119
§ 4. Задача Баррара	122
§ 5. Решение задачи Баррара	126
§ 6. Обобщенная задача двух неподвижных центров	130
§ 7. Приближенное решение обобщенной задачи двух неподвижных центров	142
§ 8. Предельный вариант задачи двух неподвижных центров и его применение в небесной баллистике	149
§ 9. Качественные оценки аппроксимирующих потенциалов	154

Глава IV. Качественный анализ форм движения спутника сфероидальной планеты	160
§ 1. Движения эллиптического типа	160
§ 2. Движения параболического типа	184
§ 3. Движения гиперболического типа	190
§ 4. Полярные орбиты	198
Глава V. Определение промежуточных орбит искусственных спутников	207
§ 1. Обращение квадратур в основном спутниковом случае	207
§ 2. Разложение координат спутника в ряды	214
§ 3. Второй способ приближенного представления координат	221
§ 4. Уравнение времени	223
§ 5. Определение элементов орбиты спутника	229
Глава VI. Периодические и почти периодические движения искусственных небесных тел	234
§ 1. Метод Пуанкаре. Критерии периодичности	234
§ 2. Применение метода Пуанкаре к квазилиувиллевым динамическим системам	244
§ 3. О периодических движениях спутника в поле тяготения медленно вращающейся планеты	248
§ 4. Почти круговые орбиты спутника	254
§ 5. Периодические орбиты искусственного спутника Луны	261
§ 6. Периодические решения ограниченной круговой задачи трех тел	266
§ 7. Метод Уиттекера. Почти периодические орбиты спутника сфероидальной планеты	274
Глава VII. Устойчивость спутниковых движений	278
§ 1. Задача об устойчивости по отношению к части переменных. Теорема В. В. Румянцева	278
§ 2. Способ Н. Г. Четаева. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях	288
§ 3. Устойчивость круговых орбит спутника	296
§ 4. Устойчивость сфероидальных и гиперболоидальных орбит	305
§ 5. Устойчивость орбит искусственных небесных тел по отношению к каноническим элементам при постоянно действующих возмущениях	309
§ 6. Устойчивость орбит центра масс стреловидного спутника	314
§ 7. Уравнения возмущенного движения для квазиштекелевых систем в переменных «действие — угол»	319
§ 8. Об устойчивости спутниковых орбит при постоянно действующих консервативных возмущениях	324
§ 9. Об устойчивости движения в ограниченной круговой задаче трех тел	334
Литература	343

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена проблемам, находящимся на стыке двух наук: классической небесной механики и переживающей стадию становления небесной баллистики. Формируясь в недрах небесной механики, небесная баллистика вследствие специфики стоящих перед ней задач наряду с методами небесной механики широко использует и ряд методов других разделов механики. Существо задач небесной баллистики обуславливает внедрение в нее методов теории оптимальных процессов и теории автоматического регулирования. На ее формирование исключительно сильное влияние оказали новые методы вычислительной математики, опирающиеся на широкие возможности быстродействующих электронных вычислительных машин (ЭВМ).

Хотя успехи в запусках космических аппаратов в значительной мере связаны с применением для траекторных расчетов (а также и для оперативной коррекции орбит) ЭВМ, тем не менее вряд ли было бы правильным при определении перспектив развития небесной баллистики считать достаточным развитие лишь численных методов. Определение путей развития новой науки не должно основываться на чисто утилитарном подходе, не могущем учесть далекие перспективы. На первом этапе развития небесной баллистики «проектирование» орбит приходилось выполнять на основе анализа сотен и тысяч траекторий, полученных численным интегрированием на ЭВМ. Поэтому было вполне естественно поставить задачу о разработке приближенной, достаточно простой аналитической теории, которая была бы более удобной и экономичной. Подобная теория позволяла бы без проведения громоздких расчетов выбирать начальные условия для орбит космических

аппаратов с заранее заданными свойствами. Создание точной аналитической теории давало бы возможность без численного интегрирования прогнозировать движение на длительных интервалах времени. Наконец, такая теория необходима для определения параметров гравитационных полей Земли, других планет, Луны.

Многое в динамике космических аппаратов могут дать и качественные методы. Здесь можно указать на значение последних при определении начальных условий для периодических или почти периодических орбит, для устойчивых в том или ином смысле движений. Наконец, даже только качественное исследование структуры общего интеграла неинтегрируемой проблемы позволяет выбрать наиболее подходящий метод численного решения. Поэтому целесообразным представляется разумное сочетание численных, аналитических и качественных методов.

Исходя из этих соображений, в книгу были включены отдельные «модельные» задачи небесной баллистики, которые в первом приближении дают возможность несложным путем выполнять необходимые расчеты и служат основой для построения точных теорий возмущенного движения. Эти задачи успешно использовались как советскими, так и зарубежными учеными. Очевидно, что накопление модельных задач составляет одну из сторон процесса формирования небесной баллистики. В небесной механике такие задачи называются упрощенными или невозмущенными, а соответствующие им орбиты — промежуточными. Таким образом, можно сказать, что основное содержание книги посвящено теории промежуточных орбит космических аппаратов.

Из всего многообразия задач небесной баллистики в книге рассматриваются те из них, которые связаны с исследованием движения космического аппарата, принимаемого за материальную точку, в нецентральной поле тяготения. К этим задачам естественно относить не только движение искусственного спутника в поле тяготения сферической планеты, но и ограниченную круговую задачу трех тел, задачу о движении космического корабля в ньютоновском центральном поле при наличии сил светового давления и т. д. Такую задачу можно назвать общей ограниченной задачей небесной механики и определить ее следующей

системой дифференциальных уравнений движения:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= U'_x, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= U'_y, \\ \ddot{z} &= U'_z,\end{aligned}$$

в которой

$$U = \frac{f_m}{r} + \mu R(x, y, z, t, \mu),$$

причем f — постоянная тяготения, m — масса притягивающего тела, r — радиус-вектор движущейся точки, n — угловая скорость вращения системы координат, μR — пертурбационная функция, μ — малый параметр.

Главное внимание будет уделяться задаче о движении искусственного спутника в поле тяготения сфероидальной планеты. Количество исследований этой задачи столь велико, что изложить даже основные из них в небольшой по объему книге не представляется возможным. Поэтому предпочтение отдается одной из задач, а именно, обобщенной задаче двух неподвижных центров, которая привлекла внимание многих ученых и представляется автору наиболее перспективной. Можно ожидать, что она займет в небесной механике такое же место, как задача двух тел, круговая задача трех тел и т. д. Наряду с этим в книге приводятся и альтернативные варианты построения теории движения спутников. Автор стремился дать последовательное и возможно более полное изложение полученных в этой задаче результатов, что восполнило бы пробел, существующий в литературе и затрудняющий применение новой теории на практике.

Размеры книги, к сожалению, не позволили автору включить имеющий принципиальное теоретическое, а также и большое практическое значение метод Делоне. Будучи общим для теории возмущений, этот метод приводит к построению формального решения в чисто тригонометрической форме, т. е. по крайней мере в практическом плане позволяет преодолеть основную для небесномеханических задач трудность — возникновение в приближенном решении вековых членов, которые являются бичом для любой другой формально-аналитической теории. Метод Делоне в небесной баллистике был успешно применен в задаче о движении

искусственных спутников Земли (ИСЗ) Д. Брауером и И. Козаи.

Автор придает большое значение развитию качественных методов анализа уравнений небесной баллистики, в связи с чем в книге дано краткое изложение двух фундаментальных методов: метода малого параметра Пуанкаре и второго метода А. М. Ляпунова. Особенности их применения в небесной баллистике проиллюстрированы на отдельных задачах. Также представлялось полезным включить в книгу исследование устойчивости и условной периодичности движения ИСЗ, опираясь на результаты, полученные В. И. Арнольдом при изучении гамильтоновых систем.

Изложение как теории промежуточных орбит, так и ряда вопросов качественного анализа связано с применением аппарата аналитической механики. Поэтому автор счел полезным включить в книгу специальную главу, содержащую сведения из аналитической механики.

Большая часть книги составляет содержание лекций, прочитанных автором в разные годы на физическом и механико-математическом факультетах Московского университета, а также на факультете физико-математических и естественных наук Университета Дружбы Народов им. П. Лумумбы.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую признательность коллективу кафедры небесной механики и гравиметрии МГУ и, в частности, проф. Г. Н. Дубошину и проф. Б. М. Щиголеву за полезные обсуждения ряда исследований, включенных в эту книгу. С неизменным удовольствием автор вспоминает о совместной работе с Е. А. Гребениковым и Е. П. Аксеновым над проблемами, затронутыми в этой книге. Автор выражает искреннюю благодарность чл.-корр. АН СССР Д. Е. Охочимскому и проф. В. В. Белецкому за проявленное ими внимание и добрые советы, А. Л. Куницыну за большую помощь и полезную критику, а также Г. Т. Аразову за помощь в оформлении рукописи.

Автор будет благодарен за замечания и советы.

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

§ 1. Уравнения Лагранжа

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из s материальных точек. Будем предполагать, что на систему наложено p голономных, идеальных, двусторонних связей. Обозначим через $m_1, m_2, \dots, m_s$ массы материальных точек, а через $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s$ — их радиусы-векторы в некоторой инерциальной системе декартовых координат. Пусть, наконец, $\mathbf{F}_v$ — равнодействующая всех активных сил, приложенных к v -й материальной точке.

В натуральных динамических системах приложенные силы задаются при помощи специальной функции-потенциала, или силовой функции. Эта функция предполагается зависящей от времени и координат точек системы. А. Майер [1—2] распространил понятие потенциала на более общий случай, в котором силы $\mathbf{F}_v$ в прямоугольной системе декартовых координат x, y, z определяются соотношениями

$$\mathbf{F}_v = \text{grad}_{(x_v, y_v, z_v)} U - \frac{d}{dt} [\text{grad}_{(\dot{x}_v, \dot{y}_v, \dot{z}_v)} U], \quad (1.1)$$

где функция U зависит не только от времени и координат материальных точек, но также и от компонент скоростей. Такую функцию U условимся называть потенциалом Майера *).

Отмеченное расширение понятия потенциала оказывается удобным для описания движения при наличии гироскопических сил. Потенциал Майера, в частности, применим при рассмотрении движения в неинерциальных системах отсчета, в которых возникают кориолисовы силы инерции. В небесной баллистике потенциал Майера можно

*) Общие условия существования потенциала приводятся в работах Гельмгольца [3] и Гирша [4].

использовать в ограниченной круговой задаче трех тел (например, в проблеме достижения Луны), в задаче о движении спутника в гравитационном поле вращающейся планеты и т. д.

Запишем уравнения движения, предполагая дополнительно, что наряду с силами вида (1.1) к точкам системы приложены силы Φ_v , не обладающие потенциалом:

$$m_v \ddot{\mathbf{r}}_v = \mathbf{F}_v + \Phi_v + \mathbf{R}_v \quad (v = 1, 2, \dots, s), \quad (1.2)$$

где $\mathbf{R}_v$ — равнодействующая всех пассивных сил, приложенных к v -й точке.

Так как, по предположению, связи являются идеальными, то на любом возможном перемещении работа сил реакций равна нулю:

$$\sum_{v=1}^s \mathbf{R}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0. \quad (1.3)$$

Преобразуем уравнения движения (1.2) к обобщенным (лагранжевым) координатам $q_1, q_2, \dots, q_n$ ($n = 3s - p$), определяемым соотношениями

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(t, q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (1.4)$$

Если в формулу (1.3) вместо $\mathbf{R}_v$ подставить их выражения из (1.2), то придем к соотношению

$$\sum_{v=1}^s (m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v - \Phi_v) \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0. \quad (1.5)$$

Вычислим вариации радиусов-векторов $\mathbf{r}_v$ при помощи формул преобразования (1.4):

$$\delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.6)$$

Подстановка в (1.5) полученных значений для вариаций и изменение порядка суммирования дают

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{v=1}^s (m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v - \Phi_v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right\} \delta q_i = 0. \quad (1.7)$$

Из (1.7) в силу независимости вариаций обобщенных координат следует

$$\sum_{v=1}^s \left(m_v \ddot{\mathbf{r}}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} - \mathbf{F}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} - \Phi_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right) = 0, \quad (1.8)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Если употреблять обозначения, использованные в (1.1), то уравнения (1.8) запишутся в форме

$$\sum_{v=1}^s \left\{ m_v \ddot{\mathbf{r}}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} [\text{grad}_{(\dot{x}_v, \dot{y}_v, \dot{z}_v)} U] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} - \text{grad}_{(x_v, y_v, z_v)} U \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} - \Phi_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right\} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.9)$$

Дифференцируя формулы преобразования (1.4), нетрудно установить, что будут справедливы тождества

$$\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n; v = 1, 2, \dots, s).$$

Тогда с помощью этих тождеств выражение $\sum m_v \ddot{\mathbf{r}}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i}$ можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^s m_v \ddot{\mathbf{r}}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} &= \sum_{v=1}^s \left[\frac{d}{dt} \left(m_v \dot{\mathbf{r}}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} - m_v \dot{\mathbf{r}}_v \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{v=1}^s m_v \dot{\mathbf{r}}_v \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^s \frac{\partial}{\partial q_i} (m_v \dot{\mathbf{r}}_v^2) = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{v=1}^s \frac{m_v \dot{\mathbf{r}}_v^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{v=1}^s \frac{m_v \dot{\mathbf{r}}_v^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Обозначая через T живую силу системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^s m_v \dot{\mathbf{r}}_v^2, \quad (1.11)$$

вместо (1.10) получим

$$\sum_{v=1}^s m_v \ddot{\mathbf{r}}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}. \quad (1.12)$$

Аналогичным образом преобразуются второе и третье слагаемые левой части (1.9)

$$\sum_{v=1}^s \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d}{dt} [\text{grad}_{(\dot{x}_v, \dot{y}_v, \dot{z}_v)} U] - \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \cdot \text{grad}_{(x_v, y_v, z_v)} U \right\} = \\ = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (1.13)$$

Введем, наконец, величины

$$Q_i = \sum_{v=1}^s \Phi_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i}, \quad (1.14)$$

которые в механике называются обобщенными силами.

Подставляя в (1.9) вместо соответствующих выражений их значения из (1.12) — (1.14), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.15)$$

Вводя функцию Лагранжа (лагранжиан)

$$L = T + U, \quad (1.16)$$

окончательно будем иметь следующие дифференциальные уравнения движения:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.17)$$

которые называются уравнениями Лагранжа второго рода.

Если движение происходит только под действием потенциальных сил, т. е. когда $Q_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то уравнения (1.17) принимают особенно простой вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.18)$$

Заметим, что входящая в лагранжиан живая сила T в общем случае имеет следующую структуру:

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (1.19)$$

где T_2 , T_1 , T_0 суть однородные формы относительно обоб-

щенных скоростей $\dot{q}_i$ соответственно второй, первой и нулевой степени *).

П р и м е р. Рассмотрим движение пассивно гравитирующей точки (притягиваемой, но не притягивающей) массы m в ньютоновском поле тяготения абсолютно твердого тела, равномерно вращающегося вокруг перманентной оси с постоянной угловой скоростью n . Возьмем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$, жестко связанную с телом. Начало координат поместим в центре масс тела O , за основную координатную плоскость примем экваториальную плоскость тела, а ось аппликат направим вдоль оси вращения в сторону северного полюса (рис. 1).

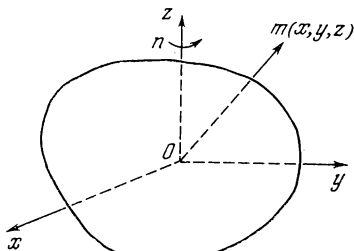


Рис. 1.

Обозначим гравитационный потенциал тела, отнесенный к массе движущейся точки, через $U(x, y, z)$. В выбранной системе координат на движущуюся точку кроме сил ньютоновского тяготения действуют кориолисова и центробежная силы инерции. Кориолисова сила $\{2n\dot{y}; -2n\dot{x}; 0\}$ может быть задана потенциалом Майера U_1 :

$$U_1 = n(x\dot{y} - y\dot{x}), \quad (1.20)$$

а потенциал центробежной силы инерции $(n^2x; n^2y; 0)$ определяется формулой

$$U_2 = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (1.21)$$

Живая сила T , отнесенная к массе точки, в ее движении относительно избранной системы координат равна

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (1.22)$$

Тогда лагранжиан задачи в соответствии с (1.1) и (1.16) запишется в виде

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + n(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + U(x, y, z). \quad (1.23)$$

*) В пособиях по механике (см., например, [5]) неточно утверждается, что при стационарных связях $T_1 = T_0 = 0$. В самом деле, даже при стационарных связях кинетическая энергия системы T может содержать члены T_1 и T_0 , если формулы преобразования к лагранжевым координатам (1.4) содержат время явным образом.

Из (1.18) и (1.23) получаем уравнения движения задачи:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Аналогичный вид имеют уравнения движения в ограниченной круговой задаче трех тел, которая была положена в основу исследований по динамике полета к Луне [6, 7], а также в проблеме движения далеких искусственных спутников Земли при учете лунно-солнечных возмущений.

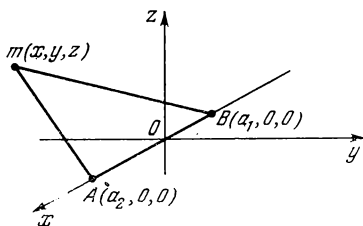


Рис. 2.

Эта классическая задача состоит в изучении движения пассивно гравитирующей точки, притягиваемой по ньютоновскому закону к двум другим материальным точкам, которые условно будем называть Землей *A* и Луной *B*. Предполагается, что Земля и Луна обращаются

вокруг общего центра масс по круговым кеплеровским орбитам на расстоянии *a* друг от друга, обладая средним движением *n*.

Возьмем равномерно вращающуюся прямоугольную систему координат, основная плоскость которой совпадает с плоскостью орбит Земли и Луны. Начало координат поместим в центре инерции системы Земля — Луна, а ось абсцисс проведем через *A* и *B* (рис. 2). Уравнения движения будут иметь вид (1.24). Гравитационный потенциал *U* определяется следующей формулой:

$$U = \frac{fm_1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{fm_2}{\sqrt{(x-a_2)^2 + y^2 + z^2}}, \quad (1.25)$$

в которой *f* — постоянная тяготения, *m₂* и *m₁* — массы Луны и Земли соответственно. Так как начало координат взято в центре инерции системы Земля — Луна, то для *a₁* и *a₂* справедливы очевидные равенства:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{m_2 a}{m_1 + m_2}, \\ a_2 &= -\frac{m_1 a}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

§ 2. Характеристические функции в динамике

Из уравнений (1.18) видим, что для описания движения механической системы в случае потенциальных сил достаточно построить определенным образом некоторую функцию обобщенных координат и скоростей — лагранжиан L . Подобного рода функции, которые можно использовать для описания движения, будем называть характеристическими *). Другим примером характеристической функции, нашедшей широкое применение в аналитической динамике, является функция Гамильтона (гамильтониан). Менее известны характеристические функции В. М. Татевского [8, 9] и К. М. Райзина [10, 11]. Переход от одной из этих функций к другой выполняется с помощью преобразования обобщенных координат или обобщенных скоростей (или и тех, и других) к новым переменным, причем преобразованию подвергаются все n обобщенных координат (или скоростей). Единственным исключением является преобразование Рауса [12], приводящее к смешанной, лагранжево-гамильтоновой форме уравнений движения. Если обобщенные координаты и скорости разбить на несколько групп и каждую из групп подвергнуть различному преобразованию, то в результате можно получить наиболее общую форму характеристической функции, а, стало быть, и наиболее общую форму уравнений движения. Эта форма была указана в статье [13].

Пусть движение механической системы определяется уравнениями (1.18). Выполним преобразование обобщенных координат $q_{l+1}, q_{l+2}, \dots, q_n$ и обобщенных скоростей $\dot{q}_{k+1}, \dot{q}_{k+2}, \dots, \dot{q}_m$ к новым переменным $s_{l+1}, s_{l+2}, \dots, s_n$ и $p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_m$ при помощи формул

$$s_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = l + 1, \dots, n), \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = k + 1, \dots, m), \quad (2.1)$$

предполагая, что $0 \leq k \leq l \leq m \leq n$. Если якобиан

*) Термин «характеристическая функция» употребляется здесь в отличающемся от общепринятого понимания более широком смысле (см., например, [8]).

преобразования отличен от нуля

$$\frac{D\left(\frac{\partial L}{\partial q_{l+1}}, \dots, \frac{\partial L}{\partial q_n}, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{k+1}}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right)}{D(q_{l+1}, \dots, q_n, \dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_m)} \neq 0, \quad (2.2)$$

то уравнения (2.1) можно разрешить относительно преобразуемых лагранжевых переменных. Величины p_i называются обобщенными импульсами, а величины s_i , которые в силу уравнений (1.18) совпадают с соответствующими $\dot{p}_i$, будем называть импульсами второго порядка.

Из (2.1) видим, что для выполняемого преобразования характерно то, что состояние движения системы определяется для одной группы степеней свободы обобщенными координатами и скоростями, для другой группы — обобщенными координатами и импульсами и, наконец, для последней группы — обобщенными импульсами и их производными.

Рассмотрим функцию M^* , определяемую соотношением

$$M^* = -L + \sum_{i=k+1}^m p_i \dot{q}_i + \sum_{i=l+1}^n s_i q_i. \quad (2.3)$$

Разрешая уравнения (2.1) относительно старых переменных, что возможно в силу условия (2.2), и заменяя в (2.3) соответствующие q_i и $\dot{q}_i$ через p_i и s_i , получим

$$M(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, p_{k+1}, \dots, p_m, s_{l+1}, \dots, s_n, \dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n) = \\ = M^*_{\substack{\dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_m \rightarrow p_{k+1}, \dots, p_m \\ q_{l+1}, \dots, q_n \rightarrow s_{l+1}, \dots, s_n}}. \quad (2.4)$$

Полная вариация этой функции будет равна

$$\delta M = \sum_{i=1}^l \frac{\partial M}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \\ + \sum_{i=1}^k \frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=k+1}^m \frac{\partial M}{\partial p_i} \delta p_i + \sum_{i=l+1}^n \frac{\partial M}{\partial s_i} \delta s_i. \quad (2.5)$$

С другой стороны, варьируя явное выражение для M ,

получающееся из (2.3) и (2.1), находим

$$\delta M = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) + \\ + \sum_{i=k+1}^m (p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i) + \sum_{i=l+1}^n (s_i \delta q_i + q_i \delta s_i). \quad (2.6)$$

Если сопоставить (2.5) и (2.6) и учесть формулы преобразования (2.1), то в силу произвольности входящих в (2.5) и (2.6) вариаций будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial q_i} &= - \frac{\partial L}{\partial q_i} (i=1, 2, \dots, l), \quad \frac{\partial M}{\partial p_i} = \dot{q}_i (i=k+1, \dots, m), \\ \frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} &= - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (i=1, 2, \dots, k, m+1, \dots, n), \quad \frac{\partial M}{\partial s_i} = q_i \\ &\quad (i=l+1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

В таком случае дифференциальные уравнения движения примут следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial M}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k); \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial s_i} \right) - \frac{\partial M}{\partial p_i} = 0 \quad (i=l+1, \dots, m); \quad (2.9)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial M}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial M}{\partial q_i} \quad (i=k+1, \dots, l); \quad (2.10)$$

$$- \dot{p}_i = \frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i}, \quad q_i = \frac{\partial M}{\partial s_i} \quad (i=m+1, \dots, n). \quad (2.11)$$

Так как $s_i = \dot{p}_i$, то подсистему (2.9) можно записать также в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial M}{\partial p_i} = 0 \quad (i=l+1, \dots, m), \quad (2.12)$$

а подсистема (2.11) примет вид

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad \dot{q}_i = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{p}_i} \right) \quad (i=m+1, \dots, n). \quad (2.13)$$

Таким образом, движение механической системы будет описываться системой уравнений (2.8), (2.10), (2.12) и (2.13).

Если в преобразовании (2.1) $k = 0$ и $l = n$, то уравнения движения приобретают гамильтонову форму (2.10), а функция M в этом случае представляет собой характеристическую функцию Гамильтона, которую по традиции обозначим через H :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.14)$$

причем гамильтониан H определяется формулой

$$H = -L + \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i. \quad (2.15)$$

Если $l = m = n$ в преобразовании (2.1), то уравнения движения состоят только из подсистем (2.8) и (2.10) и, следовательно, имеют смешанную лагранжево-гамильтонову форму

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial M}{\partial q_i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial M}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial M}{\partial q_i} \quad (i = k+1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Уравнения движения (2.16) называют уравнениями Рауса. Характеристическую функцию уравнений (2.16) назовем раусовой и согласно (2.3) для нее будем иметь

$$M = -L + \sum_{i=k+1}^n p_i \dot{q}_i, \quad (2.17)$$

где преобразуемые переменные должны быть с помощью формул преобразования выражены через новые переменные.

Уравнения Рауса удобны при исследовании поступательно-вращательного движения искусственных небесных тел. В этой задаче в качестве канонических переменных q_i , p_i , входящих в подсистему гамильтоновых уравнений, целесообразно принять оскулирующие кеплеровские элементы орбиты центра масс космического аппарата, мед-

ленно меняющиеся во времени, а в качестве обобщенных координат для подсистемы лагранжевых уравнений — углы Эйлера.

Если $l = 0$, $m = n$, то уравнения движения имеют лагранжеву форму, однако характеристическая функция будет выражена через импульсы первого и второго порядков. Эта характеристическая функция была указана В. М. Татевским [8, 9]. Случай $m = 0$ также был указан В. М. Татевским [9] и позже подробно исследован К. М. Райзиным [10, 11]. При иных ограничениях на k , l , m и n можно получить новые формы уравнений динамики.

Отметим здесь еще один частный случай, который получается при $k = l \leq m = n$. Уравнения движения запишутся в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M_1}{\partial \dot{p}_{1i}} \right) - \frac{\partial M_1}{\partial p_{1i}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.18)$$

где $M_1 = M$, $p_{1i} = p_i$.

Положим далее

$$p_{2i} = \frac{\partial M}{\partial \dot{p}_{1i}}, \quad \dot{p}_{2i} = \frac{\partial M}{\partial p_{1i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.19)$$

предполагая при этом, что якобиан преобразования (2.19) отличен от нуля. Величины p_{2i} назовем импульсами третьего порядка. Тогда, полагая

$$M_2^* = M_1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial M_1}{\partial \dot{p}_{1i}} \dot{p}_{1i} + \frac{\partial M_1}{\partial p_{1i}} p_{1i} \right), \quad (2.20)$$

после несложных преобразований получим уравнения движения в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M_2}{\partial \dot{p}_{2i}} \right) - \frac{\partial M_2}{\partial p_{2i}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.21)$$

где M_2 обозначает результат подстановки в (2.20) вместо $\dot{p}_{1i}$ и p_{1i} их выражений из (2.19) через p_{2i} и $\dot{p}_{2i}$.

Преобразование типа (2.19) может быть повторено s раз, если всякий раз предполагать, что соответствующие якобианы отличны от нуля. В результате получим лагранжеву систему уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M_s}{\partial \dot{p}_{si}} \right) - \frac{\partial M_s}{\partial p_{si}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.22)$$

в которой через p_{si} обозначены импульсы $s + 1$ -го порядка. Эти импульсы и их производные $\dot{p}_{si}$ задаются при помощи формул

$$p_{si} = \frac{\partial M_{s-1}}{\partial \dot{p}_{s-1, i}}, \quad \dot{p}_{si} = \frac{\partial M_{s-1}}{\partial p_{s-1, i}}. \quad (2.23)$$

Для нового лагранжиана имеем

$$M_s = \left\{ M_{s-1} - \sum_{i=1}^n (\dot{p}_{si} \dot{p}_{s-1, i} + p_{si} p_{s-1, i}) \right\}_{p_{s-1, i}, \dot{p}_{s-1, i} \rightarrow p_{si}, \dot{p}_{si}}. \quad (2.24)$$

Инвариантность лагранжевой формы уравнений при переходе к импульсам высших порядков очевидна для задачи о малых колебаниях, если в качестве обобщенных координат используются нормальные координаты, ибо в этом случае импульсы высших порядков пропорциональны производным соответствующего порядка по времени от обобщенных координат. В общем случае лагранжева форма уравнений в пространстве импульсов высших порядков является следствием вариационной природы законов механики.

Уравнениям (2.22) соответствует принцип наименьшего действия в форме

$$\delta \int_{t_0}^t M_s(p_{si}, \dot{p}_{si}) dt = 0. \quad (2.25)$$

§ 3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в криволинейных координатах

Рассмотрим задачу о движении свободной материальной точки в потенциальном поле сил и получим уравнения движения в наиболее употребительных в небесной баллистике системах ортогональных криволинейных координат.

Пусть прямоугольные декартовы координаты точки x, y, z выражаются через три новые взаимно независимые переменные q_1, q_2, q_3 при помощи однозначных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Предположим, что обратное преобразование

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q_1(x, y, z), \\ q_2 &= q_2(x, y, z), \\ q_3 &= q_3(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

также однозначно.

Такие переменные q_1, q_2, q_3 образуют систему криволинейных координат. Частными видами систем криволинейных координат являются цилиндрические, сферические, эллипсоидальные, параболоидальные координаты.

Сделав определенный выбор системы криволинейных координат и рассматривая одно из уравнений (3.2) $q_i = q_i(x, y, z)$, находим, что уравнению $q_i = \text{const}$ в пространстве соответствует определенная поверхность, которая называется координатной.

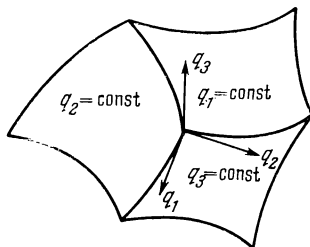


Рис. 3.

Каждая точка пространства определяется пересечением трех координатных поверхностей

$$q_i = c_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.3)$$

Пересечение двух координатных поверхностей определяет координатную линию. Вдоль координатной линии две криволинейные координаты сохраняют свои значения неизменными.

Через каждую точку пространства проходят три координатные линии (рис. 3): линия q_1 , на которой постоянны координаты q_2 и q_3 , линия q_2 , вдоль которой сохраняют постоянные значения q_1 и q_3 , и, наконец, линия q_3 , на которой неизменными остаются координаты q_1 и q_2 .

Касательные к координатным линиям можно назвать осями криволинейных координат. Система координат будет ортогональной, если в каждой точке пространства координатные оси взаимно перпендикулярны. Нетрудно установить, что условие ортогональности системы криво-

линейных координат запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial z}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_3} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial y}{\partial q_3} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_3} \frac{\partial z}{\partial q_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

При составлении уравнений Лагранжа необходимо выразить живую силу материальной точки через обобщенные скорости. Для этой цели предварительно нужно вычислить квадрат линейного элемента ds . При помощи (3.1) получаем

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \quad (3.5)$$

где H_1 , H_2 и H_3 суть коэффициенты Ламе, определяемые формулами

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.6)$$

При помощи (3.5) приходим к следующему выражению для квадрата скорости точки:

$$v^2 = H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2. \quad (3.6')$$

Так как в задачах небесной баллистики силовая функция в подавляющем большинстве случаев пропорциональна массе движущейся точки, то в лагранжевы уравнения движения эта масса не входит. Поэтому под величинами U и L будем понимать соответственно силовую функцию и лагранжиан, отнесенные к массе движущейся точки.

Принимая во внимание (3.6), для лагранжиана будем иметь следующее выражение:

$$L = \frac{1}{2} (H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2) + U(q_1, q_2, q_3, t). \quad (3.7)$$

Цилиндрические координаты. Прямоугольные координаты выражаются через цилиндрические при помощи формул

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \lambda, \\ y &= \rho \sin \lambda, \\ z &= z, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

а для обратного перехода имеем

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \lambda &= \arctg \frac{y}{x}, \\ z &= z. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Для цилиндрических координат (рис. 4) координатными поверхностями служат круговой цилиндр, проходящий через рассматриваемую точку пространства, осью которого является ось аппликат, полуплоскость $\lambda = \text{const}$, проходящая через данную точку M и ось z , плоскость $z = \text{const}$, параллельная основной координатной плоскости. Координатными линиями являются прямая CM , вдоль которой постоянны λ и z ; дуга окружности BM , на которой неизменны координаты ρ и z ; образующая цилиндра MM' , на которой постоянны ρ и λ . Нетрудно проверить, что условия (3.4) выполнены, и, стало быть, цилиндрическая система координат ортогональна.

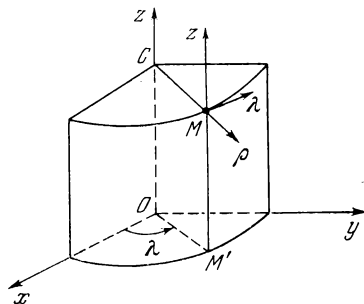


Рис. 4.

С помощью формул (3.6) и (3.8) находим коэффициенты Ламе:

$$\left. \begin{aligned} H_\rho &= 1, \\ H_\lambda &= \rho, \\ H_z &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Тогда в силу (3.5) для линейного элемента получим выражение

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\lambda^2 + dz^2, \quad (3.11)$$

а лагранжиан (3.7) приобретает вид

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\lambda}^2 + \dot{z}^2) + U(\rho, \lambda, z, t). \quad (3.12)$$

Уравнения движения (1.18) в цилиндрических координатах запишутся в форме

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho \dot{\lambda}^2 &= U'_\rho, \\ \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\lambda}) &= U'_\lambda, \\ \ddot{z} &= U'_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Сферические координаты. Прямоугольные координаты выражаются через сферические следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \lambda, \\ y &= r \cos \varphi \sin \lambda, \\ z &= r \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Геометрический смысл сферических координат очевиден (рис. 5). Условимся угол φ отсчитывать в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, угол λ — в пределах от 0 до 2π , а r будем считать изменяющимся от нуля до $+\infty$.

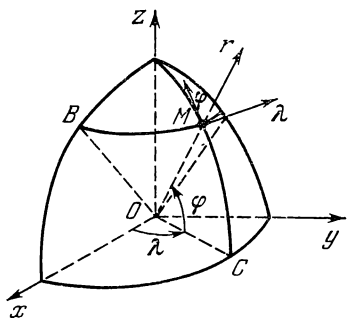


Рис. 5.

В задаче о движении ИСЗ обычно применяется геоцентрическая система координат (с началом в центре инерции Земли), за основную плоскость которой принимается плоскость земного экватора. В этом случае координата φ представляет собой географическую широту спутника. Если, кроме того, система координат

жестко связана с Землей, а ось абсцисс лежит в плоскости гринвичского меридиана, то координата λ будет равна географической долготе спутника. В инерциальной системе координат, ось абсцисс которой направлена в точку весеннего равноденствия, λ будет представлять собой прямое восхождение.

Формулы перехода от прямоугольных координат к сферическим имеют вид

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \lambda &= \arctg \frac{y}{x}, \\ \varphi &= \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Координатными поверхностями в сферической системе координат являются сфера $r = \text{const}$, круговой конус $\varphi = \text{const}$ и полуплоскость $\lambda = \text{const}$. Координатные линии суть прямая OM , вдоль которой постоянны координаты φ и λ , дуга меридиана CM , на которой постоянны r и λ , и дуга параллели BM , на которой неизменны координаты r и φ .

Из формул (3.4) и (3.14) вытекает, что система сферических координат ортогональна.

Вычисляя при помощи формул (3.6) и (3.14) коэффициенты Ламе

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_\lambda = r \cos \varphi, \quad (3.16)$$

для квадрата линейного элемента получаем выражение

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2. \quad (3.17)$$

Функция Лагранжа примет следующий вид:

$$L = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}^2) + U(r, \varphi, \lambda), \quad (3.18)$$

откуда согласно (1.18) получаем лагранжевы уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}^2 &= U'_r, \\ \frac{d}{dt} (r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}) &= U'_\lambda, \\ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) + r^2 \dot{\lambda}^2 \sin \varphi \cos \varphi &= U'_\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Широкое применение в задаче о движении спутника сфероидальной планеты нашли эллипсоидальные координаты. Ниже рассматривается два типа вырожденных эллипсоидальных координат.

Сжатые сфероидальные координаты. Эти координаты связаны с прямоугольными при помощи формул *)

$$\left. \begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \psi \cos \vartheta \cos \lambda, \\ y &= c \operatorname{ch} \psi \cos \vartheta \sin \lambda, \\ z &= c \operatorname{sh} \psi \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

где c — постоянный множитель, имеющий размерность длины. Относительно ψ , ϑ , λ будем предполагать, что они удовлетворяют условиям

$$0 \leq \psi < +\infty, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi. \quad (3.21)$$

При этих условиях каждой точке пространства соответствует единственная совокупность значений ψ , λ , ϑ .

Комбинируя уравнения (3.20), при $\psi = \operatorname{const}$ получаем, что точка должна находиться на эллипсоиде вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \psi} + \frac{z^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \psi} = 1 \quad (3.22)$$

с большой полуосью $c \operatorname{ch} \psi$ и малой полуосью $c \operatorname{sh} \psi$. Эллипсоид (3.22) является сплюснутым эллипсоидом вращения, ось симметрии которого совпадает с осью аппликат.

При $\vartheta = \operatorname{const}$ из (3.20) следует, что точка находится на однополостном гиперболоиде вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2 \operatorname{cs}^2 \vartheta} - \frac{z^2}{c^2 \sin^2 \vartheta} = 1. \quad (3.23)$$

Наконец, при $\lambda = \operatorname{const}$ точка лежит на плоскости

$$y - x \operatorname{tg} \lambda = 0. \quad (3.24)$$

Поверхности (3.22) — (3.24) являются координатными (рис. 6).

Координатные линии в сфероидальной системе координат суть гиперболы MM' , на которой постоянны λ и ϑ , параллель сфероиды AM , которой соответствуют постоянные значения ψ и ϑ и эллиптическая дуга меридиана сфероиды, проходящая через точку M . Из (3.4) и (3.20) следует,

*) С цилиндрическими координатами сжатые сфероидальные координаты связаны соотношением $z + ip = ic \operatorname{ch} (\lambda - i\vartheta)$.

что сжатые сфероидальные координаты являются ортогональными, т. е. координатные поверхности — гиперболоид, эллипсоид и плоскость пересекаются друг с другом под прямыми углами.

Подобная система координат использована в новой теории движения ИСЗ [14].

Дифференцируя формулы преобразования (3.20) по сфероидальным координатам ψ , ϑ и λ и подставляя найденные значения в формулы (3.6), находим коэффициенты Ламе

$$\begin{aligned} H_\psi &= H_\vartheta = \\ &= c \sqrt{\text{ch}^2 \psi - \cos^2 \vartheta}, \\ H_\lambda &= c \text{ch} \psi \cos \vartheta. \quad (3.25) \end{aligned}$$

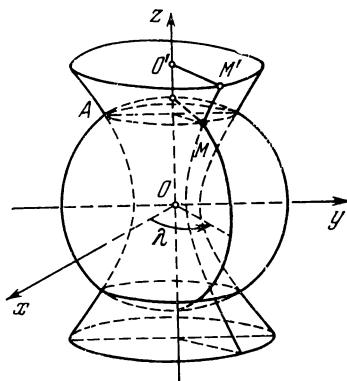


Рис. 6.

Заменяя в формуле (3.5) коэффициенты Ламе найденными значениями, для линейного элемента ds получаем следующее значение:

$$ds^2 = c^2 (\text{ch}^2 \psi - \cos^2 \vartheta) (d\psi^2 + d\vartheta^2) + c^2 \text{ch}^2 \psi \cos^2 \vartheta \cdot d\lambda^2. \quad (3.26)$$

Принимая во внимание (3.7) и (3.26), для лагранжевой функции будем иметь

$$L = \frac{c^2}{2} [J(\dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2) + \text{ch}^2 \psi \cos^2 \vartheta \cdot \dot{\lambda}^2] + U(\psi, \vartheta, \lambda), \quad (3.27)$$

где $J = \text{ch}^2 \psi - \cos^2 \vartheta$, что приводит к следующей системе дифференциальных уравнений движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (J\dot{\psi}) + \frac{1}{2} \text{sh} 2\psi \cdot (\dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2) - \frac{1}{2} \text{sh} 2\psi \cos^2 \vartheta \cdot \dot{\lambda}^2 &= \frac{1}{c^2} U'_\psi, \\ \frac{d}{dt} (J\dot{\vartheta}) + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \cdot (\dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} \text{ch}^2 \psi \sin 2\vartheta \cdot \dot{\lambda}^2 &= \frac{1}{c^2} U'_\vartheta, \\ \frac{d}{dt} (\text{ch}^2 \psi \cos^2 \vartheta \cdot \dot{\lambda}) &= \frac{1}{c^2} U'_\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Вытянутые сфероидальные координаты. Рассмотрим теперь вторую систему вырожденных эллипсоидальных координат, которые часто используются в классической задаче небесной механики о двух неподвижных центрах [15]).

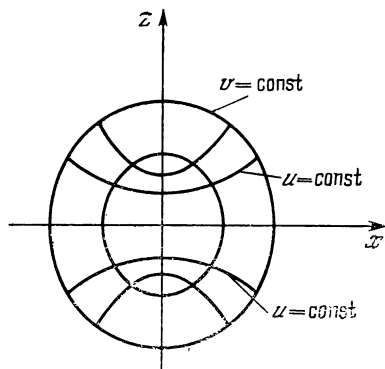


Рис. 7.

Вытянутые сфероидальные координаты u , v , w связаны с прямоугольными координатами соотношениями

$$\left. \begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} v \cos u, \\ y &= c \operatorname{sh} v \sin u \sin w, \\ z &= c \operatorname{sh} v \sin u \cos w, \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

где c — некоторая постоянная величина, имеющая размерность длины. Будем предполагать, что

сфероидальные координаты удовлетворяют условиям

$$0 \leq v < +\infty, \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq w \leq 2\pi. \quad (3.30)$$

Если условия (3.30) выполнены, то для каждой точки пространства существует единственная совокупность значений u , v , w .

Системе вытянутых сфероидальных координат соответствуют следующие координатные поверхности: при $v = \text{const}$ имеем вытянутый эллипсоид вращения,

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 v} + \frac{y^2 + z^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 v} = 1, \quad (3.31)$$

ось симметрии которого совпадает с осью абсцисс, а фокусы расположены в точках $(\pm c, 0, 0)$; при $u = \text{const}$ — софокусный ему двуполостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 u} - \frac{y^2 + z^2}{c^2 \sin^2 u} = 1 \quad (3.32)$$

и при $w = \text{const}$ — плоскость

$$y - z \operatorname{tg} w = 0. \quad (3.33)$$

Координатные поверхности и линии изображены на рис. 7.

Вытянутые сфероидальные координаты также ортогональны.

Из простых вычислений получаем значения коэффициентов Ламе

$$\begin{aligned} H_u &= H_v = c \sqrt{\operatorname{ch}^2 v - \cos^2 u}, \\ H_w &= c \operatorname{sh} v \sin u. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Тогда для линейного элемента имеем выражение

$$ds^2 = c^2 [J (du^2 + dv^2) + \operatorname{sh}^2 v \sin^2 u \cdot d\omega^2], \quad (3.35)$$

а функция Лагранжа приобретает вид

$$L = \frac{c^2}{2} [J (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \operatorname{sh}^2 v \sin^2 u \cdot \dot{\omega}^2] + U(u, v, \omega, t), \quad (3.36)$$

где использовано обозначение

$$J = \operatorname{ch}^2 v - \cos^2 u. \quad (3.37)$$

Уравнения движения точки в вытянутых сфероидальных координатах записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (J\dot{u}) - \sin u \cdot \cos u (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{\omega}^2 \operatorname{sh}^2 v) &= \frac{1}{c^2} U'_u, \\ \frac{d}{dt} (J\dot{v}) - \operatorname{sh} v \cdot \operatorname{ch} v (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{\omega}^2 \sin^2 u) &= \frac{1}{c^2} U'_v, \\ \frac{d}{dt} (\operatorname{sh}^2 v \sin^2 u \cdot \dot{\omega}) &= \frac{1}{c^2} U'_\omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Параболоидальные координаты. В задаче о движении космического аппарата в центральном ньютоновском поле сил с постоянным вектором реактивного ускорения [16] и [17, 18]), а также при рассмотрении движения ИСЗ с учетом светового давления используются параболоидальные координаты, которые связаны с прямоугольными координатами зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (\xi^2 - \eta^2), \\ y &= \xi \eta \cos \varphi, \\ z &= \xi \eta \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Из двух последних уравнений (3.39) находим $y^2 + z^2 = \xi^2 \eta^2$, складывая с x^2 , имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4} (\xi^2 + \eta^2)^2,$$

откуда при $\xi = \text{const}$ получаем следующее уравнение координатной поверхности:

$$y^2 + z^2 = \xi^4 - 2x\xi^2. \quad (3.40)$$

Уравнение (3.40) определяет параболоид вращения с фокусом в начале координат и с осью, совпадающей с отрицательной частью оси абсцисс.

Аналогичным образом находим вторую координатную поверхность

$$y^2 + z^2 = \eta^4 + 2x\eta^2, \quad (3.41)$$

которая также является параболоидом с фокусом в начале координат и осью, направленной вдоль оси абсцисс.

Третья координатная поверхность — плоскость, проходящая через ось абсцисс:

$$z - y \operatorname{tg} \varphi = 0. \quad (3.42)$$

Координатными линиями будут:

линия ξ — парабола

$$y^2 = \eta^4 \cos^2 \varphi + 2\eta^2 x \cos^2 \varphi,$$

$$z = y \operatorname{tg} \varphi,$$

линия η — парабола

$$y^2 = \xi^4 \cos^2 \varphi - 2\eta^2 x \cos^2 \varphi,$$

$$z = y \operatorname{tg} \varphi,$$

линия φ — окружность

$$y^2 + z^2 = \xi^2 \eta^2, \quad x = \frac{1}{2} (\xi^2 - \eta^2).$$

Расположение координатных плоскостей и линий указано на рис. 8. Параболоидальные координаты являются ортогональными, как это видно из (3.4) и (3.39).

Формулы (3.6) и (3.39) приводят к следующим выражениям для коэффициентов Ламе:

$$H_{\xi} = H_{\eta} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad H_{\varphi} = \xi\eta. \quad (3.43)$$

Тогда квадрат линейного элемента определится формулой

$$ds^2 = (\xi^2 + \eta^2) (d\xi^2 + d\eta^2) + \xi\eta d\varphi^2, \quad (3.44)$$

а лагранжиан будет равен

$$L = \frac{1}{2} [(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)(\xi^2 + \eta^2) + \xi\eta\dot{\varphi}^2] + U(\xi, \eta, \varphi, t). \quad (3.45)$$

Лагранжевы уравнения движения в параболоидальных

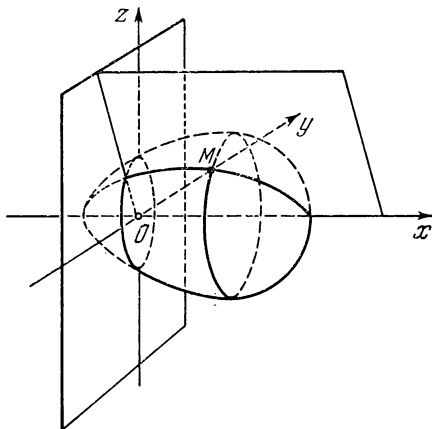


Рис. 8.

координатах запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [(\xi^2 + \eta^2) \dot{\xi}] - [\xi(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \eta\dot{\varphi}^2] &= U'_{\xi}, \\ \frac{d}{dt} [(\xi^2 + \eta^2) \dot{\eta}] - [\eta(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \xi\dot{\varphi}^2] &= U'_{\eta}, \\ \frac{d}{dt} (\xi\eta\dot{\varphi}) &= U'_{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

З а м е ч а н и е. Если оба фокуса удалены в бесконечность, то эллипсоидальные координаты вырождаются в прямоугольные; если в бесконечность удален один из фокусов, то эллипсоидальные координаты переходят в параболоидальные; наконец, когда оба фокуса совпадают, то эллипсоидальные координаты вырождаются в сферические координаты.

§ 4. Канонические преобразования.

Теорема Якоби

Согласно результатам § 2 движение динамической системы можно задавать системой уравнений в форме Рауса

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k \leq n), \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \quad (j = k+1, \dots, n), \quad (4.2)$$

в которой характеристическая функция H , определяемая формулой (2.17), в общем случае будет зависеть от величин $t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_k, \dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_n$. Переменные p_i и q_i подсистемы уравнений (4.1) назовем сопряженными каноническими переменными (q_i — обобщенная координата, p_i — обобщенный импульс).

Рассмотрим такие преобразования канонических переменных q_i, p_i , которые не нарушают раусовой формы уравнений (4.1) и (4.2). Эти преобразования назовем каноническими.

Преобразование старых переменных q_i, p_i к новым переменным ξ_i, η_i зададим при помощи функции

$$V(t, q_1, \dots, q_k, \xi_1, \dots, \xi_k),$$

которую назовем производящей. Формулы преобразования имеют вид

$$cp_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad \eta_i = -\frac{\partial V}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (4.3)$$

где c — постоянная величина (валентность преобразования).

Из (4.1) и (4.3) следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \sum_{j=1}^k \left(\dot{q}_j \frac{\partial p_j}{\partial \eta_i} - \dot{p}_j \frac{\partial q_j}{\partial \eta_i} \right),$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \eta_i} = \frac{1}{c} \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_i}$$

и

$$c\dot{p}_s = \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial t} + \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial \xi_j} \dot{\xi}_j \right),$$

поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = -\frac{1}{c} \sum_{s=1}^k \frac{\partial q_s}{\partial \eta_i} \left[\frac{\partial q_s}{\partial \eta_j} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial \xi_j} \dot{\xi}_j \right].$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \xi_j} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_i} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ -1 & \text{при } i = j, \end{cases}$$

находим $\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \dot{\xi}_i$, или $\dot{\xi}_i =$
 $= \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left(cH + \frac{\partial V}{\partial t} \right)$. Можно показать также, что

$$\dot{\eta}_i = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(cH + \frac{\partial V}{\partial t} \right).$$

Положим

$$K = cH + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (4.4)$$

Так как

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = c \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial K}{\partial q_i} = c \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

то вместо системы (4.1) — (4.2) окончательно будем иметь

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial K}{\partial \eta_i}, \quad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial K}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = 0 \quad (j = k+1, \dots, n). \quad (4.6)$$

Для возможности выполнения преобразования (4.3) якобиан

$$\det \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \xi_j} \right)$$

должен быть отличным от нуля.

Таким образом приходим к теореме.

Т е о р е м а. Если канонические переменные q_i и p_i преобразуются к новым переменным ξ_i, η_i при помощи производящей функции $V(t, q_1, q_2, \dots, q_k, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$, то дифференциальные уравнения для новых переменных будут иметь раусову форму, причем новая характеристическая функция Рауса будет иметь вид (4.4).

Из этой теоремы при $k = n$ следует теорема о преобразовании гамильтоновых систем.

При помощи аналогичных рассуждений можно показать справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а. Пусть переменные q_i и p_i преобразуются к новым переменным с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_i} &= c p_i \quad (i = 1, 2, \dots, l), \quad \frac{\partial V}{\partial p_j} = -c q_j \quad (j = l + 1, \dots, k), \\ \frac{\partial V}{\partial \xi_r} &= -\eta_r \quad (r = 1, 2, \dots, m), \quad \frac{\partial V}{\partial \eta_s} = \xi_s \quad (s = m + 1, \dots, k), \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

в которых производящая функция V имеет вид

$$V(t, q_1, q_2, \dots, q_l, p_{l+1}, \dots, p_k, \xi_1, \dots, \xi_m, \eta_{m+1}, \dots, \eta_k);$$

тогда раусовы уравнения движения (4.1) — (4.2) сохраняют свою форму

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} &= 0 \quad (j = k + 1, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

причем новая характеристическая функция Рауса K определится формулой

$$K = cH + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (4.9)$$

Из приведенных теорем вытекают следствия относительно чисто гамильтоновых систем (2.14)

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.10)$$

Преобразования, не нарушающие гамильтонову форму уравнений, называются каноническими или контактными. Чаще всего используют унивалентные канонические преобразования ($c = 1$).

Если систему (4.10) подвергнуть каноническому преобразованию

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad \eta_i = -\frac{\partial V}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.11)$$

где $V = V(t, q_1, \dots, q_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$, то придем к новой системе гамильтоновых уравнений

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.12)$$

с гамильтонианом

$$K = H + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (4.13)$$

Теорема о канонических преобразованиях указывает на путь интегрирования уравнений движения и непосредственно приводит к знаменитому уравнению Гамильтона — Якоби.

Рассмотрим гамильтонову систему (4.10) и попытаемся найти такое каноническое преобразование, которое привело бы гамильтоновы уравнения к виду

$$\frac{d\xi_i}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.14)$$

т. е. чтобы новая характеристическая функция K была тождественно равна нулю

$$K = H + \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (4.15)$$

Если такое преобразование будет найдено, то получающаяся при этом новая система уравнений (4.14) будет интегрироваться непосредственно, и ее общий интеграл запишется следующим образом:

$$\xi_i = \alpha_i, \quad \eta_i = -\beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.16)$$

где α_i и β_i суть произвольные постоянные.

Производящая функция преобразования должна удовлетворять уравнению (4.15), которое в силу (4.11) можно представить в форме

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, \dots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0. \quad (4.17)$$

Полученное уравнение носит название уравнения Гамильтона — Якоби *).

Если производящая функция V , удовлетворяющая уравнению (4.17), содержит n произвольных постоянных, причем выполняется условие

$$\det \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \xi_j} \right) \neq 0, \quad (4.18)$$

то функция V будет полным интегралом уравнения (4.17). Зная полный интеграл уравнения (4.17) при помощи формул (4.16), легко получить общий интеграл гамильтоновых уравнений (4.10).

Итак, приходим к следующей теореме.

Т е о р е м а Я к о б и. Пусть дана система канонических уравнений Гамильтона (4.10), и пусть $V(t, q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — некоторый полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби (4.17); тогда общее решение системы (4.10) можно представить в виде

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.19)$$

где α_i и β_i — произвольные постоянные.

С л е д с т в и е. Если механическая система консервативна, т. е. $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$, то полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби можно искать в виде

$$V = -\alpha_1 t + W(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (4.20)$$

где постоянная α_1 означает в случае склерономных связей и склерономного преобразования к обобщенным координатам полную механическую энергию, а функция W

*) Это уравнение называют также уравнением Гамильтона — Остроградского.

удовлетворяет уравнению

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1. \quad (4.21)$$

Уравнение Гамильтона — Якоби можно записать и в несколько иной форме, если систему (4.10) предварительно подвергнуть преобразованию

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= q_i, & p_i &= \eta_i & (i = 1, 2, \dots, m), \\ \xi_j &= p_j, & \eta_j &= -q_j & (j = m+1, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

которое является каноническим и приводит к системе гамильтоновых уравнений

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.23)$$

с характеристической функцией

$$H = H(t, \xi_1, \dots, \xi_m, -\eta_{m+1}, \dots, -\eta_n, \eta_1, \dots, \eta_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) \quad (4.24)$$

Тогда вместо уравнения (4.17) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, \dots, q_m, -\frac{\partial V}{\partial p_{m+1}}, \dots, -\frac{\partial V}{\partial p_n}, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \right. \\ \left. \dots, \frac{\partial V}{\partial q_m}, p_{m+1}, \dots, p_n\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Наряду с полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби могут быть полезными и его частные интегралы. Этот вопрос изучался Леман — Филе*). Его результат состоит в следующем.

Если найден неполный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби $V(t, q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$, зависящий от $k < n$ произвольных постоянных α_i , то можно найти $2k$ первых интегралов уравнений движения

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (4.26)$$

*) См. Lehmann Filhes, Astr. Nachr., Bd. 165, 1904.

§ 5. Интегрирование уравнения Гамильтона—Якоби методом разделения переменных

Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка методом разделения переменных исследовалось В. Г. Имшенецким [19]. Однако для механики более интересны те случаи интегрируемости уравнения Гамильтона — Якоби, в которых выявляется метрика пространства обобщенных координат. Такие случаи интегрируемости указывались во многих работах (Р. Лиувилль [20], П. Штеккель [21], Моррера [22], Далль-Аква [23], Ди Пирро [24], Пенлеве [25], Н. Д. Моисеев [26] и др.). Ниже мы приводим два случая, обобщающих результаты работ [21], [26] (см. [27]). Здесь следует заметить, что для небесной механики и небесной баллистики наиболее полезны случаи Лиувилля, Штеккеля и их обобщения *). Использование этих теорем открывает возможность наиболее полно и просто исследовать природу движения (см., например, [28]).

Рассмотрим один класс динамических систем, для которых можно указать неполный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби.

Т е о р е м а. Если живая сила системы T и ее потенциал U определяются формулами

$$T = \frac{1}{2} b \sum_{i=1}^k a_i(q_i) \dot{q}_i^2 + T^*(\dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_n, q_{k+1}, \dots, q_n), \quad (5.1)$$

$$U = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^k U_i(q_i) + U^*(q_{k+1}, \dots, q_n), \quad k \leq n, \quad (5.2)$$

в которых

$$b = \sum_{i=1}^k b_i(q_i), \quad (5.3)$$

где a_i , b_i , U_i , T^* , U^* суть произвольные функции своих аргументов, то уравнение Гамильтона — Якоби допускает

*) См. работу М. С. Яров-Ярового [29].

интеграл

$$V = -ht + \sum_{i=1}^k \int \sqrt{2a_i(U_i - \hbar b_i + \alpha_i)} dq_i + V^*, \quad (5.4)$$

где $\hbar$ и α_i — произвольные постоянные.

До к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с (2.1) введем канонические импульсы

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i};$$

тогда для функции Гамильтона будем иметь

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2b} \sum_{i=1}^k \frac{p_i^2}{a_i} + T_2^*(p_{k+1}, \dots, p_n, q_{k+1}, \dots, q_n) - \\ - T_0^*(q_{k+1}, \dots, q_n) - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^k U_i(q_i) - U^*(q_{k+1}, \dots, q_n). \end{aligned}$$

Согласно (4.21) уравнение Гамильтона — Якоби запишется в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{2a_i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)^2 - U_i + \hbar b_i \right] + \\ + b(T_2^* - T_0^* - U^*) + \hbar \sum_{i=k+1}^n b_i(q_i) = 0. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Интеграл уравнения (5.5) будем искать в виде

$$V = \sum_{i=1}^k V_i(q_i) + V^*(q_{k+1}, \dots, q_n). \quad (5.6)$$

Из (5.5) видно, что функции V_i должны удовлетворять уравнениям

$$\left(\frac{dV_i}{dq_i} \right)^2 = 2a_i(U_i - \hbar b_i + \alpha_i), \quad (5.7)$$

где α_i — произвольные постоянные.

Отсюда находим

$$V_i(q_i) = \int \sqrt{2a_i(U_i - \hbar b_i + \alpha_i)} dq_i \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (5.8)$$

Подставляя в (5.6) вместо функций V_i их выражения из (5.8), имеем

$$V = \sum_{i=1}^k \int \sqrt{2a_i(U_i - hb_i + \alpha_i)} dq_i + V^*, \quad (5.9)$$

причем функция V^* должна удовлетворять уравнению

$$T_2^* \left(\frac{\partial V^*}{\partial q_{k+1}}, \dots, \frac{\partial V^*}{\partial q_n}, q_{k+1}, \dots, q_n \right) - T_0^* - \\ - U^* + h \sum_{i=k+1}^n b_i(q_i) + \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0. \quad (5.10)$$

Из (4.26) и (5.9) следует, что рассматриваемая динамическая система допускает интеграл уравнения Гамильтона — Якоби (5.4), содержащий $k+1$ произвольную постоянную.

З а м е ч а н и е. С помощью интеграла (5.4) в соответствии с (4.26) можно найти $k+1$ первый интеграл.

С л е д с т в и е. Если живая сила и потенциал определяются формулами

$$T = \frac{1}{2} b \sum_{i=1}^n a_i(q_i) \dot{q}_i^2, \quad (5.11)$$

$$U = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n U_i(q_i), \quad (5.12)$$

в которых

$$b = \sum_{i=1}^n b_i(q_i),$$

то уравнение Гамильтона — Якоби допускает полный интеграл

$$V = -ht + \sum_{i=1}^n \int \sqrt{2a_i(U_i - hb_i + \alpha_i)} dq_i, \quad (5.13)$$

причем произвольные постоянные α_i связаны зависимостью

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0. \quad (5.14)$$

Это утверждение составляет теорему Лиувилля. Динамические системы, для которых выполняются условия (5.11) и (5.12), называются лиувиллевыми. Исследование лиувиллевых систем содержится в статье В. И. Арнольда [30] (см. также [31]).

Следующая теорема обобщает исследования Штекеля и Н. Д. Моисеева (см. [27]).

Т е о р е м а. Пусть имеется n^2 произвольных функций $\varphi_{ij}(q_i)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющих условию

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{n1} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{1n} & \varphi_{2n} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (5.15)$$

и $n + 1$ произвольная функция $\Phi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ и $U_i(q_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда, если живая сила T и силовая функция U определяются формулами

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{A_i} \dot{q}_i^2 + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \dot{q}_i + A_i b_i \right), \quad (5.16)$$

$$U = \sum_{i=1}^n A_i U_i, \quad (5.17)$$

где $A_i = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}}$, а каждый из коэффициентов a_i и b_i зависит только от соответствующей переменной q_i , то уравнение Гамильтона — Якоби обладает полным интегралом

$$V = \Phi + \sum_{i=1}^n \int \sqrt{a_i \left(b_i + 2U_i + 2\alpha_1 \varphi_{i1} + \sum_{j=2}^n \alpha_j \varphi_{ij} \right)} dq_i. \quad (5.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вводя импульсы p_i при помощи соотношений (2.1)

$$p_i = \frac{a_i}{A_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i},$$

для гамильтониана H получим выражение

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{A_i}{a_i} \left(p_i - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right)^2 - A_i b_i \right] - U. \quad (5.19)$$

Тогда согласно (4.21) уравнение Гамильтона — Якоби можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n A_i \left[\frac{1}{2a_i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right)^2 - \frac{1}{2} b_i - U_i \right] = \alpha_1. \quad (5.20)$$

Используя тождество

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{i1} A_i = 1$$

вместо (5.20), будем иметь

$$\sum_{i=1}^n A_i \left[\frac{1}{a_i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right)^2 - b_i - 2\alpha_1 \varphi_{i1} - 2U_i \right] = 0. \quad (5.21)$$

Уравнение (5.21) удовлетворяется, если потребовать, чтобы

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + \sqrt{a_i \left(b_i + 2U_i + 2\alpha_1 \varphi_{i1} + \sum_{j=2}^n \alpha_j \varphi_{ij} \right)}, \quad (5.22)$$

где α_i суть произвольные постоянные.

Действительно, подставляя в (5.21) значения $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ из (5.22), видим, что (5.21) выполняется тождественно

$$\sum_{i=1}^n A_i \sum_{j=2}^n \alpha_j \varphi_{ij} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^n \alpha_j A_i \varphi_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=2}^n \alpha_j \sum_{i=1}^n \varphi_{ij} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}} \equiv 0,$$

ибо для $j = 2, 3, \dots, n$ каждая из величин

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{ij} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}},$$

представляющая собой сумму произведений элементов j -й строки определителя на алгебраические дополнения элементов его первой строки, обращается в нуль. Условие (4.18) также выполняется.

Исходя из соображений Дарбу [32] об интегрировании уравнений движения динамической системы, живая сила которой представляет собой однородную функцию обоб-

щенных скоростей, можно выявить еще один случай интегрируемости.

Т е о р е м а. Пусть имеется $n (n + 2)$ непрерывных функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, а именно

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} (q_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \\ U_i (q_i), a_i (q_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

и дифференцируемая функция $\Phi (q_1, \dots, q_n)$. Предположим, что

$$\Delta = \det |\varphi_{ij} (q_i)| \neq 0.$$

Если при этом живая сила T и потенциал U определены формулами

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{a_i}{A_i} \dot{q}_i^2 \cdot \sum_{j=1}^n A_j U_j + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \dot{q}_i \right], \quad (5.23)$$

$$U = \frac{\Delta}{\sum_{i=1}^n A_i U_i}, \quad (5.24)$$

в которых

$$A_i = \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.25)$$

то для соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби полный интеграл имеет вид

$$V = \Phi + \sum_{i=1}^n \int \sqrt{a_i \left(2\alpha_i U_i + 2\varphi_{i1} + \sum_{j=2}^n \alpha_j \varphi_{ij} \right)} dq_i. \quad (5.26)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение Гамильтона — Якоби запишется следующим образом:

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^n A_j U_j} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{a_i} \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right)^2 - \Delta \right\} = \alpha_1, \quad (5.27)$$

где α_1 — постоянная интегрирования.

Уравнение (5.27) можно преобразовать к виду

$$\sum_{i=1}^n A_i \left[\frac{1}{a_i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right)^2 - 2\varphi_{i1} - 2\alpha_1 U_i \right] = 0. \quad (5.28)$$

Как нетрудно проверить, функция (5.26) действительно будет представлять собой полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби (5.27).

§ 6. Интегрирование уравнения Гамильтона—Якоби в сферических координатах

Интегрирование уравнений движения методом Якоби зависит существенно не только от структуры потенциала, но и от метрики пространства обобщенных координат. Так, например, теорема Лиувилля, приведенная в § 5, в случае трех степеней свободы позволяет найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби только при использовании изотермических координат, в частности, эллипсоидальных координат.

Рассмотрим движение точки в сферической системе координат в силовом поле с потенциалом $U(r, \varphi, \lambda)$. Из (3.18) находим выражения для импульсов

$$p_r = \dot{r}, \quad p_\varphi = r^2 \dot{\varphi}, \quad p_\lambda = r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \varphi.$$

Гамильтониан запишется в виде

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} p_\lambda^2 \right) - U(r, \varphi, \lambda). \quad (6.1)$$

Согласно (4.21) интегрирование уравнений движения (3.19) сводится к нахождению полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda} \right)^2 - 2U(r, \varphi, \lambda) = 2\alpha_1. \quad (6.2)$$

По первой теореме § 5, уравнение (6.2) обладает частным интегралом, если

$$U(r, \varphi, \lambda) = f(r) + \frac{\Phi(\varphi, \lambda)}{r^2}, \quad (6.3)$$

где f и Φ суть произвольные функции своих аргументов. Подставляя в (6.2) вместо U его выражение из (6.3), получим уравнение Гамильтона — Якоби

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)^2 - 2f(r) - \frac{2\Phi(\varphi, \lambda)}{r^2} - 2\alpha_1 = 0. \quad (6.4)$$

Полагая

$$V(r, \varphi, \lambda) = V_1(r) + V_2(\varphi, \lambda) \quad (6.5)$$

и подставляя это выражение в уравнение (6.4), будем иметь

$$\left(\frac{dV_1}{dr}\right)^2 - 2f(r) - 2\alpha_1 + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial V_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial V_2}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\Phi(\varphi, \lambda) \right] = 0. \quad (6.6)$$

Потребуем, чтобы функция $V_2(\varphi, \lambda)$ удовлетворяла уравнению

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial V_2}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\Phi(\varphi, \lambda) = \alpha_2, \quad (6.7)$$

в котором α_2 — произвольная постоянная.

Функция $V_1(r)$ определяется из уравнения

$$\left(\frac{dV_1}{dr}\right)^2 - 2f(r) + \frac{\alpha_2}{r^2} - 2\alpha_1 = 0. \quad (6.8)$$

Разделяя в последнем уравнении переменные и интегрируя, получаем интеграл уравнения

$$V_1(r) = \int \sqrt{2f(r) + 2\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}} dr. \quad (6.9)$$

Согласно (4.19) найдем первый интеграл уравнений движения (3.19), воспользовавшись соотношением

$$V = -\alpha_1 t + \int \sqrt{2f(r) + 2\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}} dr. \quad (6.10)$$

В соответствии с (4.26) имеем

$$\int \frac{dr}{\sqrt{2f(r) + 2\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}}} = t + \beta_1. \quad (6.11)$$

Этот интеграл позволяет изучить планетоцентрическое расстояние достаточно удаленного спутника планеты в случае, когда в разложении гравитационного потенциала планеты можно ограничиться членом со второй сферической гармоникой.

З а м е ч а н и е. Любопытно отметить, что для силового поля типа (6.3) имеет место аналог формулы Бине. В самом деле, если потенциал сил определяется формулой (6.3), то уравнения (3.19) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r(\dot{\varphi}^2 + \dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi) &= f'_r - \frac{2\Phi(\varphi, \lambda)}{r^3}, \\ \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \varphi) &= \frac{\Phi'_\lambda}{r^2}, \\ \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) + r^2 \dot{\lambda}^2 \sin \varphi \cos \varphi &= \frac{\Phi'_\varphi}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Вместо времени t и радиуса-вектора r введем независимую переменную τ и обратное расстояние u :

$$u = \frac{1}{r}, \quad d\tau = \frac{u^2}{c} dt, \quad (6.13)$$

где c — произвольная постоянная.

Тогда система (6.12) преобразуется к форме

$$\left. \begin{aligned} u'' + (\lambda'^2 \cos^2 \varphi + \varphi'^2) &= -\frac{c^2}{u^2} f'_r + 2\Phi u, \\ \frac{d}{d\tau}(\lambda' \cos^2 \varphi) &= c^2 \Phi'_\lambda, \\ \varphi'' + \lambda'^2 \sin \varphi \cos \varphi &= c^2 \Phi'_\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

причем штрихом обозначено дифференцирование по τ .

Умножая последние два уравнения соответственно на λ' и φ' и интегрируя, находим первый интеграл

$$\lambda'^2 \cos^2 \varphi + \varphi'^2 = 2c^2 (\Phi + c_1), \quad (6.15)$$

где c_1 — постоянная интегрирования.

При помощи (6.15) первое из уравнений системы (6.14) преобразуется к виду

$$u'' + 2c_1 c^2 u = c^2 f'_u. \quad (6.16)$$

Если в потенциале (6.3) отсутствует второй член ($\Phi \equiv 0$), то при $\varphi = 0$, полагая c_1 равным постоянной площадей, придем к формуле Бине. При этом новой независимой переменной является долгота λ .

Формулу (6.16) можно использовать для исследования движения ИСЗ в нецентральной поле тяготения, если воспользоваться идеей Б. Гарфинкеля [33]. Уравнение (6.16), а также уравнения Клеро — Лапласа [34] и уравнения А. И. Лурье [35] весьма удобны при изучении движения ИСЗ, если пользоваться методами осреднения [36].

Если потенциал имеет вид

$$U(r, \varphi) = f(r) + \frac{\Phi(\varphi)}{r^2}, \quad (6.17)$$

то рассматриваемая задача сводится к квадратурам.

Действительно, так как уравнение (6.7) не будет содержать явно λ , то можно положить

$$V_2 = \alpha_3 \lambda + \tilde{V}_2(\varphi). \quad (6.18)$$

Подстановка (6.18) в уравнение (6.7) дает

$$\tilde{V}_2'^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi} + 2\Phi(\varphi) - \alpha_2 = 0. \quad (6.19)$$

Из последнего уравнения с помощью квадратур находим

$$\tilde{V}_2(\varphi) = \int \sqrt{\alpha_2 - 2\Phi(\varphi) - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi. \quad (6.20)$$

Принимая во внимание (6.5), (6.9) и (6.20), получаем полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби

$$V = -\alpha_1 t + \int \sqrt{2f(r) - \frac{\alpha_2}{r^2} + 2\alpha_1} dr + \\ + \alpha_3 \lambda + \int \sqrt{\alpha_2 - 2\Phi(\varphi) - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi. \quad (6.21)$$

Рассмотренную задачу позже используем при изложении результатов Р. Баррара [37] и Б. Гарфинкеля [33] о движении ИСЗ.

§ 7. Движение в центральном поле сил.

Задача двух тел

В небесной баллистике с движением материальной точки в центральном поле сил мы встречаемся не только в задаче двух тел, но и при анализе движения искусственного спутника сфероидальной планеты в ее экваториальной плоскости.

Поэтому рассмотрим общую задачу о движении материальной точки в центральном поле сил.

Согласно (6.1) гамильтониан задачи равен

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + \frac{p_\lambda^2}{r^2 \cos^2 \varphi} \right) - U(r). \quad (7.1)$$

Дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda} \right)^2 - 2U(r) = 2\alpha_1 \quad (7.2)$$

интегрируется разделением переменных (см. § 5).

Если положить

$$V = V_1(r) + V_2(\varphi) + V_3(\lambda) - \alpha_1 t, \quad (7.3)$$

то уравнение (7.2) распадется на три дифференциальных уравнения

$$V_1'^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} - 2U(r) - 2\alpha_1 = 0, \quad (7.4)$$

$$V_2'^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi} - \alpha_2^2 = 0, \quad (7.5)$$

$$V_3' - \alpha_3 = 0, \quad (7.6)$$

в которых α_i — произвольные постоянные. Они имеют простой механический смысл. Постоянная α_1 представляет собой полную механическую энергию, α_3 — постоянная площадей, характеризующая момент количества движения относительно оси аппликат, а α_2 — модуль удельного кинетического момента относительно центра сил.

Интегрируя (7.4) — (7.6) и подставляя найденные при этом функции V_i в формулу (7.3), для полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби (7.2) получим

$$V = \int_{r_0}^r \sqrt{2U(r) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2\alpha_1} dr + \int_0^\varphi \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi + \alpha_3 \lambda - \alpha_1 t, \quad (7.7)$$

где r_0 — некоторая постоянная, которая будет позднее выбрана *).

Из (7.7) по теореме Якоби (см. § 4) находим первые интегралы задачи:

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2U(r) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2\alpha_1}} = t + \beta_1, \quad (7.8)$$

$$-\alpha_2 \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2U(r) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2\alpha_1}} + \alpha_2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} = \beta_2, \quad (7.9)$$

$$\lambda - \alpha_3 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} = \beta_3. \quad (7.10)$$

Так как вектор кинетического момента в силу (7.5) и (7.6) сохраняет неизменным свое направление, то орбита точки будет плоской кривой, причем нормаль к орбитальной плоскости коллинеарна вектору кинетического момента. Из (7.5) следует, что движение возможно при условии

$$\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \varphi \geq 0,$$

которое можно записать в виде

$$|\cos \varphi| \geq \left| \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right|. \quad (7.11)$$

Если через i обозначить наклонность орбитальной плоскости к основной координатной плоскости, то в силу (7.11)

$$\cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}. \quad (7.12)$$

Согласно (7.11) и (7.12) сферическая координата φ изменяется в пределах

$$-i \leq \varphi \leq +i.$$

*) В формуле (7.7) взяты определенные интегралы для того, чтобы в выражение в полном интеграле не вводить ненужных постоянных.

Движение точки удобно изображать на небесной сфере (рис. 9), центр которой лежит в центре сил. При изучении движения будем использовать следующие понятия. Линию пересечения плоскости орбиты с основной координатной плоскостью будем называть линией узлов. Точки пересечения этой линии с небесной

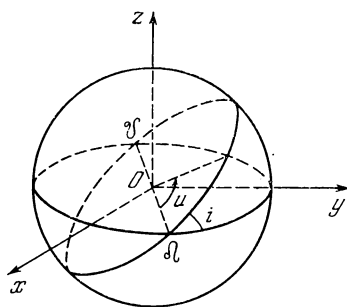


Рис. 9.

этой линии с небесной сферой назовем восходящим и нисходящим узлами орбиты, причем восходящим узлом будет тот, при переходе через который точка попадает в северное полушарие (на рис. 9 восходящий узел обозначен знаком $\odot$, а нисходящий — знаком $\otimes$). Положение восходящего узла будем задавать дугой, отсчитываемой в положительном направлении от оси абсцисс в ос-

новной координатной плоскости. Эту дугу называют долгой восходящего узла.

Сначала исследуем общие свойства движения, воспользовавшись интегралом (7.8). Ограничимся рассмотрением случая, когда уравнение

$$2U(r) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2x_1 = 0 \quad (7.13)$$

имеет два различных положительных корня

$$0 < r_p < r_a$$

(здесь, разумеется, предполагается, что между корнями r_p и r_a нет иных корней уравнения (7.13)). Как видно из (7.8), радиус-вектор r всегда заключен в пределах

$$r_p \leq r \leq r_a, \quad (7.14)$$

если он удовлетворял этим неравенствам в начальный момент. Тогда r_p представляет наименьшее (перигелическое) значение r , а r_a — наибольшее (апогелическое) значение. Вместо r_p и r_a можно ввести постоянные a и e при

помощи соотношений

$$r_p = a(1 - e), \quad r_a = a(1 + e). \quad (7.15)$$

Постоянную a можно назвать средним расстоянием, а величина e является мерой «сплюснутости» орбиты (квазиэксцентриситет).

Пусть в полном интеграле (7.7) и в интегралах (7.8) — (7.9) в качестве нижнего предела интегрирования в первом слагаемом выбрана величина r_p . Тогда соотношение (7.8) запишется в виде

$$\int_{r_p}^r \frac{dr}{\sqrt{(r - r_p)(r_a - r)\Phi(r)}} = t + \beta_1, \quad (7.16)$$

где $\Phi(r)$ определяется равенством

$$\Phi(r)(r - r_p)(r_a - r) = 2U(r) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2x_1,$$

причем, очевидно, $\Phi(r) \geq 0$ при всех значениях r , удовлетворяющих условиям (7.14).

Положим в соотношении (7.16)

$$\beta_1 = -T. \quad (7.17)$$

При $t = T$ выполняется равенство $r = r_p$, т. е. в момент T движущаяся точка находится на минимальном расстоянии от центра сил (в перигентре). Величину T называют моментом прохождения через перигентр.

Выполняя в интеграле (7.16) замену переменной

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (7.18)$$

будем иметь

$$\int_0^E \frac{dE}{\sqrt{\Phi[a(1 - e \cos E)]}} = t - T, \quad (7.19)$$

откуда видно, что E является регуляризующей переменной. Уравнение (7.19) можно назвать уравнением времени (в задаче двух тел оно называется уравнением Кеплера).

Если $e = 0$, то $\Phi(r) = \Phi(a)$ и $E = \sqrt{\Phi(a)}(t - T)$. При малых по модулю значениях e явное выражение E

через время t можно получить с помощью известной из анализа формулы Лагранжа [38].

После определения по заданному t регуляризующей переменной E из уравнения (7.19) с помощью (7.18) находим значение радиуса-вектора r .

Теперь возвратимся к формуле (7.9), определяющей широту φ . Используя (7.12), вместо (7.9) получим

$$\int_0^{\varphi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi}} - \beta_2 = \alpha_2 \int_{r_p}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2U(r) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2\alpha_1}}. \quad (7.20)$$

Введем вместо φ новую переменную u — аргумент широты (рис. 9), представляющую собой угол, отсчитываемый в орбитальной плоскости от восходящего узла орбиты:

$$\sin \varphi = \sin i \sin u. \quad (7.21)$$

Из (7.20) при помощи (7.21) находим

$$u - \beta_2 = \alpha_2 \int_{r_p}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2U(r) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2\alpha_1}}. \quad (7.22)$$

Выясним смысл величины β_2 . Так как при $r = r_p$ выполняется равенство $u = \beta_2$, то β_2 равно значению аргумента широты в момент прохождения через перигеум. Введем обозначение

$$\beta_2 = \omega \quad (7.23)$$

и условимся называть величину ω расстоянием перигеума от узла. Формула (7.22) приводится к следующему виду:

$$u - \omega = \alpha_2 \int_{r_p}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2U(r) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2\alpha_1}}. \quad (7.24)$$

Обратимся, наконец, к соотношению (7.10), определяющему долготу движущейся точки. С помощью подстановки (7.21) преобразуем (7.10) к форме

$$\lambda - \beta_3 = \arctg (\cos i \operatorname{tg} u). \quad (7.25)$$

Согласно (7.25) при $u = 0$ выполняется равенство $\lambda = \beta_3$. Введем стандартное обозначение

$$\beta_3 = \Omega; \quad (7.26)$$

тогда вместо (7.25) окончательно будем иметь

$$\lambda - \Omega = \operatorname{arctg} (\cos i \operatorname{tg} u). \quad (7.27)$$

Очевидно, что величина Ω представляет собой долготу восходящего узла.

Задача двух тел. Применим полученные результаты к задаче двух тел, т. е. к задаче о движении двух материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Если ограничиться изучением движения одной из притягивающих точек (которую условно назовем спутником) относительно системы координат с началом в другой притягивающей точке (эту точку назовем планетой) и неизменными направлениями осей, то потенциал тяготения будет определяться формулой

$$U(r) = \frac{f(M+m)}{r}, \quad (7.28)$$

где f — постоянная тяготения, M — масса планеты, m — масса спутника, r — планетоцентрическое расстояние спутника. Обычно массой искусственного спутника в сомножителе $(M+m)$ формулы (7.28) пренебрегают.

Для случая, когда механическая энергия отрицательна, из формул (7.18), (7.19), (7.21), (7.24) и (7.27), подставляя в них вместо U выражение (7.28), получим общее решение задачи в следующем виде:

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (7.29)$$

$$E - e \sin E = M, \quad (7.30)$$

где

$$M = n(t - T), \quad n^2 = \frac{fM}{a^3},$$

$$u - \omega = v, \quad (7.31)$$

$$\lambda - \Omega = \operatorname{arctg} (\cos i \operatorname{tg} u). \quad (7.32)$$

В формулах (7.29) — (7.30) использованы обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{fM}{2a}, & \alpha_2 &= \sqrt{fMp}, & \alpha_3 &= \sqrt{fMp} \cos i, \\ \beta_1 &= -T, & \beta_2 &= \omega, & \beta_3 &= \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Здесь $a, e, i, \Omega, \omega, T$ — кеплеровские элементы: a — большая полуось эллиптической орбиты, e — эксцентриситет, i — наклонность, Ω — долгота восходящего узла, T — момент прохождения через перигеицентр; $p = a(1 - e^2)$ — фокальный параметр; M — средняя аномалия.

Если положить

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (7.34)$$

то из (7.29) для радиуса-вектора получим

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}. \quad (7.35)$$

Величина v , называемая истинной аномалией, представляет собой полярный угол, отсчитываемый в плоскости орбиты от направления на перигеицентр.

§ 8. Интегрирование уравнения Гамильтона—Якоби в сфероидальных и параболоидальных координатах

Рассмотрим движение материальной точки в системе сжатых сфероидальных координат, определяемых формулами (3.20). Предположим, что потенциал задачи имеет вид

$$U = U(r, \varphi), \quad (8.1)$$

где r и φ — сферические координаты (потенциал не зависит от долготы движущейся точки). В сфероидальных координатах (3.20) вместо (8.1) будем иметь

$$U = U(\operatorname{sh} \psi, \sin \vartheta). \quad (8.2)$$

Согласно (3.27) имеем

$$L = \frac{c^2}{2} [J(\dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2) + \lambda^2 \operatorname{ch}^2 \psi \cos^2 \vartheta] + U(\operatorname{sh} \psi, \sin \vartheta), \quad (8.3)$$

где

$$J = \operatorname{ch}^2 \psi - \cos^2 \vartheta. \quad (8.4)$$

Применяя вторую группу формул (2.1), введем канонические импульсы

$$p_\psi = c^2 J \dot{\psi}, \quad p_\vartheta = c^2 J \dot{\vartheta}, \quad p_\lambda = c^2 \operatorname{ch}^2 \psi \cos^2 \vartheta \cdot \dot{\lambda}. \quad (8.5)$$

В этих переменных гамильтониан задачи запишется следующим образом:

$$H = \frac{1}{2c^2} \left[\frac{1}{J} (p_\psi^2 + p_\vartheta^2) + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \psi \cos^2 \vartheta} p_\lambda^2 \right] - U(\operatorname{sh} \psi, \sin \vartheta). \quad (8.6)$$

В соответствии с (4.20) задача об интегрировании уравнений движения сводится к построению полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби:

$$\frac{1}{2c^2} \left\{ \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \psi \cos^2 \vartheta} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda} \right)^2 \right\} - U = \alpha_1. \quad (8.7)$$

Опираясь на вторую теорему § 5, установим наиболее общий вид силовой функции U , допускающей интегрирование в квадратурах уравнений движения (3.28).

Для применения упомянутой теоремы положим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{11} &= c^2 \operatorname{th}^2 \psi, & \varphi_{21} &= c^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta, & \varphi_{31} &= 0, \\ \varphi_{12} &= -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \psi}, & \varphi_{22} &= \frac{1}{\cos^2 \vartheta}, & \varphi_{32} &= 0, \\ \varphi_{13} &= \frac{1}{\operatorname{ch}^4 \psi}, & \varphi_{23} &= -\frac{1}{\cos^4 \vartheta}, & \varphi_{33} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

и составим определитель

$$\Delta = |\varphi_{ij}| = \frac{c^2 (\operatorname{ch}^2 \psi - \cos^2 \vartheta)}{\cos^2 \vartheta \operatorname{ch}^2 \psi} = \frac{c^2 J}{\cos^2 \vartheta \operatorname{ch}^2 \psi}. \quad (8.9)$$

Коэффициенты A_i находим при помощи формул

$$A_i = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$A_1 = \frac{\operatorname{ch}^2 \psi}{c^2 J}, \quad A_2 = \frac{\cos^2 \vartheta}{c^2 J}, \quad A_3 = \frac{1}{c^2 \operatorname{ch}^2 \psi \cos^2 \vartheta}. \quad (8.10)$$

Для величин a_i будем иметь

$$a_1 = \operatorname{ch}^2 \psi, \quad a_2 = \cos^2 \vartheta, \quad a_3 = 1. \quad (8.11)$$

Сравнивая (8.3), (8.10) и (8.11), убеждаемся, что живая сила материальной точки в сжатых сфероидальных

координатах действительно имеет вид, необходимый для применения второй теоремы § 5.

Для нахождения полного интеграла уравнения (8.7) достаточно, как это следует из (5.18) и (8.10), чтобы потенциал имел вид

$$U = \frac{\Phi_1(\psi) - \Phi_2(\vartheta)}{\operatorname{ch}^2 \psi - \cos^2 \vartheta}. \quad (8.12)$$

Эта форма силовой функции (8.12) является и необходимой для интегрирования уравнения (8.7) разделением переменных.

В соответствии с (5.18) полный интеграл уравнения (8.7) имеет следующую форму:

$$V = V_{\alpha_3} \lambda + \int \sqrt{2c^2 \Phi_1(\psi) + 2\alpha_1 c^2 \operatorname{sh}^2 \psi - \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{\operatorname{ch}^2 \psi}} d\psi + \\ + \int \sqrt{-2c^2 \Phi_2(\vartheta) + 2\alpha_1 c^2 \sin^2 \vartheta + \alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\cos^2 \vartheta}} d\vartheta. \quad (8.13)$$

З а м е ч а н и е. Силовая функция (8.12) в качестве предельного случая содержит в себе и потенциал (6.17). Чтобы показать это, преобразуем величины

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - ci)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z + ci)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

к сфероидальным координатам ψ, ϑ :

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= c (\operatorname{sh} \psi - i \sin \vartheta), \\ r_2 &= c (\operatorname{sh} \psi + i \sin \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

Введем сфероидальные координаты q_1 и q_2 при помощи равенств

$$q_1 = \operatorname{csh} \psi, \quad q_2 = \sin \vartheta. \quad (8.16)$$

Тогда из (8.15) и (8.16) получим

$$q_1 = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad q_2 = \frac{r_2 - r_1}{2ci}. \quad (8.17)$$

Разлагая в ряды Тейлора по степеням c выражения (8.14), получаем

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r \left(1 - \frac{cz}{r^2} i + \dots \right), \\ r_2 &= r \left(1 + \frac{cz}{r^2} i + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

Подставляя в соотношения (8.17) вместо r_1 и r_2 их выражения из (8.18) и переходя к пределу при $c \rightarrow 0$, находим, что сжатые сфероидальные координаты в пределе дают сферические координаты

$$\lim_{c \rightarrow 0} q_1 = r, \quad \lim_{c \rightarrow 0} q_2 = \sin \varphi. \quad (8.19)$$

Тогда наиболее общий вид силовой функции, допускающий решение задачи в квадратурах, получится из формулы (8.12), если в ней вместо ψ и ϕ , принимая во внимание (8.16), подставить предельные значения (8.19):

$$U = \frac{\Phi_1(r) - \Phi_2(\varphi)}{r^2}, \quad (8.20)$$

что дает потенциал типа (6.17).

Величина c в задачах небесной баллистики оказывается весьма малой, и, стало быть, сфероидальные координатные поверхности близки к сферам.

Пусть движение материальной точки исследуется в параболических координатах (3.39). Покажем сначала, что структура кинетической энергии в параболических координатах удовлетворяет условию (5.2) второй теоремы § 5.

С этой целью введем следующую систему функций:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{11} &= \xi, & \varphi_{21} &= \eta, & \varphi_{31} &= 0, \\ \varphi_{12} &= -\frac{1}{\xi}, & \varphi_{22} &= \frac{1}{\eta}, & \varphi_{32} &= 0, \\ \varphi_{13} &= -\xi, & \varphi_{23} &= -\eta, & \varphi_{33} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

Определитель Δ этой системы функций φ_{ij} равен

$$\Delta = \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi\eta}. \quad (8.22)$$

Положим также

$$a_1 = \xi, \quad a_2 = \eta, \quad a_3 = \xi\eta. \quad (8.23)$$

Из (8.22) и (8.23) находим

$$A_1 = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad A_2 = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}, \quad A_3 = 1. \quad (8.24)$$

Подставляя выражения (8.24) в формулу (5.16), получаем живую силу, соответствующую лагранжиану (3.41).

Для отыскания интегрируемых случаев воспользуемся формулой (5.17). Из (5.17) и (8.22) следует, что уравнение Гамильтона — Якоби может быть проинтегрировано

разделением переменных, если потенциал имеет вид

$$U = \frac{\Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta)}{\xi^2 + \eta^2}, \quad (8.25)$$

где Φ_1 и Φ_2 — произвольные функции своих аргументов.

Введем канонические импульсы

$$p_\xi = (\xi^2 + \eta^2) \dot{\xi}, \quad p_\eta = (\xi^2 + \eta^2) \dot{\eta}, \quad p_\varphi = \xi\eta. \quad (8.26)$$

Тогда уравнение Гамильтона — Якоби (5.20) приобретает вид

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{1}{\xi\eta} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} - \frac{\Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta)}{\xi^2 + \eta^2} = h. \quad (8.27)$$

В соответствии с (5.18) находится полный интеграл уравнения (8.27).

§ 9. Условно-периодические функции

Как будет показано, движения, описываемые гамильтоновыми системами, которые можно проинтегрировать методом

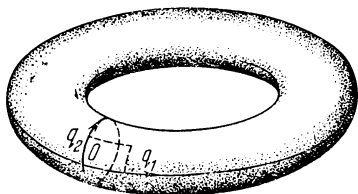


Рис. 10.

Якоби при помощи разделения переменных, обладают свойством условной периодичности. В динамической проблеме с двумя степенями свободы условно периодическое движение геометрически можно трактовать следующим образом.

Пусть точка движется по тору (рис. 10). В качестве лагранжевых координат, описывающих движение точки на торе, можно принять долготу q_1 , отсчитываемую в экваториальной плоскости тора от некоторого направления, задаваемого точкой O тора, и широту q_2 . Угловые координаты q_1 и q_2 будем выражать в радианной мере. Пусть координаты точки удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dq_1}{dt} = \omega_1, \quad \frac{dq_2}{dt} = \omega_2, \quad (9.1)$$

где величины ω_1 и ω_2 называются частотами. Тогда, если $\omega_1/\omega_2 = p/q$, причем p и q суть целые числа, то по истечении интервала времени $t = \frac{2\pi p}{\omega_1} = \frac{2\pi q}{\omega_2}$ точка возвратится в исходное положение, сделав q оборотов по меридиану и p оборотов по параллели. Движение точки будет периодическим, однако траектория точки будет замыкаться после нескольких «оборотов».

Если же отношение $p : q$ — иррациональное число (частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы), то точка никогда не возвратится в исходное положение. Такого рода движение в небесной механике принято называть условно-периодическим. Описанную точкой траекторию можно изобразить на плоскости в декартовой системе координат. Так как согласно (9.1) q_1 и q_2 — линейные функции времени, то движение в плоскости (q_1, q_2) изобразится прямой линией.

Для описания условно-периодических движений пользуются условно-периодическими функциями. Если на торе задать функцию $f(q_1, q_2)$, разлагающуюся в ряд Фурье:

$$f(q_1, q_2) = \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} a_{pq} \exp[i(pq_1 + qq_2)],$$

то в соответствии с (9.1) ее изменение во времени определится формулой

$$\begin{aligned} f(t) &= f[q_1(t), q_2(t)] = \\ &= \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} a_{pq} \exp[i(p\omega_1 + q\omega_2)t + \alpha_{pq}]. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Функции вида (9.2) встречаются в решении большинства задач небесной механики и небесной баллистики при рассмотрении возмущенного движения. Эти функции принято называть условно-периодическими.

Если механическая система обладает n степенями свободы, то для геометрической интерпретации движения можно ввести n -мерный тор. Положение изображающей систему точки задается n угловыми координатами $x_1(t), \dots, x_n(t)$.

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ называется условно-периодической относительно аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ с периодом $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$,

если имеет место тождество

$$\begin{aligned} f(x_1 + \omega_1, x_2 + \omega_2, \dots, x_n + \omega_n, y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv \\ \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно трактовать как угловые координаты на n -мерном торе или как ортогональные координаты точки в n -мерном пространстве. Тогда период ω следует рассматривать как n -мерный вектор. Компоненты вектора ω_i будем называть элементарными периодами.

Нетрудно показать справедливость следующих теорем.

Т е о р е м а 1. Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ обладает периодом ω , то она будет иметь также период $\lambda\omega = \{\lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \dots, \lambda\omega_n\}$, где λ — любое целое число.

Т е о р е м а 2. Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ условно-периодична относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$ и имеет два периода

$$\omega_1 = \{\omega_{11}, \omega_{12}, \dots, \omega_{1n}\}, \quad \omega_2 = \{\omega_{21}, \omega_{22}, \dots, \omega_{2n}\},$$

то их векторная сумма

$$\omega_1 + \omega_2 = \{\omega_{11} + \omega_{21}, \omega_{12} + \omega_{22}, \dots, \omega_{1n} + \omega_{2n}\}$$

также является периодом.

С л е д с т в и е. Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ имеет k периодов

$$\omega_i = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{in}\} \quad (i=1, 2, \dots, k),$$

то любая линейная комбинация векторов ω_i с целочисленными коэффициентами является также периодом

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \omega_i = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \omega_{i1}, \sum_{i=1}^k \lambda_i \omega_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^k \lambda_i \omega_{in} \right\}. \quad (9.4)$$

Будем предполагать, что функции не обладают бесконечно малым периодом, т. е. модуль вектора ω не может быть меньше любого наперед заданного сколь угодно малого числа. Если это условие выполнено, то имеет место

Т е о р е м а 3. Если векторы ω и $\lambda\omega$ суть периоды функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$, то λ является рациональным числом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем теорему из теории чисел. Если λ — произвольное иррациональное число, то всегда можно указать два целых числа p и q такие, что величина $|p + q\lambda|$ будет меньше любого наперед заданного числа.

Предположим противное, что λ — иррациональное число. Тогда всегда можно указать такие два целых числа p и q , что величина $(p + q\lambda)\omega$, которая в силу теоремы 1 является периодом функции f , будет сколь угодно малой. Но тогда функция f имеет бесконечно малый период, что невозможно. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Всякий период для данного направления можно представить как целое кратное наименьшего по модулю периода того же направления.

Т е о р е м а 4. Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ условно-периодична по $x_1, x_2, \dots, x_n$, то существует такая система периодов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$, что любой из периодов функции f представляется в форме

$$\omega = \sum_{i=1}^k \lambda_i \omega_i, \quad (9.5)$$

где λ_i — целые числа, а число периодов k не превосходит числа переменных n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся случаем $n = 2$. Пусть $f(x_1, x_2, y_1, \dots, y_n)$ условно-периодична по x_1 и x_2 . Рассмотрим всевозможные периоды этой функции, расположив их в порядке возрастания модулей:

$$|\omega^{(1)}| \leq |\omega^{(2)}| \leq |\omega^{(3)}| \leq \dots$$

Будем иметь бесконечную последовательность, так как в силу теоремы 3 множество периодов счетно, а случай функции с бесконечно малым периодом из рассмотрения исключен.

Возьмем из этой последовательности период $\omega_1 = \omega^{(1)}$ и первый следующий за ним $\omega_2 = \omega^{(l)}$, не совпадающий по направлению с первым. На плоскости (x_1, x_2) построим сеть параллелограммов, стороны которых определяются векторами ω_1 и ω_2 (рис. 11).

Рассмотрим период, коллинеарный с ω_1 . Предположим противное, что найден такой период ω , характеризующийся вектором, конец которого не совпадает с узлом построенной

параллелограммной сетки. Тогда, согласно следствию из теоремы 3, либо период ω_1 будет целым кратным ω , либо период ω_1 является целым кратным ω . Но первое невозможно по сделанному предположению, а второе невозможно в силу выбора периода ω_1 .

В общем случае можно заключить, что любому периоду произвольного направления должен соответствовать вектор, конец которого совпадает с узлом параллелограммной сетки, ибо в противном случае этот вектор по модулю был бы меньше, чем $|\omega_2|$, что противоречит выбору вектора ω_2 .

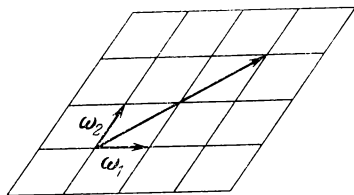


Рис. 11.

О п р е д е л е н и е. Совокупность периодов, удовлетворяющих условиям теоремы 4, называется периодной системой.

Если рассматривается условно-периодическая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ с n периодами, то в n -мерном пространстве строится решетка (аналог параллелограммной сетки), которая определяется периодной системой. Периодную систему можно выбрать различным образом. Периодную систему $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ можно заменить другой, с тем же числом периодов

$$\omega'_i = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} \omega_k \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Если определитель $\det|\lambda_{ik}|$ равен ± 1 , то периодная система называется простой. С помощью перехода от переменных x_i к новым переменным ω_i функцию f можно преобразовать таким образом, чтобы она имела простую периодную систему

$$(1, 0, \dots, 0),$$

$$(0, 1, \dots, 0),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(0, 0, \dots, 1).$$

§ 10. Условно-периодические движения

Пусть посредством разделения переменных в уравнении Гамильтона — Якоби (4.17) найден его полный интеграл в виде

$$V = -\alpha_1 t + \sum_{i=1}^n V_i(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (10.1)$$

Тогда обобщенные импульсы p_i будут функциями только соответствующих сопряженных координат

$$p_i = V_i'(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (10.2)$$

Так как в практических задачах импульсы p_i в гамильтониан входят только через вторые степени, то в результате разделения переменных в уравнении Гамильтона — Якоби и интегрирования функции V_i' будут иметь следующую структуру (см. § 5):

$$V_i'^2 = \Phi_i(q_i). \quad (10.3)$$

Если имеют место соотношения (10.3), то могут встретиться три типа изменения координат q_i : либрация, вращение (ротация) и предельное (асимптотическое) движение (см. [28]).

Пусть q_i' и q_i'' — два соседних корня уравнения

$$\Phi_i(q_i) = 0, \quad (10.4)$$

и пусть для всех значений q_i , удовлетворяющих условию

$$q_i' < q_i < q_i'',$$

$\Phi_i(q_i)$ принимает положительные значения. В таком случае импульсы будут обращаться в нуль только при $q_i = q_i'$ и $q_i = q_i''$. Если q_i' и q_i'' — простые корни, то q_i принимает все числовые значения, заключенные между q_i' и q_i'' . Говорят, что имеет место либрация по координате q_i , а величины q_i' и q_i'' называют пределами либрации. При либрации на плоскости (q_i, p_i) существует замкнутая кривая $p_i^2 - \Phi_i(q_i) = 0$. Если при изменении постоянных интегрирования замкнутые кривые стягиваются к точке, то последнюю

называют центром либрации. Центру либрации соответствует стационарное решение.

Если q'_i и q''_i — простые корни уравнения (10.4), между которыми при изменении числовых значений постоянных интегрирования не возникает новых корней, то положение равновесия устойчиво. Напротив, если при варьировании α_i между q'_i и q''_i появляются новые корни, то положение равновесия может быть неустойчивым. В этом случае при некоторой системе значений постоянных α_i один из корней q'_i и q''_i становится кратным, и тогда при определенных начальных условиях координата q_i будет асимптотически приближаться к положению равновесия. Говорят, что имеет место предельное движение.

Если функция $\Phi_i(q_i)$ периодична относительно q_i (не ограничивая общности, будем считать, что период равен 2π), то движение называется вращательным*). (При вращательном движении координата q_i — монотонно возрастающая функция времени.) Этот тип движения имеет место, если $\Phi_i(q_i + 2\pi) \equiv \Phi_i(q_i)$, и притом $\Phi_i(q_i) > 0$.

Предположим теперь, что по каждой из координат движение либо вращательное, либо либрационное, и рассмотрим интеграл

$$J_i = \oint p_i dq_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10.5)$$

(этот интеграл берется в либрационном случае по замкнутому контуру, определяемому уравнением $p_i^2 - \Phi_i(q_i) = 0$, а при вращении — в пределах от 0 до 2π). Вместо канонических элементов α_i введем новые переменные J_i . Тогда V можно выразить в функции от J_i и q_i . Обобщенную координату q_i заменим величиной w_i , определяемой соотношением

$$w_i = \frac{\partial V}{\partial J_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.6)$$

Величины J_i и w_i будут новыми сопряженными каноническими элементами. Они называются переменными «действие—

*) Введением обобщенной координаты $Q_i = \sin q_i$ вращательное движение сводится к либрационному. Правда, при этом пределы либрации оказываются не зависящими от начальных условий.

угол» (J_i — переменные «действия», ω_i — переменные типа «угол»). Переменные «действие — угол» ввел Делоне. Позднее они были использованы в физике при квантовании по Бору — Зоммерфельду.

Выясним некоторые свойства введенных канонических элементов. С этой целью вычислим приращение ω_i за полный цикл изменения координаты q_k

$$\Delta_k \omega_i = \oint \frac{\partial \omega_i}{\partial q_k} dq_k. \quad (10.7)$$

Из (10.6) и (10.1) находим

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 V}{\partial J_i \partial q_k} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 V_l}{\partial J_i \partial q_k} = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_{l=1}^n \frac{\partial V_l}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial J_i} \left(\frac{\partial V_i}{\partial q_k} \right).$$

Подставляя полученное выражение в (10.7), будем иметь

$$\Delta_k \omega_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial V_i}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial J_k}{\partial J_i} = \delta_{ik}, \quad (10.8)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Таким образом, если какая-либо координата q_k претерпевает полный цикл изменения, то соответствующая переменная ω_k изменяется на единицу (следует заметить, что физически такое изменение не всегда возможно, следовательно, полученный результат характеризует математическое свойство угловых переменных).

Верно и обратное утверждение. Если угловая переменная ω_k возрастает на единицу, то координата q_k , однозначно определяемая через ω_k , в случае либрации возвращается к первоначальному значению, а в случае вращения возрастает на 2π .

Выясним структуру решения, определяемого полным интегралом (10.1). Если этот интеграл рассматривать как производящую функцию канонического преобразования

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial V}{\partial q_i}, \\ \varphi_i &= \frac{\partial V}{\partial x_i} \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

$$(i = 1, 2, \dots, k)$$

от переменных p_i, q_i к переменным α_i, φ_i , то в соответствии с (4.11) — (4.13) новый гамильтониан K будет зависеть лишь от величин α_i :

$$K = K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (10.10)$$

т. е. переменные φ_i являются циклическими, и общее решение задачи записывается в виде

$$\alpha_i = \text{const}, \quad \varphi_i = \omega_i t + \beta_i, \quad \omega_i = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i}. \quad (10.11)$$

Новый гамильтониан K в силу (10.1) обычно в практических задачах динамики зависит лишь от постоянной обобщенного интеграла энергии α_1 , поэтому

$$\omega_1 = \frac{\partial K}{\partial \alpha_1} = 1, \quad \omega_2 = \dots = \omega_n = 0, \quad (10.12)$$

и решение (10.11) дается уравнениями

$$\alpha_i = \text{const}, \quad \varphi_1 = t + \beta_1, \quad \varphi_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \varphi_n = \beta_n. \quad (10.13)$$

В соответствии с (10.8) движение является условно периодическим. Значит, для его описания удобнее использовать такие канонические переменные, чтобы периодная система была простой. Выполним каноническое преобразование к переменным α_i^*, φ_i^* с помощью производящей функции

$$V^* = \sum_{k=1}^n f_k(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*) \varphi_k + g(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*), \quad (10.14)$$

которая дает

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= f_i(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*), \\ \varphi_i^* &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial \alpha_i^*} \varphi_l + \frac{\partial g}{\partial \alpha_i^*}. \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

Общее решение соответствующей системы уравнений движения будет иметь форму (10.11), но при этом K уже не будет зависеть только от α_1 , и, стало быть, не только ω_1 , но и другие $\omega_i^* = K'_{\alpha_i^*}$ будут, вообще говоря, отличны от нуля. Подобно тому, как это было сделано в § 9, можно

считать, что движение происходит по n -мерным торам $\alpha_i^* = \text{const}$, причем φ_i^* будут играть роль угловых переменных, определяющих положение точки на торе. При произвольном выборе переменных α_i^* и φ_i^* периодная система не будет простой. Очевидно, что систему канонических переменных «действие — угол», определяемых формулами (10.5) — (10.6), можно получить в результате преобразования типа (10.15). Элементарные периоды для них будут равны либо нулю, либо единице. Отмеченная особенность переменных «угол — действие» делает их особенно удобными в приложениях.

Итак, в силу (10.11) будем иметь

$$\omega_i = \nu_i t + \delta_i, \quad \nu_i = \frac{\partial V}{\partial J_i}, \quad (10.16)$$

где J_i, δ_i — постоянные. В соответствии с (10.8) старые переменные q_i суть условно периодические функции угловых переменных ω_i . А это означает, что координаты q_l ($l = 1, \dots, n$) можно разложить в кратные ряды Фурье

$$q_l = \sum_{i_1, \dots, i_n = -\infty}^{+\infty} c_{(i_1, i_2, \dots, i_n)}^{(l)} e^{2\pi V^{-1}[(i_1 \nu_1 + \dots + i_n \nu_n)t + (i_1 \delta_1 + \dots + i_n \delta_n)]}. \quad (10.17)$$

Или, пользуясь векторной формой записи и полагая

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= \{i_1, i_2, \dots, i_n\}, \quad \boldsymbol{\delta} = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}, \\ \boldsymbol{\nu} &= \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}, \\ (\mathbf{i}, \boldsymbol{\nu}) &= i_1 \nu_1 + i_2 \nu_2 + \dots + i_n \nu_n, \\ (\mathbf{i}, \boldsymbol{\delta}) &= i_1 \delta_1 + i_2 \delta_2 + \dots + i_n \delta_n, \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

вместо (10.17) будем иметь

$$q_l = \sum_{(i)} c_i^{(l)} e^{2\pi V^{-1}[(\mathbf{i}, \boldsymbol{\nu})t + (\mathbf{i}, \boldsymbol{\delta})]} \quad (l = 1, 2, \dots, n). \quad (10.19)$$

В теории возмущенного движения весьма существенными оказываются свойства вектора $\boldsymbol{\nu}$. Если между частотами ν_i не существует тождественного соотношения

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = 0, \quad (10.20)$$

где λ — вектор с целочисленными компонентами, то динамическая система называется невырожденной. Если соотношение (10.20) выполняется тождественно, то имеет место собственное вырождение, а система называется собственно вырожденной. Если соотношение $(\lambda, \nu) = 0$ выполняется только при определенных начальных условиях, то говорят, что имеет место случайное вырождение. Наконец, укажем еще одну возможность вырождения. Если нижний и верхний пределы либрации для k координат сливаются друг с другом, то в n -мерном пространстве обобщенных координат траектория заполняет область, число измерений которой равно $n - k$. В этом случае говорят о предельном вырождении.

Рассмотрим пример предельного вырождения. Пусть точка движется по вращающемуся эллипсу. Тогда в процессе движения она заполняет всюду плотно круговое кольцо, внешний и внутренний радиусы которого определяются перицентром и апоцентром. По радиусу-вектору движение имеет либрационный характер. Если теперь начальные условия изменять таким образом, чтобы эксцентриситет эллипса стремился к нулю, то пределы либрации будут стремиться друг к другу, а кольцо будет стягиваться к окружности. В пределе вместо двумерной области движения получается одномерная. При нулевом значении эксцентриситета наступает предельное вырождение.

Установим теперь одно из основных свойств условно-периодических движений [39].

Т е о р е м а. Если движение обладает либрационным характером и является невырожденным, то траектория повсюду плотно заполняет область пространства обобщенных координат, ограниченную гиперповерхностями, определяемыми пределами либрации.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для простоты ограничимся рассмотрением системы с тремя степенями свободы. Пусть в качестве канонических переменных приняты переменные «угол — действие». Тогда система будет иметь простую периодную систему, равную единице. Введем прямоугольную систему координат (рис. 12) с началом в некоторой точке O в пространстве угловых переменных $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Пусть e_1, e_2, e_3 — орты соответствующих координатных осей. В силу (10.16) траектория, определяемая уравнениями

$$\omega_k = \nu_k t + \delta_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

является прямой линией, причем направляющие косинусы этой прямой пропорциональны частотам ν_1, ν_2, ν_3 . По условию теоремы движение невырожденно и, следовательно, ν_k будут несоизмеримы.

При доказательстве воспользуемся понятием эквивалентности двух точек $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и $(\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)$. Две точки называются эквивалентными, если соединяющий их вектор имеет форму

$$\sum_{k=1}^3 \lambda_k \nu_k \mathbf{e}_k,$$

где λ_k — целые числа.

Заменив каждую точку ей эквивалентной, мы можем ограничиться рассмотрением поведения траектории внутри единичного куба. Пусть $P_0, P_1, P_2, \dots$ — точки пересечения траектории с гранями куба. Для удобства будем считать, что начало координат O совпадает с точкой P_0 . Вследствие несоизмеримости частот ν_k ни одна из точек P_i не совпадает с какой-либо другой.

На каждой из граней можно построить бесчисленное множество векторов $\overrightarrow{P_m P_n}$, соединяющих между собой точки P_i . Очевидно, что всегда можно указать по крайней мере один вектор $\overrightarrow{P_m P_n}$, модуль которого меньше любого наперед заданного малого числа. Для этого достаточно воспользоваться упоминавшейся в § 9 теоремой из теории чисел.

Рассмотрим теперь распределение точек P_i на какой-либо из граней куба, например, на грани $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. В силу невырожденности найдется такой конечный номер σ , что точка P_σ будет лежать на грани $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Приняв эту точку за начальную, рассмотрим всевозможные векторы $\overrightarrow{P_\sigma P_n}$. Эти векторы определяют все точки траектории, лежащие на грани $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Покажем, что эти точки не могут лежать на какой-либо одной прямой.

Если предположить противное, то для любых двух точек P'_1 и P'_2 этой грани куба, принадлежащих траектории,

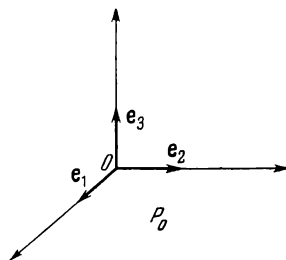


Рис. 12.

будем иметь

$$P'_i \left\{ \frac{v_1}{v_3} x_i - E \left(\frac{v_1}{v_3} x_i \right); \quad \frac{v_2}{v_3} x_i - E \left(\frac{v_2}{v_3} x_i \right) \right\} \quad (i = 1, 2)$$

и, кроме того, имеем точку

$$P_\sigma \left\{ \frac{v_1}{v_3} - E \left(\frac{v_1}{v_3} \right); \quad \frac{v_2}{v_3} - E \left(\frac{v_2}{v_3} \right) \right\}.$$

В силу компланарности векторов $\vec{P}_\sigma \vec{P}'_i$ получим

$$\begin{vmatrix} \frac{v_1}{v_3} - E \left(\frac{v_1}{v_3} \right), & \frac{v_2}{v_3} - E \left(\frac{v_2}{v_3} \right), & 1 \\ \frac{v_1 x_1}{v_3} - E \left(\frac{v_1 x_1}{v_3} \right), & \frac{v_2 x_1}{v_3} - E \left(\frac{v_2 x_1}{v_3} \right), & 1 \\ \frac{v_1 x_2}{v_3} - E \left(\frac{v_1 x_2}{v_3} \right), & \frac{v_2 x_2}{v_3} - E \left(\frac{v_2 x_2}{v_3} \right), & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (10.21)$$

Умножая элементы первой строки сначала на x_1 , а затем на x_2 и вычитая из полученных результатов соответственно элементы второй и третьей строк, преобразуем (10.21) к виду

$$\begin{vmatrix} \frac{v_1}{v_3} - E \left(\frac{v_1}{v_3} \right), & \frac{v_2}{v_3} - E \left(\frac{v_2}{v_3} \right), & 1 \\ E \left(\frac{v_1 x_1}{v_3} \right) - x_1 E \left(\frac{v_1}{v_3} \right), & E \left(\frac{v_2 x_1}{v_3} \right) - x_1 E \left(\frac{v_2}{v_3} \right), & x_1 - 1 \\ E \left(\frac{v_1 x_2}{v_3} \right) - x_2 E \left(\frac{v_1}{v_3} \right), & E \left(\frac{v_2 x_2}{v_3} \right) - x_2 E \left(\frac{v_2}{v_3} \right), & x_2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как по условию теоремы v_i несоизмеримы, то

$$\frac{v_i}{v_3} - E \left(\frac{v_i}{v_3} \right) \neq 0 \quad (i = 1, 2),$$

и поэтому предыдущее условие переписывается в форме

$$\begin{vmatrix} E \left(\frac{v_1 x_1}{v_3} \right) - x_1 E \left(\frac{v_1}{v_3} \right), & E \left(\frac{v_2 x_1}{v_3} \right) - x_1 E \left(\frac{v_2}{v_3} \right) \\ E \left(\frac{v_1 x_2}{v_3} \right) - x_2 E \left(\frac{v_1}{v_3} \right), & E \left(\frac{v_2 x_2}{v_3} \right) - x_2 E \left(\frac{v_2}{v_3} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Поделив теперь элементы первой строки на $x_1 - 1$ и

переходя к пределу при $x_1 \rightarrow \infty$, получим

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{v_2}{v_3} - E\left(\frac{v_2}{v_3}\right), & 1 \\ E\left(\frac{x_2 v_2}{v_3}\right) - x_2, & x_2 E\left(\frac{v_2}{v_3}\right) - 1 \end{array} \right| = 0.$$

Но это несовместимо с условием несоизмеримости частот v_2 и v_3 . Следовательно, множество точек $\{P_i\}$, принадлежащих грани e_2, e_3 , не может лежать на прямой. Аналогичные рассуждения можно провести и для других граней.

Теперь уже очевидно, что точки траектории, лежащие на гранях куба, заполняют их повсюду плотно. Следовательно, траектории проходят сколь угодно близко к любой из точек куба.

Дж. Винти, исходя при исследовании движения ИСЗ из задачи, интегрируемой с помощью теоремы Штеккеля [40], изучил вопрос о средних движениях в штеккелевых системах [41]. Ниже мы распространяем полученные Винти результаты на произвольные динамические системы, интегрируемые при помощи теоремы Якоби разделением переменных.

Т е о р е м а. Если динамическая система такова, что в рассматриваемой области изменения обобщенных координат гамильтониан существует и однозначен, и если каждая из обобщенных координат обладает либрационным изменением и является однозначной и дифференцируемой функцией канонических переменных типа «угол», то средняя частота для каждой из координат равна частоте соответствующей угловой переменной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть T — интервал времени, содержащий целое число циклов N_k изменения координаты q_k . Под средней частотой n_k будем понимать величину

$$n_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_k}{T}, \quad (10.22)$$

предполагая, что этот предел существует. Необходимо доказать, что для условно-периодических движений

$$n_k = v_k, \quad (10.23)$$

где согласно (10.16)

$$v_k = \frac{\partial V}{\partial J_k}.$$

Если все v_i соизмеримы, то можно найти положительное v_0 и натуральные числа $m_1, m_2, \dots, m_n$ такие, что

$$v_k = m_k v_0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (10.24)$$

В силу (10.8) и (10.24) для действительного движения имеем

$$\omega_k(t) = \omega_k(0) + m_k v_0 t, \quad (10.25)$$

и за промежуток времени $T = 1/v_0$ изменение ω_k согласно (10.25) будет равно

$$\Delta \omega_k = m_k. \quad (10.26)$$

В этом случае каждая из координат q_k совершает m_k полных циклов, и движение оказывается периодическим с периодом $1/v_0$. Таким образом, средняя частота n_k равна

$$n_k = \frac{m_k}{T} = m_k v_0 = v_k. \quad (10.27)$$

Если частоты v_k несоизмеримы, то положим

$$\xi_k = v_k : v_1, \quad (10.28)$$

и тогда по крайней мере одна из величин ξ_k должна быть иррациональной. Как и выше, находим

$$\omega_k(t) = \omega_k(0) + \xi_k v_1 t. \quad (10.29)$$

Воспользуемся теоремой Дирихле, которая утверждает, что если среди действительных чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеется по крайней мере одно иррациональное, то система неравенств

$$\left| \xi_k - \frac{m_k}{P} \right| < P^{-1-\frac{1}{n}} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (10.30)$$

допускает бесчисленное множество целых решений относительно P и n , причем решение для P не ограничено сверху.

Рассмотрим такие значения $T = P/v_1$, для которых есть целое число, удовлетворяющее неравенствам (10.30). В те-

чение этого промежутка времени каждая из угловых координат ω_k изменяется от начального значения $\omega_k(0)$ до величины

$$\omega_k(T) = \omega_k(0) + P\xi_k. \quad (10.31)$$

Но в силу (10.30)

$$P\xi_k = m_k + \eta_k, \quad (10.32)$$

причем

$$|\eta_k| < P^{-\frac{1}{n}}, \quad (10.33)$$

так что

$$\omega_k(T) = \omega_k(0) + m_k + \eta_k. \quad (10.34)$$

В то время как P принимает все возрастающие значения, удовлетворяющие условиям (10.30), каждая из величин η_k в соответствии с (10.33) стремится к нулю. В силу предыдущей теоремы и соотношения (10.34) существует бесчисленное множество значений T , для которых траектория в пространстве канонических переменных типа «угол» подходит сколь угодно близко к точкам, где $\Delta\omega_k = m_k$ (m_k — целое).

Пусть

$$q_k(0) = f_k(\omega_1(0), \omega_2(0), \dots, \omega_k(0)), \quad (10.35)$$

а при $t = T$

$$q_k(T) = f_k[\omega_1(0) + m_1 + \eta_1, \dots, \omega_k(0) + m_k + \eta_k]. \quad (10.36)$$

Если P неограниченно возрастает, удовлетворяя при этом условиям (10.30), то q_k стремятся к величинам

$$q_k = f_k[\omega_1(0) + m_1, \dots, \omega_k(0) + m_k]. \quad (10.37)$$

Из (10.37) видно, что $\Delta\omega_k = m_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Но в таком случае промежуток времени T содержит целое число полных циклов изменения каждой из координат. По определению (10.22), получаем среднюю частоту

$$n_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{m_k}{T}. \quad (10.38)$$

Этот предел существует, так как

$$\frac{m_k}{T} = \frac{\nu_1 m_\nu}{P},$$

и поэтому

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{m_k}{P} = \xi_k. \quad (10.39)$$

Таким образом, $n_k = \nu_1 \xi_k = \nu_k$. Теорема доказана.

§ 11. Задача о возмущенном движении

Как задачи классической небесной механики, так и новые проблемы небесной баллистики в большинстве своем не могут быть решены в квадратурах в конечном виде. Поэтому в небесной механике широко применяются приближенные методы решения систем дифференциальных уравнений движения, в частности различные формы метода последовательных приближений.

Пусть исследуется механическая система, гамильтонову функцию H которой, исходя из физических или математических соображений, можно разбить на такие две части:

$$H = H_0 + R, \quad (11.1)$$

то функция R в интересующей нас области изменения канонических переменных по модулю остается весьма малой по сравнению с первым членом H_0 . Чаще всего функция R содержит один или несколько малых параметров и уничтожается, когда последние обращаются в нули. Роль малого параметра может играть масса планеты в задаче Солнце — планета — космический аппарат или величина, пропорциональная сжатию планеты, в задаче о движении искусственного спутника планеты. Иногда малый параметр вводится искусственным образом, например, при помощи преобразования переменных, содержащего малый параметр.

Если в интересующей нас области фазового пространства p_i, q_i всегда выполняется условие

$$|R| \ll |H_0|, \quad (11.2)$$

то мы всегда можем считать, что гамильтониан задачи имеет вид

$$H = H_0(p, q) + R(\mu, p, q, t), \quad (11.3)$$

причем

$$R(0, p, q, t) \equiv 0. \quad (11.4)$$

Член H_0 называется невозмущенной частью гамильтониана и строится обычно таким образом, чтобы упрощенная задача с гамильтонианом H_0 либо могла быть проинтегрирована в квадратурах, либо допускала некоторое семейство решений. Движение, определяемое гамильтонианом H_0 , называется невозмущенным, а движение, определяемое гамильтоновой функцией H , — возмущенным. Функция R называется возмущающей или пертурбационной.

Запишем канонические уравнения возмущенного движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (11.5)$$

Если $\mu = 0$, то вместо (11.5) имеем уравнения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}. \quad (11.6)$$

Будем предполагать, что система (11.6) может быть проинтегрирована методом Якоби. Пусть

$$V = V(t, \alpha, q) \quad (11.7)$$

— полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, определяющий невозмущенное движение.

Принимая функцию (11.7) в качестве производящей, преобразуем систему (11.5) к новым переменным α_i и β_i . В соответствии с (4.11) — (4.13) новая система канонических уравнений имеет вид

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}. \quad (11.8)$$

Введенные переменные α_i и β_i называются в небесной механике оскулирующими элементами.

Система (11.8) решается методом последовательных приближений, причем в качестве нулевого приближения для переменных α_i и β_i принимаются постоянные значения,

соответствующие невозмущенному движению

$$\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \quad \beta_i = \beta_i^{(0)}. \quad (11.9)$$

Метод последовательных приближений позволяет представить искомые величины в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням малого параметра:

$$\alpha_i = \alpha_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \alpha_i^{(k)}, \quad \beta_i = \beta_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \beta_i^{(k)}. \quad (11.10)$$

Отдельные члены рядов называются возмущениями или неравенствами, причем показатель степени малого параметра в рассматриваемом члене называется порядком возмущения.

Возмущения в зависимости от их аналитической структуры подразделяются на три категории:

1) возмущения вида

$$At^k, \quad (11.11)$$

где A — некоторый постоянный коэффициент, зависящий от начальных значений элементов, а k — натуральное число, называются вековыми;

2) возмущения вида

$$A \sin(\nu t + \delta), \quad (11.12)$$

где A , ν , δ — постоянные величины, зависящие от начальных условий, называются периодическими;

3) возмущения, имеющие вид

$$At^k \sin(\nu t + \delta), \quad k \neq 0, \quad (11.13)$$

называются смешанными.

Выделение возмущений именно этих трех типов обусловлено характером решения невозмущенной задачи в случае либрационного движения. Так как согласно (10.19) обобщенные координаты в невозмущенном движении представляются в виде кратных рядов Фурье, то и пертурбационная функция в системе уравнения возмущенного движения (11.9) также разлагается в кратные ряды Фурье, независимой переменной в которых служит время. Отсюда очевидным образом следует, что при интегрировании системы (11.9) методом последовательных приближений ряды, представ-

ляющие возмущенное движение, могут содержать лишь члены вида (11.11) — (11.13).

Исключительно важное значение в небесной механике и небесной баллистике имеет вопрос о совокупном эффекте всех вековых и смешанных возмущений. Будут ли вследствие вековых возмущений возмущенные и невозмущенные значения оскулирующих элементов с ростом времени разниться друг от друга на сколь угодно большую величину? Или возможно, что совокупность всех вековых и смешанных возмущений представляет собой периодическую функцию времени? Не порождены ли вековые возмущения дефектами используемых математических методов?

Для выяснения сущности вопроса рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} - \cos \mu t = 0, \quad (11.14)$$

в котором μ — малый параметр. Если искать решение этого уравнения в виде рядов по степеням малого параметра, то можно получить

$$x = x_0 + t - \dots \quad (11.15)$$

В то же время в конечном виде общее решение этого уравнения записывается следующим образом:

$$x = x_0 + \frac{1}{\mu} \sin \mu t. \quad (11.16)$$

Как видно из (11.15), возмущения любого порядка вековые, а из (11.16) следует, что в совокупности они дают периодическое возмущение с периодом $2\pi : \mu$. Так как величина μ мала, то период возмущенного изменения величины x будет весьма велик. Бесконечная совокупность вековых возмущений x соответствует одному долгопериодическому неравенству. Итак, в рассматриваемом примере вековые возмущения возникли в результате недостатка метода последовательных приближений.

Будет ли этот случай иметь место в задачах о движении небесных тел? Этому вопросу были посвящены многие работы, и лишь в последнее время в работах В. И. Арнольда [42], Ю. Мозера [43] и др. был достигнут значительный прогресс. В гл. VI мы рассмотрим этот вопрос более подробно.

ПОТЕНЦИАЛ НЬЮТОНОВСКОГО ПРИТЯЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Потенциал объемных масс. Уравнение Лапласа

В классической небесной механике во многих случаях оказывается вполне удовлетворительной замена реальных притягивающих масс материальными точками. Это обстоятельство легко объясняется тем, что размеры притягивающихся тел обычно исчезающе малы по сравнению с расстояниями, их разделяющими. Совершенно иная картина наблюдается в небесной баллистике. Космический аппарат либо в течение всего времени полета, либо на отдельных этапах движения в непосредственной окрестности притягивающего тела находится от него на расстоянии, имеющем один порядок с размерами тела. И в этом случае необходим весьма тщательный учет возмущающего воздействия от фигуры притягивающего тела. Поэтому способы представления гравитационного потенциала планеты представляют большой интерес с чисто практической точки зрения.

При исследовании потенциалов небесных тел будем исходить из двух предположений.

1. Притягивающее тело является абсолютно твердым, недеформируемым.

2. Притягивающее тело мало отличается от шара с радиальным распределением плотности.

Возьмем прямоугольную декартову систему координат с началом в некоторой точке O тела, а координатные оси направим по главным осям эллипсоида инерции тела (рис. 13). Пусть $\kappa(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность тела в текущей точке $M(\xi, \eta, \zeta)$, и пусть $\Delta = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ — расстояние между точкой M и внешней по отношению к телу точкой $P(x, y, z)$.

Тогда потенциал *) тяготения dU элемента массы dm , заключающего точку M , определится равенством

$$dU = \frac{f dm}{\Delta} = \frac{f \kappa d\tau}{\Delta}, \quad (1.1)$$

где f — постоянная тяготения, $d\tau$ — элемент объема. Интегрируя по объему, занятому телом, находим выражение

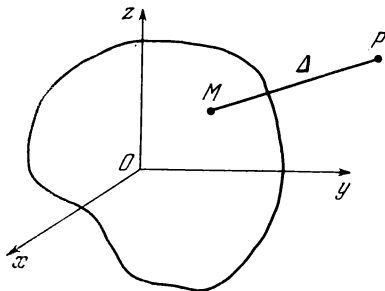


Рис. 13.

для гравитационного потенциала всего тела на внешнюю точку

$$U(x, y, z) = f \iiint_V \frac{\kappa d\tau}{\Delta}. \quad (1.2)$$

В формуле (1.2) интегрирование распространяется на весь объем, занятый рассматриваемым телом. Потенциал U является дифференцируемой функцией координат во всем внешнем пространстве.

Сила тяготения $\mathbf{F}$, вызываемого телом, дается формулой

$$\mathbf{F} = \text{grad } U. \quad (1.3)$$

Дважды дифференцируя (1.2) частным образом по x , y , z , устанавливаем, что во внешнем пространстве потенциал U удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (1.4)$$

*) Заметим, что термин «потенциал» в теорию притяжения был введен Гауссом [44].

Если предполагать, что плотность κ (ξ, η, ζ) имеет внутри тела непрерывные частные производные первого порядка, то можно показать, что во внутренних точках тела потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U = -4\pi\kappa(x, y, z). \quad (1.5)$$

Потенциал тела можно вычислять непосредственно при помощи формулы (1.2). Однако прямой путь не всегда оказывается наилучшим. Так как потенциал U во внешнем пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа и, стало быть, представляет собой гармоническую функцию, то часто более предпочтительным оказывается иной путь нахождения потенциала, связанный с использованием уравнений (1.4) — (1.5). При этом необходимо решить внешнюю задачу Дирихле. Будем опираться на теорему Дирихле, доказательство которой читатель найдет в специальных курсах по теории ньютоновского потенциала [45, 46]. Эта теорема состоит в следующем.

Т е о р е м а. Если плотность κ внутри тела обладает непрерывными частными производными первого порядка, то регулярная на бесконечности функция $U(x, y, z)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta U = \begin{cases} 0 & \text{вне тела,} \\ -4\pi\kappa & \text{внутри тела,} \end{cases} \quad (1.6)$$

совпадает с потенциалом тяготения тела.

Заметим, что из требования регулярности потенциала на бесконечности вытекает условие

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho U = fm, \quad (1.7)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а $m = \iiint \kappa d\tau$ — масса притягивающего тела.

Эффективность решения задачи об определении потенциала тяготения вторым способом зависит от выбора координат. Часто удобнее искать решение не в прямоугольных, а криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 . Последние нужно стремиться выбирать так, чтобы уравнение Лапласа допускало решение разделением переменных. Прежде всего преобразуем уравнение Лапласа к новым переменным q_1 ,

q_2, q_3 , связанным с прямоугольными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Наиболее простой вид уравнение Лапласа получает в ортогональных координатах (см. (3.4) гл. I).

В результате вычислений для лапласиана получаем

$$\Delta U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right\}, \quad (1.9)$$

где величины H_i суть коэффициенты Ламе, определяемые формулами (3.6) гл. I.

В задачах небесной баллистики чаще всего употребляют сферические и вырожденные эллипсоидальные координаты. Уравнение Лапласа допускает разделение переменных как в сферических, так и в вырожденных эллипсоидальных координатах.

Используя формулы (3.16) гл. I для коэффициентов Ламе в системе сферических координат, с помощью (1.9) получим уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (1.10)$$

В новых исследованиях по теории движения ИСЗ Дж. П. Винти [40], М. Д. Кислика [47] и др. потенциал земного тяготения находится из уравнения Лапласа, записанного в одной из систем вырожденных эллипсоидальных координат. Мы воспользуемся сфероидальными координатами (3.20) гл. I, аналогичными координатам Тиле:

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \psi \cos \vartheta \cos \lambda, \\ y &= c \operatorname{ch} \psi \cos \vartheta \sin \lambda, \\ z &= c \operatorname{sh} \psi \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Из (1.9) при помощи выражений для коэффициентов Ламе (3.25) гл. I приходим к следующей форме уравнения Лапласа

в сжатых сфероидальных координатах:

$$\frac{1}{c^2 (\operatorname{ch}^2 \psi - \cos^2 \vartheta)} \left\{ \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\operatorname{ch} \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\operatorname{ch} \psi \frac{\partial U}{\partial \psi} \right) + \left(\frac{1}{\cos^2 \vartheta} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \psi} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} \right\} = 0. \quad (1.11)$$

Таким же образом можно получить уравнение Лапласа в вытянутых сфероидальных координатах, определяемых формулами преобразования (3.29) гл. I:

$$\frac{1}{c^2 (\operatorname{ch}^2 v - \cos^2 u)} \left\{ \frac{1}{\sin u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\sin u \frac{\partial U}{\partial u} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\operatorname{sh} v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\operatorname{sh} v \frac{\partial U}{\partial v} \right) + \left(\frac{1}{\sin^2 u} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 v} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} \right\} = 0. \quad (1.12)$$

При решении задач теории потенциала удобно пользоваться разложением гармонических функций в ряды по сферическим функциям, краткие основные сведения о которых мы изложим в следующем параграфе.

§ 2. Сферические функции. Полиномы Лежандра

Рассмотрим уравнение Лапласа в сферических координатах (1.10) и будем искать частные решения этого уравнения вида

$$U(r, \varphi, \lambda) = R(r) \Phi(\varphi) \Lambda(\lambda). \quad (2.1)$$

Очевидно, что определение каждого из множителей в (2.1) вследствие разделения переменных в уравнении (1.10) сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

В самом деле, умножая уравнение (1.10) на $r^2 \cos^2 \varphi$ и перенося член, зависящий от λ , вправо, после подстановки в уравнение Лапласа выражения (2.1), находим:

$$\cos^2 \varphi \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\cos \varphi \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) \right] = - \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2}.$$

А это возможно лишь при условии, что обе части уравнения суть величины постоянные. Обозначив эту постоянную через k^2 , получаем для определения R , Φ и Λ следующие

уравнения:

$$\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} + k^2\Lambda = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{k^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{\Phi \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\cos \varphi \cdot \frac{d\Phi}{d\varphi} \right). \quad (2.3)$$

В уравнении (2.3) по тем же соображениям обе части равны одной и той же постоянной, которую для удобства обозначим через $n(n+1)$. Тогда будем иметь

$$\frac{1}{\cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\cos \varphi \cdot \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) + \left[n(n+1) - \frac{k^2}{\cos^2 \varphi} \right] \Phi = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1)R = 0. \quad (2.5)$$

Итак, определение каждого из множителей приводит к интегрированию уравнений (2.2), (2.4) и (2.5). При этом выбор постоянных k и n необходимо производить так, чтобы каждое из найденных решений (2.1) являлось гармонической функцией. Тогда решение краевых задач теории ньютоновского потенциала можно получить посредством суперпозиции различных частных решений, как это обычно и делается при использовании метода Фурье для интегрирования уравнений в частных производных.

Общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\Lambda = A \cos k\lambda + B \sin k\lambda,$$

где A и B — постоянные интегрирования.

Что касается уравнения (2.4), то в теории потенциала используются лишь те его решения, которые соответствуют натуральным значениям k и n , причем k не должно превышать n . Частные решения уравнения (2.4) зависят от постоянных k и n , поэтому для них удобно пользоваться обозначением $P_n^k(\sin \varphi)$.

Комбинации решений уравнений (2.2) и (2.4) вида

$$Y_n(\varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^n P_n^k(\sin \varphi) (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda), \quad (2.6)$$

где A_{nk} и B_{nk} суть произвольные постоянные, называются общими сферическими функциями n -го порядка *).

*) Сферические функции впервые были введены Лапласом.

Исследование решений уравнения (2.4) начнем со случая $k = 0$. Положив

$$y = \Phi(\varphi), \quad x = \sin \varphi,$$

предварительно преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right] y = 0. \quad (2.7)$$

При $k = 0$ вместо (2.7) будем иметь

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0. \quad (2.8)$$

Частные решения этого уравнения $P_n^0(x)$ в дальнейшем будем обозначать через $P_n(x)$ *).

Несложно показать, что многочлен

$$z = (x^2 - 1)^n$$

удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$(x^2 - 1) \frac{dz}{dx} - 2nxz = 0.$$

Если продифференцировать это уравнение по x $(n+1)$ раз, то в результате приходим к уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dz^{(n)}}{dx} \right] + n(n+1)z^{(n)} = 0. \quad (2.9)$$

Полагая затем $y = z^{(n)}$, вместо (2.9) получаем уравнение (2.8). Отсюда можно сделать вывод, что функция

$$y = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (2.10)$$

представляет собой частное решение интересующего нас уравнения. Так как уравнение (2.8) линейно и однородно, то произведение функции (2.10) на любую постоянную также будет решением этого уравнения.

*) Уравнение (2.8) является частным случаем уравнения Гаусса (гипергеометрического уравнения). Свойство интегралов этого уравнения наиболее полно и строго изучается в аналитической теории дифференциальных уравнений. Подробное изложение теории сферических функций можно найти в монографиях Е. Гобсона [48] и Дж. Лензе [49].

В теории потенциала мы будем использовать решения уравнения (2.8), определяемые формулой Олинда Родрига, являющейся следствием (2.10):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}. \quad (2.11)$$

Формула Родрига определяет многочлен n -го порядка относительно x , который носит название полинома Лежандра.

Первые из этих полиномов, которые можно встретить в разложениях гравитационного потенциала Земли, использующихся в теории движения ИСЗ, таковы (рис. 14):

$$\left. \begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \\ P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}, \\ P_5(x) &= \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x, \\ P_6(x) &= \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16}, \\ P_7(x) &= \frac{429}{16}x^7 - \frac{693}{16}x^5 + \frac{315}{16}x^3 - \frac{35}{16}x, \\ P_8(x) &= \frac{6435}{128}x^8 - \frac{12012}{128}x^6 + \frac{6930}{128}x^4 - \frac{1260}{128}x^2 + \frac{35}{128}, \\ P_9(x) &= \frac{12155}{128}x^9 - \frac{25740}{128}x^7 + \frac{18018}{128}x^5 - \frac{4620}{128}x^3 + \frac{315}{128}x. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Как видно из формулы Родрига, полином Лежандра является аналитической функцией, и поэтому можно воспользоваться интегралом Коши

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-x)^{n+1}}, \quad (2.13)$$

где C — произвольная замкнутая жорданова кривая, и представить полином Лежандра с помощью формулы

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot 2\pi i} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz, \quad (2.14)$$

называемой формулой Шлэфли.

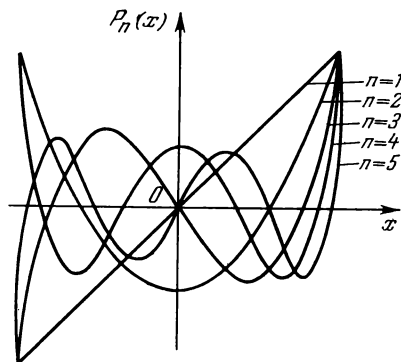


Рис. 14.

Преобразуем интеграл (2.14) к новой переменной α , определяемой соотношением

$$\alpha = 2 \frac{z - x}{z^2 - 1}.$$

После несложных преобразований вместо (2.14) получим

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d\alpha}{\alpha^{n+1} \sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}. \quad (2.15)$$

Сравнивая (2.15) с (2.13), устанавливаем, что

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\alpha^n} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} \right) \right]_{\alpha=0},$$

т. е. полином Лежандра $P_n(x)$ равен коэффициенту при α^n в ряде Маклорена

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x). \quad (2.16)$$

Стоящая в левой части этого соотношения функция называется производящей.

Установим теперь некоторые важные свойства полиномов Лежандра. Дифференцируя (2.16) по α , находим

$$(x - \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1}P_n(x),$$

или

$$(x - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x) = (1 - 2\alpha x + \alpha^2) \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} P_n(x).$$

Приравнявая в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых степенях α в правой и левой частях, получим рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \quad (2.17)$$

Не входя в подробности вычислений, отметим следующее свойство полиномов Лежандра:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (2.18)$$

Это свойство означает, что система полиномов Лежандра является ортогональной и ее можно использовать для разложения функций в ряды по полиномам Лежандра.

Возвратимся теперь к уравнению (2.8) и изучим общий случай при $k \neq 0$. Покажем, что частным решением этого уравнения является функция

$$P_n^k(x) = (1 - x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}, \quad (2.19)$$

называемая присоединенной функцией Лежандра порядка n и ранга k первого рода *).

*) Наряду с полиномами Лежандра в математике рассматриваются функции Лежандра второго рода и присоединенные функции Лежандра второго рода.

Дифференцируя уравнение (2.8) k раз и полагая $z = y^{(k)}$, получим уравнение

$$(1 - x^2) z'' - 2x(k+1) z' + [n(n+1) - k(k+1)]z = 0,$$

которому удовлетворяет производная от функции $z = P_n^{(k)}(x)$. Отсюда подстановкой

$$z = (1 - x^2)^{-\frac{k}{2}} P_n^{(k)}(x)$$

после соответствующих преобразований получим уравнение для присоединенных функций Лежандра, совпадающее с уравнением (2.8).

Основное для теории потенциала свойство присоединенных функций Лежандра дается теоремой ортогональности, которая выражается формулой:

$$\int_{-1}^1 P_n^k(x) P_m^k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} & \text{при } n = m. \end{cases} \quad (2.20)$$

Формулы для полиномов Лежандра (2.11) и присоединенных функций Лежандра (2.19) позволяют получить явное выражение для сферической функции n -го порядка (см. (2.6)):

$$Y_n(\varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^n (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda) \cos^k \varphi \frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{(d \sin \varphi)^k}. \quad (2.21)$$

Из (2.21) видим, что сферические функции представляют собой линейные комбинации функций

$$\frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{(d \sin \varphi)^k} \cos^k \varphi \cos k\lambda, \quad \frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{(d \sin \varphi)^k} \cos^k \varphi \sin k\lambda, \quad (2.22)$$

которые называются сферическими гармониками.

Возьмем две сферические гармоники, отличающиеся друг от друга по крайней мере одним индексом, и проинтегрируем их произведение по поверхности сферы. После несложных вычислений получим

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n^k(\sin \varphi) P_m^s(\sin \varphi) \frac{\cos k\lambda}{\sin \lambda} \cdot \frac{\cos s\lambda}{\sin \lambda} \cdot \cos \varphi d\lambda d\varphi = 0. \quad (2.23)$$

Следовательно, все семейство сферических гармоник составляет ортогональную систему функций.

Пусть имеется функция $f(\varphi, \lambda)$, являющаяся конечной, однозначной и непрерывной на поверхности сферы единичного радиуса. Предположим, что ее можно представить в виде ряда *)

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n P_n^k(\sin \varphi) (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda), \quad (2.24)$$

члены которого суть общие сферические функции, которые ранее были определены формулой (2.6).

Если ряд (2.24) сходится равномерно, то для определения его коэффициентов A_{nk} и B_{nk} можно воспользоваться свойством ортогональности сферических гармоник. Умножим ряд (2.24) на сферическую гармонику

$$P_n^k(\sin \varphi) \cos k\lambda$$

и проинтегрируем по поверхности сферы. В силу (2.23) после выполнения соответствующих операций приходим к следующему:

$$A_{nk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi\delta_k(n+k)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\varphi, \lambda) P_n^k(\sin \varphi) \cos k\lambda \cos \varphi d\varphi d\lambda, \quad (2.25)$$

где $\delta_0 = 2$, $\delta_1 = \delta_2 = \dots = 1$. Точно таким же образом найдем

$$B_{nk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi\delta_k(n+k)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\varphi, \lambda) P_n^k(\sin \varphi) \sin k\lambda \cos \varphi d\varphi d\lambda. \quad (2.26)$$

Заметим, что в силу равномерной сходимости ряда (2.24) разложение функции единственно и не зависит от способа его получения.

Чтобы получить более ясное представление об особенностях разложения заданной функции в ряд по сферическим

*) Это разложение впервые было указано Лапласом, а доказательство его сходимости дал Лежен-Дирихле.

функциям, сопоставим последний с тригонометрическим рядом Фурье. При изменении аргумента в ряде Фурье от 0 до 2π его n -й член $2n$ раз обращается в нуль. Корни n -го члена изображаются равноотстоящими точками окружности, причем при переходе через корни члены ряда изменяют знак. Аналогичная картина наблюдается и в разложениях по сферическим функциям. Сферические гармоники можно разделить на три категории.

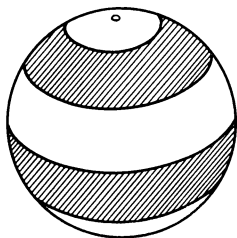


Рис. 15.

При $k = 0$ имеется только одна гармоника $P_n^0(\sin \varphi) = P_n(\sin \varphi)$, которая обращается в нуль на n симметричных относительно экватора параллелях. Эти параллели разбивают поверхность сферы на зоны, где полиномы Лежандра попеременно принимают положительные и отрицательные значения. В связи с этим гар-

моники, соответствующие $k = 0$, называются зональными (рис. 15).

Если $k = n$, то присоединенные функции Лежандра $\frac{d^n P_n(x)}{dx^n}$ обращаются в постоянные величины и сферические гармоники сводятся к

$$\cos^n \varphi \cos n\lambda, \quad \cos^n \varphi \sin n\lambda.$$

Отсюда видно, что эти сферические гармоники обращаются в нуль только на меридианах, для которых

$$\cos n\lambda = 0 \quad \text{или} \quad \sin n\lambda = 0.$$

Поверхность сферы делится этими меридианами на $2n$ сферических сектора, в которых сферические гармоники попеременно положительны и отрицательны. Поэтому рассматриваемые сферические гармоники называются секториальными (рис. 16).

Наконец, в промежуточном случае при $0 < k < n$ сферические гармоники обращаются в нуль на $2k$ меридианах при

$$\cos k\lambda = 0 \quad \text{или} \quad \sin k\lambda = 0$$

и $n - k$ параллелях, определяемых корнями уравнения

$$\frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{(d \sin \varphi)^k} = 0.$$

Распределение областей положительных и отрицательных

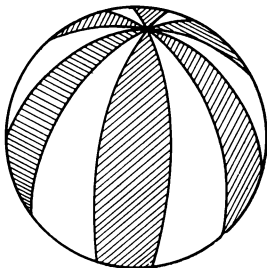


Рис. 16.

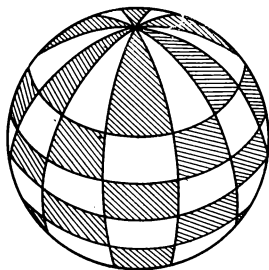


Рис. 17.

значений сферических гармоник указано на рис. 17. Такие гармоники называются тессеральными *).

§ 3. Разложение потенциала твердого тела в ряд по сферическим функциям

Рассмотрим гравитационный потенциал твердого тела, исходя из предположений, сформулированных в § 1 гл. II. Используя введенные выше обозначения, для потенциала имеем следующее выражение:

$$U(x, y, z) = f \iiint \frac{\kappa d\tau}{\Delta}, \quad (3.1)$$

где

$$\Delta = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}. \quad (3.2)$$

Если перейти к сферическим координатам

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \lambda, & y &= r \cos \varphi \sin \lambda, & z &= r \sin \varphi, \\ \xi &= r' \cos \varphi' \cos \lambda', & \eta &= r' \cos \varphi' \sin \lambda', & \zeta &= r' \sin \varphi' \end{aligned}$$

*) Классификация и название сферических функций впервые были даны английскими математиками.

и положить

$$\cos \gamma = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{rr'} = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda - \lambda'), \quad (3.3)$$

то для величины расстояния между текущей точкой тела и внешней по отношению к телу точке $P(x, y, z)$ получим

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}.$$

Разложим теперь величину $1/\Delta$, входящую в подынтегральное выражение формулы (3.1), в ряд по полиномам Лежандра, ограничиваясь случаем $r' < r$. Вспоминая вид производящей функции (2.16), непосредственно имеем

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \gamma \right\}^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma). \quad (3.4)$$

Исследуем сходимость ряда (3.4). Предварительно оценим величину модуля полинома Лежандра. Если за контур интегрирования в формуле (2.14) принять окружность радиуса $\sqrt{x^2 - 1}$ с центром в точке $z = x$, уравнение которой имеет вид

$$z = x + \sqrt{x^2 - 1} \exp i\varphi, \quad -\pi < \varphi < \pi,$$

то после соответствующих операций интеграл (2.14) можно преобразовать к следующей формуле Лапласа:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) дает

$$|P_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |x + i\sqrt{1 - x^2} \cos \varphi|^n d\varphi$$

или, так как в нашем случае $|x| < 1$, предыдущее неравенство можно записать в следующей форме:

$$|P_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [1 - (1 - x^2) \sin^2 \varphi]^{\frac{n}{2}} d\varphi, \quad (3.6)$$

откуда видно, что при $n > 0$ и любом значении $|x| < 1$ справедливо неравенство

$$|P_n(x)| < 1. \quad (3.7)$$

Перейдем теперь к оценке модуля общего члена ряда (3.4). В силу неравенства (3.7) имеем

$$\left| \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \right| < \frac{r'^n}{r^{n+1}}.$$

Но, по предположению, $\frac{r'}{r} = q < 1$, и, стало быть, окончательно получаем

$$\left| \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \right| < \frac{q^n}{r}. \quad (3.8)$$

Так как ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{r}$$

абсолютно сходится, то этим свойством будет обладать и ряд (3.4). Кроме того, ряд (3.4) в силу известной теоремы анализа о функциональных рядах оказывается и равномерно сходящимся. Таким образом, предположения, сделанные в предыдущем параграфе, в нашем случае выполнены.

Подставив в формулу (3.1) вместо величины $1/\Delta$ ее значение из (3.4), приходим к следующему выражению:

$$U = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \iiint r'^n P_n(\cos \gamma) \kappa d\tau. \quad (3.9)$$

Для получения окончательного выражения для ряда, представляющего потенциал U , необходимо преобразовать полином Лежандра $P_n(\cos \gamma)$ при помощи теоремы сложения, которая дается формулой

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{k=0}^n \frac{2(n-k)!}{\delta_k(n+k)!} P_n^k(\sin \varphi) P_n^k(\sin \varphi') \cos k(\lambda - \lambda'), \quad (3.10)$$

где, как и выше, $\delta_0 = 2$, $\delta_1 = \delta_2 = \dots = 1$.

Основная идея вывода формулы (3.10) состоит в следующем. В силу линейности уравнения Лапласа сферическая функция при любом линейном ортогональном преобразовании координат будет удовлетворять уравнению Лапласа, т. е. в результате преобразования снова получается сферическая функция. В частности, при произвольном повороте системы координат исходная сферическая функция переходит в сферическую же функцию новых координат.

Полином Лежандра $P_n(\cos \gamma)$ можно рассматривать как преобразованную сферическую функцию в системе координат, ось аппликат которой проходит через точку (r', φ', λ') . Тогда согласно предыдущему полином $P_n(\cos \gamma)$, соответствующий новой координатной системе, должен представлять собой сферическую функцию и в старой системе координат (φ, λ) , т. е. должны существовать такие значения коэффициентов A_{nk} и B_{nk} , не зависящие от φ и λ , что

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{k=0}^n P_n^k(\sin \varphi) (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda). \quad (3.11)$$

Очевидно, что коэффициенты A_{nk} и B_{nk} суть функции φ' и λ' . Но в силу симметрии (3.3) относительно φ, λ и φ', λ' соответственно формула (3.11) должна иметь вид

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{k=0}^n h_k P_n^k(\sin \varphi) P_n^k(\sin \varphi') \cos k(\lambda - \lambda'), \quad (3.12)$$

где h_k — некоторые числовые коэффициенты.

Их вычисление дает

$$h_k = \frac{2(n-k)!}{\delta_k(n+k)!}. \quad (3.13)$$

Таким образом, мы приходим к формуле (3.10), представляющей собой теорему сложения сферических функций. Эту формулу мы используем ниже для преобразования разложения потенциала (3.9).

Подробное доказательство этой теоремы можно найти в [45] — [46].

Подставляя в (3.9) вместо $P_n(\cos \gamma)$ его выражение из формулы (3.10), получим

$$U = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{2(n-k)!}{\delta_k(n+k)!} P_n^k(\sin \varphi) \times \\ \times \left[\iiint r'^n P_n^k(\sin \varphi') \cos k\lambda' \cdot \kappa d\tau \cdot \cos k\lambda + \right. \\ \left. + \iiint r'^n P_n^k(\sin \varphi') \sin k\lambda' \cdot \kappa d\tau \cdot \sin k\lambda \right].$$

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} C_{nk} &= \frac{2(n-k)!}{\delta_k(n+k)!} \iiint r'^n P_n^k(\sin \varphi') \cos k\lambda' \cdot \kappa d\tau, \\ D_{nk} &= \frac{2(n-k)!}{\delta_k(n+k)!} \iiint r'^n P_n^k(\sin \varphi') \sin k\lambda' \cdot \kappa d\tau \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

и замечая, кроме того, что эти коэффициенты зависят лишь от формы тела и распределения массы в нем, представим предыдущее разложение в форме

$$U = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{k=0}^n P_n^k(\sin \varphi) (C_{nk} \cos k\lambda + D_{nk} \sin k\lambda). \quad (3.15)$$

Или в силу (2.19) и (2.21), заменяя в (3.15) линейную комбинацию сферических гармоник через общую сферическую функцию, получаем

$$U = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\varphi, \lambda)}{r^{n+1}}. \quad (3.16)$$

Вычислим первые члены разложения (3.16), используя ряд (3.9).

При $n = 0$ в соответствии с (2.12) $P_0(\cos \gamma) = 1$, а интеграл

$$\iiint \kappa d\tau = M$$

дает массу M притягивающего тела. Тогда первый член будет равен fM/r , что представляет собой ньютоновский потенциал точечной массы.

Если $n = 1$, то в силу (2.12)

$$P_1(\cos \gamma) = \frac{1}{rr'} (x\xi + y\eta + z\zeta),$$

и второй член разложения запишется в виде

$$\frac{f}{r^3} \left[x \iiint \xi \kappa d\tau + y \iiint \eta \kappa d\tau + z \iiint \xi \kappa d\tau \right].$$

В этом выражении тройные интегралы представляют собой статические моменты, которые, как известно из механики, равны

$$\iiint \xi \kappa d\tau = Mx_c, \quad \iiint \eta \kappa d\tau = My_c, \quad \iiint \xi \kappa d\tau = Mz_c, \quad (3.17)$$

где x_c , y_c , z_c суть координаты центра масс притягивающего тела.

Если начало координатной системы поместить в центре инерции притягивающего тела, то второй член в разложении потенциала уничтожится. В общем случае он записывается в виде

$$\frac{fY_1}{r^3} = \frac{fM}{r^3} (xx_c + yy_c + zz_c).$$

При $n = 2$ согласно (2.12) и (3.9) имеем

$$\begin{aligned} r^2 r'^2 P_2(\cos \gamma) &= r^2 r'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{x^2}{2} (2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) + \frac{y^2}{2} (2\eta^2 - \xi^2 - \zeta^2) + \\ &+ \frac{z^2}{2} (2\xi^2 - \xi^2 - \eta^2) + 3yz\eta\xi + 3xz\xi\xi + 3xy\xi\eta, \end{aligned}$$

и тогда третий член разложения (3.9) может быть представлен в форме

$$\begin{aligned} \frac{fY_2}{r^5} &= \frac{f}{r^5} \left\{ \frac{x^2}{2} \iiint (2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) \kappa d\tau + \right. \\ &+ \frac{y^2}{2} \iiint (2\eta^2 - \xi^2 - \zeta^2) \kappa d\tau + \frac{z^2}{2} \iiint (2\xi^2 - \xi^2 - \eta^2) \kappa d\tau + \\ &+ 3yz \iiint \eta \xi \kappa d\tau + 3xz \iiint \xi \xi \kappa d\tau + 3xy \iiint \xi \eta \kappa d\tau \left. \right\}. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Вводя моменты инерции относительно координатных

осей

$$\left. \begin{aligned} A &= \iiint \kappa (\eta^2 + \zeta^2) d\tau, \\ B &= \iiint \kappa (\xi^2 + \zeta^2) d\tau, \\ C &= \iiint \kappa (\xi^2 + \eta^2) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

и центробежные моменты (произведения инерции)

$$D = \iiint \kappa \eta \zeta d\tau, \quad E = \iiint \xi \zeta \kappa d\tau, \quad F = \iiint \kappa \xi \eta d\tau, \quad (3.20)$$

вместо (3.18) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{fY_2}{r^5} &= \frac{f}{2r^5} \{ (B + C - 2A)x^2 + (A + C - 2B)y^2 + \\ &+ (A + B - 2C)z^2 + 6Dyz + 6Exz + 6Fxy \}. \end{aligned}$$

Если в качестве координатных осей приняты главные оси инерции, то $D = E = F = 0$ и, стало быть,

$$\begin{aligned} \frac{fY_2}{r^5} &= \frac{f}{2r^5} \{ x^2 (B + C - 2A) + y^2 (A + C - 2B) + \\ &+ z^2 (A + B - 2C) \}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

В дальнейшем будем предполагать, если не оговорено противное, что оси координат выбраны именно так.

Ограничиваясь найденными членами разложения, для гравитационного потенциала тела получаем следующее приближенное выражение:

$$\begin{aligned} U &= \frac{fM}{r} \left[1 + \frac{1}{r^2} (xx_c + yy_c + zz_c) \right] + \\ &+ \frac{f}{r^5} [(B + C - 2A)x^2 + (A + C - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

§ 4. Потенциал земного тяготения

Гравитационный потенциал Земли можно представить в виде ряда (3.15) или, после несложных преобразований, в следующей форме:

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n I_{nm} \left(\frac{R_0}{r} \right)^n P_{nm} \left(\frac{z}{r} \right) \cos m(\lambda - \lambda_{nm}) \right\}, \quad (4.1)$$

где M — масса Земли, R_0 — средний экваториальный радиус Земли, а I_{nm} и λ_{nm} — постоянные величины, зависящие от геометрии масс Земли. В формуле (4.1) индекс n пробегает все натуральные значения, начиная с двух, т. е. предполагается, что начало координат совпадает с центром масс Земли, а за основную плоскость принята экваториальная плоскость Земли.

Наиболее простой вид формула (4.1) приобретает в том случае, когда в качестве координатных осей приняты главные центральные оси инерции. Однако если иметь в виду общепринятый способ отсчета географических координат, то ось абсцисс следует направить в точку пересечения гринвичского меридиана с экватором, и тогда в формуле (4.1) сохранятся все члены, в частности сохранится и гармоника $P_{21} \cos(\lambda - \lambda_{21})$. Из (4.1) видно, что определение параметров поля тяготения Земли сводится к нахождению коэффициентов I_{nm} , λ_{nm} .

Существует несколько принципиально различных способов определения гравитационного поля Земли (или ее фигуры). Это прежде всего гравиметрический и небесномеханический методы.

Гравиметрический метод определения потенциала или фигуры Земли опирается на измерения ускорения силы тяжести в различных точках земной поверхности. Рядом ученых в разные годы были получены так называемые формулы нормального распределения силы тяжести. В последние десятилетия такие исследования были выполнены И. Д. Жонголовичем [50], Гейсканеном [51], Уотилла [52] и др.

В основу этих определений был положен большой наблюдательный материал. Достаточно указать, что И. Д. Жонголович привлек к обработке 26 тысяч гравиметрических пунктов. Оценивая точность гравиметрических методов, следует заметить, что по гравиметрическим данным менее уверенно определяются коэффициенты тессеральных гармоник. Так, например, значение географической долготы направления большой полуоси земного эллипсоида, полученное разными авторами, колеблется в пределах от -25° до $+38^\circ$. Подробное изложение гравиметрических методов читатель может найти в книге Н. П. Грушинского [53].

Из небесномеханических методов, использовавшихся до запуска ИСЗ, можно отметить два способа. Первый способ основан на анализе периодических неравенств в астрономической долготе и широте Луны, обусловленных сфероидальностью Земли (имеются в виду неравенства, даваемые теорией движения Луны Делоне [54]). Второй способ опирается на анализ особенностей вращательного движения Земли. Коэффициенты в формулах прецессии земной оси позволяют найти динамическое сжатие, т. е. величину $(C - A)/C$. Тогда в предположении сфероидальности Земли ($A = B$) с помощью формулы (3.28) находим коэффициент при второй зональной гармонике земного потенциала.

Все отмеченные астрономические способы определения потенциала Земли в настоящее время представляют лишь исторический интерес, ибо наибольшую точность удастся достигнуть при определениях по данным наблюдений ИСЗ. Коэффициенты при зональных и тессеральных гармониках определяются по наблюдаемым вековым и долгопериодическим возмущениям в элементах орбит ИСЗ. Основные трудности здесь связаны с определением коэффициентов тессеральных гармоник. Здесь приходится рассматривать не вековые, а долгопериодические (суточные, полусуточные и др.) неравенства, амплитуды которых малы. В общей постановке в условные уравнения (обработка обычно ведется методом наименьших квадратов) приходится включать до 90 неизвестных параметров. С целью получения возможно более точных значений коэффициентов I_{nm} , λ_{nm} наряду с ними в уравнения приходится включать координаты станций слежения за ИСЗ, коэффициент светового давления, свыше десяти параметров земной атмосферы и т. д. Проблемой определения гравитационного поля Земли занимались многие

Т а б л и ц а 1

n	$I_n \cdot 10^8$	n	$I_n \cdot 10^8$
2	$-1082,48 \pm 0,04$	6	$-0,39 \pm 0,09$
3	$+2,566 \pm 0,012$	7	$-0,469 \pm 0,021$
4	$+1,84 \pm 0,09$	8	$-0,02 \pm 0,07$
5	$+0,063 \pm 0,019$	9	$-0,114 \pm 0,025$

авторы [55—60]. Мы приведем здесь в качестве примера результаты, полученные И. Козаи [61]. По его расчетам коэффициенты зональных гармоник имеют значения, указанные в таблице 1. Полученные им же значения коэффициентов тессеральных гармоник приведены в таблице 2.

Таблица 2

n	m	$J_{nm} \cdot 10^6$	λ_{nm}
2	2	$2,32 \pm 0,30$	$-37^\circ,5 \pm 5^\circ,6$
3	1	$3,95 \pm 0,36$	$22^\circ \pm 11^\circ$
3	2	$0,41 \pm 0,21$	$31^\circ \pm 14^\circ$
3	3	$1,91 \pm 0,29$	$51^\circ,3 \pm 2^\circ,9$
4	1	$2,64 \pm 0,44$	$163^\circ,5 \pm 6^\circ,5$
4	2	$0,17 \pm 0,06$	$54^\circ \pm 11^\circ$
4	3	$0,046 \pm 0,035$	$-13^\circ \pm 19^\circ$
4	4	$0,056 \pm 0,030$	$50^\circ,3 \pm 6^\circ,0$

Из приведенных результатов видно, что коэффициенты разложения в ряд по сферическим функциям убывают крайне медленно*). Следовательно, уменьшение амплитуд возмущений в координатах ИСЗ или элементах их орбит может происходить в основном за счет множителей вида $(R_0/r)^n$, т. е. с ростом больших полуосей орбит ИСЗ. Возникает весьма сложная математическая задача о построении более быстро сходящихся рядов, представляющих потенциал земного тяготения. В теории фигуры Земли использовалось разложение потенциала в ряд по функции Ламе [62, 63], однако радикального улучшения на этом пути достигнуть не удалось. Нам представляется, что наиболее перспективным является улучшение сходимости рядов по сферическим функциям, аналогичное тому, которое делается в теории тригонометрических рядов [64]. К сожалению, никаких исследований в этом направлении не проводилось.

*) Тщательные оценки скорости сходимости разложения потенциала выполнены К. В. Холшевниковым [206] при различных предположениях относительно распределения плотности планеты.

§ 5. Гравитационные потенциалы других тел солнечной системы

При запуске искусственных спутников других небесных тел, входящих в солнечную систему, а также для нужд прогнозирования их движения необходимо знание гравитационных полей этих тел. Это особенно нужно при траекторных расчетах спутников Луны, Юпитера, Сатурна, Урана и др., так как они имеют фигуры, заметно отличающиеся от шаров со сферическим распределением плотности. В самом деле, даже непосредственные оптические наблюдения показывают, что сжатие Юпитера составляет $1/10$, а Сатурна — $1/16$ *). Эти величины на порядок больше сжатия Земли, составляющего $1/298,2$. Следовательно, эффекты в движении искусственных спутников этих планет, обусловленные фигурой центрального тела, будут весьма ощутимы. Астрономические методы исследования формы Луны приводят к заключению, что она обладает не только заметным полярным сжатием, но и большим экваториальным сжатием, вызванным приливообразующими силами Земли. Именно вследствие имеющейся эллиптичности лунного экватора вполне уместно говорить, что Луна всегда обращена «своим носиком» в сторону Земли.

Ниже приводятся характеристики полей тяготения ряда больших планет солнечной системы и Луны. Что касается больших планет, то более или менее надежные данные о их гравитационных потенциалах астрономам удалось получить лишь для тех планет, которые обладают достаточно близкими спутниками. Для планет определялись лишь коэффициенты зональных гармоник, т. е. потенциал тяготения представлялся в виде

$$U = \frac{fM}{r} \left[1 - \frac{2}{3} J \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_2 \left(\frac{z}{r} \right) + \frac{4}{15} K \left(\frac{R}{r} \right)^4 P_4 \left(\frac{z}{r} \right) \right]. \quad (5.1)$$

М а р с. Определение параметров гравитационного поля Марса выполнялось по анализу векового движения восходящих узлов орбит Фобоса и Деймоса, которые составляют соответственно $158^\circ,5 \pm 0^\circ,5$ и $-6^\circ,2795 \pm 0^\circ,0007$ за год. По

*) Под сжатием здесь понимается отношение разности экваториального и полярного радиусов планеты к ее экваториальному радиусу.

этим данным надежно удалось определить лишь коэффициент второй зональной гармоники, так как из-за недостаточной точности наблюдений ошибки в определении регрессии узлов орбит спутников Марса имели тот же порядок, что и порядок коэффициента при четвертой гармонике. Наиболее полные наблюдательные данные были использованы Е. Вулардом [65], который пришел к следующему значению для коэффициента второй гармоники:

$$J = 0,002920 - 0,0058 \frac{\delta R''}{R''}.$$

Здесь R'' — угловой радиус Марса, выраженный в секундах дуги. Первый член в этой формуле вычислен в предположении, что $R'' = 4'',680$ при расстоянии в 1 а. е.

Ю п и т е р. Параметры гравитационного потенциала Юпитера определялись таким же образом, как и для Марса. При этом использовались сведения о движении наиболее близких и хорошо изученных галилеевых спутников. На основе сводки наблюдений, составленной де Ситтером [66], получено следующее значение для коэффициента второй зональной гармоники:

$$J = 0,02206 \pm 0,00022.$$

Коэффициент при четвертой гармонике уточнялся по движению восходящего узла орбиты пятого спутника. Для коэффициента K получено следующее значение:

$$K = 0,00253 \pm 0,0041.$$

Для радиуса Юпитера здесь было принято значение $R'' = 98'',49$. В определениях J наблюдается некоторый разброс. Так, например, Р. Семпсон [67] получил значение $J = 0,00227$. Это объясняется тем, что в условные уравнения для определения J и K входят массы спутников, известные недостаточно точно. Поэтому в уравнения приходится вводить поправки к массам спутников, определяя последние по методу наименьших квадратов вместе с параметрами J и K .

С а т у р н. Коэффициенты разложения потенциала Сатурна определялись по вековым возмущениям в долготе узла и перицентра внутренних спутников Сатурна. По данным, собранным Джеффрисом [68], получены следующие

значения:

$$J = 0,02501 \pm 0,00003, \quad K = 0,00386 \pm 0,00026.$$

Для радиуса Сатурна было принято значение $R'' = 8,625$ при расстоянии в 9,53885 а. е. Приведенные значения могут быть ошибочны, так как нет надежных определений массы колец Сатурна.

Луна. Астрономические методы определения параметров гравитационного поля Луны, основанные на изучении ее вращательного движения, приводят к следующим значениям параметров разложения лунного потенциала [69]:

$$c_{20} = (-0,238 \pm 0,016) \cdot 10^{-3}, \quad c_{22} = (0,06 \pm 0,08) \cdot 10^{-4}.$$

Обработка селенодезического материала, выполненная Гоудасом [70], дает следующие значения коэффициентов разложения потенциала Луны:

$$c_{20} = -0,205 \cdot 10^{-3},$$

$$c_{30} = -0,863 \cdot 10^{-4},$$

$$c_{40} = +0,263 \cdot 10^{-3}.$$

Естественно, что наиболее точных результатов следует ожидать от методов, связанных с исследованием возмущенного движения искусственных спутников Луны. Такое исследование было выполнено Э. Л. Акимом [71], который привлек к обработке траекторные измерения лунного спутника «Луна-10» за период с 3 апреля 1966 по 30 мая 1966 г. Этот период охватывает 460 оборотов лунного спутника. При обработке была использована аналитическая теория движения спутника Луны, построенная с учетом возмущений от Земли и Солнца. Последнее обстоятельство является весьма существенным, так как вековые возмущения от Земли и Солнца в долготе восходящего узла и аргументе периселения (перигентра) спутника «Луна-10» составляют

$$\Delta \Omega = -1^\circ, \quad \Delta \omega = -2^\circ,$$

в то время как регрессия узла и линии апсид этого спутника, вызванные фигурой Луны, дают

$$\Delta \Omega = -7^\circ,7, \quad \Delta \omega = -11^\circ,8.$$

Э. Л. Аким представил потенциал лунного тяготения в форме

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n [c_{nm} \cos m\lambda + \right. \\ \left. + d_{nm} \sin m\lambda] P_n^m(\sin \varphi) \right\},$$

где R — средний радиус Луны, φ — селеноцентрическая широта, отсчитываемая от среднего экватора Луны, λ — селеноцентрическая долгота, отсчитываемая от нулевого меридиана некоторой эпохи t_0 , и из обработки наблюдательного материала получил следующие значения коэффициентов c_{nm} и d_{nm} :

$$\begin{aligned} c_{20} &= (-0,206 \pm 0,022) \cdot 10^{-3}, & d_{21} &= (0,361 \pm 0,358) \cdot 10^{-5}, \\ c_{21} &= (0,157 \pm 0,358) \cdot 10^{-5}, & d_{22} &= (-0,139 \pm 0,145) \cdot 10^{-5}, \\ c_{22} &= (0,140 \pm 0,012) \cdot 10^{-4}, & d_{31} &= (-0,178 \pm 0,032) \cdot 10^{-4}, \\ c_{30} &= (-0,363 \pm 0,099) \cdot 10^{-4}, & d_{32} &= (-0,702 \pm 4,595) \cdot 10^{-6}, \\ c_{31} &= (-0,568 \pm 0,026) \cdot 10^{-4}, \\ c_{32} &= (0,118 \pm 0,047) \cdot 10^{-4}, \\ c_{40} &= (0,333 \pm 0,270) \cdot 10^{-4}, \end{aligned}$$

В работе Э. Л. Акима отмечается, что эти результаты носят предварительный характер.

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ОРБИТ

§ 1. Постановка задачи

Во многих работах по теории возмущенного движения искусственных спутников Земли в качестве невозмущенной (промежуточной) орбиты берется кеплеровская эллиптическая орбита. Авторы этих работ следуют в своем выборе промежуточной орбиты классическим методам небесной механики. В этом направлении теорию возмущенного движения весьма успешно разрабатывали Д. Брауер [73, 74], И. Козаи [75, 76], А. А. Орлов [77, 78], Д. Е. Охочимский [72] и др. Первые два автора пользовались одним из самых сильных и перспективных методов — методом Делоне — Цейделя.

Выбор кеплеровской промежуточной орбиты выгоден тем, что для вычисления возмущений можно использовать детально разработанные в прошлом способы, в частности, без каких-либо модификаций применимы разложения в ряды координат невозмущенного движения. Однако следует иметь в виду, что классические методы разрабатывались для естественных тел солнечной системы и учитывали как специфические особенности их движения, так и характер возмущающих сил. Они особенно удобны в тех случаях, когда малы эксцентриситет и наклонность исследуемой орбиты, когда промежуток времени, на котором исследуется движение, невелик и соответствует нескольким сотням оборотов. Эти условия далеко не всегда оказываются выполненными в задачах теории движения ИСЗ. Интервалы времени, на которых прогнозируется движение ИСЗ, охватывают сотни и тысячи оборотов спутника. Ряд из запущенных спутников обладает весьма большим эксцентриситетом, превосходящим по своей величине знаменитый предел Лапласа ($e=0,667$), определяющий область сходимости разложений координат в ряды, а следовательно, и область сходимости

разложения пертурбационной функции. Все это осложняет применение классических методов в небесной баллистике, приводит к необходимости сохранять в разложениях большее число членов. Наконец, в теории движения ИСЗ нельзя ограничиться возмущениями первого порядка, как это обычно делается в аналитических теориях движения естественных спутников планет, астероидов и т. д., а необходимо вычислять по меньшей мере некоторые вековые возмущения второго, а иногда и третьего порядка, что делает построение точной аналитической теории чрезвычайно громоздким. В теории движения искусственных спутников Луны мы встречаемся с еще более сложным случаем, так как здесь становится совершенно неминуемым учет трехосности Луны, т. е. в приближенном выражении потенциала притяжения Луны необходимо сохранять ряд долготных членов.

Альтернативой классическим методам теории возмущений является использование некеплеровских промежуточных орбит, которые учитывали бы наиболее значительные неравенства в движении космических аппаратов. Такого рода прецеденты можно встретить и в классических задачах. Примером тому служит вариационная кривая Хилла в теории движения Луны [79], задача двух неподвижных центров для ограниченной проблемы трех тел (см. работы К. Шарлье [28], Х. Замтера [80] и автора [81, 82]).

По-видимому, первой попыткой в этом направлении была работа Р. Ньютона [83], указавшего на возможность применения задачи двух неподвижных центров в теории движения спутника сфероидальной планеты. Эта идея получила развитие в работе автора [84]. Весьма оригинальный, хотя и не нашедший строгого теоретического обоснования, способ построения промежуточной орбиты предложил Б. Гарфинкель [33]. И, наконец, наиболее удачный и многообещающий выбор невозмущенной орбиты для ИСЗ был указан Дж. Винти [40]. В частном случае для сфероидальной Земли, симметричной относительно экваториальной плоскости, тот же способ построения промежуточной орбиты был детально разработан М. Д. Кисликом [47]. Заслуживает внимания промежуточная орбита Р. Баррара [37]. Хотя для близких искусственных спутников Земли она дает менее точный результат по сравнению с проблемой

Винти, тем не менее в силу своей простоты она применима при построении теории движения далеких спутников Земли и возможно с большим успехом в теории движения искусственных спутников планет. Исходя из классической проблемы двух неподвижных центров, Е. П. Аксенов, Е. А. Гребеников и автор в результате обобщения упомянутой задачи показали, что интегрируемые случаи Винти, Баррара и Кислика представляют собой частные или предельные случаи одной общей задачи [13, 85]. Ими же было выполнено подробное качественное изучение орбит этой задачи [86, 87, 88, 89, 90, 91].

Основная идея этих работ состоит в построении такого аппроксимирующего выражения для гравитационного потенциала осесимметричной планеты, который допускал бы интегрирование задачи в замкнутой форме, в квадратурах. При отыскании интегрируемых случаев применяется теорема Штеккеля (см. § 5 гл. I).

§ 2. Задача двух неподвижных центров

Выше было отмечено, что задача двух неподвижных центров рекомендовалась Р. Ньютоном для построения теории движения искусственных спутников Земли. Позднее автором [92], [84] и В. Г. Дегтяревым [93, 94, 95] были выполнены некоторые исследования в этом направлении. Рассмотрим основные результаты.

Задача двух неподвижных центров состоит в изучении движения пассивно гравитирующей материальной точки, притягиваемой двумя неподвижными точечными массами по закону Ньютона. Впервые эта проблема для случая плоского движения была сведена к квадратурам Л. Эйлером [96], а в пространственном случае ее решение было дано Лагранжем [97] и Якоби [98]. Полное решение задачи стало возможным лишь после исчерпывающего качественного анализа, начатого Шарлье [28] и завершенного работами Бадаляна [99, 100, 101], Талльквиста [102] в плоском случае и В. М. Алексеева [103] — в пространственном случае. Результатами этих работ явилась полная классификация всех возможных форм движения и генеалогия различных классов орбит.

Рассмотрим движение материальной точки P под действием притягивающих неподвижных центров C_1 и C_2 , имеющих соответственно массы m_1 и m_2 . Выберем прямоуголь-

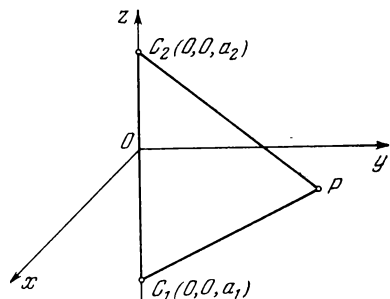


Рис. 18.

ную систему координат так, чтобы точки C_1 и C_2 находились на оси аппликат, а начало координат — в центре их масс. Обозначим расстояние C_1C_2 через $2c$, а координаты движущейся точки через x, y, z (рис. 18). Тогда силовая функция задачи запишется в виде

$$U = \frac{\gamma m_1}{r_1} + \frac{\gamma m_2}{r_2}, \quad (2.1)$$

где расстояния r_1 и r_2 от движущейся точки до притягивающих центров равны

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a_1)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a_2)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

причем

$$a_1 = -\frac{2m_2c}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = \frac{2m_1c}{m_1 + m_2}. \quad (2.3)$$

Так как нас интересуют приложения этой задачи к исследованию движения искусственных спутников, то параметры m_1, m_2 и c в выражении (2.1) необходимо выбрать так, чтобы потенциал (2.1) возможно менее отличался от потенциала земного тяготения.

С этой целью разложим обратные расстояния в ряды по полиномам Лежандра, применив формулу (2.16) гл. II. Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_1}{r}\right)^n P_n\left(\frac{z}{r}\right), \\ \frac{1}{r_2} &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_2}{r}\right)^n P_n\left(\frac{z}{r}\right), \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

где r определяется формулой

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если подставить эти ряды в формулу (2.1), то для функции U находим выражение

$$U = \frac{f(m_1 + m_2)}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{r^n} P_n \left(\frac{z}{r} \right) \right\}, \quad (2.5)$$

где

$$\gamma_n = \frac{m_1 a_1^n + m_2 a_2^n}{m_1 + m_2}. \quad (2.6)$$

В соответствии с результатами § 4 гл. II в геоцентрической экваториальной системе координат выражение для потенциала тяготения Земли (если пренебречь долготными членами) примет вид

$$U_{\tau} = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n \left(\frac{z}{r} \right) \right\}, \quad (2.7)$$

где r — геоцентрический радиус-вектор, M — масса Земли, R — средний экваториальный радиус Земли.

Сопоставляя ряды (2.5) и (2.6), обнаруживаем, что соответствующим выбором величин m_1 , m_2 и c можно добиться совпадения коэффициентов при второй и третьей зональных гармониках обоих рядов. Величины m_1 , m_2 и c должны удовлетворять системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m_1 + m_2 &= M, \\ 4m_1 m_2 c^2 &= M J_2 R^2, \\ 8m_1 m_2 (m_2 - m_1) c^3 &= M^3 J_3 R^3. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Как следует из (2.8), для существования действительного решения необходимо, чтобы $m_1 m_2 < 0$, так как коэффициент J_2 для Земли отрицателен. Определяя с помощью (2.6) коэффициент

$$\gamma_4 = \frac{16c^4 m_1 m_2}{M^4} (m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2) \quad (2.9)$$

и принимая во внимание, что в разложении (2.7) коэффициент $J_4 > 0$, видим, что аппроксимирующий потенциал

(2.5) при сделанном выборе постоянных m_1 , m_2 и c отличается от потенциала земного тяготения знаком коэффициента при четвертой гармонике.

Но четвертая гармоника дает в некоторых оскулирующих кеплеровских элементах вековые неравенства, поэтому аппроксимация потенциала Земли силовой функцией задачи двух неподвижных центров приемлема лишь для достаточно далеких спутников Земли. Не исключено, однако, что для других планет рассматриваемая задача может дать хорошие результаты.

Возможно и иное определение параметров аппроксимирующего потенциала (2.5), при котором коэффициенты γ_2 и $J_2 R^2$ разложений (2.5) и (2.7) совпадают, а γ_4 принимает минимальное положительное значение. При этом выборе ошибки, вносимые несовпадением величин γ_4 и $J_4 R^4$, будут наименьшими. Но зато возникает ошибка в определении возмущений от третьей зональной гармоники. Так как коэффициенты J_3 и J_4 одного порядка, а возмущения первого порядка от третьей гармоники периодические, то различие истинного движения от промежуточного не будет иметь векового изменения, и, стало быть, излагаемый прием может дать лучший результат, чем первый способ аппроксимации.

Отметим, наконец, возможность приближенных расчетов траекторий перелета к Луне с помощью задачи двух неподвижных центров. Орбиты полета к Луне, подробно изученные В. А. Егоровым, рассчитываются посредством численного интегрирования уравнений круговой задачи трех тел (см. (1.24) — (1.25) гл. I). При $n = 0$ они совпадают с уравнениями движения задачи двух неподвижных центров. Если воспользоваться методами, предлагавшимися в работах [15, 28, 81], то круговую задачу трех тел можно решать, принимая в качестве промежуточных орбиты задачи двух неподвижных центров.

Перейдем к интегрированию уравнений движения рассматриваемой задачи, которое удобнее выполнять в сферических переменных*). Предварительно перейдем к новой системе прямоугольных координат, принимая в качестве оси абсцисс линию центров, а начало координат поместим

*) В частном случае плоского движения регуляризацию дифференциальных уравнений впервые выполнил Тиле [104]. В пространственном случае прием Тиле был использован в работе [14].

в середине между притягивающими центрами. Выполняя преобразование (3.29) гл. I к вытянутым сфероидальным координатам, для расстояний от движущейся точки до центров получим

$$r_1 = c (\operatorname{ch} v + \cos u), \quad (2.10)$$

$$r_2 = c (\operatorname{ch} v - \cos u), \quad (2.11)$$

а силовая функция примет вид

$$U = \frac{1}{cJ} [f(m_1 + m_2) \operatorname{ch} v - f(m_1 - m_2) \cos u], \quad (2.12)$$

где

$$J = \frac{r_1 r_2}{c^2} = \operatorname{ch}^2 v - \cos^2 u. \quad (2.13)$$

Тогда согласно (3.38) гл. I уравнения движения в сфероидальных координатах запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(J\dot{u}) - \sin u \cos u \cdot (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \operatorname{sh}^2 v) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial u}, \\ \frac{d}{dt}(J\dot{v}) - \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v \cdot (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \sin^2 u) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial v}, \\ \frac{d}{dt}(\operatorname{sh}^2 v \sin^2 u \cdot \dot{w}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Система (2.14) допускает два интеграла: интеграл живых сил

$$\frac{c^2}{2} [J(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \dot{w}^2 \operatorname{sh}^2 v \sin^2 u] = U + h \quad (2.15)$$

и интеграл площадей

$$\dot{w} \operatorname{sh}^2 v \sin^2 u = A. \quad (2.16)$$

Исключая из уравнений (2.14) циклическую координату w , получим уравнения движения в форме Рауса

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(J\dot{u}) - \sin u \cos u \cdot (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) &= \frac{\partial U^*}{\partial u}, \\ \frac{d}{dt}(J\dot{v}) - \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v \cdot (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) &= \frac{\partial U^*}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

где преобразованная силовая функция U^* дается формулой

$$U^* = \frac{U}{c^2} - \frac{A^2}{2 \operatorname{sh}^2 v \sin^2 u}. \quad (2.18)$$

Интеграл живых сил преобразуется к виду

$$J(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) = 2(U^* + h). \quad (2.19)$$

Введением новой независимой переменной τ , связанной с t дифференциальным соотношением

$$J d\tau = dt, \quad (2.20)$$

система (2.17) регуляризируется и принимает вид

$$\left. \begin{aligned} u'' - \frac{1}{2J} \frac{\partial J}{\partial u} (u'^2 + v'^2) &= J \frac{\partial U^*}{\partial u}, \\ v'' - \frac{1}{2J} \frac{\partial J}{\partial v} (u'^2 + v'^2) &= J \frac{\partial U^*}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по τ . Переменную τ будем называть регуляризирующей переменной или регуляризированным временем. Из (2.1) или (2.12) видно, что силовая функция, а следовательно, и правые части уравнений движения (2.14) терпят разрыв при значениях координат, соответствующих одному из притягивающих центров. Преобразованные уравнения движения (2.20) этого недостатка не имеют. Система (2.21) допускает первый интеграл

$$u'^2 + v'^2 = 2J(U^* + h), \quad (2.22)$$

соответствующий интегралу (2.19).

Из (2.21) и (2.22) получим

$$\left. \begin{aligned} u'' &= \frac{\partial J}{\partial u} (U^* + h) + J \frac{\partial U^*}{\partial u}, \\ v'' &= \frac{\partial J}{\partial v} (U^* + h) + J \frac{\partial U^*}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

или, полагая

$$W = J(U^* + h), \quad (2.24)$$

окончательно будем иметь *)

$$u'' = \frac{\partial W}{\partial u}, \quad v'' = \frac{\partial W}{\partial v}. \quad (2.25)$$

*) Следует отметить, что система (2.25) не эквивалентна системе (2.17). Не все решения системы (2.25) будут решениями системы (2.17). Посторонние решения исключаются с помощью условия (2.27).

Интегрирование (2.25) дает

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} u'^2 &= -h \cos^2 u - \frac{f(m_1 - m_2)}{c^3} \cos u - \frac{A^2}{2 \sin^2 u} + C', \\ \frac{1}{2} v'^2 &= h \operatorname{ch}^2 v + \frac{f(m_1 + m_2)}{c^3} \operatorname{ch} v - \frac{A^2}{2 \operatorname{sh}^2 v} + C, \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

где C и C' — постоянные интегрирования. Из (2.22) и (2.26) следует, что

$$C + C' = 0. \quad (2.27)$$

Вводя новые переменные

$$\lambda = \operatorname{ch} v, \quad \mu = \cos u \quad (2.28)$$

и учитывая (2.27), из (2.26) получим

$$\left. \begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{h\lambda^4 + \frac{f(m_1 + m_2)}{c^3} \lambda^3 + (C - h) \lambda^2 - \frac{f(m_1 + m_2)}{c^3} \lambda - \frac{A^2}{2} - C}} &= \\ &= \sqrt{2} (\tau - \tau_0), \\ \int_{\mu_1}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{h\mu^4 + \frac{f(m_1 - m_2)}{c^3} \mu^3 + (C + h) \mu^2 - \frac{f(m_1 - m_2)}{c^3} \mu - \frac{A^2}{2} - C}} &= \\ &= \sqrt{2} (\tau - \tau_1), \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

где через τ_0 и τ_1 обозначены постоянные интегрирования. После обращения эллиптических интегралов (2.29) λ и μ , а стало быть, и u и v будут выражены через эллиптические функции Якоби (или Вейерштрасса), аргументы которых будут линейными функциями регуляризованного времени τ . Далее, из интеграла площадей (2.16), который представим в форме

$$\frac{dw}{d\tau} = A \left(\frac{1}{\sin^2 u} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 v} \right), \quad (2.30)$$

после подстановки вместо u и v их выражений через τ интегрированием получим

$$w = A \int_0^{\tau} \left(\frac{1}{\sin^2 u} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 v} \right) d\tau + w_0. \quad (2.31)$$

Наконец, из (2.20) с помощью квадратуры находим

$$t - t_0 = \int J d\tau. \quad (2.32)$$

Уравнение (2.32) назовем уравнением времени (оно представляет собой аналог уравнения Кеплера, ибо эксцентрическая аномалия играет в задаче двух тел роль регулярно-регулярной переменной).

Для случая движения в плоскости, содержащей неподвижные центры, из уравнений (2.26) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= \sqrt{2(\lambda^2 - 1) \left[h\lambda^2 + \frac{f(m_1 + m_2)}{c^3} \lambda + C \right]}, \\ \frac{d\mu}{dt} &= \sqrt{2(\mu^2 - 1) \left[h\mu^2 + \frac{f(m_1 - m_2)}{c^3} \mu + C \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Если ввести новые переменные ξ , η , определяемые равенствами

$$\lambda = \frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2}, \quad \mu = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}, \quad (2.34)$$

а через λ_1 , λ_2 и μ_1 , μ_2 обозначить соответственно корни уравнений

$$h\lambda^2 + \frac{f(m_1 + m_2)}{c^3} \lambda + C = 0, \quad (2.35)$$

$$h\mu^2 + \frac{f(m_1 - m_2)}{c^3} \mu + C = 0, \quad (2.36)$$

то вместо (2.33) будем иметь

$$\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{\frac{h}{2} [\xi^2(\lambda_2 + 1) - (\lambda_2 - 1)] [\xi^2(\lambda_1 + 1) - (\lambda_1 - 1)]}, \quad (2.37)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \sqrt{-\frac{h}{2} [\eta^2(\mu_2 + 1) + (\mu_2 - 1)] [\eta^2(\mu_1 + 1) + (\mu_1 - 1)]}. \quad (2.38)$$

Интегрирование (2.37) и (2.38) дает

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{h}{2} [\xi^2(\lambda_2 + 1) - (\lambda_2 - 1)] [\xi^2(\lambda_1 + 1) - (\lambda_1 - 1)]}} = \tau - \tau_0, \quad (2.39)$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{-\frac{h}{2} [\eta^2(\mu_2 + 1) + (\mu_2 - 1)] [\eta^2(\mu_1 + 1) + (\mu_1 - 1)]}} = \tau - \tau_1. \quad (2.40)$$

Обращение эллиптических интегралов (2.39) — (2.40) выполняется различным образом в зависимости от соотношений между корнями уравнений (2.35) — (2.36). Работы [99—101] позволяют выделить наиболее интересные для приложений типы движения. Все они характеризуются отрицательным значением полной механической энергии h . Рассмотрим один из них:

$$\lambda_2 > 1 > \lambda_1 > -1, \quad \mu_2 > 1 > \mu_1 > -1.$$

Интеграл (2.29) можно представить в следующей форме:

$$\int_a^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 - \xi^2)(b^2 + \xi^2)}} = \pm \sqrt{\frac{-2h(a^2 + b^2)}{(1 - a^2)(1 + b^2)}} (\tau - \tau_0), \quad (2.41)$$

где a и b определяются из равенств

$$\lambda_1 = \frac{1 - b^2}{1 + b^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + a^2}{1 - a^2}. \quad (2.42)$$

Подстановкой

$$\xi = a \cos \varphi \quad (2.43)$$

(2.41) преобразуется к виду

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \pm \sigma (\tau - \tau_0), \quad (2.44)$$

где

$$\sigma^2 = -\frac{2h(a^2 + b^2)}{(1 - a^2)(1 + b^2)}, \quad k^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad (2.45)$$

откуда имеем

$$\varphi = \pm \operatorname{am} [\sigma (\tau - \tau_0), k]. \quad (2.46)$$

Из (2.34), (2.43) и (2.46) окончательно будем иметь

$$\lambda = \frac{1 + a^2 \operatorname{cn}^2 \sigma (\tau - \tau_0)}{1 - a^2 \operatorname{cn}^2 \sigma (\tau - \tau_0)}. \quad (2.47)$$

Формула (2.47) дает общее решение первого из уравнений (2.33). Это решение будет периодическим по τ с периодом

$$T = \frac{2}{\sigma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{\sigma} K(k). \quad (2.48)$$

Перейдем теперь к обращению интеграла (2.40). Положим

$$\mu_1 = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}, \quad \mu_2 = \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} \quad (2.49)$$

и введем новую переменную φ , связанную с η соотношением

$$\eta = \beta \cos \varphi. \quad (2.50)$$

В результате преобразований получаем

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa'^2 \sin^2 \varphi}} = \pm \sigma_1 (\tau - \tau_1). \quad (2.51)$$

В последней формуле введены обозначения

$$\kappa'^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \sigma_1^2 = - \frac{2h(\alpha^2 + \beta^2)}{(1 + \beta^2)(1 - \alpha^2)}. \quad (2.52)$$

Из (2.51) находим

$$\eta = \beta \operatorname{cn} [i\sigma_1 (\tau - \tau_1), \kappa']. \quad (2.53)$$

Переходя к функции действительного переменного, получим

$$\eta = \frac{\beta}{\operatorname{cn} [\sigma_1 (\tau - \tau_1), \kappa]}, \quad (2.54)$$

где

$$\kappa^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (2.55)$$

Окончательно имеем

$$\mu = \frac{-\beta^2 + \operatorname{cn}^2 \sigma_1 (\tau - \tau_1)}{\beta^2 + \operatorname{cn}^2 \sigma_1 (\tau - \tau_1)}. \quad (2.56)$$

Общее решение второго из уравнений (2.33), даваемое формулой (2.56), является периодическим с периодом

$$T_1 = \frac{2}{\sigma_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{\sigma_1} K(\kappa). \quad (2.57)$$

Из полученных формул для общего решения уравнений (2.33) следует, что λ и μ всегда являются периодическими функциями τ . Если притом T и T_1 соизмеримы, то орбиты

будут замыкаться после нескольких оборотов и, следовательно, будут периодическими по t . Очевидно, что задача в плоском случае допускает ∞^2 периодических решений.

Если T и T_1 несоизмеримы, то орбиты будут периплегматическими, повсюду плотно заполняющими области возможности движения. Этот результат непосредственно следует из теоремы, доказанной в § 10 гл. I. Так как собственное вырождение в этой задаче не имеет места, то движение будет условно-периодическим и траектория заполняет всюду плотно некоторую область пространства u, v .

Аналогичным способом можно получить явные выражения для сфероидальных координат точки в зависимости от t и для пространственных движений. К сожалению, этого до сих пор никто не сделал. Решение задачи двух неподвижных центров можно искать и в другом виде. Например, можно избавиться от эллиптических функций, заменяя их тригонометрическими рядами. В некоторых случаях полезно применить метод малого параметра Пуанкаре ([92]). Р. К. Чоудхари [105] воспользовался при построении степенных рядов методом Стеффенсена [106], позволяющим получить рекуррентные формулы для определения коэффициентов и оценить область сходимости рядов. Применение метода Стеффенсена удобно при расчетах на ЭВМ.

§ 3. Способ Гарфинкеля

Отказавшись от кеплеровской промежуточной орбиты, которая не содержит характерные для ИСЗ быстрые вековые движения восходящего узла и перигея, Б. Гарфинкель [107] разбивает гамильтониан возмущенной задачи таким образом, чтобы невозмущенный гамильтониан H_0 уже давал бы основные эффекты, обусловленные несферичностью Земли, и вместе с тем допускал бы интегрирование задачи в замкнутой форме.

Если ввести геоцентрическую экваториальную систему сферических координат r, φ, λ , то общее решение задачи в квадратурах можно получить методом Якоби, если силовая функция имеет вид (см. (6.17) гл. I)

$$U(r, \varphi) = f(r) + \frac{\Phi(\varphi)}{r^2}.$$

Пусть невозмущенная кеплеровская орбита ИСЗ в начальный момент времени характеризуется большой полуосью a , эксцентриситетом e и наклонностью i . Тогда согласно Б. Гарфинкелю в качестве невозмущенной части гамильтониана целесообразно принять функцию

$$H_0 = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{p_\lambda^2}{r^2 \cos^2 \varphi} \right) - \frac{fM}{r} \left[1 + \frac{J_2 R^2}{2r^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) - \frac{3J_2 R^2}{2ra(1-e^2)} \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \right]. \quad (3.1)$$

Так как элементы a , e , i считаются постоянными, то, сравнивая (3.1) с предыдущим равенством, обнаруживаем, что упрощенный гамильтониан (3.1) описывает задачу, интегрируемую в конечном виде.

Гарфинкель рассматривает задачу о движении ИСЗ, учитывая лишь возмущения от второй зональной гармоники. Поэтому для пертурбационной функции H_1 будем иметь

$$H_1 = \frac{3}{2} fM J_2 R^2 \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{ar^2(1-e^2)} \right). \quad (3.2)$$

Если необходимо вычислить влияние зональных гармоник более высокого порядка, то в пертурбационную функцию (3.2) следует добавить соответствующие члены. Из (3.1) и (3.2) видно, что гамильтонова функция H возмущенной задачи

$$H = H_0 + H_1$$

не содержит начальных значений элементов кеплеровской орбиты. При рассмотрении орбит ИСЗ с малым эксцентриситетом пертурбационная функция H_1 по крайней мере на малых интервалах времени будет оставаться малой величиной порядка $J_2 e$.

Гамильтониан невозмущенной (в смысле Б. Гарфинкеля) задачи соответствует потенциалу вида (6.17) гл. I. Поэтому ее решение непосредственно следует из результатов § 6 гл. I. Полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби дается формулой (6.21) гл. I, если в последнюю подставить вместо $f(r)$ и $\Phi(\varphi)$ соответствующие величины, представляющие в формуле (3.1) потенциальную энергию спутника. Полный

интеграл записывается следующим образом:

$$V = -\alpha_1 t + \int_{r_0}^r \sqrt{L(r)} dr + \alpha_3 \lambda + \int_0^\varphi \sqrt{N(\varphi)} d\varphi, \quad (3.3)$$

где r_0 — геоцентрическое расстояние ИСЗ в перигее, определяемое из уравнения $L(r) = 0$ при $\dot{r} = 0$, а подкоренные выражения $L(r)$ и $N(\varphi)$ имеют вид

$$L(r) = \frac{1}{r^3} \left\{ 2\alpha_1 r^3 - 2fMr^2 - \left[\alpha_2 + \frac{3fMJ_2 R^2 \sin^2 i}{2a(1-e^2)} \right] r - fMJ_2 R^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \right\}, \quad (3.4)$$

$$N(\varphi) = \alpha_2 - \frac{3fMJ_2 R^2}{a(1-e^2)} \sin^2 \varphi - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}. \quad (3.5)$$

По теореме Якоби общий интеграл уравнений движения ИСЗ запишется в следующей форме:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = t - \beta_1 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{L(r)}}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = -\beta_2 = -\frac{1}{2} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{L(r)}} + \frac{1}{2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{N(\varphi)}}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_3} = -\beta_3 = \lambda - \alpha_3 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{N(\varphi)}}, \quad (3.8)$$

где α_i — канонические постоянные, а именно: α_1 — полная механическая энергия единицы массы ИСЗ, $\sqrt{\alpha_2}$ — модуль кинетического момента, отнесенный к массе спутника, α_3 — постоянная площадей, соответствующая моменту количества движения относительно оси вращения Земли. Сопряженные канонические постоянные $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ в соответствии с результатами § 7 гл. 1 суть соответственно момент прохождения ИСЗ через перигей, угловое расстояние перигея от узла (при $J_2 = 0$) и долгота восходящего узла. Если $J_2 = 0$, то полученное решение определяет эллиптическое кеплеровское движение.

Задача определения канонических постоянных (элементов) для орбиты Гарфинкеля решается весьма просто. Мы опустим этот вопрос, отсылая читателя к книге Т. Е. Штерна [107].

§ 4. Задача Баррара

В теории движения далеких спутников Земли или при грубом прогнозировании можно исходить из потенциала Р. Баррара [37, 108]. Р. Баррар получил приближенно выражение для гравитационного потенциала Земли, комбинируя разложения некоторых функций в ряды по полиномам Лежандра. При этом остался невыясненным механический смысл аппроксимации. В отличие от Баррара будем исходить из формы уравнений, полученной в § 6 гл. I.

В основу наших рассуждений положим следующие предположения.

1. Планета представляет собой абсолютно твердое тело и обладает осью динамической симметрии, т. е. $A = B$.

2. Планета вращается вокруг оси, совпадающей с наименьшей осью центрального эллипсоида инерции.

Возьмем планетоцентрическую прямоугольную систему координат (с началом в центре масс планеты), основная плоскость которой совпадает с экваториальной плоскостью планеты, а ось аппликат направлена по оси ее вращения. Тогда гравитационный потенциал планеты определится формулой (3.15) гл. II. Если выписать первые три члена этого разложения, то, полагая в (3.20) гл. II $A = B$, получим

$$U = \frac{fM}{r} - \frac{f(A - C)}{2r^5} (x^2 + y^2 - 2z^2). \quad (4.1)$$

Это приближенное выражение во многих спутниковых задачах оказывается достаточным, ибо оно содержит основной возмущающий член (вторую сферическую гармонику). Однако задача с потенциалом (4.1) не интегрируется в квадратурах. Поэтому при выводе аппроксимирующего потенциала предварительно сделаем следующее преобразование координат:

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z - z_c = \zeta. \quad (4.2)$$

Здесь z_c — величина, подлежащая выбору.

Механический смысл преобразования (4.2) становится ясным, если вспомнить некоторые результаты из геометрии масс. Эллипсоид инерции при произвольном выборе полюса, вообще говоря, будет трехосным. Однако при определенном выборе полюса эллипсоид инерции может быть эллипсоидом

вращения или сферой. Полюс, для которого эллипсоид инерции обращается в сферу, называется шаровой точкой.

Установим условия, при которых существуют шаровые точки. Пусть A, B и C суть главные центральные моменты инерции тела, и пусть A', B' и C' — моменты инерции, а D', E', F' — произведения инерции для полюса в точке (x_c, y_c, z_c) относительно осей, параллельных главным центральным осям инерции. Тогда (см. [109]) справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} A' &= A + M(y_c^2 + z_c^2), & D' &= My_c z_c, \\ B' &= B + M(x_c^2 + z_c^2), & E' &= Mx_c z_c, \\ C' &= C + M(x_c^2 + y_c^2), & F' &= Mx_c y_c. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Если новый полюс представляет собой шаровую точку, то любая ось, проведенная через него, должна быть главной осью. Следовательно, должно иметь место равенство

$$D' = E' = F' = 0$$

или, в силу (4.3),

$$y_c z_c = 0, \quad x_c z_c = 0, \quad x_c y_c = 0.$$

Эти уравнения удовлетворяются, например, в случае

$$x_c = y_c = 0,$$

т. е. когда полюс взят на оси аппликат. Третья координата нового полюса находится из условия

$$A' = B' = C',$$

или в соответствии с (4.3)

$$A + Mz_c^2 = B + Mz_c^2 = C.$$

Отсюда находим

$$z_c = \pm \sqrt{\frac{C-A}{M}}, \quad (4.4)$$

что возможно лишь при $C \geq A$.

Итак, для существования шаровых точек инерции необходимо, чтобы центральный эллипсоид инерции был сплюснутым эллипсоидом вращения.

Согласно результатам § 3 гл. II для Земли

$$C - A > 0$$

и, стало быть, для нее можно указать две шаровые точки инерции, расположенные на оси ее вращения. Из формул (3.20) гл. II можно определить числовые значения аппликат шаровых точек для Земли. К настоящему времени из многочисленных определений коэффициентов разложения потенциала Земли в ряд по сферическим функциям коэффициент при второй зональной гармонике определен весьма надежно. Для z_c можно принять значение

$$z_c = 209,9 \text{ км.}$$

Тогда, считая в преобразовании (4.2) z_c равным полученной величине, вместо (4.1) будем иметь

$$U = \frac{fM}{\rho} + \frac{fMz_c\xi}{\rho^2}, \quad (4.5)$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Преобразованием координат мы уничтожили член со второй зональной гармоникой. Однако в связи с тем, что начало новой системы координат не совпадает с центром масс планеты, коэффициент при первой сферической гармонике (см. формулу (3.20) гл. II) отличен от нуля.

Перейдем теперь от прямоугольных координат ξ, η, ζ к сферическим координатам ρ, ψ, λ :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \rho \cos \psi \cos \lambda, \\ \eta &= \rho \cos \psi \sin \lambda, \\ \zeta &= \rho \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Очевидно, угол λ представляет собой прямое восхождение спутника в инерциальной системе координат, а угол ψ , мало отличающийся от φ , можно назвать квазиширотой (рис. 19).

Зависимость между двумя системами сферических координат дается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 - 2\rho z_c \sin \psi + z_c^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} \psi - \frac{z_c}{\rho} \sec \psi. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Аппроксимирующий потенциал (4.5) будет иметь вид

$$U = \frac{fM}{\rho} + \frac{fMz_c \sin \psi}{\rho^2}. \quad (4.8)$$

Как следует из теоремы Лиувилля (см. § 5 гл. 1), уравнения движения спутника в силовом поле (4.8) интегрируются в квадратурах.

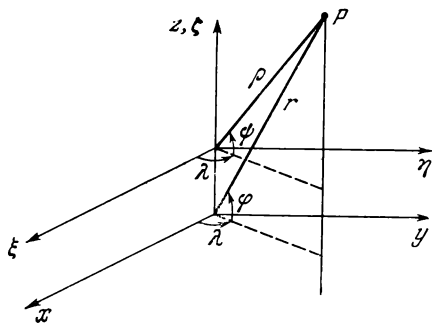


Рис. 19.

В нашем случае уравнения движения (3.19) гл. I запишутся в форме

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho(\dot{\psi}^2 + \dot{\lambda}^2 \cos^2 \psi) &= \frac{\partial U}{\partial \rho}, \\ \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\lambda} \cos^2 \psi) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\psi}) + \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\lambda}^2 \sin 2\psi &= \frac{\partial U}{\partial \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Второе из уравнений системы (4.9) непосредственно дает интеграл площадей

$$\rho^2 \dot{\lambda} = c_1. \quad (4.10)$$

Очевидно, что система (4.9) допускает интеграл живых сил

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2 + \rho^2 \dot{\lambda}^2 \cos^2 \psi = 2U + c_2. \quad (4.11)$$

Умножая второе уравнение системы (4.9) на $2\rho^2 \dot{\lambda}$, а третье на $2\rho^2 \dot{\psi}$ и складывая, после интегрирования

получим

$$\rho^4 (\dot{\psi}^2 + \dot{\lambda}^2 \cos^2 \psi) = 2fMz_c \sin \psi + c_3. \quad (4.12)$$

Этот интеграл характеризует изменение модуля момента количества движения.

Существование трех первых интегралов позволяет свести задачу к квадратурам. Оставляя в стороне качественное исследование форм движения, изучим наиболее важный для небесной баллистики случай спутникового движения, имеющий место при $c_2 < 0$. Радиус-вектор планеты в этом случае изменяется по кеплеровским законам, в то время как зависимость от времени угловых координат иная. Поэтому орбиту спутника будем называть квазиэллиптической.

§ 5. Решение задачи Баррара

Исключая из интеграла (4.11) величины $\dot{\psi}$ и $\dot{\lambda}$ с помощью (4.12), получим

$$\dot{\rho}^2 = 2U + c_2 - \frac{2fMz_c \sin \psi + c_3}{\rho^2}. \quad (5.1)$$

Принимая во внимание (4.8), преобразуем (5.1) к виду

$$\dot{\rho}^2 = \frac{1}{\rho^2} (c_2 \rho^2 + 2fM\rho - c_3). \quad (5.2)$$

Характер движения зависит от корней уравнения

$$c_2 \rho^2 + 2fM\rho - c_3 = 0. \quad (5.3)$$

Если произвольные постоянные таковы, что корни уравнения (5.3) ρ_1 и ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$) положительны, то

$$\rho_1 = a(1 - e), \quad \rho_2 = a(1 + e). \quad (5.4)$$

Из соотношений

$$\rho_1 \rho_2 = -\frac{c_3}{c_2}, \quad \rho_1 + \rho_2 = -\frac{2fM}{c_2} \quad (5.5)$$

находим

$$c_2 = -\frac{fM}{a}, \quad c_3 = fMp, \quad (5.6)$$

где

$$\rho = a(1 - e^2). \quad (5.7)$$

Для интегрирования уравнения (5.2) сделаем подстановку

$$\rho = a(1 - e \cos E). \quad (5.8)$$

Вместо (5.2) будем иметь

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E}, \quad (5.9)$$

где

$$n^2 = \frac{fM}{a^3}. \quad (5.10)$$

Из (5.9) получаем

$$E - e \sin E = n(t - T), \quad (5.11)$$

где T — момент прохождения спутника через перигентр.

Полагая далее, как и в задаче двух тел,

$$M = n(t - T), \quad (5.12)$$

получим

$$E - e \sin E = M. \quad (5.13)$$

Вместо (5.12) можно использовать соотношение

$$M = M_0 + n(t - t_0), \quad (5.14)$$

где

$$M_0 = n(t_0 - T). \quad (5.15)$$

Если вместо времени t ввести новую переменную v , определяемую дифференциальным соотношением

$$\rho^2 dv = \sqrt{fMp} dt, \quad (5.16)$$

то из (5.2) и (5.16) получим для радиуса-вектора спутника следующее выражение:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos v}. \quad (5.17)$$

Из (5.8) и (5.17) находим

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (5.18)$$

Полученные для радиуса-вектора зависимости имеют ту же форму, что и для задачи двух тел, однако так как изучаемые орбиты не плоские, а пространственные кривые, то

введенные выше величины не обладают тем простым смыслом, которые они имеют в задаче двух тел. Но если положить в потенциале (4.8) $z_c = 0$, то величины a , e , p и другие приобретут обычный геометрический смысл.

Перейдем теперь к исследованию квазишироты спутника ψ . Из первых интегралов (4.10) и (4.11) получим

$$p^2 \dot{\psi}^2 = 2fMz_c \sin \psi + fMp - \frac{c_1^2}{\cos^2 \psi}. \quad (5.19)$$

С помощью (5.18) преобразуем уравнение (5.19) к переменной v :

$$\left(\frac{d \sin \psi}{dv}\right)^2 = -\frac{2z_c}{p} \sin^3 \psi - \sin^2 \psi + \frac{2z_c}{p} \sin \psi + 1 - \frac{c_1^2}{fMp}. \quad (5.20)$$

Полагая

$$c_1^2 = fMp \left(1 + \frac{2z_c}{p} \sin i\right) \cos^2 i \quad (5.21)$$

и

$$\delta = \frac{2z_c}{p}, \quad (5.22)$$

вместо (5.20) будем иметь

$$\left(\frac{d \sin \psi}{dv}\right)^2 = (\sin i - \sin \psi) [\delta \sin^2 \psi + (1 + \delta \sin i) \sin \psi - \delta \cos^2 i + \sin i]. \quad (5.23)$$

Введем обозначение $s = \sin \psi$, тогда вместо (5.23) получим уравнение

$$\frac{ds}{dv} = \delta (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3), \quad (5.24)$$

где через s_1 , s_2 и s_3 обозначены корни многочлена

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \sin i, \\ s_{2,3} &= \frac{1}{2\delta} \left(-1 - \delta \sin i \pm \sqrt{1 - 2\delta \sin i + \delta^2 (1 + 3 \cos^2 i)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Преобразуем уравнение (5.24) к новой переменной u , определяемой равенством

$$s = s_1 + (s_2 - s_1) \sin^2 u. \quad (5.26)$$

В результате преобразований приходим к уравнению

$$\frac{du}{dv} = \sigma \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}, \quad (5.27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \sqrt{\delta(s_1 - s_3)}, \\ k &= \sqrt{\frac{s_1 - s_2}{s_1 - s_3}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Интегрируя (5.27), находим

$$u = \operatorname{am}(\tau, k), \quad (5.29)$$

причем

$$\tau = \sigma(v + \omega), \quad (5.30)$$

где ω — произвольная постоянная. Из (5.27) и (5.29) следует

$$s = s_1 + (s_2 - s_1) \operatorname{sn}^2 \tau. \quad (5.31)$$

Из (4.10), (5.21) и (5.22) получаем уравнение для определения долготы спутника

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\sqrt{fMp(1 + \delta \sin i)} \cos i}{\rho^2 \cos^2 \psi}, \quad (5.32)$$

откуда

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sqrt{fMp(1 + \delta \sin i)} \cos i}{\rho^2 s \cos^2 \psi},$$

или

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sqrt{1 + \delta \sin i} \cos i}{\cos^2 \psi} \frac{dv}{ds}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sqrt{1 + \delta \sin i} \cos i}{(1 - s^2) \sqrt{\delta(s_1 - s)(s - s_2)(s - s_3)}}. \quad (5.33)$$

Из (5.33) после интегрирования

$$\lambda - \Omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + \delta \sin i}{\delta}} \cos i \left\{ \int_{s_0}^s \frac{ds}{(1-s) \sqrt{(s_1-s)(s-s_2)(s-s_3)}} + \right. \\ \left. + \int_{s_0}^s \frac{ds}{(1+s) \sqrt{(s_1-s)(s-s_2)(s-s_3)}} \right\}, \quad (5.34)$$

где Ω — постоянная интегрирования.

С помощью соотношения (5.20) преобразуем интегралы, входящие в (5.34), к нормальной лежандровой форме

$$\lambda - \Omega = -\cos i \sqrt{\frac{1 + \delta \sin i}{\delta (s_1 - s_3)}} \left\{ \frac{1}{1 - s_1} \Pi(u, n', k) + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + s_1} \Pi(u, n'', k) \right\}, \quad (5.35)$$

где через Π обозначены эллиптические интегралы третьего рода, а параметры этих интегралов равны

$$n' = \frac{s_1 - s_2}{1 - s_1}, \quad n'' = \frac{s_2 - s_1}{1 + s_1}. \quad (5.36)$$

§ 6. Обобщенная задача двух неподвижных центров

В предыдущих параграфах были рассмотрены различные способы аппроксимации потенциала сфероидальной планеты. Исследования, выполненные Е. П. Аксеновым, Е. А. Гребениковым и автором [85], показали, что все аппроксимирующие потенциалы, исключая потенциал Гарфинкеля, представляют собой частные или предельные случаи потенциала обобщенной задачи двух неподвижных центров.

Рассмотрим движение пассивно гравитирующей материальной частицы под действием притяжения к двум неподвижным центрам P_1 и P_2 . Возьмем прямоугольную систему координат, ось аппликат которой направим вдоль линии центров $P_1 P_2$.

Потенциал задачи определяется формулой (2.1)

$$U = \frac{fM_1}{r_1} + \frac{fM_2}{r_2}, \quad (6.1)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a_1)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a_2)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

M_1 и M_2 суть массы притягивающих центров P_1, P_2 , a_1 и a_2 — расстояния от этих центров до начала координат. Если расстояние между центрами положить равным a , а начало координатной системы взять в центре инерции точек P_1 и P_2 , то a_1 и a_2 выразятся следующим образом:

$$a_1 = \frac{M_2 a}{M_1 + M_2}, \quad a_2 = -\frac{M_1 a}{M_1 + M_2}. \quad (6.3)$$

По своему механическому смыслу постоянные M_1, M_2, a_1 и a_2 следует считать действительными. В дальнейшем мы откажемся от этого предположения и будем допускать для этих величин и комплексные значения. Однако при этом потенциал (6.1) должен принимать только действительные значения. Функцию U построим так, чтобы ее разложение в ряды по сферическим функциям совпадало с разложением гравитационного потенциала сфероидальной планеты.

В соответствии с формулами (2.4) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_1}{r} \right)^n P_n \left(\frac{z}{r} \right), \\ \frac{1}{r_2} &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_2}{r} \right)^n P_n \left(\frac{z}{r} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Если подставить эти ряды в формулу (6.1), то получим следующее разложение потенциала:

$$U = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{r^n} P_n \left(\frac{z}{r} \right) \right], \quad (6.5)$$

в котором использованы обозначения

$$M = M_1 + M_2, \quad \gamma_n = \frac{M_1 a_1^n + M_2 a_2^n}{M}. \quad (6.6)$$

Как видно из (6.5), силовая функция U будет действительной, если постоянные M и γ_n действительны при любом

целом n . Если начало координатной системы взять в центре инерции планеты, то в силу (3.20) гл. II в разложении потенциала планеты первая сферическая гармоника уничтожится. Поэтому потребуем, чтобы и в разложении (6.5) $\gamma_1 = 0$. Итак, потенциал (6.1) представляет потенциал тяготения некоторого твердого тела, если

$$\gamma_1 = 0, \quad (6.7)$$

$$\operatorname{Im} \gamma_n = 0 \quad (n = 2, 3, \dots), \quad (6.8)$$

$$\operatorname{Im} M = 0. \quad (6.9)$$

Установим теперь, каким условиям должны удовлетворять величины M_1, M_2, a_1, a_2 чтобы соотношения (6.7) — (6.8) имели место. С этой целью перейдем к тригонометрической форме комплексных величин M_1, M_2, a_1, a_2 , полагая

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \rho_1 \exp i\psi_1, & M_2 &= \rho_2 \exp i\psi_2, \\ a_1 &= R_1 \exp i\varphi_1, & a_2 &= R_2 \exp i\varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Условие (6.7), используя (6.10), запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 R_1 \cos(\psi_1 + \varphi_1) + \rho_2 R_2 \cos(\psi_2 + \varphi_2) &= 0, \\ \rho_1 R_1 \sin(\psi_1 + \varphi_1) + \rho_2 R_2 \sin(\psi_2 + \varphi_2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

а соотношения (6.8) сводятся к следующему:

$$\sin(\psi_1 + n\varphi_1) + \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^n \sin(\psi_2 + n\varphi_2) = 0. \quad (6.12)$$

Из (6.11) находим уравнение

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \psi_1) = \operatorname{tg}(\varphi_2 + \psi_2), \quad (6.13)$$

решая которое получаем

$$\varphi_1 + \psi_1 = \varphi_2 + \psi_2 + \pi s, \quad (6.14)$$

где s — любое целое число.

Допуская пока, что $\cos(\varphi_1 + \psi_1) \neq 0$, из (6.11) и (6.14) найдем

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (6.15)$$

Тогда (6.12) приводится к виду

$$\sin(\psi_1 + n\varphi_1) + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n-1} \sin(\psi_2 + n\varphi_2) = 0. \quad (6.16)$$

Если $\varphi_i \neq 0$ или π ; $\psi_i \neq 0$ или π ($i = 1, 2$), то уравнение (6.16) при всех целых значениях n может выполняться только при условии

$$R_1 = R_2. \quad (6.17)$$

В таком случае из уравнения (6.16) имеем

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \psi_1) = \operatorname{ctg} \left[(n-1) \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right], \quad (6.18)$$

а последнее уравнение выполняется для любых целых значений только при

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0; 2\pi. \quad (6.19)$$

Отсюда имеем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + \psi_1 &= \frac{\pi}{2} + \pi s_1, \\ \varphi_2 + \psi_2 &= \frac{\pi}{2} + \pi s_2 \quad (s_1, s_2 = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Комбинируя (6.19) и (6.20), получаем

$$\psi_1 + \psi_2 = \pi s_3 \quad (s_3 = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.21)$$

Как следует из (6.15), (6.17), (6.19) и (6.20), величины M_1, M_2, a_1, a_2 должны быть попарно комплексными сопряженными.

Во втором возможном случае

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= 0 \quad \text{или} \quad \pi, \\ \psi_i &= 0 \quad \text{или} \quad \pi \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

что дает для рассматриваемых величин действительные значения, т. е. в этом случае мы приходим к классической задаче двух неподвижных центров.

В предыдущих рассуждениях мы исходили из допущения

$$\varphi_i + \psi_i \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k_i \quad (i = 1, 2).$$

Но если эти условия не выполнены, то и уравнение (6.12) не может выполняться при всех целых значениях n . Стало быть, потенциал U принимает действительные значения только в двух случаях. В первом случае M_1 и M_2 , а также

a_1 и a_2 — попарно сопряженные комплексные числа, т. е.

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{M}{2} (1 + i\delta), & M_2 &= \frac{M}{2} (1 - i\delta), \\ a_1 &= c(\kappa + i), & a_2 &= c(\kappa - i), \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

где M , c , δ , κ — действительные, а $i = \sqrt{-1}$.

С учетом условия (6.8), которое дает $\kappa - \delta = 0$, из (6.23) получаем

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{M}{2} (1 + i\delta), & a_1 &= c(\delta + i), \\ M_2 &= \frac{M}{2} (1 - i\delta), & a_2 &= c(\delta - i). \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

Во втором случае все постоянные M_1 , M_2 , a_1 , a_2 суть действительные числа. Обозначая через γ отношение массы M_2 к сумме масс M , из (6.3) находим

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M(1 - \gamma), & a_1 &= a\gamma, \\ M_2 &= M\gamma, & a_2 &= -a(1 - \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

Таким образом, функция U , определяемая формулой (6.1), представляет собой потенциал твердого тела только в том случае, когда постоянные M_1 , M_2 , a_1 , a_2 задаются либо равенствами (6.24), либо равенствами (6.25).

Если относительно Земли сделать допущения, сформулированные в начале § 5, то для потенциала земного тяготения будем иметь (§ 3 гл. II)

$$U_T = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{R}{r} \right)^k P_k \left(\frac{z}{r} \right) \right], \quad (6.26)$$

где через M обозначена масса Земли, через J_k — некоторые постоянные, а $R = 6378,1$ км.

Если в (6.1) подставить значения параметров из (6.24), то потенциал будет определен следующей формулой:

$$U = \frac{fM}{2} \left\{ \frac{1 + i\delta}{r_1} + \frac{1 - i\delta}{r_2} \right\}, \quad (6.27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\delta + i)]^2}, \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\delta - i)]^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

а его разложение в ряд по полиномам Лежандра

$$U = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_k}{r^k} P_k \left(\frac{z}{r} \right) \right] \quad (6.29)$$

имеет следующие коэффициенты:

$$\gamma_k = \frac{c^k}{2} [(1 + i\delta)(\delta + i)^k + (1 - i\delta)(\delta - i)^k]. \quad (6.30)$$

Сопоставляя разложения (6.26) и (6.29), видим, что потенциал двух неподвижных центров приближенно может представлять гравитационное поле Земли. Действительно, с этой целью распорядимся параметрами, входящими в (6.27), так, чтобы коэффициенты в рядах (6.26) и (6.27) в первых трех членах совпадали. Для этого положим M равным массе Земли, а c и δ определим из соотношений

$$c^2 (1 + \delta^2) = -J_2 R^2, \quad (6.31)$$

$$2\delta c^3 (1 + \delta^2) = -J_3 R^3, \quad (6.32)$$

разрешая которые относительно c и δ , получим

$$c = \frac{\sqrt{-J_3^2 - 4J_2^3}}{2J_2} R, \quad \delta = \frac{J_3}{\sqrt{-J_3^2 - 4J_2^3}}. \quad (6.33)$$

Найдем еще коэффициент

$$\gamma_4 = c^4 (1 + \delta^2) (1 - 3\delta^2). \quad (6.34)$$

Численные значения коэффициентов J_k в разложении потенциала земного тяготения получены многими авторами [55—61]. Насколько мало отличается при сделанном выборе c и δ коэффициент J_4 от соответствующего коэффициента в потенциале Земли, видно из таблицы 3.

Таким образом, аппроксимирующее выражение потенциала, полученное из обобщенной задачи двух неподвижных центров, дает весьма хорошее приближение для потенциала земного тяготения.

Из таблицы 3 и формул (6.33) видим, что вводимая здесь линейная величина c представляет собой аппликату шаровой точки инерции.

При $\delta = 0$ формула (6.27) дает частный случай, соответствующий потенциалу М. Д. Кислика. Этот потенциал не

Таблица 3

$J_2 \cdot 10^6$	$J_3 \cdot 10^6$	$J_4 \cdot 10^6$	c (км)	$\delta \cdot 10^2$	$\frac{\gamma_4}{R^4} \cdot 10^6$	Литератур- ный источник
-1082,2	2,3	2,1	209,8	-3,2	1,2	[56]
-1082,8	2,4	1,4	209,9	-3,4	1,2	[57]
-1082,5	2,4	1,7	209,8	-3,4	1,2	[60]
-1083,0	—	1,1	209,9	—	1,2	[59]
-1082,7	—	2,0	209,9	—	1,2	[58]

учитывает асимметрию Земли относительно экваториальной плоскости. Тем не менее промежуточные орбиты дают хорошее согласие с наблюдениями.

Представим теперь потенциал (6.1) в виде

$$U = fM \left[\frac{1 - \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \delta_1 + \delta_1 - a_1)^2}} + \frac{\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \delta_1 + \delta_1 - a_2)^2}} \right], \quad (6.35)$$

где δ_1 — пока неопределенная, но малая величина. Разлагая затем обратные расстояния в ряды Тейлора и ограничиваясь членами первого порядка малости относительно величин δ_1, a_1, a_2 , получим

$$U \approx \frac{fM}{\rho} \left[1 - \frac{\delta_1 (z - \delta_1)}{\rho^2} \right], \quad (6.36)$$

где

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + (z - \delta_1)^2. \quad (6.37)$$

Если положить

$$\delta_1 = a \sqrt{\gamma(1 - \gamma)} = R \sqrt{-J_2},$$

то формула (6.36) будет совпадать с формулой, определяющей потенциал Р. Баррара (см. (4.5)). Следовательно, потенциал Баррара является упрощенным выражением для силовой функции задачи двух неподвижных центров. В § 4 мы выяснили смысл потенциала Баррара с точки зрения геометрии масс. Если исходить из задачи двух неподвижных центров, то потенциал Баррара можно рассматривать как потенциал тяготения неподвижного центра и

«диполя», т. е. в сущности потенциал Баррара представляет собой предельный вариант потенциала двух притягивающих центров.

Винти также предложил приближенную формулу для потенциала земного тяготения. Если считать, что его формула записана не в геоцентрической системе координат, а в системе координат, несколько смещенной вдоль оси вращения Земли, то эта формула также окажется частным случаем обобщенной задачи двух неподвижных центров. В самом деле, в случае комплексных расстояний $1/r_1$ и $1/r_2$ можно представить в виде

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 - 2ic\xi + i^2c^2}, \quad r_2 = \sqrt{\rho^2 + 2ic\xi + i^2c^2},$$

где

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c\delta)^2}, \quad \xi = z - c\delta.$$

Разложим теперь $1/r_1$ и $1/r_2$ в ряды по степеням ic/ρ . Подставляя затем эти ряды в формулу (6.27), будем иметь

$$U = \frac{fM}{\rho} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c^{2n} \rho^{-2n} P_{2n} \left(\frac{\xi}{\rho} \right) - \right. \\ \left. - c\delta \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c^{2n} \rho^{-2n-1} P_{2n+1} \left(\frac{\xi}{\rho} \right) \right]. \quad (6.38)$$

Потенциал (6.38) с точностью до обозначений совпадает с потенциалом Винти.

Итак, все аппроксимирующие выражения потенциала Земли, предлагавшиеся различными авторами, получаются как частные или предельные случаи силовой функции обобщенной задачи двух неподвижных центров. Это обстоятельство весьма существенно, так как вся методика, разработанная для решения классической задачи двух неподвижных центров, может быть с успехом применена к исследованию задачи о движении ИСЗ. Такая схема позволила использовать результаты автора, полученные в работе [15] при интегрировании пространственной обобщенной задачи двух центров.

Займемся теперь интегрированием дифференциальных уравнений движения.

В сжатых сфероидальных координатах (3.20) гл. I

$$\left. \begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} v \sin u \cos w, \\ y &= c \operatorname{ch} v \sin u \sin w, \\ z &= c \delta + c \operatorname{sh} v \cos u \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

дифференциальные уравнения в соответствии с (3.28) гл. I запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (J\dot{u}) + (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 - \dot{w}^2 \operatorname{ch}^2 v) \sin u \cos u &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial u}, \\ \frac{d}{dt} (J\dot{v}) - (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \sin^2 u) \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial v}, \\ \frac{d}{dt} (\dot{w} \operatorname{ch}^2 v \sin^2 u) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

а функция U после преобразования к действительной форме с помощью известных формул Эйлера запишется следующим образом:

$$U = \frac{fM}{c} \cdot \frac{\operatorname{sh} v - \delta \cos u}{\operatorname{sh}^2 v + \cos^2 u}. \quad (6.41)$$

Сравнивая (6.41) и (8.12) гл. I, обнаруживаем, что потенциал обобщенной задачи двух неподвижных центров допускает интегрирование в квадратурах.

Система (6.40) обладает двумя первыми интегралами: интегралом живых сил

$$\frac{c^2}{2} [J (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \dot{w}^2 \operatorname{ch}^2 v \sin^2 u] - \frac{fM}{c} \cdot \frac{\operatorname{sh} v - \delta \cos u}{\operatorname{sh}^2 v + \cos^2 u} = h \quad (6.42)$$

и интегралом площадей

$$\dot{w} \operatorname{ch}^2 v \sin^2 u = c_1. \quad (6.43)$$

Исключая циклическую координату w с помощью интеграла (6.42), представим уравнения движения в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (J\dot{u}) + (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) \sin u \cos u &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial u}, \\ \frac{d}{dt} (J\dot{v}) - (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

где измененная силовая функция дается формулой

$$W = \frac{U}{c^2} - \frac{c_1^2}{2 \operatorname{ch}^2 v \sin^2 u}. \quad (6.45)$$

Интеграл живых сил при этом преобразуется к виду

$$J(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) = 2 \left(W + \frac{h}{c^2} \right). \quad (6.46)$$

Так же, как и в § 2 этой главы, регуляризируем уравнения движения (6.44) введением независимой переменной τ , определяемой формулой

$$dt = J d\tau = (\operatorname{sh}^2 v + \cos^2 u) d\tau. \quad (6.47)$$

В результате преобразований получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} u'' - \frac{1}{2J} \frac{\partial J}{\partial u} (u'^2 + v'^2) &= J \frac{\partial W}{\partial u}, \\ v'' - \frac{1}{2J} \frac{\partial J}{\partial v} (u'^2 + v'^2) &= J \frac{\partial W}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по τ ; система (6.48) допускает интеграл живых сил

$$u'^2 + v'^2 = 2J \left(W + \frac{h}{c^2} \right), \quad (6.49)$$

который дает возможность преобразовать уравнения движения (6.48) к виду

$$\left. \begin{aligned} u'' &= J \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial J}{\partial u} \left(W + \frac{h}{c^2} \right), \\ v'' &= J \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\partial J}{\partial v} \left(W + \frac{h}{c^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

Систему (6.50) можно записать также в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} u'' &= \frac{\partial \bar{W}}{\partial u}, \\ v'' &= \frac{\partial \bar{W}}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

где измененная силовая функция $\bar{W}$ задается формулой

$$\bar{W} = J \left(W + \frac{h}{c^2} \right). \quad (6.52)$$

В явном виде функция $\bar{W}$ выражается следующим образом:

$$\bar{W} = (\text{sh}^2 v + \cos^2 u) \left[\frac{fM}{c^3} \cdot \frac{\text{sh } v - \delta \cos u}{\text{sh}^2 v + \cos^2 u} - \frac{c_1^2}{2 \text{ch}^2 v \sin^2 u} + \frac{h}{c^2} \right], \quad (6.53)$$

а интеграл живых сил принимает вид

$$u'^2 + v'^2 = 2\bar{W}. \quad (6.54)$$

Вычисляя частные производные функции $\bar{W}$ по переменным u и v , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}}{\partial u} &= \frac{fM\delta}{c^3} \sin u + \frac{c_1^2 \cos u}{\sin^3 u} - \frac{2h}{c^2} \cos u \sin u, \\ \frac{\partial \bar{W}}{\partial v} &= \frac{fM}{c^3} \text{ch } v - \frac{c_1^2 \text{sh } v}{\text{ch}^3 v} + \frac{2h}{c^2} \text{sh } v \text{ch } v. \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

В результате преобразований получилась система уравнений (6.48), распадающаяся на два не зависящих друг от друга уравнения

$$u'' = \frac{fM\delta}{c^3} \sin u + \frac{c_1^2 \cos u}{\sin^3 u} - \frac{2h}{c^2} \sin u \cos u, \quad (6.56)$$

$$v'' = \frac{fM}{c^3} \text{ch } v - \frac{c_1^2 \text{sh } v}{\text{ch}^3 v} + \frac{2h}{c^2} \text{sh } v \text{ch } v. \quad (6.57)$$

Умножая уравнение (6.56) на u' , а второе — на v' и интегрируя, получим

$$\left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 = \frac{2h}{c^2} \cos^2 u - \frac{2fM\delta}{c^3} \cos u - \frac{c_1^2}{\sin^2 u} + 2c_2', \quad (6.58)$$

$$\left(\frac{dv}{d\tau} \right)^2 = \frac{2h}{c^2} \text{sh}^2 v + \frac{2fM}{c^3} \text{sh } v + \frac{c_1^2}{\text{ch}^2 v} + 2c_2. \quad (6.59)$$

Сопоставляя интеграл живых сил (6.54) с первыми интегралами (6.58) и (6.59), обнаруживаем, что постоянные c_2 и c_2' связаны соотношением

$$c_2 + c_2' = 0. \quad (6.60)$$

В дальнейшем в уравнениях оставим только постоянную c_2 .

Вводя новые переменные

$$\lambda = \operatorname{sh} v, \quad \mu = \cos u, \quad (6.61)$$

вместо интегралов (6.58) и (6.59) получим

$$\mu'^2 = -\frac{2h}{c^2} \mu^4 + \frac{2fM\delta}{c^3} \mu^3 + 2\left(c_2 + \frac{h}{c^2}\right) \mu^2 - \\ - \frac{2fM\delta}{c^3} \mu - (2c_2 + c_1^2),$$

$$\lambda'^2 = \frac{2h}{c^2} \lambda^4 + \frac{2fM}{c^3} \lambda^3 + 2\left(c_2 + \frac{h}{c^2}\right) \lambda^2 + \frac{2fM}{c^3} \lambda + (2c_2 + c_1^2),$$

откуда интегрированием найдем

$$\int \frac{d\mu}{V f(\mu)} = \tau + c_3, \quad (6.62)$$

$$\int \frac{d\lambda}{V \Psi(\lambda)} = \tau + c_4, \quad (6.63)$$

где

$$f(\mu) = -\frac{2h}{c^2} \mu^4 + \frac{2fM\delta}{c^3} \mu^3 + 2\left(c_2 + \frac{h}{c^2}\right) \mu^2 - \\ - \frac{2fM\delta}{c^3} \mu - 2c_2 - c_1^2,$$

$$\Psi(\lambda) = \frac{2h}{c^2} \lambda^4 + \frac{2fM}{c^3} \lambda^3 + 2\left(c_2 + \frac{h}{c^2}\right) \lambda^2 + \\ + \frac{2fM}{c^3} \lambda + 2c_2 + c_1^2.$$

После обращения эллиптических квадратур (6.62) и (6.63), величины λ и μ будут найдены как явные функции τ , и тогда долгота ω определится квадратурой

$$\omega = c_1 \int \frac{(\lambda^2 + \mu^2) d\tau}{(1 - \mu^2)(1 + \lambda^2)} + c_5. \quad (6.64)$$

Затем можно будет найти время t с помощью формулы

$$t = \int (\lambda^2 + \mu^2) d\tau. \quad (6.65)$$

Формулы (6.62) — (6.65) дают общее решение задачи.

З а м е ч а н и е. Обобщенная задача двух неподвижных центров с успехом может быть применена при изучении движения искусственных спутников не только Земли, но и других больших планет. Расчеты,

выполненные Е. Л. Лукашевичем*), позволили получить [следующие значения для параметров аппроксимирующих потенциалов планет: для Марса $c = 150,013$ км, $\delta = 0$; для Юпитера $c = 8461,57$ км, $\delta = 0$; для Сатурна $c = 7547,368$ км, $\delta = 0$.

Коэффициент δ везде принят равным нулю, так как сведения о числовом значении коэффициента при третьей гармонике у больших планет отсутствуют. Его определение из наблюдений естественных спутников больших планет в настоящее время невозможно, ибо оно связано с изучением периодических неравенств, а не вековых.

О качестве аппроксимации можно сделать лишь некоторые общие замечания. Нам неизвестен коэффициент J_4 для Марса. Однако, если иметь в виду близость многих физических характеристик Марса и Земли, то можно ожидать, что отношение J_4/J_2^2 должно быть одного порядка для Марса и Земли. Аппроксимация потенциала Марса дает для J_4/J_2^2 значение 1,05, в то время как для Земли оно составляет $1 \div 2$. Для Юпитера фактическое значение $J_4 = 0,000216$, т. е. порядок J_4 тот же самый. Следует также заметить, что эффект четвертой гармоники в движении галилеевых спутников пренебрежимо мал. Для Сатурна фактическое значение J_4 составляет 0,000278. Стало быть, и здесь аппроксимирующее выражение потенциала будет удовлетворительным. Заметим, кроме того, что из суммарных значений годовых движений узлов орбит спутников Сатурна Мимаса и Тефии, соответственно равных $365^\circ,23$ и $72^\circ,227$, эффект четвертой гармоники соответственно составляет $5^\circ,74$ и $0^\circ,32$ за год. Отсюда заключаем, что ошибки аппроксимации незначительны.

§ 7. Приближенное решение обобщенной задачи двух неподвижных центров

Для далеких спутников Земли можно ограничиться приближенным решением обобщенной задачи двух неподвижных центров [108]. Введем цилиндрическую систему координат $\tilde{r}, \xi, \lambda$, связанную с прямоугольными геоцентрическими координатами соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r} &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \xi &= z - c\delta, \\ \operatorname{tg} \lambda &= \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Используя формулы (3.10) и (3.12) гл. I, нетрудно получить

*) Приводимые данные были любезно предоставлены автору Е. Л. Лукашевичем.

следующее уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \frac{1}{\tilde{r}^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \tilde{\lambda}} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \tilde{\xi}} \right)^2 \right] - U = 0, \quad (7.2)$$

в котором U предполагается не зависящей от долготы λ . Из уравнения (7.2) находим

$$V = -\alpha_1 t + \alpha_3 \lambda + W(\tilde{r}, \tilde{\xi}), \quad (7.3)$$

где α_1 и α_3 — произвольные постоянные, причем функция W должна удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \tilde{\xi}} \right)^2 - 2U - 2\alpha_1 + \frac{\alpha_3^2}{\tilde{r}^2} = 0. \quad (7.4)$$

Преобразуем уравнение (7.4) к сжатым сфероидальным координатам q_1, q_2, q_3 , определяемым равенствами

$$q_1 = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad q_2 = \frac{r_2 - r_1}{2i}, \quad q_3 = \lambda \quad (7.5)$$

(формулы (8.15) гл. I позволяют просто установить связь введенных сфероидальных координат со сфероидальными координатами, определяемыми формулами (3.20) гл. I). Из соотношений (7.5) получим

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{1}{c} \sqrt{(c^2 + q_1^2)(c^2 - q_2^2)}, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c\delta)^2} = \sqrt{q_1^2 - q_2^2 + c^2}, \\ \tilde{\xi} &= \frac{q_1 q_2}{c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

В сфероидальных координатах q_i уравнение Гамильтона — Якоби (7.4) имеет вид

$$\begin{aligned} (q_1^2 + c^2) \left(\frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + (c^2 - q_2^2) \left(\frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 - 2fM(q_1 - \delta q_2) - \\ - 2\alpha_1(q_1^2 + q_2^2) + \frac{\alpha_3^2 c^2}{c^2 - q_2^2} - \frac{\alpha_3^2 c^2}{c^2 + q_1^2} = 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

В уравнение (7.7) вместо U подставлено явное выражение потенциала обобщенной задачи двух неподвижных центров

(6.41). Из (7.3) и (7.7) нетрудно получить полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби:

$$V = -\alpha_1 t + \alpha_3 q_3 + \int \sqrt{V(q_1^2 + c^2)(2\alpha_1 q_1^2 + 2fMq_1 + \alpha_2) + \alpha_3^2 c^2} \frac{dq_1}{q_1^2 + c^2} + \\ + \int \sqrt{V(c^2 - q_2^2)(2\alpha_1 q_2^2 - 2fM\delta q_2 - \alpha_2) - \alpha_3^2 c^2} \frac{dq_2}{c^2 - q_2^2} \quad (7.8)$$

(см. (8.13) гл. I).

Полный интеграл (7.8) дает возможность написать общий интеграл задачи в переменных q_i . Приближенное решение получим, если воспользуемся разложениями (8.18) гл. I. Ограничиваясь первыми степенями малой величины c , получим

$$\left. \begin{aligned} r_1 &\cong \rho \left(1 - \frac{c\zeta^i}{\rho^2} \right), \\ r_2 &\cong \rho \left(1 + \frac{c\zeta^i}{\rho^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

откуда находим

$$q_1 \approx \rho, \quad (7.10)$$

$$q_2 \approx \frac{c\zeta}{\rho} = c \sin \psi, \quad (7.11)$$

где

$$\sin \psi = \frac{\zeta}{\rho}.$$

Тогда вместо (7.8) можно получить

$$V = -\alpha_1 t + \alpha_3 \lambda + \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{2\alpha_1 \rho^2 + 2fM\rho + \alpha_2} \frac{d\rho}{\rho} + \\ + \int_0^{\psi} \sqrt{\cos^2 \psi (2fMc\delta \sin \psi - \alpha_2) - \alpha_3^2} \frac{d\psi}{\cos \psi}, \quad (7.12)$$

где ρ_0 — некоторая постоянная.

Из (7.12) обычным образом (см. (4.19) гл. I) находим общий интеграл

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{V 2\alpha_1 \rho^2 + 2fM\rho + \alpha_2} = t + \beta_1, \quad (7.13)$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho V 2\alpha_1 \rho^2 + 2fM\rho + \alpha_2} - \int_0^{\psi} \frac{\cos \psi d\psi}{V - 2fMc\delta \sin^3 \psi + \alpha_2 \sin^2 \psi + 2fMc\delta \sin \psi - \alpha_3^2 - \alpha_2} = \beta_2,$$

$$\lambda = \beta_3 + \quad (7.14)$$

$$+ \alpha_3 \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos \psi V - 2fMc\delta \sin^3 \psi + \alpha_2 \sin^2 \psi + 2fMc\delta \sin \psi - \alpha_3^2 - \alpha_2}, \quad (7.15)$$

где β_i — канонические постоянные.

Канонические постоянные α_i и β_i неудобны, так как они не имеют достаточно простого механического и геометрического смысла. Поэтому предпочтительнее ввести другую систему элементов, которая при $c = \delta = 0$ совпадала бы с системой элементов, характеризующих кеплеровское движение (при $c = \delta = 0$ формулы (7.13) — (7.15) определяют кеплеровское движение, что следует из потенциала (6.41)).

Пусть движение происходит в ограниченной части пространства в окрестности притягивающего тела. Это имеет место, если постоянная живых сил α_1 отрицательна. Движение в этом случае можно называть квазиэллиптическим.

Обозначим корни квадратного уравнения

$$2\alpha_1 \rho^2 + 2fM\rho + \alpha_2 = 0$$

через ρ_1 и ρ_2 . Оба корня положительны, если

$$\alpha_1 < 0, \quad \alpha_2 < 0.$$

Положим

$$\rho_1 = a(1 - e), \quad \rho_2 = a(1 + e),$$

тогда канонические элементы α_1 , α_2 будут связаны с элементами a и e соотношениями

$$\alpha_1 = -\frac{fM}{2a}, \quad (7.16)$$

$$\alpha_2 = -fMp, \quad (7.17)$$

где $p = a(1 - e^2)$. Величины a , e , p назовем соответственно большой полуосью, эксцентриситетом и параметром квази-эллиптической орбиты.

Пусть

$$\rho_0 = a(1 - e),$$

и пусть, кроме того, при $t = T$, $\rho = \rho_0$. Тогда из (7.13) находим

$$\beta_1 = -T. \quad (7.18)$$

Величина T представляет собой момент прохождения через перигей орбиты (см. (7.17) гл. I).

Из анализа уравнения

$$-2fMc\delta \sin^3 \psi + \alpha_2 \sin^2 \psi + 2fMc \sin \psi - \alpha_3^2 - \alpha_2 = 0 \quad (7.19)$$

следует, что вместо постоянной α_3 целесообразно ввести элемент i , определяемый соотношением

$$\alpha_3 = \cos i \cdot \sqrt{fM(p + 2c\delta \sin i)}. \quad (7.20)$$

Вместо постоянной β_2 введем величину ω :

$$\beta_2 = -\frac{\omega}{\sqrt{fMp}}. \quad (7.21)$$

При $c = \delta = 0$ эта величина совпадает с расстоянием перигея от узла, а угол i дает наклонность орбиты.

Наконец, вместо β_3 введем величину Ω

$$\beta_3 = \Omega, \quad (7.22)$$

которая представляет собой долготу восходящего узла (см. (7.26) гл. I).

Рассмотрим уравнение (7.13). Положим

$$\rho = a(1 - e \cos E). \quad (7.23)$$

Тогда после интегрирования вместо (7.13) будем иметь

$$E - e \sin E = n(t - T), \quad (7.24)$$

где

$$n^2 = \frac{fM}{a^3}. \quad (7.25)$$

Пусть, далее,

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos v}. \quad (7.26)$$

Из (7.23) и (7.26) находим

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (7.27)$$

Первый из интегралов уравнения (7.14) вычисляем с помощью подстановки (7.26)

$$\int_{a(1-e)}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{2\alpha_1 \rho^2 + 2fM\rho + \alpha_2^2}} = \frac{v}{\sqrt{fMp}}. \quad (7.28)$$

Рассмотрим второй интеграл, входящий в уравнение (7.14):

$$I = \int_0^{\psi} \frac{\cos \psi d\psi}{\sqrt{-2fMc\delta \sin^3 \psi + \alpha_2 \sin^2 \psi + 2fMc\delta \sin \psi - \alpha_2 - \alpha_3^2}}. \quad (7.29)$$

Полагая

$$\xi = \sin \psi, \quad (7.30)$$

получим

$$I = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{2fMc\delta (\xi_1 - \xi)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}},$$

где ξ_i — корни уравнения (7.19):

$$\xi_1 = \sin i,$$

$$\xi_{2,3} = \frac{1}{4c\delta} \left[-p - 2c\delta \sin i \pm \sqrt{(p - 2c\delta \sin i)^2 + 16c^2\delta^2 \cos^2 i} \right]. \quad (7.31)$$

Приближенные значения корней ξ_2 и ξ_3 будут

$$\xi_2 \approx -\sin i, \quad \xi_3 \approx -\frac{p}{2c\delta}.$$

С помощью подстановки

$$\xi = (\xi_2 - \xi_1) \sin^2 \tilde{\varphi} + \xi_1 \quad (7.32)$$

интеграл (7.29) приводится к виду

$$I = \sqrt{\frac{2}{fMc\delta(\xi_1 - \xi_3)}} F(\tilde{\varphi}, k), \quad (7.33)$$

где $F(\tilde{\varphi}, k)$ — эллиптический интеграл первого рода, а его модуль k удовлетворяет равенству

$$k^2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 - \xi_3}. \quad (7.34)$$

Тогда из (7.14) находим

$$u = F(\tilde{\varphi}, k), \quad (7.35)$$

причем

$$u = \sqrt{\frac{c\delta(\xi_1 - \xi_3)}{2p}}(v + \omega). \quad (7.36)$$

Обращая (7.35), получим

$$\tilde{\varphi} = \operatorname{am}(u, k). \quad (7.37)$$

Из формул (7.30), (7.32) и (7.37) следует

$$\sin \psi = \xi_1 + (\xi_2 - \xi_1) \sin^2 u. \quad (7.38)$$

Обратимся теперь к рассмотрению интеграла

$$I_1 = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\cos \psi \sqrt{-2fMc\delta \sin^3 \psi + \alpha_2 \sin^2 \psi + 2fMc\delta \sin \psi - \alpha_2 - \alpha_3^2}},$$

входящего в уравнение (7.15). С помощью подстановки (7.32) интеграл I_1 преобразуем к нормальному виду

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2fMc\delta(\xi_1 - \xi_3)}} \left[\frac{1}{1 - \xi_1} \int_0^{\tilde{\varphi}} \frac{d\tilde{\varphi}}{(1 + n' \sin^2 \tilde{\varphi}) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tilde{\varphi}}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \xi_1} \int_0^{\tilde{\varphi}} \frac{d\tilde{\varphi}}{(1 + n'' \sin^2 \tilde{\varphi}) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tilde{\varphi}}} \right], \quad (7.39)$$

где параметры интегралов третьего рода в (7.39) равны

$$n' = \frac{\xi_1 - \xi_2}{1 - \xi_1}, \quad n'' = \frac{\xi_2 - \xi_1}{1 + \xi_1}. \quad (7.40)$$

Из (7.15) и (7.39) легко получить уравнение, определяющее прямое восхождение (географическую долготу) спутника

$$\lambda - \Omega = \cos i \cdot \sqrt{\frac{p + 2c\delta \sin i}{2c\delta (\xi_1 - \xi_3)}} \left[\frac{1}{1 - \xi_1} \operatorname{II}(\operatorname{am} u, n', k) + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \xi_1} \operatorname{II}(\operatorname{am} u, n'', k) \right]. \quad (7.41)$$

Полученные формулы полностью определяют движение ИСЗ.

Приближенное решение обобщенной задачи двух неподвижных центров имеет ту же структуру, что и решение проблемы Баррара. Это совпадение структуры решения не случайно. Оно обусловлено тем, что при выполненных в процессе построения решения разложениях в ряды мы получили из потенциала задачи двух неподвижных центров потенциал Баррара.

§ 8. Предельный вариант задачи двух неподвижных центров и его применение в небесной баллистике

В прямоугольной планетоцентрической системе координат, ось абсцисс которой направлена в сторону возмущающего тела (рис. 20), потенциал притяжения двух неподвижных центров запишется в виде

$$U = \frac{fm}{r} + \frac{fM}{\sqrt{r^2 - 2cx + c^2}}, \quad (8.1)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а c — расстояние между центрами.

Считая планетоцентрическое расстояние r малым по сравнению с c , разложим потенциал (8.1) в ряд по полиномам Лежандра

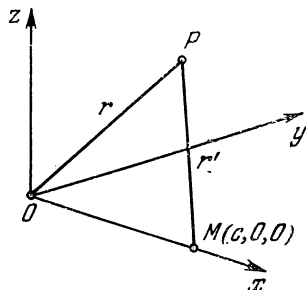
$$U = \frac{fm}{r} + \frac{fM}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^k P_k\left(\frac{x}{r}\right). \quad (8.2)$$

Подобно тому, как это делает Хилл [110], ограничимся первыми членами разложения, т. е. рассмотрим задачу двух неподвижных центров без учета «параллакса» возмущающего тела:

$$U = \frac{fm}{r} + \frac{fM}{c^2} x. \quad (8.3)$$

Рассматриваемое силовое поле состоит из двух наложенных полей: ньютоновского поля тяготения точечной массы и однородного поля.

Интегрирование этой задачи выполняется в параболоидальных координатах (см. § 3 гл. I)



$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}(r+x), \\ q_2 &= \frac{1}{2}(r-x), \\ q_3 &= \arctg \frac{y}{z}. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Рис. 20.

Здесь введены несколько другие параболоидальные координаты, чем в (3.39) гл. I; последние связаны с введенными выше координатами соотношениями

$$\xi\eta = 2\sqrt{q_1q_2}, \quad \xi^2 - \eta^2 = 2(q_1 - q_2), \quad q_3 + \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Внося в формулу (3.40) гл. I соответствующие изменения, для кинетической энергии получим выражение

$$T = \frac{1}{2} \left[(q_1 + q_2) \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \right) + 4\dot{q}_3^2 \right], \quad (8.5)$$

а для силовой функции будем иметь

$$U = \frac{fm}{q_1 + q_2} + \frac{fM}{c^2} (q_1 - q_2). \quad (8.6)$$

Тогда уравнение Гамильтона — Якоби (8.27) гл. I запишется следующим образом:

$$q_1 \left(\frac{\partial V}{\partial q_1} \right)^2 + q_2 \left(\frac{\partial V}{\partial q_2} \right)^2 + \frac{q_1 + q_2}{4q_1q_2} \alpha_3^2 - \\ - 2(q_1 + q_2) \alpha_1 - 2fm \left[1 + \frac{M}{mc^2} (q_1^2 - q_2^2) \right] = 0. \quad (8.7)$$

Его полный интеграл в соответствии с (8.27) гл. I определяется формулой

$$V = -\alpha_1 t + \alpha_3 q_3 + \int \sqrt{2Q(q_1)} \frac{dq_1}{q_1} + \int \sqrt{2P(q_2)} \frac{dq_2}{q_2}, \quad (8.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q(q_1) &= \frac{fM}{c^2} q_1^3 + \alpha_1 q_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 q_1 - \frac{1}{8} \alpha_3^2, \\ P(q_2) &= -\frac{fM}{c^2} q_2^3 + \alpha_1 q_2^2 - \frac{1}{2} (\alpha_2 - fm) q_2 - \frac{1}{8} \alpha_3^2, \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

а α_i — канонические постоянные. Из (8.8) находим общий интеграл задачи

$$\int \frac{q_1 dq_1}{\sqrt{2Q(q_1)}} + \int \frac{q_2 dq_2}{\sqrt{2P(q_2)}} = t - \beta_1, \quad (8.10)$$

$$\int \frac{dq_1}{\sqrt{2Q(q_1)}} - \int \frac{dq_2}{\sqrt{2P(q_2)}} = -2\beta_2, \quad (8.11)$$

$$\frac{\alpha_3}{4} \left[\int \frac{dq_1}{q_1 \sqrt{2Q(q_1)}} + \int \frac{dq_2}{q_2 \sqrt{2P(q_2)}} \right] = q_3 + \beta_3. \quad (8.12)$$

Изложенная трактовка задачи о движении частицы в ньютоновском центральном поле при наличии постоянной возмущающей силы приводится в статье автора [111]. С иных позиций подходит к этой задаче В. В. Белецкий [16], рассматривавший задачу о движении космического аппарата в центральном ньютоновском поле сил при наличии постоянного вектора реактивного ускорения. Тщательное и изящное качественное исследование форм движения в пространственной задаче выполнил А. Л. Куницын [17, 18]. Им же эта задача была применена для определения возмущающего эффекта в движении ИСЗ, вызванного световым давлением Солнца [112]. Другие приложения в небесной баллистике этой задачи можно найти в работах [113, 114].

При построении приближенных решений в задачах астродинамики часто пользуются методикой гравитационных сфер небесных тел [115]. Рассматриваются сферы действия, гравитационные сферы Хилла, сферы тяготения и т. д. Исходя из ограниченной круговой задачи трех тел, М. Д. Кислик [116] ввел понятие сферы влияния, радиус которой примерно в полтора раза более радиуса лапласовой сферы действия. Представляется целесообразным ввести гравитационную сферу, основываясь на исследуемом предельном варианте задачи двух неподвижных центров.

Перейдем теперь к краткому рассмотрению результатов А. Л. Куницына. Наиболее интересен в приложениях класс движений с отрицательной энергией $\alpha_1 < 0$. Характер движения будет зависеть от значений постоянных α_i . Пусть корни уравнений

$$P(q_2) = 0, \quad (8.13)$$

$$Q(q_1) = 0 \quad (8.14)$$

соответственно равны κ , λ , ν и α , β , γ . Они определяют границы области возможности

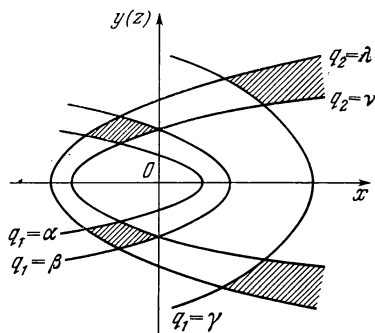


Рис. 21.

движения, изображенные на рис. 21. Из двух возможных типов движения, характеризующихся на рис. 21 заштрихованными областями, рассмотрим тот, который происходит в тороидальной области, образованной пересечением четырех параболоидов. Трактории этого типа лежат в ограниченной части пространства и имеют спутниковый характер.

Как и в § 2, введем независимую переменную τ

$$(q_1 + q_2) d\tau = dt. \quad (8.15)$$

Тогда уравнения (8.10) и (8.11) дадут

$$\int_{q_{10}}^{q_1} \frac{dq_1}{\sqrt{2(q_1 - \gamma)(q_1 - \alpha)(q_1 - \beta)}} = \sqrt{\frac{fM}{c^2}} (\tau - \tau_0), \quad (8.16)$$

$$\int_{q_{20}}^{q_2} \frac{dq_2}{\sqrt{2(q_2 - \kappa)(q_2 - \lambda)(\nu - q_2)}} = \sqrt{\frac{fM}{c^2}} (\tau - \tau_0) \quad (8.17)$$

(здесь приняты начальные условия: при $\tau = \tau_0$, выполняется равенство $q_1 = q_{10}$, $q_2 = q_{20}$).

Затем из (8.12) находим

$$q_3 = \frac{\alpha_3}{4} \int \frac{(q_1 + q_2) d\tau}{q_1 q_2}. \quad (8.18)$$

Приведем эллиптическую квадратуру (8.17) к нормальной лежандровой форме с помощью подстановки

$$q_2 = v - (v - \lambda) \sin^2 \varphi \quad (8.19)$$

и, обращая затем полученный интеграл, получим

$$q_2 = \lambda + (v - \lambda) \operatorname{cn}^2 [(u_2 + u_{20}), k_2], \quad (8.20)$$

где

$$u_2 = m_2 (\tau - \tau_0), \quad m_2 = \sqrt{\frac{fM(v - \kappa)}{2c^2}}, \quad (8.21)$$

а модуль эллиптического интеграла k_2 определяется равенством

$$k_2^2 = \frac{v - \lambda}{v - \kappa}. \quad (8.22)$$

Кроме того, положим

$$u_{20} = F \left(\arcsin \sqrt{\frac{v - q_{20}}{v - \lambda}}, k_2 \right). \quad (8.23)$$

Для преобразования эллиптического интеграла (8.16) воспользуемся подстановкой

$$q_1 = \alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 \varphi \quad (8.24)$$

и далее, обращая эллиптический интеграл, приходим к формуле

$$q_1 = \alpha + (\beta - \alpha) \operatorname{sn}^2 [(u_1 + u_{10}), k_1], \quad (8.25)$$

где

$$u_1 = m_1 (\tau - \tau_0), \quad m_1 = \sqrt{\frac{fm(\gamma - \alpha)}{2c^2}}, \quad (8.26)$$

$$u_{10} = F \left(\arcsin \sqrt{\frac{q_{10} - \alpha}{\beta - \alpha}}, k_1 \right). \quad (8.27)$$

Квадратура (8.18) после соответствующих преобразований принимает вид

$$q_3 = q_{30} + \frac{1}{4} \alpha_3 \left\{ \frac{1}{\alpha m_1} \Pi [\operatorname{am}(u_1 + u_{10}), k_1, n_1] + \right. \\ \left. + \frac{1}{vm_2} \Pi [\operatorname{am}(u_2 + u_{20}), k_2, n_2] \right\}, \quad (8.28)$$

где

$$n_1 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha}, \quad n_2 = \frac{\lambda - v}{v}.$$

Наконец, уравнение времени получаем из (8.15) в форме

$$t - t_0 = (\kappa - \gamma + 2\beta)(\tau - \tau_0) + \frac{\gamma - \alpha}{m_1} \{E[\text{am}(u_1 + u_{10})] - E(\text{am } u_{10})\} + \frac{\nu - \kappa}{m_2} \{E[\text{am}(u_2 + u_{20})] - E(\text{am } u_{20})\}. \quad (8.29)$$

В заключение применим эту задачу к оценке возмущений от светового давления в движении ИСЗ «Эхо-1»*), представляющего собой наддувной баллон, для которого отношение S/M_c площади поперечного сечения S к массе спутника M_c примерно составляет $100 \text{ м}^3 \cdot \text{сек}^2/\text{кг}$. Проведившиеся исследования [117] показали, что за 12 суток полета перигейное расстояние спутника «Эхо-1» за счет светового давления уменьшилось на 42 км. Для использования полученных результатов в решении величину $f M/c^2$ следует заменить на возмущающее ускорение от светового давления μ , определяемого формулой

$$\mu = k p_0 \frac{S}{M_c} \left(\frac{a}{r_c} \right)^2,$$

где k — коэффициент, зависящий от альбедо спутника, p_0 — световое давление солнечной радиации на орбите Земли для абсолютно черного тела ($p_0 = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ кг/м}^2$), a — большая полуось земной орбиты, r_c — расстояние спутника до Солнца. Отсюда при $k = 1$ получим, что $\mu = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ м/сек}^2$.

Принимая $r = 7970 \text{ км}$ и выполняя расчеты, получим зависимость возмущения в радиусе-векторе от полярного угла. Оказывается, что даже на одном витке спутника возмущения радиуса-вектора могут достигать $\sim 0,6 \text{ км}$. Использование орбит предельного варианта задачи двух неподвижных центров в качестве промежуточных не приводит к возникновению вековых возмущений в радиусе-векторе. В то же время использование классического способа вычисления возмущений неизбежно привело бы к вековым членам. В этом и состоит основное преимущество применения в данном случае предельного варианта задачи двух неподвижных центров по сравнению с задачей двух тел.

§ 9. Качественные оценки аппроксимирующих потенциалов

Малость различия истинного и аппроксимирующего потенциалов, строго говоря, не дает достаточных оснований для утверждения о малости отклонений в координатах. Таким образом, вышеприводившиеся утверждения о качестве аппроксимации основываются не на математических, а

*) Результаты расчетов были любезно предоставлены автору А. Л. Куницыным.

на интуитивных соображениях. Сравнение аналитической теории с результатами численного интегрирования уравнений движения приводит к более или менее точным выводам относительно отдельных траекторий, но не приносит выводов о качестве аппроксимации в целом. Обсуждаемая проблема становится особенно сложной, если в гравитационном потенциале планеты учитывать долготные члены.

Тем не менее некоторые представления о качестве аппроксимации по крайней мере по отношению к отдельным координатам можно получить, опираясь на качественные методы анализа. В частности, полезным в этом отношении является способ Хилла, связанный с анализом кривой (или поверхности) нулевой скорости, и метод контактных характеристик, развивавшийся Адамаром [118] и Пуанкаре [119].

Способ Хилла позволяет исследовать устойчивость движения в смысле Лагранжа с помощью интеграла живых сил (или интеграла Якоби). Этот метод применялся неоднократно в плоской круговой задаче трех тел Г. Хиллом [120], Болином [121], Дарвином [122], Н. Д. Моисеевым [123] и др.

Если уравнения движения допускают интеграл живых сил

$$v^2 = 2 [U(x, y, z) + h], \quad (9.1)$$

где U — силовая функция, v — скорость точки, то необходимо рассматривать поверхность

$$U(x, y, z) + h = 0, \quad (9.2)$$

которая называется поверхностью нулевой скорости (или поверхностью Хилла). Так как движение возможно только при

$$U + h \geq 0,$$

то поверхность (9.2) разбивает пространство на область возможности движения ($U + h \geq 0$) и область, где движение невозможно ($U + h < 0$). Если область возможности движения замкнута, то движение будет всегда происходить в этой области, и траектория будет устойчивой по Лагранжу.

Для наших целей можно поставить задачу несколькими образом, а именно исследовать устойчивость по

Лагранжу при наличии постоянно действующих консервативных возмущений, т. е. исследовать вид поверхности нулевой скорости при малом изменении силовой функции.

В задаче о движении частицы в осесимметричном поле сил способ Хилла сводится к следующему. В цилиндрических координатах уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho \dot{\lambda}^2 &= U'_\rho, \\ \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\lambda}) &= 0, \\ \ddot{z} &= U'_z. \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Для упрощения исследований и получения более точных оценок понизим порядок системы (9.3) с помощью интеграла площадей

$$\rho^2 \dot{\lambda} = c. \quad (9.4)$$

В результате придем к системе

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} &= W'_\rho, \\ \ddot{z} &= W'_z, \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

в которой

$$W = U - \frac{c^2}{2\rho^2}, \quad (9.6)$$

а интеграл живых сил принимает вид

$$v^2 = 2(W + h). \quad (9.7)$$

Он определяет на плоскости (ρ, z) кривую нулевой скорости

$$W(\rho, z) + h = 0. \quad (9.8)$$

Подставляя в W вместо U аппроксимирующий или истинный потенциал, получим

$$\frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{R}{r} \right)^k P_k \left(\frac{z}{r} \right) \right] - \frac{c^2}{2\rho^2} + h = 0 \quad (9.9)$$

или

$$\frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{R}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi) \right] - \frac{c^2}{2r^2 \cos^2 \varphi} + h = 0 \quad (9.10)$$

(здесь $\sin \varphi = z/r$).

Для иллюстрации рассмотрим случай, когда все $J_k = 0$, т. е. задачу двух тел. Уравнение (9.10) принимает вид

$$\frac{fM}{r} - \frac{c^2}{2r^2 \cos^2 \varphi} + h = 0, \quad (9.11)$$

откуда

$$r = \frac{-fM \cos \varphi \pm \sqrt{f^2 M^2 \cos^2 \varphi + 2hc^2}}{2h \cos \varphi}. \quad (9.12)$$

Если $h < 0$, то, полагая,

$$\cos i = \frac{c \sqrt{-2h}}{fM}, \quad (9.13)$$

вместо (9.12) будем иметь

$$r = -\frac{fM}{h} (1 \mp \sqrt{1 - \cos^2 i \sec^2 \varphi}). \quad (9.14)$$

Если $J_k \neq 0$, то (9.10) дает

$$r = -\frac{fM}{2h} \left[1 + \Phi \pm \sqrt{(1 + \Phi)^2 + \frac{2hc^2}{f^2 M^2 \cos^2 \varphi}} \right], \quad (9.15)$$

где

$$\Phi = \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{R}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi). \quad (9.16)$$

Придавая J_k интересующие нас значения, получим области возможности движения, по которым можно судить о некоторых свойствах движения.

Перейдем ко второму способу качественного исследования, предложенному А. Пуанкаре [119] для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка и основанному на исследовании взаимного поведения интегральных кривых и кривых однопараметрического («топографического») семейства

$$\dot{f}(x, y) = d. \quad (9.17)$$

Адамар [118] применил этот способ к динамическим системам вида

$$\ddot{x} = U'_x, \quad \ddot{y} = U'_y. \quad (9.18)$$

Н. Д. Моисеев обобщил его на случай необратимых динамических проблем [123].

Рассмотрим сначала систему (9.18), предполагая существование интеграла живых сил

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(U + h). \quad (9.19)$$

Дополнительно к сказанному будем предполагать, что уравнение (9.17) определяет d как положительную, однозначную и непрерывную функцию x, y . Пусть теперь имеем некоторое изоэнергетическое семейство траекторий системы (9.18) (т. е. семейство траекторий с фиксированным значением h). Среди интегральных кривых, проходящих через точку $P(x_0, y_0)$, найдется по крайней мере две, которые в точке P касаются кривой

$$f(x, y) = f(x_0, y_0). \quad (9.20)$$

Условие контакта интегральной и топографической кривых (9.20) записывается в виде

$$\dot{f} = f'_x \dot{x} + f'_y \dot{y} = 0. \quad (9.21)$$

Если дифференциальный элемент орбиты целиком лежит внутри кривой (9.20), то имеет место внутренний контакт. Если дифференциальный элемент орбиты лежит вне кривой (9.20), то контакт называется внешним. Если, наконец, дифференциальные элементы обеих кривых совпадают, то соприкосновение имеет высший порядок. Характер контакта зависит от знака $\ddot{f}$: при внутреннем контакте $\ddot{f} < 0$, а при наружном — $\ddot{f} > 0$. Для $\ddot{f}$ с учетом интеграла живых сил можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \ddot{f} = [2(U + h)(f''_{xx}f'_y - 2f''_{xy}f'_x f'_y + f''_{yy}f'^2_x) + \\ + (f'^2_x + f'^2_y)(f'_x U'_x + f'_y U'_y)]. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Очевидно, что кривая

$$\ddot{f} = 0 \quad (9.23)$$

представляет собой границу, отделяющую область наружных контактов от области внутренних контактов.

Для исследования спутниковых задач выгодно пользоваться уравнениями в форме (9.5), если в качестве топографического семейства принята система концентрических окружностей

$$f(\rho, z) = \rho^2 + z^2 = r^2 = d^2. \quad (9.24)$$

Если топографическим является семейство эллипсов, то применение эллиптических координат упрощает исследование.

В качестве примера возьмем топографическое семейство окружностей (9.24) на плоскости (ρ, z) (на самом деле здесь мы имеем топографическое семейство сфер). Так как

$$f'_\rho = 2\rho, \quad f'_z = 2z, \quad f''_{\rho\rho} = f''_{zz} = 2, \quad f''_{\rho z} = 0,$$

то для характеристики контактов получим

$$\ddot{f} = 4(U + h) + 2(\rho U'_\rho + z U'_z). \quad (9.25)$$

Эта кривая будет разделять область внутренних контактов от области наружных контактов. С ее помощью можно разделить область перицентров от области апоцентров. Повидимому, было бы полезным исследовать характеристику контактов в задаче о движении спутника «трехосной» планеты в ее экваториальной плоскости.

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ФОРМ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА СФЕРОИДАЛЬНОЙ ПЛАНЕТЫ

§ 1. Движения эллиптического типа

Качественный анализ возможных форм движения был выполнен в работах Е. П. Аксенова, Е. А. Гребеникова и В. Г. Демина [86, 87, 88, 89] для случая $\delta = 0$, т. е. без учета асимметрии Земли относительно экваториальной плоскости. В общем случае типы движения частично анализировал Ю. И. Иванов [124]. Один класс движений был рассмотрен Фам Ван Чи [125]. Генеалогия решений изящно исследована В. М. Алексеевым [31].

Здесь мы займемся анализом в случае $\delta = 0$. Все формы движения в рассматриваемой задаче можно разделить на три класса в зависимости от знака постоянной h — величины полной механической энергии. Движения при $h < 0$ назовем эллиптическими. Движения, соответствующие $h > 0$, будем относить к классу гиперболических движений. Класс параболических движений составляют траектории, для которых $h = 0$.

Предложенная терминология соответствует типам движения в задаче двух тел. Ее целесообразность обусловлена тем, что при $c = \delta = 0$ уравнения движения обращаются в дифференциальные уравнения относительного движения задачи двух тел. И в этом случае движения, отнесенные к первому классу, будут происходить по кеплеровским эллипсам, траектории второго класса обратятся в гиперболы, а траектории третьего класса — в параболы.

Некоторые из траекторий этой задачи целиком расположены внутри Земли. Они не представляют практической ценности и поэтому из рассмотрения исключены. Движения, происходящие по траекториям, хотя бы частично выходящим за пределы земной поверхности, будем называть реальными. Если траектория располагается целиком вне земной поверхности и притом в ограниченной части пространства, то соответствующее ей движение будем имено-

вать спутниковым. Ограниченные траектории, частично лежащие внутри Земли, назовем баллистическими.

Для удобства введем обозначение $-h_1 c^2 = h$. Тогда с учетом сделанного выше замечания вместо формул (6.62) и (6.63) гл. III будем иметь

$$\mu'^2 = 2h_1\mu^4 + 2(c_2 - h_1)\mu^2 - (2c_2 + c_1^2), \quad (1.1)$$

$$\lambda'^2 = -2h_1\lambda^4 - \frac{2fM}{c^3}\lambda^3 + 2(c_2 - h_1)\lambda^2 - \frac{2fM}{c^3}\lambda + 2c_2 + c_1^2, \quad (1.2)$$

$$\omega'^2 = \frac{c_1(\lambda^2 + \mu^2)}{(1 - \mu^2)(\lambda^2 + 1)}, \quad (1.3)$$

где $\lambda = -\operatorname{sh} v$, $\mu = \cos u$.

1. *Исследование координаты μ .* Характер решения уравнения (1.1) для координаты μ зависит от корней многочлена

$$f(\mu) = 2h_1\mu^4 + 2(c_2 - h_1)\mu^2 - (2c_2 + c_1^2), \quad (1.4)$$

определяемых формулой

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{h_1 - c_2 \pm \sqrt{(h_1 + c_2)^2 + 2h_1c_1^2}}{2h_1}}. \quad (1.5)$$

Обозначим эти корни через $\pm\mu_1$ и $\pm\mu_2$. Дискриминант

$$\Delta = (h_1 + c_2)^2 + 2h_1c_1^2$$

при $h_1 > 0$ всегда неотрицателен. Поэтому из четырех корней многочлена $f(\mu)$ по меньшей мере два (для определенности обозначим их через $\pm\mu_1$) действительны, причем

$$|\mu_1| \geq 1. \quad (1.6)$$

В зависимости от величин других корней $\pm\mu_2$ может иметь место ряд случаев:

- а) корни $\pm\mu_2$ — комплексные,
- б) корни $\pm\mu_2$ — действительные, по модулю большие единицы,
- в) корни $\pm\mu_2$ — действительные, по модулю меньшие единицы,
- г) $\mu_2 = 0$,
- д) корни $\pm\mu_2$ — действительные, причем $|\mu_2| = 1$,
- е) $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$.

Из соотношений (1.3) и (1.4) видно, что область допустимых значений μ , которым соответствуют реальные движения, определяется неравенством

$$f(\mu) \geq 0. \quad (1.7)$$

В случае а) многочлен $f(\mu)$ удовлетворяет условию (1.7) при $|\mu| \geq |\mu_1| > 1$, что невозможно, так как в силу (6.61) гл. III $|\mu| \leq 1$. Поэтому случай а) рассматривать смысла не имеет. Случай б) также отпадает, так как неравенство $|\mu_2| > 1$ приводит к условию $2h_1c_1^2 < 0$, которое противоречит предположению о принадлежности орбиты к эллиптическому классу. В случае г) $z = 0$, т. е. движение происходит в экваториальной плоскости. Случай д) осуществляется при $c_1 = 0$. Но тогда из (1.3) вытекает, что ω сохраняет постоянное значение, и движение происходит в меридиональной плоскости. Этот случай будет подробно исследован в одном из следующих параграфов. Что касается случая г), то его нет необходимости рассматривать в рамках обобщенной задачи двух неподвижных центров, так как могут быть проинтегрированы и точные уравнения движения ИСЗ в экваториальной плоскости (см. В. В. Белецкий [126, 127]). Случай е) может иметь место при $c_1 = 0$, $h_1 = -c_2$, и, стало быть, здесь также существуют меридиональные орбиты.

В случае в) из условия $0 < |\mu_1| < 1$ вытекает неравенство

$$2c_2 + c_1^2 < 0, \quad (1.8)$$

которое позднее будет использовано для анализа изменения эллиптической координаты λ .

Итак, движения ИСЗ по траекториям двойкой кривизны возможны лишь в случае в). Представляя $f(\mu)$ в виде

$$f(\mu) = 2h_1(\mu^2 - \mu_1^2)(\mu^2 - \mu_2^2), \quad (1.9)$$

преобразуем уравнение (1.1) к следующей форме:

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - \mu_1^2)(\mu^2 - \mu_2^2)}} = \sqrt{2h_1}(\tau + c_3). \quad (1.10)$$

Обращая эллиптический интеграл (1.10), получаем явное выражение для μ в функции от регуляризованного

времени

$$\mu = \mu_2 \operatorname{sn} \sigma (\tau - \tau_0), \quad (1.11)$$

где через τ_0 обозначена постоянная интегрирования, а σ определяется формулой

$$\sigma = \mu_1 \sqrt{2h_1}. \quad (1.12)$$

Модуль функции Якоби равен

$$k = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (1.13)$$

2. *Исследование координаты λ .* Обозначим полином в правой части формулы (1.2) через $\psi(\lambda)$, так что

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) = & -2h_1\lambda^4 - \frac{2fM}{c^3}\lambda^3 + 2(c_2 - h_1)\lambda^2 - \\ & - \frac{2fM}{c^3}\lambda + (2c_2 + c_1^2), \end{aligned} \quad (1.14)$$

и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ суть корни этого многочлена.

Согласно неравенству (1.8) все коэффициенты полинома (1.14) отрицательны и, следовательно, все его действительные корни также отрицательны. В зависимости от соотношений между коэффициентами могут представиться следующие случаи:

$$a) \psi(\lambda) \text{ имеет только комплексные корни,} \quad (1.15)$$

$$b) \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < 0, \quad (1.16)$$

$$c) \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < 0, \quad (1.17)$$

$$d) \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < 0, \quad (1.18)$$

$$e) \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < 0, \quad (1.19)$$

$$f) \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4 < 0, \quad (1.20)$$

$$g) \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < 0, \quad (1.21)$$

$$h) \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < 0, \quad (1.22)$$

$$i) \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4 < 0, \quad (1.23)$$

$$j) \lambda_1 = \lambda_2 < 0, \lambda_3, \lambda_4 \text{ — комплексные,} \quad (1.24)$$

$$k) \lambda_1 < \lambda_2 < 0, \lambda_3, \lambda_4 \text{ — комплексные.} \quad (1.25)$$

Как будет далее видно, в некоторых из указанных случаев реальные движения невозможны. С целью выявления этих случаев установим критерий существования реальных

движений. Из формул преобразования (6.39) гл. III можно получить (см. также (3.20) гл. I)

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2(1 + \lambda^2)} + \frac{z^2}{c^2\lambda^2} = 1,$$

откуда после несложных оценок получаем

$$c^2(1 + \lambda^2) > R^2, \quad (1.26)$$

где R — полярный радиус Земли. Подставляя значение c из таблицы 3 § 6 гл. III в последнее неравенство, приходим к следующему критерию существования реальных движений:

$$|\lambda| > 30. \quad (1.27)$$

Для удобства анализа введем вместо (1.14) полином

$$\varphi(\lambda) = \lambda^4 + \bar{a}\lambda^3 + \bar{b}\lambda^2 + \bar{c}\lambda + \bar{d}, \quad (1.28)$$

имеющий те же самые корни, что и $\psi(\lambda)$. Его коэффициенты равны

$$\bar{a} = \frac{fM}{h_1 c^3}, \quad \bar{b} = 1 - \frac{c_2}{h_1}, \quad \bar{c} = \frac{fM}{h_1 c^3}, \quad \bar{d} = -\frac{2c_2 + c_1^2}{2h_1}. \quad (1.29)$$

Эти коэффициенты для орбит двоякой кривизны эллиптического класса положительны и в силу (1.8) выполняется неравенство

$$\bar{b} > \bar{a} + 1. \quad (1.30)$$

Подробно разберем различные случаи.

С л у ч а й а). Реальные движения отсутствуют, ибо здесь $\psi(\lambda) < 0$.

С л у ч а й б). $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < 0$. Как легко видеть, движения должны происходить на эллипсоиде

$$\lambda = \lambda_1. \quad (1.31)$$

Но, приняв во внимание равенство коэффициентов при λ^3 и λ в полиноме (1.26), при помощи теоремы Виета находим

$$\lambda_1^3 = \lambda_1, \quad (1.32)$$

откуда следует, что λ_1 может принимать значения $-1, 0, +1$. Такие значения λ не удовлетворяют критерию (1.27). Стало быть, случай *b*) отпадает.

С л у ч а й *c*). $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < 0$. Теорема Виета дает

$$\left. \begin{aligned} 3\lambda_1 + \lambda_4 &= -\bar{a}, \\ \lambda_1^3 + 3\lambda_1^2\lambda_4 &= -\bar{a}, \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

откуда следует, что

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1 - 3\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 3}. \quad (1.34)$$

Из условия отрицательности всех корней $\varphi(\lambda)$ получаем неравенство

$$\frac{1 - 3\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 3} > 0, \quad (1.35)$$

решение которого дает

$$-\sqrt{3} < \lambda_1 < -\frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (1.36)$$

Так как область изменения координаты λ определяется неравенством $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_4$, то λ не превосходит $\sqrt{3}$, а это условие противоречит критерию существования (1.27). Таким образом, рассматриваемый случай также отпадает.

С л у ч а й *d*). Сначала покажем, что два корня полинома $\varphi(\lambda)$ принадлежат интервалу $(-1, 0)$. Составляя систему Штурма [128] для полинома $\varphi(\lambda)$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 4\lambda^3 + 3\bar{a}\lambda^2 + 2\bar{b}\lambda + \bar{a}, \\ \varphi_2 &= a_2\lambda^2 + b_2\lambda + d_2, \\ \varphi_3 &= a_3\lambda + b_3, \\ \varphi_4 &= a_4. \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

где коэффициенты a_i, b_i, d_i равны

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{16}(3\bar{a}^2 - 8\bar{b}), \quad b_2 = \frac{1}{8}\bar{a}(\bar{b} - 6), \quad d_2 = \frac{1}{16}(\bar{a}^2 - 16\bar{d}), \\ a_3 &= 8\bar{a}_2^{-2}(-3\bar{a}^4 + \bar{a}^2\bar{b}^2 + 14\bar{a}^2\bar{b} - 18\bar{a}^2 - 4\bar{b}^3 - 6\bar{a}^2\bar{d} + 16\bar{b}\bar{d}), \\ b_3 &= 16\bar{a}_2^{-2}(\bar{a}^3\bar{b} + 3\bar{a}^3 - 9\bar{a}^3\bar{d} + 32\bar{a}\bar{b}\bar{d} - 48\bar{a}\bar{d} - 4\bar{a}\bar{b}^2), \\ a_4 &= \bar{a}_3^{-3}(a_3b_2b_3 - \bar{a}_3^2d_2 - a_2b_3^2), \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

с помощью теоремы Штурма заключаем, что все корни полинома $\Phi(\lambda)$ действительны и различны при условии

$$a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0. \quad (1.39)$$

Неравенства (1.39) с учетом (1.38) при переходе к полярным координатам $\bar{a} = r' \cos \varphi'$, $\bar{b} = r' \sin \varphi'$ преобразуются к следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 3r'^2 \cos^2 \varphi' - 8r' \sin \varphi' > 0, \\ a_3 &= \sum_{k=0}^9 b_k(\varphi') r'^k + b_0(\varphi') r'^{10} > 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

причем коэффициенты, необходимые в последующем анализе, равны

$$\left. \begin{aligned} a_0(\varphi') &= \cos^2 \varphi' (1 - 4 \cos^2 \varphi'), \\ b_0(\varphi') &= 9 \cos^8 \varphi' (1 - 5 \cos^2 \varphi'). \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

Если r' достаточно велико, то при

$$a_0(\varphi') > 0, \quad b_0(\varphi') > 0 \quad (1.42)$$

неравенства (1.40), а значит и (1.39), выполняются. В свою очередь неравенства (1.42) также можно удовлетворить, если постоянные $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выбрать из условия

$$\operatorname{arctg} 2 < \varphi' < \frac{\pi}{2}. \quad (1.43)$$

Но из (1.38) и (1.27) видим, что всегда можно выбрать начальные условия так, чтобы постоянные интегрирования h и c_2 обеспечивали бы выполнение неравенства (1.43). Следовательно, рассматриваемому случаю действительно соответствуют реальные движения. Более того, в силу теоремы о верхней границе модулей корней многочленов [128] при соответствующем выборе значений полной энергии и постоянной площадей модули корней λ_i могут принимать произвольно большие значения. Теперь остается только выяснить, возможны ли в случае *d*) спутниковые орбиты.

С этой целью перейдем к оценке интервала, на котором заключены корни λ_3 и λ_4 . Применим теорему Бюдана — Фурье [128] на интервале $(-1, 0)$. Вычисляя последовательно производные от $\Phi(\lambda)$ до четвертого порядка включительно,

найдем, что при $\lambda = 0$

$$\varphi(0) = 0, \varphi'(0) > 0, \varphi''(0) > 0, \varphi'''(0) > 0, \varphi^{IV}(0) > 0.$$

Если $\lambda = -1$, то необходимо, чтобы $\varphi(-1) > 0$, так как в противном случае не будет выполнено условие (1.43). Для реальных движений, кроме того, должно быть $\varphi'''(-1) > 0$, т. е. $\bar{a} > 4$, ибо при противоположном смысле неравенства ($\varphi'''(-1) < 0$) мы бы имели $\bar{a} < 4$, $\bar{b} < 6$, $\bar{d} < 5$, что противоречило бы критерию существования реальных орбит. Отпадает также случай, в котором функция $\varphi(\lambda)$ и ее четыре производные до четвертого порядка при $\lambda = -1$ положительны, так как и здесь оказывается $\bar{a} < 6$, что невозможно в силу (1.27). Имеем, следовательно,

Т а б л и ц а 4

$\varphi(-1)$	+	+	+
$\varphi'(-1)$	+	—	—
$\varphi''(-1)$	—	—	+
$\varphi'''(-1)$	+	+	+
$\varphi^{IV}(-1)$	+	+	+

один из вариантов, указанных в таблице 4. Проверяя соответствующие неравенства, обнаруживаем, что все три варианта возможны. Итак, корни λ_3 и λ_4 действительно располагаются на интервале $(-1, 0)$.

Процесс получения уравнения, дающего явное выражение координаты λ через τ , происходит в следующем порядке. Интегрируя (1.2) и обращая получающийся эллиптический интеграл (учитывая, конечно, при этом соотношения между корнями λ_i), для сфероидальной координаты λ будем иметь

$$\lambda = \frac{A + B \operatorname{sn}^2 \sigma_1 (\tau - \tau_1)}{C + D \operatorname{sn}^2 \sigma_1 (\tau - \tau_1)}, \quad (1.44)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} A &= (\lambda_3 - \lambda_1) \lambda_2, & B &= (\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_3, \\ C &= \lambda_3 - \lambda_1, & D &= \lambda_1 - \lambda_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{0,5h(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}. \quad (1.46)$$

Модуль функции Якоби определяется из формулы

$$k_1^2 = \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}. \quad (1.47)$$

Наконец, для координаты w посредством квадратуры получаем

$$w = c_5 + c_1 \int \frac{(\lambda^2 + \mu^2) d\tau}{(1 - \mu^2)(1 + \lambda^2)} \quad (1.48)$$

или в несколько иной записи

$$w = c_5 + c_1 I_1 - c_1 I_2, \quad (1.49)$$

где обозначено

$$I_1 = \int \frac{d\tau}{1 - \mu^2}, \quad (1.50)$$

$$I_2 = \int \frac{d\tau}{1 + \lambda^2}. \quad (1.51)$$

В исследуемом и всех других случаях орбит эллиптического класса интеграл (1.50), являющийся эллиптическим интегралом третьего рода, преобразуется одинаковым образом. В результате преобразований можно получить следующее представление для этого интеграла:

$$I_1 = \frac{1}{\sigma} \Pi(\varphi, k, n), \quad (1.52)$$

где $\Pi(\varphi, k, n)$ обозначает нормальную лежандрову форму эллиптического интеграла третьего рода, а

$$\varphi = \alpha n \sigma(\tau - \tau_0), \quad (1.53)$$

$$n = -\mu_2^2. \quad (1.54)$$

Полагая затем $x = \operatorname{sn} \sigma_1(\tau - \tau_1)$, интеграл (1.51) представим в виде

$$I_2 = \frac{\tau}{1 + \lambda_3^2} + \int_0^x \frac{(a_0 x^2 + a_1) dx}{(b_0 x^4 + b_1 x^2 + b_2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k_1^2 x^2)}}, \quad (1.55)$$

причем для коэффициентов a_i, b_i имеем

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2BD(BC - AD)}{\sigma_1(B^2 + D^2)}, & a_1 &= \frac{B^2 C^2 - A^2 D^2}{\sigma_1(B^2 + D^2)}, \\ b_0 &= B^2 + D^2, & b_1 &= 2(AB + CD), \\ b_2 &= A^2 + C^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

Интеграл в формуле (1.55) можно выразить через два эллиптических интеграла третьего рода с комплексно-сопряженными параметрами, которые в свою очередь можно преобразовать к эллиптическим интегралам третьего рода с действительными параметрами [129].

При расчетах можно использовать форму (1.55) или, что намного проще, воспользоваться быстро сходящимися разложениями эллиптических функций и интегралов в ряды (быстрая сходимость в случае спутниковых движений обеспечивается малостью модулей эллиптических функций). Такие представления координат давались И. Иззаком [130] и Е. П. Аксеновым [131—134].

Здесь же мы укажем лишь вид окончательных выражений, не приводя полных выражений для всех коэффициентов. Преобразование Уэля [135] (см. также [129]) дает

$$I_2 = \frac{\tau}{1 + \lambda_3^2} + l_1 L_1 + l_2 L_2, \quad (1.57)$$

где функции L_1 и L_2 имеют вид

$$L_i = \int \frac{dx}{h_i x^2 + 1} - \frac{1}{g_i} \mathbf{F} [\operatorname{am} \sigma_1(\tau - \tau_1)] - \\ - Q_i \mathbf{\Pi} [\operatorname{am} \sigma_1(\tau - \tau_1), k, n_i] \quad (i = 1, 2), \quad (1.58)$$

причем величины l_1 , l_2 , g_i , n_i , Q_i выражаются через постоянные, определяемые формулами (1.56).

Итак, окончательно для прямого восхождения имеем

$$w = c_5 - \frac{c_1 \tau}{1 + \lambda_3^2} + \frac{c_1}{\sigma} \mathbf{\Pi}(\varphi, k, n) - c_1 l_1 L_1 - c_1 l_2 L_2. \quad (1.59)$$

Уравнение времени, дающее связь между истинным и регуляризованным временем, принимает вид

$$t = c_6 + (\mu_1^2 + \lambda_3^2) \tau - \frac{\mu_1^2}{\sigma} \mathbf{E}(\varphi, k) + l_1 \bar{L}_1 + l_2 \bar{L}_2, \quad (1.60)$$

где $\mathbf{E}(\varphi, k)$, как и ранее, эллиптический интеграл второго рода, а функции L_1 и L_2 даются формулами вида (1.58).

В случае d) орбита располагается между двумя софокусными эллипсоидами $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ вне гиперboloида $\mu = \mu_2$ (рис. 22). Если $|\lambda_2| < 30$, то орбиты будут баллистическими, так как внутренний эллипсоид расположен внутри Земли (интересно сравнить со случаем e). Спутниковые траектории последовательно касаются граничных эллипсоидов. Точки касания будут давать на отдельных витках «относительные» перицентры и апоцентры. Заметим также, что согласно § 10 гл. I и § 6 гл. III движения будут условно-периодическими. Если притом простые периоды будут несоизмеримы, то траектория повсюду плотно будет

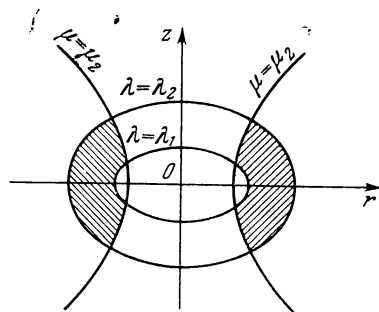


Рис. 22.

заполнять область возможности движения, указанную на рис. 22.

С л у ч а й e). Здесь по теореме Виета

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 &= -\bar{a}, \\ 3\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_2^2 &= \bar{b}, \\ 3\lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_2^2 &= -\bar{a}, \\ \lambda_1\lambda_2^3 &= \bar{d}. \end{aligned} \right\} (1.61)$$

Из первого и третьего соотношений (1.61) следует, что реальные движения существуют, если

$$\frac{\lambda_2(\lambda_2^2 - 3)}{1 - 3\lambda_2^2} < -30. \quad (1.62)$$

Эти неравенства удовлетворяются при

$$0,56 < \lambda_2 < 0,58, \quad \lambda_2 > 90,5.$$

Но так как λ_2 должно быть отрицательным, то $-0,59 < \lambda_2 < -0,58$. Для таких значений λ_2 выполняется неравенство

$$\bar{b} > \bar{d} + 1.$$

Стало быть, в случае e) возможны лишь баллистические траектории. Можно показать, что параметрические

уравнения орбиты имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \mu_2 \operatorname{sn} \sigma(\tau - \tau_0), \\ \lambda &= \lambda_2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + \frac{h_1}{2}(\tau - \tau_1)^2}, \\ \omega &= c_5 - c_1 \tau + \frac{c_1}{\sigma} \Pi[\operatorname{am} \sigma(\tau - \tau_0), k, n] - \frac{2c_1}{(\lambda_2 - \lambda_1) \sqrt{2h_1}} \times \\ &\quad \times \left[\frac{M_1}{2} \ln \frac{(u-p)^2 + q^2}{(u+p)^2 + q^2} + \frac{M_1 p + N_1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2qu}{p^2 + q^2 - u^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

где введены обозначения

$$u = \sqrt{\frac{h_1}{2}}(\tau - \tau_1), \quad (1.64)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{2p(1 + \lambda_2^2)} - \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{4p \sqrt{1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2}}, \\ N_1 &= \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\sqrt{1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2} - 1 - \lambda_1 \lambda_2}{2(1 + \lambda_2^2)}}, \\ q &= \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2} + 1 + \lambda_1 \lambda_2}{2(1 + \lambda_2^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

Уравнение времени запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} t &= c_6 + (\mu_1^2 + \lambda_2^2) \tau + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 (\tau - \tau_1)}{2(u^2 + 1)} - \\ &\quad - \frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{\sqrt{2h_1}} \operatorname{arctg} u - \frac{\mu_1^2}{\sigma} E[\operatorname{am} \sigma(\tau - \tau_0), k]. \end{aligned} \quad (1.67)$$

С л у ч а й *f*). Для движений этого типа эллипсоид $\lambda = \lambda_3$ целиком располагается внутри Земли. Движения возможны лишь на поверхности эллипсоида $\lambda = \lambda_1$. Из

теоремы Виета следует, что

$$\left. \begin{aligned} 2(\lambda_1 + \lambda_3) &= -\bar{a}, \\ \lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2 &= \bar{b}, \\ 2\lambda_1\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_3) &= -\bar{a}, \\ \lambda_1^2\lambda_3^2 &= \bar{d}. \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

Из первого и третьего соотношений (1.68) находим

$$\lambda_1\lambda_3 = 1. \quad (1.69)$$

Так как $\lambda_1 \leq -30$, то $-\frac{1}{30} \leq \lambda_3 < 0$, т. е. эллипсоид $\lambda = \lambda_3$ лежит внутри Земли. Из (1.68) и (1.69) вытекает, что $\bar{d} = 1$. Тогда из второго соотношения (1.68) будем иметь $\bar{b} > 4$. Отсюда нетрудно заключить о возможности движений на эллипсоиде $\lambda = \lambda_1$. Обращение квадратур приводит к следующим зависимостям координат от регуляризованного времени:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \mu_2 \operatorname{sn} \sigma(\tau - \tau_0), \\ \lambda &= \lambda_1, \\ w &= c_5 - \frac{c_1}{1 + \lambda_1^2} \tau + \frac{c_1}{\sigma} \Pi[\operatorname{am} \sigma(\tau - \tau_0), k, n], \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

а регуляризованное время τ как функция t определяется трансцендентным уравнением

$$t = c_6 + (\mu_1^2 + \lambda_1^2) \tau + \frac{\mu_1^2}{\sigma} E[\operatorname{am} \sigma(\tau - \tau_0), k]. \quad (1.71)$$

С л у ч а й g). Так как $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < 0$, то по теореме Виета

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 &= -\bar{a}, \\ \lambda_1^2 + 2\lambda_1(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\lambda_4 &= \bar{b}, \\ \lambda_1^2(\lambda_3 + \lambda_4) + 2\lambda_1\lambda_3\lambda_4 &= -\bar{a}, \\ \lambda_1^2\lambda_3\lambda_4 &= d. \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

Из соотношений (1.72) находим

$$\lambda_3 + \lambda_4 = \frac{2\lambda_1}{1 - \lambda_1^2} (\lambda_3 \lambda_4 - 1). \quad (1.73)$$

Так как в реальных движениях $\lambda_1 < -30$, то из (1.73) следует, что

$$\frac{2\lambda_1}{1 - \lambda_1^2} > 0$$

и, кроме того,

$$\max_{\lambda_1 < -30} \left| \frac{2\lambda_1}{1 - \lambda_1^2} \right| \approx \frac{1}{15}. \quad (1.74)$$

С помощью (1.73) и (1.74) находим

$$0 < \lambda_3 \lambda_4 < 1. \quad (1.75)$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|\lambda_3 + \lambda_4| < 1. \quad (1.76)$$

Этот результат геометрически можно интерпретировать следующим образом: эллипсоид $\lambda = \lambda_1$ расположен вне земной поверхности, а эллипсоиды $\lambda = \lambda_3$ и $\lambda = \lambda_4$ целиком лежат внутри Земли. Для рассматриваемого случая неравенство (1.30) можно преобразовать к виду

$$\frac{1 - \lambda_1^2}{2\lambda_1} > \frac{2\lambda_1}{1 - \lambda_1^2}. \quad (1.77)$$

Но последнее неравенство при $\lambda_1 < -30$ всегда выполняется.

Таким образом, этот тип движения возможен. Формулы для эллипсоидальных координат имеют такую же структуру, как и в предыдущем случае. Несколько иной вид имеют лишь коэффициенты, входящие в формулы.

С л у ч а й *h*). Как уже отмечалось, в этом типе движения $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < 0$. Зависимость между коэффициентами многочлена $\varphi(\lambda)$ и его корнями дается

соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 &= -\bar{a}, \\ 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda_4 + \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_4 &= \bar{b}, \\ \lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_2^2\lambda_4 &= -\bar{a}, \\ \lambda_1\lambda_2^2\lambda_4 &= \bar{d}. \end{aligned} \right\} \quad (1.78)$$

Из этих соотношений можно вывести

$$\lambda_1 + \lambda_4 = \frac{2\lambda_2(\lambda_1\lambda_4 - 1)}{1 - \lambda_2^2}, \quad (1.79)$$

откуда, принимая во внимание условие (1.30), получаем

$$(\lambda_2^2 - 1)(\lambda_1\lambda_4 - 1) < 2\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_4). \quad (1.80)$$

Покажем, что в рассматриваемом типе движения возможны только баллистические траектории. Если предположить противное, то должно выполняться либо неравенство $\lambda_4 < -30$, либо по крайней мере неравенство $\lambda_2 < -30$. Если имеет место первое из этих неравенств, то тогда корни λ_1 и λ_2 тем более будут меньше -30 . Но в таком случае должно быть $2\lambda_2(1 - \lambda_2^2) > 0$ и $\lambda_1\lambda_4 - 1 > 0$, что невозможно. Действительно, если последние неравенства имеют место, то правая часть (1.79) положительна, но в силу отрицательности корней λ_1 и λ_4 левая часть (1.79) оказывается отрицательной. Следовательно, предположение, что $\lambda_4 < -30$, ошибочно. Предположим теперь, что $\lambda_2 < -30$, а $-30 < \lambda_4 < 0$. Тогда должно быть

$$0 < \frac{30\lambda_2}{1 - \lambda_2^2} < 1. \quad (1.81)$$

Соотношения (1.79) и (1.80) могут выполняться только в том случае, если $\lambda_1\lambda_4 - 1 < 0$. Отсюда вытекает, что

$$30\lambda_2(1 - \lambda_1\lambda_4) < 1 - \lambda_2^2.$$

Но в таком случае должно иметь место неравенство $|\lambda_1 + \lambda_4| < \frac{1}{15}$, что невозможно, так как $\lambda_1 < -30$, $\lambda_2 < -30$. Итак, если в рассматриваемом случае возможны

реальные движения, то они будут происходить по баллистическим траекториям.

Покажем теперь, что при определенных начальных условиях движения этого типа действительно имеют место. Из (1.79) находим

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_4 (\lambda_2^2 - 1) - 2\lambda_2}{1 - \lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_4}. \quad (1.82)$$

Отсюда видим, что при малых по модулю отрицательных значениях λ_4 и при отрицательных и близких по модулю к единице значениях λ_2 для λ_1 получаем значения, меньшие -30 . Нетрудно показать, что неравенство (1.80) также удовлетворяется.

Таким образом, в рассматриваемом случае движение происходит между поверхностью Земли и эллипсоидом $\lambda = \lambda_1$. Формулы для эллипсоидальных координат имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \mu_2 \operatorname{sn} \sigma (\tau - \tau_0), \\ \lambda &= \frac{\lambda_4 (\lambda_2 - \lambda_1) (1 - e'')^2 + \lambda_1 (\lambda_4 - \lambda_2) (1 + e'')^2}{(\lambda_2 - \lambda_1) (1 - e'')^2 + (\lambda_4 - \lambda_2) (1 + e'')^2}, \\ w &= c_4 + \frac{Ac_1}{a_1} \tau + \frac{c_1}{\sigma} \Pi [\operatorname{am} \sigma (\tau - \tau_0), k, n] - \\ &- \frac{c_1}{a_1 \sqrt{2h_1 (\lambda_2 - \lambda_1) (\lambda_4 - \lambda_2)}} \left\{ \frac{M_1}{2} \ln [(e'' - m_1)^2 + n_1^2] + \right. \\ &+ \frac{M_2}{2} \ln [(e'' - m_2)^2 + n_2^2] + \frac{M_1 m_1 + N_1}{n_1} \operatorname{arctg} \frac{e'' - m_1}{n_1} + \\ &\left. + \frac{M_2 m_2 + N_2}{n_2} \operatorname{arctg} \frac{e'' - m_2}{n_2} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (1.83)$$

где

$$u = \sqrt{2h_1 (\lambda_4 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_1)} (\tau - \tau_1), \quad (1.84)$$

а m_1, m_2, n_1, n_2 суть действительные и мнимые части корней уравнения

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad (1.85)$$

в котором

$$\begin{aligned}a_2 &= 6 - 4\bar{a}^2 + 6\bar{a}^4 + 6\lambda_4^2 - 4\bar{a}^2\lambda_1\lambda_4 + 6\bar{a}^4\lambda_1^2, \\a_3 &= -4 + 4\bar{a}^2 - 4\lambda_4^2 + 4\bar{a}^4\lambda_1^2, \\a_4 &= (1 - \bar{a}^2)^2 + (\lambda_4 + a^2\lambda_1)^2.\end{aligned}$$

Постоянные A , M_1 , M_2 , N_1 , N_2 даются формулами

$$\left. \begin{aligned}A + M_1 + M_2 &= (1 + \bar{a}^2)^2, \\-2(m_1 + m_2)A - 2m_2M_1 - 2m_1M_2 + N_1 + N_2 &= \\&= 4(\bar{a}^4 - 1), \\(m_1^2 + m_2^2 + 4m_1m_2 + n_1^2 + n_2^2)A + (m_2^2 + n_2^2)M_1 + \\+ (m_1^2 + n_1^2)M_2 - 2m_2N_1 - 2m_1N_2 &= 6 - 4\bar{a}^2 + 6\bar{a}^4, \\[-2m_1(m_2^2 + n_2^2) - 2m_2(m_1^2 + n_1^2)]A + \\+ (m_2^2 + n_2^2)N_1 + (m_1^2 + n_1^2)N_2 &= 4(\bar{a}^4 - 1), \\(m_1^2 + n_1^2)(m_2^2 + n_2^2)A &= (\bar{a}^2 + 1)^2.\end{aligned} \right\} \quad (1.86)$$

Уравнение времени здесь записывается в форме

$$\begin{aligned}t = c_6 + (\mu_1^2 + \lambda_2^2)\tau - \frac{\mu_1^2}{\sigma} E[\operatorname{am} \sigma(\tau - \tau_0), k] + \\+ P_1 \frac{se^u - 1}{e^{2u} - 2se^u + 1} + Q_1 \operatorname{arctg} \frac{e^u - s}{r}, \quad (1.87)\end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}P_1 &= \frac{1}{8\sqrt{2h_1}(\lambda_2 - \lambda_1)^{3/2}(\lambda_4 - \lambda_2)^{3/2}} [-16\lambda_2^2\lambda_4^2 + \\+ 16\lambda_1^2\lambda_2^2 + 16\lambda_2^4 + 16\lambda_1^2\lambda_4^2 - 32\lambda_1\lambda_2^3 - 32\lambda_2^3\lambda_4 + \\+ 64\lambda_1\lambda_2^2\lambda_4 - 32\lambda_1\lambda_2\lambda_4^2 - 32\lambda_1^2\lambda_2\lambda_4], \\Q_1 &= \frac{2(2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_4)}{\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)}} P_1 - \frac{4\lambda_2}{\sqrt{2h}}, \\s &= \frac{2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_1}, \quad r = \frac{2\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)}}{\lambda_1 - \lambda_1}.\end{aligned} \right\} \quad (1.88)$$

С л у ч а й *i*). Так как корни многочлена $\Phi(\lambda)$ удовлетворяют неравенствам $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4 < 0$, то согласно теореме Виета должны иметь место следующие

соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= -\bar{a}, \\ \lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3^2 &= \bar{b}, \\ 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3^2(\lambda_1 + \lambda_2) &= -\bar{a}, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 &= \bar{d}, \end{aligned} \right\} \quad (1.89)$$

из которых находим

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2\lambda_3(\lambda_1\lambda_2 - 1)}{1 - \lambda_3^2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 < \frac{(\lambda_3^2 - 1)(\lambda_1\lambda_2 - 1)}{2\lambda_3}. \quad (1.90)$$

Покажем, что эллипсоид $\lambda = \lambda_3$ лежит внутри Земли. Если предполагать противное, то неравенство $\lambda_3 < -30$ приводит к неравенству $0 < \lambda_1\lambda_2 < 1$. Но это неравенство невозможно, так как $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ и, следовательно, $\lambda_1 < -30$, $\lambda_2 < -30$, что противоречит предположению. Вместе с тем, соотношения (1.90) показывают, что если кратный корень λ_3 взят на отрезке $[-1, 0]$, то эти соотношения выполняются, и по крайней мере корень λ_1 при соответствующем выборе начальных условий будет меньше -30 . Если оба корня меньше -30 , то существуют спутниковые движения. И тогда движение будет происходить в эллипсоидальном слое $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_3$.

Обращая квадратуры для λ и μ и вычисляя интегралы, входящие в формулу для w , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \mu_2 \operatorname{sn} \sigma (\tau - \tau_0), \\ \lambda &= \frac{A + B \cos u}{C + D \cos u}, \\ w &= c_5 - \frac{c_1 \tau}{1 + \lambda_3^2} + \frac{c_1}{\sigma} \operatorname{II} [\operatorname{am} \sigma (\tau - \tau_0), k, n] + \\ &+ \frac{2c_1}{\sqrt{2h(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}} \left\{ \frac{M_1}{2} \ln [(\operatorname{tg} u - m_1)^2 + n_1^2] + \right. \\ &+ \frac{M_2}{2} \ln \left[\left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - m_2 \right)^2 + n_2^2 \right] + \frac{M_1 m_1 + N_1}{n_1} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2} - m_1}{n_1} + \\ &\left. + \frac{M_2 m_2 + N_2}{n_2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2} - m_2}{n_2} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (1.91)$$

где

$$u = \sqrt{2h(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}(\tau - \tau_1), \quad (1.92)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) - 2\lambda_1\lambda_2, & B &= \lambda_3(\lambda_2 - \lambda_1), \\ C &= 2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2, & D &= \lambda_2 - \lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.93)$$

Коэффициенты M_1 , M_2 , N_1 , N_2 определяются следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} M_1 + M_2 &= 0, \\ -2m_2M_1 - 2m_1M_2 + N_1 + N_2 &= \bar{A}, \\ M_1(m_2^2 + n_2^2) + M_2(m_1^2 + n_1^2) - 2m_2N_1 - 2m_1N_2 &= 0, \\ N_1(m_2^2 + n_2^2) + N_2(m_1^2 + n_1^2) &= \bar{B}, \end{aligned} \right\} \quad (1.94)$$

в которой

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \frac{B^2C(C - 2D) - A^2D(D - 2B)}{B^2 + D^2}, \\ \bar{B} &= \frac{B^2C(C + 2D) - A^2D(D + 2B)}{B^2 + D^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.95)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 = -m_2 &= \sqrt{\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\sqrt{1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2} - 1)}{2(\lambda_2 - \lambda_3)(1 + \lambda_1^2)}}, \\ n_1 = -n_2 &= \sqrt{\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)(\sqrt{1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2} + 1)}{2(\lambda_3 - \lambda_2)(1 + \lambda_1^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.96)$$

Уравнение времени запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} t &= c_6 + (\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau - \frac{\mu_1^2}{\sigma} E[\operatorname{am} \sigma(\tau - \tau_0), k] + \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{2h_1}(\lambda_3 - \lambda_1)^{3/2}(\lambda_3 - \lambda_2)^{3/2}} \left\{ \frac{A_2}{C + D \cos u} + B_2 \operatorname{arctg} \left(s_1 \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.97)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -\frac{(AD - BC)^2}{D}, \quad s_1 = \sqrt{\frac{C - D}{C + D}}, \\ B_2 &= \frac{2}{\sqrt{C^2 - D^2}} \left[\frac{C(A^2D^2 - B^2C^2)}{D^2} - 2(ABD - B^2C) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.98)$$

С л у ч а й *ж*). Предполагается, что $\lambda_1 = \lambda_2$, а корни λ_3 и λ_4 — мнимые.

В этом типе движения существуют эллипсоидальные траектории, лежащие на эллипсоиде $\lambda = \lambda_1$. Как и ранее, воспользуемся зависимостью между корнями и коэффициентами полинома $\Phi(\lambda)$:

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda_1 + 2p &= -\bar{a}, \\ \lambda_1^2 + 4\lambda_1 p + (p^2 + q^2) &= \bar{b}, \\ 2\lambda_1^2 p + 2\lambda_1(p^2 + q^2) &= -\bar{a}, \\ \lambda_1^2(p^2 + q^2) &= \bar{d}, \end{aligned} \right\} \quad (1.99)$$

где вместо λ_3 и λ_4 введены величины p и q —

$$\lambda_3 = p + iq, \lambda_4 = p - iq.$$

Из соотношений (1.99) находим

$$p = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1^2}(p^2 + q^2 - 1), \quad (1.100)$$

$$(1 - \lambda_1^2)(p^2 + q^2 - 1) > -4p\lambda_1. \quad (1.101)$$

Последнее неравенство следует из условия $\bar{b} > \bar{d} + 1$. Оно может быть преобразовано к виду

$$\frac{(1 - \lambda_1^2)(p^2 + q^2 - 1)^2}{\lambda_1(p^2 + q^2 - 1)} < -4p. \quad (1.102)$$

Если $\lambda_1 < -30$, то дробь $\frac{1 - \lambda_1^2}{\lambda_1}$ положительна, и поэтому

$$\frac{(p^2 + q^2 - 1)^2}{p} < -4p. \quad (1.103)$$

Это неравенство выполняется при $p < 0$. Но из (1.100) имеем

$$p^2 + q^2 - 1 = \frac{p(1 - \lambda_1^2)}{\lambda_1}, \quad (1.104)$$

откуда нетрудно получить оценку

$$0 < p^2 + q^2 < 1, \quad (1.105)$$

приняв во внимание, что $p < 0$, а $\lambda_1 < -30$. Отсюда следует

$$-1 < p < 0.$$

Теперь можно заключить, что неравенство (1.101) всегда выполняется. Итак, действительно возможны движения на эллипсоиде $\lambda = \lambda_1$. Формулы для эллипсоидальных координат имеют такой же вид, как и в случае f).

С л у ч а й k). Здесь $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, а корни λ_3 и λ_4 комплексные. При таких начальных условиях возможны как спутниковые, так и баллистические траектории. Коэффициенты и корни многочлена $\Phi(\lambda)$ связаны зависимостями

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2p &= -\bar{a}, \\ \lambda_1 \lambda_2 + 2p(\lambda_1 + \lambda_2) + (p^2 + q^2) &= \bar{b}, \\ 2p\lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)(p^2 + q^2) &= -\bar{a}, \\ \lambda_1 \lambda_2 (p^2 + q^2) &= \bar{d}, \end{aligned} \right\} \quad (1.106)$$

в которых через p и q обозначены действительная и мнимая части корней λ_3 и λ_4 .

Из первого и третьего соотношений (1.106) с помощью (1.30) находим

$$\left. \begin{aligned} 2p(\lambda_1 \lambda_2 - 1) + (\lambda_1 + \lambda_2)(p^2 + q^2 - 1) &= 0, \\ p[(\lambda_1 \lambda_2 - 1)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2] &< 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.107)$$

откуда следует, что

$$p < 0. \quad (1.108)$$

Так как для спутниковых орбит $\lambda_1 < -30$, $\lambda_2 < -30$, то $\lambda_1 \lambda_2 > 1$, а $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Но тогда первое из условий (1.107) может быть только в том случае, когда

$$0 < p^2 + q^2 < 1. \quad (1.109)$$

Из (1.1) — (1.3) для рассматриваемого типа движения получаем

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \mu_2 \operatorname{sn} \sigma(\tau - \tau_0), \\ \lambda &= \frac{A + B \operatorname{cn} \sigma_1(\tau - \tau_1)}{C + D \operatorname{sn} \sigma_1(\tau - \tau_1)}, \end{aligned} \right\} \quad (1.110)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} A &= -m\lambda_1 - n\lambda_2, \quad B = -m\lambda_1 + n\lambda_2, \\ C &= -m - n, \quad D = -m + n, \\ m &= \sqrt{(p - \lambda_2)^2 + q^2}, \\ n &= \sqrt{(p - \lambda_1)^2 + q^2}, \\ \sigma_1 &= \sqrt{2h_1mn}, \end{aligned} \right\} \quad (1.111)$$

а модуль функции Якоби, входящей в формулу для λ , равен

$$k_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 - (m - n)^2}{mn}}. \quad (1.112)$$

Из (1.109) видим, что модуль k_1 для спутниковых движений является малой величиной. Как следует из формул (1.110), движение происходит между софокусными эллипсоидами $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ вне гиперboloида $\mu = \mu_2$.

Долгота (прямое восхождение) ИСЗ определяется формулой вида (1.49)

$$\omega = c_5 + \frac{c_1}{\sigma} \Pi(\varphi, n, k) - c_1 I_2, \quad (1.113)$$

где $\varphi = \arctan \sigma (\tau - \tau_0)$, а интеграл I_2 , как и в случае d), представляется в виде комбинации двух эллиптических интегралов третьего рода с комплексно-сопряженными параметрами. Они могут быть преобразованы к более простому виду с помощью преобразования Уэля [135]. Уравнение времени имеет вид (1.60).

Итак, выполненные исследования позволяют сделать выводы, что при $h < 0$ движение спутника происходит либо в эллипсоидальном слое между поверхностями $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, либо на эллипсоиде. Эллипсоиды, ограничивающие область возможности движения, софокусны и имеют

малые эксцентриситеты $(1 + \lambda_1^2)^{-\frac{1}{2}}$, $(1 + \lambda_2^2)^{-\frac{1}{2}}$. Все траектории эллиптического класса лежат в ограниченной части пространства. Возможны также баллистические траектории. Они имеют место в том случае, когда внутренний эллипсоид расположен внутри Земли. Движение во всех случаях, когда многочлен $\Phi(\lambda)$ не имеет кратных корней, будет

обладать двумя периодами. Период по координате μ равен

$$T = 4K(k), \quad (1.114)$$

а по координате λ —

$$T_1 = 4K(k_1). \quad (1.115)$$

Если эти периоды несоизмеримы, то движение происходит по незамкнутой кривой двоякой кривизны. Траектория повсюду плотно заполняет область возможности движения. При определенных начальных условиях периоды по всем координатам оказываются соизмеримыми (имеет место случайное вырождение), и тогда движение будет периодическим, но траектория будет замыкаться после некоторого (вообще говоря, большого) числа оборотов.

Основными для приложений в теории движения ИСЗ случаями являются случаи $d)$ и $k)$, так как они не требуют специального выбора начальных условий (многочлен $\Phi(\lambda)$ имеет только различные корни). Случаю $d)$ соответствуют орбиты малого наклона к земному экватору. Случай $k)$ — наиболее важный: он включает в себе спутниковые орбиты с произвольным наклоном, превышающим некоторую малую величину.

Для более удобного описания движения можно ввести некоторые из величин, используемых в небесной механике. Так, например, величину, определяемую формулой

$$T_{\Omega}^{(j)} = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} (\mu^2 + \lambda^2) d\tau, \quad (1.116)$$

где τ_{j-1} и τ_j — решения уравнения

$$\operatorname{sn} \sigma (\tau - \tau_0) = 0, \quad (1.117)$$

назовем драконическим периодом обращения спутника на j -м обороте. Здесь под τ_{j-1} и τ_j подразумеваются два последовательных ближайших момента времени τ , при которых спутник переходит из южного полушария в северное. Эти моменты задаются формулой

$$\tau_j = \tau_0 + \frac{4}{\sigma} jK(k). \quad (1.118)$$

Для каждого из типов движения получается собственное выражение для драконического периода. Если движение происходит на эллипсоиде, то формула для драконического периода приобретает особенно простой вид:

$$T_{\Omega}^{(i)} = (\mu_1^2 + \lambda_1^2) (\tau_j - \tau_{j-1}) - \frac{\mu_1^2}{\sigma} \{E[\operatorname{am} \sigma(\tau_j - \tau_0)] - E[\operatorname{am} \sigma(\tau_{j-1} - \tau_0)]\}. \quad (1.119)$$

Введем понятия квазиперигея и квазиапогея. Под квазиперигеем будем понимать точку касания траектории с внутренним эллипсоидом, ограничивающим область возможности движения. Квазиапогей — точка касания траектории с внешним эллипсоидом. Назовем промежуток времени между двумя последовательными прохождением спутника через квазиперигей на i -м обороте квазианомалистическим периодом. Этот период будет определяться формулой

$$T_m^{(i)} = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\mu^2 + \lambda^2) d\tau, \quad (1.120)$$

где τ_{i-1} и τ_i суть корни уравнения

$$\frac{A + B \operatorname{sn}^2 \sigma_1 (\tau - \tau_1)}{C + D \operatorname{sn}^2 \sigma_1 (\tau - \tau_1)} = \lambda_2 \quad (1.121)$$

для случая d) и уравнения

$$\frac{A + B \operatorname{cn} \sigma_1 (\tau - \tau_1)}{C + D \operatorname{cn} \sigma_1 (\tau - \tau_1)} = \lambda_2 \quad (1.122)$$

для случая k).

Как известно, сфероидальность Земли вызывает вековые возмущения в долготе восходящего узла и аргументе перигея. Эти величины можно без труда получить следующим образом. Например, изменение долготы восходящего узла на j -м обороте будет равно

$$\Delta \Omega^{(i)} = \omega(\tau_j) - \omega(\tau_{j-1}). \quad (1.123)$$

§ 2. Движения параболического типа

Для семейства параболического типа $h = 0$ координата μ определяется из дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 = 2c_2\mu^2 - (2c_2 + c_1^2). \quad (2.1)$$

Как следует из формул преобразования координат (6.39) гл. III, $|\mu| \leq 1$. Принимая во внимание это условие, приходим к выводу, что реальные движения существуют, если удовлетворяется неравенство

$$2c_2 + c_1^2 \leq 0. \quad (2.2)$$

Следовательно, должно быть

$$c_2 \leq 0. \quad (2.3)$$

В результате интегрирования (2.1) имеем

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{2c_1^2}{c_2}} \sin(\sqrt{-2c_2}\tau + c_3), \quad (2.4)$$

где c_3 обозначает постоянную интегрирования.

Отсюда видим, что величины c_1 и c_2 должны удовлетворять неравенству

$$0 \leq 1 + \frac{c_1^2}{2c_2} \leq 1. \quad (2.5)$$

При $c_1 = 0$ и любом значении c_2 это условие выполнено. Движение будет происходить в меридиональной плоскости (случай полярных орбит). Этот частный случай будет рассмотрен отдельно в одном из следующих параграфов. Из формул (2.4) и (2.5) следует, что движение происходит вне однополостного гиперboloида вращения

$$\mu = \bar{\mu} = \sqrt{1 + \frac{c_1^2}{2c_2}}. \quad (2.6)$$

Если же обе постоянные c_1 и c_2 равны нулю, то, как можно показать, траектория будет гиперболической и располагается либо в меридиональной, либо в экваториальной плоскости.

Теперь перейдем к исследованию эллиптической координаты λ , определяемой уравнением

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = f(\lambda), \quad (2.7)$$

где для рассматриваемого класса движения многочлен $f(\lambda)$ принимает вид

$$f(\lambda) = \bar{a}\lambda^3 + \bar{b}\lambda^2 + \bar{a}\lambda + \bar{d}, \quad (2.8)$$

коэффициенты которого, как следует из (2.2) и (2.3), неположительны и равны

$$\bar{a} = -\frac{2fM}{c^3}, \quad \bar{b} = 2c_2, \quad \bar{d} = 2c_2 + c_1^2. \quad (2.9)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — корни многочлена $f(\lambda)$, и пусть для определенности $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$. Так как коэффициенты $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}$ неположительны, то действительные корни многочлена $f(\lambda)$ не могут быть положительными. В зависимости от начальных условий могут представиться следующие случаи:

а) один из корней — действителен, два других — комплексные сопряженные,

б) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — действительные и различные корни,

в) $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 < 0$,

г) $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < 0$,

д) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < 0$.

Покажем, что движение во всех этих случаях будет происходить по неограниченным орбитам.

С л у ч а й а). Если через λ_1 обозначить действительный корень, а, кроме того, положить $\lambda_2 = m + ni$, $\lambda_3 = m - ni$, то можно установить следующую зависимость корней от коэффициентов многочлена:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + 2m &= -\frac{\bar{b}}{a}, \\ 2\lambda_1 m + m^2 + n^2 &= 1, \\ \lambda_1(m^2 + n^2) &= -\frac{\bar{d}}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Нетрудно показать, что в случае а) движение возможно и происходит вне эллипсоида

$$\lambda = \lambda_1. \quad (2.11)$$

Обращая полученный из (2.7) эллиптический интеграл

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = \tau + c_4, \quad (2.12)$$

для координаты λ будем иметь

$$\lambda = \lambda_1 - \frac{[1 + \operatorname{cn}(\sigma_2 \tau + c_4)]^2}{\operatorname{sn}^2(\sigma_2 \tau + c_4)} \rho, \quad (2.13)$$

где c_4 — постоянная интегрирования

$$\rho = \sqrt{(\lambda_1 - m)^2 + n^2}, \quad (2.14)$$

$$\sigma_2 = \sqrt{-a\rho}, \quad (2.15)$$

а модуль эллиптических функций Якоби вычисляется по формуле

$$k = \sqrt{\frac{\rho + \lambda_1 - m}{2\rho}}. \quad (2.16)$$

Как следует из (2.13), координата λ неограниченно возрастает, т. е. движение происходит в неограниченной части пространства. Ниже покажем, что это возрастание происходит одновременно с неограниченным ростом t .

С л у ч а й б). Здесь область возможности движения задается неравенствами

$$\lambda \leq \lambda_1, \quad (2.17)$$

$$\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_3. \quad (2.18)$$

Реальные движения, для которых были бы выполнены условия (2.18), невозможны, так как ни λ_2 , ни λ_3 не удовлетворяют критерию существования реальных движений (1.27). Это утверждение непосредственно следует из теоремы Виета, согласно которой

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (2.19)$$

Действительно, пусть λ_1 , а следовательно, и λ_2 не превосходят -30 . Но тогда в левой части соотношения (2.19) все слагаемые положительны, а их сумма превосходит единицу, что невозможно. Таким образом, для выполнения соотношения (2.19) необходимо, чтобы корни λ_2 и λ_3 лежали на отрезке $[-1, 0]$, т. е. реальные движения невозможны.

Остается рассмотреть движения, удовлетворяющие условию (2.17). Здесь движение происходит вне эллипсоида $\lambda = \lambda_1$, причем при $|\lambda_1| < 30$ область действительного движения ограничена земной поверхностью. Обращая

эллиптический интеграл (2.12), получим

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2 \operatorname{tn}^2 (\sigma_3 \tau + c_4), \quad (2.20)$$

где

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\overline{a}(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad (2.21)$$

а модуль функций Якоби вычисляется по формуле

$$k = \sqrt{\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1}}. \quad (2.22)$$

Как следует из (2.20), переменная λ может неограниченно возрастать.

С л у ч а й в). В этом случае оба эллипсоида $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_3$ лежат внутри Земли, так как при $|\lambda_1| \geq 30$ соотношение (2.19) не может иметь места. Таким образом, движение точки происходит вне земной поверхности и вне гиперболоида. Координата λ как функция τ дается формулой

$$\lambda = \frac{\lambda_1 [1 + e^{2\sigma_4(\tau+c_4)}]^2 - 4\lambda_3 e^{2\sigma_4(\tau+c_4)}}{[1 - e^{2\sigma_4(\tau+c_4)}]^2}, \quad (2.23)$$

в которой

$$\sigma_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\overline{a}(\lambda_1 - \lambda_3)}. \quad (2.24)$$

С л у ч а й г). Как и в предыдущем случае, можно легко показать, что эллипсоид $\lambda = \lambda_3$ лежит внутри Земли. Реальным движениям соответствует $\lambda < \lambda_1$, и тогда из (2.12) находим

$$\lambda = \frac{\lambda_3 [1 + e^{2\sigma_4(\tau+c_4)}]^2 - 4\lambda_1 e^{2\sigma_4(\tau+c_4)}}{[1 - e^{2\sigma_4(\tau+c_4)}]^2}. \quad (2.25)$$

В случаях в) и г), как видно из формул (2.23) и (2.25), координата λ неограниченно возрастает вместе с τ .

С л у ч а й д). Здесь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ и эллипсоид $\lambda = \lambda_1$ также расположен внутри Земли. Для реальных движений обращение эллиптической квадратуры (2.12) дает

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{4}{a(\tau + c_4)}. \quad (2.26)$$

Не входя в детали вычисления угловой координаты ω , сделаем несколько общих замечаний о характере ее

изменения. Эта координата вычисляется по формуле (см. (1.3))

$$w = c_5 + c_1 \int \frac{d\tau}{1 - \mu^2} - c_1 \int \frac{d\tau}{1 + \lambda^2}. \quad (2.27)$$

Используем введенные обозначения

$$I_1 = \int \frac{d\tau}{1 - \mu^2}, \quad (2.28)$$

$$I_2 = \int \frac{d\tau}{1 + \lambda^2}. \quad (2.29)$$

Интеграл I_1 имеет один и тот же вид для всех типов движения:

$$I_1 = \frac{1}{c_1} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2c_2c_1^2} \operatorname{tg}(\sqrt{-2c_2}\tau + c_3)}{2c_2}, \quad (2.30)$$

в то время как второй интеграл оказывается различным в каждом из рассмотренных случаев.

В случаях а) и б) этот интеграл выражается через эллиптические интегралы первого и третьего рода. В самом деле, так как величина $(1 + \lambda^2)^{-1}$ может быть представлена в виде

$$\frac{1}{1 + \lambda^2} = \frac{\sum_{s=0}^2 a_{2s} \operatorname{cn}^{2s}(\sigma_{2,3}\tau + c_4)}{\sum_{s=0}^4 b_s \operatorname{cn}^s(\sigma_{2,3}\tau + c_4)}, \quad (2.31)$$

то для интеграла I_2 будем иметь следующее выражение:

$$I_2 = \int \frac{\sum_{s=0}^2 a_{2s} \operatorname{cn}^{2s}(\sigma_{2,3}\tau + c_4)}{\sum_{s=0}^4 b_s \operatorname{cn}^s(\sigma_{2,3}\tau + c_4)} d\tau, \quad (2.32)$$

в котором коэффициенты a_{2s} и b_s зависят от корней многочлена $f(\lambda)$. Выполняя замену переменной

$$v = \operatorname{cn}(\sigma_{2,3}\tau + c_4), \quad (2.33)$$

преобразуем интеграл (2.32) к виду

$$I_2 = -\frac{1}{\sigma_{2,3}} \int \frac{\sum_{s=0}^2 a_{2s} v^{2s} dv}{\sum_{s=0}^4 b_s v^s \sqrt{(1-v^2)(1-k^2+k^2v^2)}}. \quad (2.34)$$

Интеграл (2.34) можно представить через эллиптические интегралы третьего рода [135]. Если при этом окажется, что эллиптические интегралы третьего рода будут иметь мнимые параметры, то следует воспользоваться формулами перехода к эллиптическим интегралам третьего рода с действительными параметрами.

В случаях в), г) и д) интеграл I_2 выражается через элементарные функции. Так, например, в случае д) получаем

$$I_2 = \frac{\tau}{1+\lambda_1^2} - \frac{4\lambda_1}{\bar{a}(1+\lambda_1^2)^2} \ln [(1+\lambda_1^2)\bar{a}^2(\tau+c_4)^2 + 8\lambda_1 a(\tau+c_4) + 16] + \frac{8(\lambda_1^2-1)}{(1+\lambda_1^2)^2} \operatorname{arctg} \frac{(1+\lambda_1^2)a\tau + a(1+\lambda_1^2)c_4 + 4\lambda_1}{8}. \quad (2.35)$$

Аналогичные замечания оказываются справедливыми и для уравнения времени

$$t = \int (\mu^2 + \lambda^2) d\tau. \quad (2.36)$$

Здесь интеграл от функции $\mu^2(\tau)$ выражается через элементарные функции и имеет один и тот же вид для всех типов движения, а интегрирование функции $\lambda^2(\tau)$ в каждом из рассмотренных случаев выполняется различным образом. В случаях а) и б) в соотношение между t и τ будут входить эллиптические интегралы третьего рода, а в остальных случаях это соотношение будет содержать только элементарные функции. Отметим лишь, что для всех типов движения зависимость между t и τ выражается в конечной форме.

Так, например, для наиболее простого случая д) зависимость $t(\tau)$ имеет вид

$$t = \left(\frac{\bar{\mu}^2}{2} + \lambda_1^2 \right) \tau - \frac{\bar{\mu}^2}{4\sqrt{-2c_2}} \sin(2\sqrt{-2c_2}\tau + c_3) - \frac{16}{\bar{a}^2(\tau+c_4)} + \frac{8\lambda_1}{\bar{a}} \ln(\tau+c_4). \quad (2.37)$$

Некоторые дополнительные сведения об орбитах параболического класса, касающиеся, например, полярных и экваториальных орбит, читатель может найти в работе Е. П. Аксенова, Е. А. Гребеникова и В. Г. Демина [91].

§ 3. Движения гиперболического типа

Класс гиперболических движений составляют те траектории, для которых $h > 0$. Как видно из формулы (1.5), при $h > 0$ дискриминант $\Delta = (h_1 + c_2)^2 + 2hc_1^2$ должен быть неотрицательным, так как в противном случае координаты x , y , z будут иметь мнимые значения.

Анализ возможных форм движения при $h > 0$ весьма громоздок. Достаточно заметить, что в зависимости от значений постоянных интегрирования c_1 , c_2 , h при формальном анализе квадратуры (1.1), определяющей координату μ , могут представиться 22 случая. Необходимо исследовать, при каких начальных условиях корни μ_i многочлена (1.9) будут действительными или комплексными. Существенно также и значение модуля корня. Характер движения будет зависеть от того, будут ли по модулю корни большими или меньшими единицы. При анализе квадратуры (1.2) необходимо рассмотреть 34 математически возможных случая. Многие из этих случаев не представляют интереса для теории движения ИСЗ по тем или иным причинам и могут быть отброшены. Как и в предыдущих параграфах, при отборе типов движения следует принимать во внимание критерий реальности орбит (1.27). Никаких специфических особенностей при исследовании гиперболического класса движений не возникает, и оно может быть выполнено с помощью использованных выше теорем высшей алгебры точно таким же путем, как это было сделано в §§ 1—2. Соответствующие исследования были выполнены в работе [125], основные результаты которой будут изложены ниже*). Мы исключаем из рассмотрения случаи экваториальных и меридиональных орбит, так как первые могут быть изучены при более точной постановке задачи без

*) В работе [125] были допущены некоторые ошибки. Те из них, которые замечены, при изложении § 3 были устранены. Ряд соотношений и формул преобразованы к более простому виду.

привлечения обобщенной задачи двух неподвижных центров, а вторые будут рассмотрены в следующем параграфе.

Как показывает анализ, все траектории можно разбить на четыре типа, которые будем нумеровать римскими цифрами.

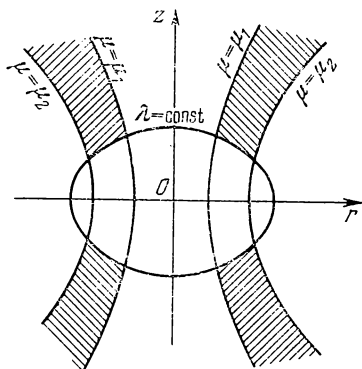


Рис. 23.

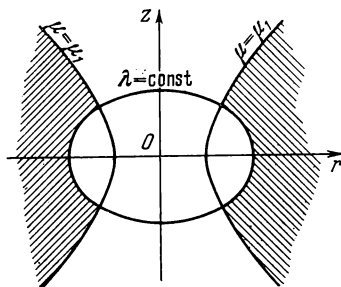


Рис. 24.

Тип I. Все траектории заключены между двумя однополостными гиперboloидами вращения $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$ (рис. 23).

Тип II. К этому типу отнесем траектории, движения по которым происходят вне гиперboloида $\mu = \mu_1$ (рис. 24).

Тип III. Орбиты этого типа являются стационарными и лежат на гиперboloиде $\mu = \mu_1$ (рис. 25). Такого рода орбиты можно назвать гиперboloидальными.

Тип IV. Движение происходит во всем пространстве вне Земли, а также некоторые движения, для которых $\mu = \mu_1 < 1$.

Сначала исследуем квадратуру (1.1). Здесь можно выделить следующие случаи.

С л у ч а й а). μ_1 действительно и по модулю больше единицы, μ_2 — комплексный корень. Многочлен $f(\mu)$

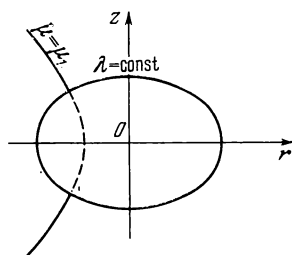


Рис. 25.

преобразуется к виду

$$f(\mu) = -2h_1(\mu_1^2 - \mu^2)(\mu^2 - 2\mu \operatorname{Re} \mu_2 + |\mu_2|^2). \quad (3.1)$$

Обращение квадратуры (1.1) приводит к уравнению

$$\mu = \mu_1 \operatorname{sn} [\sigma(\tau - \tau_0), k], \quad (3.2)$$

в котором

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sqrt{-2h_1(\mu_1^2 + \operatorname{Re}^2 \mu_2)}, \\ k &= \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \operatorname{Re}^2 \mu_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

С л у ч а й б). $\mu_1 = \pm 1$, μ_2 — комплексный корень. Так как $\mu_1 = \pm 1$, то движение будет происходить по полярной орбите.

С л у ч а й в). $\mu_1 = 0$, μ_2 — комплексный корень. При этом, очевидно, $c_2 < -\frac{c_1^2}{2} < +h_1$, т. е. орбиты будут лежать в экваториальной плоскости.

С л у ч а й г). $\mu_1 = \pm 1$, $-1 \leq \mu_2 \leq 1$. Это имеет место при $c_1 = 0$, т. е. орбиты будут плоскими и лежат в плоскостях, перпендикулярных к экватору.

С л у ч а й д). $\mu_1 = \pm 1$, $\mu_2 = 0$. Этот случай может иметь место только при условии, что $c_1 = c_2 = 0$. Обращение квадратуры (1.1) выполняется очень просто и дает

$$\mu = \frac{1}{\operatorname{ch} u}, \quad (3.4)$$

где

$$u = \sqrt{-2h_1}(\tau - \tau_0). \quad (3.5)$$

С л у ч а й е). $-1 < \mu_1 < 1$, $-1 < \mu_2 < 1$. Из формулы (1.5) следует, что должны выполняться условия

$$|c_2| < -h_1, \quad 2c_2 + c_1^2 > 0.$$

Но тогда полином $f(\mu)$ можно представить в виде

$$f(\mu) = -2h_1(\mu_1^2 - \mu^2)(\mu^2 - \mu_2^2),$$

и из (1.5) находим

$$\mu = \frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 - (\mu_1^2 - \mu_2^2) \operatorname{sn}^2 \sigma_1 (\tau - \tau_0)}}, \quad (3.6)$$

где

$$\sigma_1 = \mu_1 \sqrt{-2h_1}, \quad k = \frac{\sqrt{\mu_1^2 - \mu_2^2}}{\mu_1^2}. \quad (3.7)$$

С л у ч а й ж). $-1 < \mu_1 < +1$, $\mu_2 = 0$. Корни μ_i будут удовлетворять этим условиям, если $c_2 = -\frac{c_1^2}{2} > h_1$.

Так как здесь $f(\mu) = -2h_1\mu^2(\mu_1^2 - \mu^2)$, то интегрирование (1.1) дает

$$\mu = \frac{\mu_1}{\operatorname{ch} \sigma_1 (\tau - \tau_0)}, \quad (3.8)$$

причем

$$\sigma_1 = \sqrt{-2h_1}. \quad (3.9)$$

С л у ч а й з). Корень μ_1 — действительный, а корень μ_2 — чисто мнимый, причем $\mu_2 = i\mu_1$. Постоянные интегрирования должны удовлетворять условиям $c_2 = h_1 < -\frac{c_1^2}{2}$.

Из формулы (1.1) получаем

$$\mu = \mu_1 \operatorname{sn} \sigma_2 (\tau - \tau_0), \quad (3.10)$$

где

$$\sigma_2 = 2\mu_1 \sqrt{-2h_1}, \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.11)$$

С л у ч а й и). Если $\Delta = 0$, а $\mu_1 = \mu_2 = 0$, то имеют место экваториальные орбиты.

С л у ч а й к). Если $\mu_1 = \pm 1$ или $\mu_1 = 0$, то соответственно будем иметь либо полярные, либо экваториальные орбиты.

С л у ч а й л). $-1 < \mu_1 < 1$. Если $|c_2| < -h_1$ и $2c_2 + c_1^2 > 0$, то возможно движение по гиперboloиду $\mu = \mu_1$.

Для упрощения исследований квадратуры (1.2) примем во внимание результаты анализа квадратуры (1.1). Как отмечалось, все движения можно разделить на четыре типа.

Они будут характеризоваться следующими условиями, налагаемыми на значения произвольных постоянных c_1 , c_2 и h_1 .

$$\text{Тип I. } 2c_2 + c_1^2 > 0, |c_2| < -h_1.$$

$$\text{Тип II. } 2c_2 + c_1^2 < 0.$$

$$\text{Тип III. } |c_2| < h_1, h_1(2c_2 + 2c_1^2 + 1) + c_2^2 = 0.$$

$$\text{Тип IV.}$$

$$c_2 = -\frac{c_1^2}{2} > h_1.$$

В зависимости от типа движения будет различным представление координаты λ , которое зависит от величины корней многочлена $\Phi(\lambda)$ (см. формулу (1.28)).

Тип I. В этом типе движения координата μ определяется формулой (3.6) и движение происходит между гиперболами $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$.

С л у ч а й а). Если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — комплексные, то, положив

$$\lambda_{1,2} = m \pm in, \quad \lambda_{3,4} = p \pm iq,$$

из соотношения (1.2) найдем

$$F\left[\alpha + \operatorname{arctg} \frac{\lambda - m}{n}, k\right] = \sigma_1(\tau - \tau_1), \quad (3.12)$$

где использованы обозначения

$$\sigma_1 = \frac{l - l_1}{2} \sqrt{-2h_1}, \quad k = \frac{2\sqrt{ll_1}}{l + l_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{4n^2 - (l - l_1)^2}{(l + l_1)^2 - 4n^2}},$$

$$\left. \begin{aligned} l^2 &= (m - p)^2 + (n + q)^2, \quad l_1^2 = (m - p)^2 + (n - q)^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Долгота ω и уравнение времени принимают вид (см. формулы (6.64) и (6.65) гл. III):

$$\omega = c_5 + c_1 I_{\mu\omega} - c_1 I_{\lambda\omega}, \quad (3.14)$$

$$t = c_6 - I_{\mu t} - I_{\lambda t}, \quad (3.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_{\mu\omega} &= \int \frac{d\tau}{1 - \mu^2}, & I_{\lambda t} &= \int \lambda^2 d\tau, \\ I_{\mu t} &= \int \mu^2 d\tau, & I_{\lambda\omega} &= \int \frac{d\tau}{1 + \lambda^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Интегралы (3.16) можно выразить через эллиптические функции Якоби в конечном виде. Приведем в качестве примера значения интегралов $I_{\mu w}$ и $I_{\mu t}$:

$$\left. \begin{aligned} I_{\mu w} &= \tau + \frac{\mu_2^2}{1 - \mu_2^2} \Pi [\operatorname{am} \sigma_1(\tau - \tau_0), n_1, k], \\ I_{\mu t} &= \frac{\mu_2^2}{\sigma_1} \Pi [\operatorname{am} \sigma_1(\tau - \tau_0), n_0, k], \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

где

$$n_0 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 - 1, \quad n_1 = \frac{n_0}{1 - \mu_2^2}. \quad (3.18)$$

Выражение для двух других интегралов записывается более сложно.

С л у ч а й *b*). Если $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, а λ_3, λ_4 — комплексные, то решение уравнения (1.2) представляется в виде

$$\lambda = \frac{n\lambda_1 \operatorname{sh} \sigma_1(\tau - \tau_1) + m\lambda_1 - (m^2 + n^2)}{n \operatorname{sh} \sigma_1(\tau - \tau_1) + \lambda_1 - m}, \quad (3.19)$$

где

$$\sigma_1 = \sqrt{-2h_1[(\lambda_1 - m)^2 + n^2]},$$

а m и n , как и ранее, соответственно действительная и мнимая части корней λ_3 и λ_4 . Интегралы (3.16) выражаются через элементарные функции.

С л у ч а й *c*). $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, λ_3, λ_4 — комплексные. Движение происходит вне эллипсоида $\lambda = \lambda_1$, а из (1.2) получаем

$$\lambda = \frac{g_1 \operatorname{cn} \sigma_1(\tau - \tau_1) + g_2}{d_1 \operatorname{cn} \sigma(\tau - \tau_1) + d_2}, \quad (3.20)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= q\lambda_1 + p\lambda_2, & g_2 &= q\lambda_1 - p\lambda_2, \\ d_1 &= q - p, & d_2 &= q + p, \\ p &= \sqrt{(m - \lambda_1)^2 + n^2}, & q &= \sqrt{(m - \lambda_2)^2 + n^2}, \\ \sigma_1 &= \sqrt{-2h_1pq}, & k_1^2 &= \frac{(p + q)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4pq}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Тип II. Для всех подтипов движения выражение для координаты μ одно и то же и определяется формулой (3.10).

С л у ч а й а). Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, а λ_3 , λ_4 — комплексные, то из уравнения (1.2) можно получить

$$\lambda = \frac{g_1 \operatorname{cn} \sigma_1 (\tau - \tau_1) + g_2}{d_1 \operatorname{cn} \sigma_1 (\tau - \tau_1) + d_2}, \quad (3.22)$$

где использованы обозначения

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= q\lambda_2 + p\lambda_1, & g_2 &= q\lambda_2 - p\lambda_1, \\ d_1 &= p + q, & d_2 &= q - p, \\ p &= \sqrt{(m - \lambda_1)^2 + n^2}, & q &= \sqrt{(m - \lambda_2)^2 + n^2}, \\ \sigma_1 &= \sqrt{-2h_1pq}, & k_1^2 &= \frac{(p + q)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)}{4pq}. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

причем величины m и n имеют тот же смысл, что и ранее.

Интегралы (3.16) выражаются через эллиптические интегралы первого, второго и третьего родов. Так, например, для $I_{\mu\omega}$ и $I_{\mu t}$ получаем

$$I_{\mu t} = \frac{\mu_1^2}{\sigma} \{F[\operatorname{am} \sigma (\tau - \tau_0)] - D[\operatorname{am} \sigma (\tau - \tau_0)]\}, \quad (3.24)$$

$$I_{\mu\omega} = \frac{1}{\sigma(1 - \mu_1^2)} \Pi \left[\operatorname{am} \sigma (\tau - \tau_0), \frac{\mu_1^2}{1 - \mu_1^2}, k \right]. \quad (3.25)$$

С л у ч а й б). Здесь $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 > 0$. Обращение квадратуры для координаты λ приводит к уравнению

$$\lambda = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 \sigma_1^2 (\tau - \tau_1)^2}{1 - \sigma_1^2 (\tau - \tau_1)^2}. \quad (3.26)$$

Формула для долготы ω приобретает вид

$$\omega = c_5 + \frac{c_1}{\sigma(1 - \mu_1^2)} \Pi \left[\operatorname{am} \sigma (\tau - \tau_0), \frac{\mu_1^2}{1 - \mu_1^2}, k \right] - c_1 I_{\lambda\omega}, \quad (3.27)$$

а уравнение времени запишется следующим образом:

$$t = c_6 + \frac{\mu_1^2}{c} \{ D [\operatorname{am} \sigma(\tau - \tau_0), k] - \\ - F [\operatorname{am} \sigma(\tau - \tau_0), k] \} - I_{\lambda t}. \quad (3.28)$$

Интегралы (3.16) также можно выразить в конечном виде. Например, для $I_{\lambda t}$ будем иметь

$$I_{\lambda t} = \lambda_2 \tau + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\tau - \tau_1)^2}{1 - \sigma_1^2 (\tau - \tau_1)^2} + \frac{\lambda_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 - 3\lambda_2^2}{4\sigma_1} \ln \frac{1 + \sigma_1 (\tau - \tau_1)}{1 - \sigma_1 (\tau - \tau_1)}. \quad (3.29)$$

С л у ч а й c). $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < 0$. При этих значениях корней λ_i из (1.2) находим

$$\lambda = \frac{\lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_3) - \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{sn}^2 \sigma_1 (\tau - \tau_1)}{\lambda_1 - \lambda_3 - (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{sn}^2 \sigma_1 (\tau - \tau_1)}, \quad (3.30)$$

где

$$k_1^2 = \frac{(\lambda_4 - \lambda_3) (\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_3 - \lambda_1) (\lambda_4 - \lambda_2)}.$$

С л у ч а й d). $\lambda_1 > 0$, $0 > \lambda_2 = \lambda_3 > \lambda_4$. Здесь координата λ выражается через элементарные функции

$$\lambda = \lambda_2 - \frac{2 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_4 - \lambda_2)}{(\lambda_4 + \lambda_1 - 2\lambda_2) - (\lambda_1 - \lambda_4) \sin \sigma_1 (\tau - \tau_1)}, \quad (3.31)$$

причем

$$\sigma_1 = \sqrt{-2h_1 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_4)}. \quad (3.32)$$

С л у ч а й e). $\lambda_1 > 0$, $0 > \lambda_4 > \lambda_3 = \lambda_2$. Для координаты λ имеем следующую формулу:

$$\lambda = \lambda_2 + \frac{4 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_4 - \lambda_2) \exp [-\sigma_1 (\tau - \tau_1)]}{[\exp (-\sigma_1 (\tau - \tau_1)) + \lambda_1 + \lambda_4 - 2\lambda_3]^2 - 4 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_4 - \lambda_2)}, \quad (3.33)$$

где

$$\sigma_1 = \sqrt{-2h_1 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_4 - \lambda_2)}.$$

С л у ч а й f). $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 > 0$. Здесь для λ имеем

$$\lambda = \lambda_2 - \frac{2 (\lambda_2 - \lambda_1)}{4 (\lambda_2 - \lambda_1)^2 (\tau - \tau_1)^2 + 4}. \quad (3.34)$$

Прочие формулы, характеризующие этот случай, также достаточно просты и могут быть легко получены.

Тип III. Как уже указывалось, этот тип объединяет все движения, происходящие на гиперboloиде. Параметрические уравнения орбиты и уравнение времени в каждом из возможных здесь подтипов можно получить из соответствующих формул предыдущих случаев посредством предельного перехода. Так, например, в случае Ib) ($\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, λ_3, λ_4 — комплексные) будем иметь

$$\mu = \mu_1, \quad (3.35)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_2 n \operatorname{sh} \sigma_1 (\tau - \tau_1) + \lambda_1 m - (m^2 + n^2)}{n \operatorname{sh} \sigma_1 (\tau - \tau_1) + \lambda_1 - m}, \quad (3.36)$$

$$\omega = c_5 + \frac{c_1 \tau}{1 - \mu_1^2} - c_1 I_{\lambda \omega}, \quad (3.37)$$

$$t = c_6 - \mu_1^2 \tau - I_{\lambda t}. \quad (3.38)$$

Если же $\lambda_1 = \lambda_2 < 1$, то траектории будут пересекать поверхность Земли.

Тип IV. Здесь многочлен $\Phi(\lambda)$ имеет один нулевой корень. Так как $h < c_2 < 0$, то все остальные корни могут принимать только положительные значения. Если, например, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_4 = 0$, а λ_2, λ_3 — комплексные сопряженные, то для λ можно получить следующую формулу:

$$\lambda = \frac{q \lambda_1 [1 + \operatorname{sn} \sqrt{-2h_1 p q} (\tau - \tau_1)]}{q - p + (q + p) \operatorname{sn} \sqrt{-2h_1 p q} (\tau - \tau_1)}, \quad (3.39)$$

где m, n, p, q имеют тот же смысл, что и в предыдущих случаях. Координата μ определяется формулой (3.8).

§ 4. Полярные орбиты

Рассмотрим полярные орбиты спутника, т. е. орбиты, целиком лежащие в меридиональных плоскостях *). Из формулы (1.3) § 1 вытекает, что для полярных орбит $c_1 = 0$. Не

*) Приводимые здесь результаты получены Е. А. Гребениковым, Е. П. Аксеновым и автором в работе [90].

ограничивая общности, можно считать, что плоскостью полярной орбиты является координатная плоскость $y = 0$. В соответствии с (6.39) гл. III постоянную c_5 следует положить равной $\pi/2$. Тогда в силу (6.39) и (6.61) гл. III прямоугольные координаты спутника будут связаны с эллипсoidalными координатами соотношениями

$$\left. \begin{aligned} x &= c \sqrt{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)}, \\ y &= 0, \\ z &= -c\lambda\mu, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

а λ и μ должны быть найдены посредством обращения квадратур

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt{2h_1\mu^4 + 2(c_2 - h_1)\mu^2 - 2c_2}} = \tau + c_3, \quad (4.2)$$

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{-2h_1\lambda^4 + 2(c_2 - h_1)\lambda^2 - 2\frac{fM}{c^3}\lambda^3 - 2\frac{fM}{c^3}\lambda + 2c_2}} = \tau + c_4. \quad (4.3)$$

Последние формулы дают

$$\left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 = 2h_1(\mu^2 - 1)(\mu^2 - \delta^2), \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = -2h_1(\lambda^2 - 1)\varphi(\lambda), \quad (4.5)$$

где

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \frac{fM}{h_1 c^2} \lambda - \frac{c_2}{h_1}, \quad (4.6)$$

$$\delta^2 = -\frac{c_2}{h_1}. \quad (4.7)$$

Как и в предыдущих параграфах, исследуем возможные формы движения ИСЗ, исходя из требования неотрицательности правых частей уравнений (4.4) и (4.5).

Из уравнения (4.5) следует, что необходимо различать три случая, определяемых начальными условиями.

1. Корни полинома $\varphi(\lambda)$ действительные и различные.
2. Корни полинома $\varphi(\lambda)$ равные.
3. Корни $\varphi(\lambda)$ комплексные сопряженные.

Обозначая эти корни через α и β , будем иметь

$$\alpha = -\frac{fM}{2h_1c^3} + \sqrt{\left(\frac{fM}{2h_1c^3}\right)^2 + \frac{c_2}{h_1}}, \quad (4.8)$$

$$\beta = -\frac{fM}{2h_1c^3} - \sqrt{\left(\frac{fM}{2h_1c^3}\right)^2 + \frac{c_2}{h_1}}. \quad (4.9)$$

С л у ч а й 1. Из формулы (4.5) видно, что при $h_1 > 0$ движение возможно в области $\beta \leq \lambda \leq \alpha$, а при $h_1 < 0$ имеется две области движения: $\lambda > \alpha$ и $\lambda < \beta$. Если $h_1 > 0$, то движение происходит в ограниченной части пространства между эллипсоидами $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \beta$. Если же $h_1 < 0$, то движение происходит в неограниченной области.

С л у ч а й 2. Корни будут равными ($\alpha = \beta$) только при выполнении условия

$$\frac{c_2}{h_1} = -\left(\frac{fM}{2h_1c^3}\right)^2, \quad (4.10)$$

и тогда

$$\alpha = \beta = -\delta = -\frac{fM}{2h_1c^3}. \quad (4.11)$$

Так как для спутниковых орбит $|\beta| > 1$, поэтому и $\delta > 1$. Следовательно, при $h_1 < 0$ правая часть (4.4) неотрицательна только при $|\mu| > 1$. Но в реальном движении $|\mu| \leq 1$. Поэтому при $h_1 < 0$ движение невозможно. Если $h_1 > 0$, то правая часть уравнения (4.4) неотрицательна при изменении μ в пределах от -1 до $+1$. Из уравнения (4.5) следует, что в случае кратных корней в процессе движения λ остается постоянным, а именно $\lambda = -fM/2h_1c^3$.

С л у ч а й 3. Если корни полинома $\Phi(\lambda)$ комплексные, то правая часть уравнения (4.5) остается неотрицательной при любых λ , если $h_1 < 0$, и, напротив, при $h_1 > 0$ она принимает только отрицательные значения. Итак, при $h_1 \neq 0$ все орбиты располагаются в неограниченной области пространства.

При $h_1 = 0$ имеем

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = -(1 + \lambda^2) \left(\frac{2fM}{c^3} \lambda - 2c_2\right). \quad (4.12)$$

Правая часть этого уравнения будет неотрицательной, если $\lambda_1 < \frac{c_2c^3}{fM}$, т. е. при $h_1 = 0$ также нет ограниченных траекто-

рий. Итак, движения будут происходить в ограниченной области только при $h_1 > 0$.

Докажем теперь одну теорему, имеющую принципиальное значение для теории возмущенного движения искусственного спутника несферической планеты.

Т е о р е м а. Под действием возмущений от фигуры планеты при соответствующем выборе начальных условий кеплеровское эллиптическое движение преобразуется в движение, происходящее в неограниченной части пространства. Невозмущенные параболические и гиперболические движения ни при каком выборе начальных условий не могут превратиться в ограниченные движения под действием этих возмущений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выразим постоянную интеграла живых сил через начальные условия. Тогда будем иметь

$$-h_1 c^2 = h = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{v_0^2}{2} - U_0 \right), \quad (4.13)$$

где v_0 и U_0 —соответственно значения скорости спутника и силовой функции в начальный момент времени. Если $h < 0$, то, как мы видели, движение происходит в ограниченной части пространства. При $h \geq 0$ все орбиты уходят в бесконечность.

Преобразуем соотношение (4.13) к виду

$$h = -\frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{fM}{r_0} \right) + \left(\frac{fM}{r_0} - U_0 \right) \right]. \quad (4.14)$$

Очевидно, член

$$H = \frac{v_0^2}{2} - \frac{fM}{r_0} \quad (4.15)$$

характеризует механическую энергию невозмущенного кеплеровского движения. Примем за начальный момент времени момент прохождения спутника через один из полюсов. Тогда $x_0 = 0$, $z_0 = r_0$, и формула (4.14) запишется в виде

$$h = -\frac{1}{c^2} \left[H + \frac{fMc^2}{r_0(r_0^2 + c^2)} \right]. \quad (4.16)$$

Если $H < 0$, то невозмущенное движение будет эллиптическим. Если выбрать r_0 достаточно малым, то постоянную h можно сделать величиной положительной, и тогда возмущенное движение будет происходить в неограниченной части пространства, несмотря на то, что в начальный момент движение было эллиптическим.

Если $H \geq 0$, то $h < 0$. Следовательно, и возмущенное и невозмущенное движения будут неограниченными. Теорема доказана.

Будем рассматривать только такие полярные орбиты, которые лежат в ограниченной части пространства, оставляя без исследования прочие случаи. Следует выделить два случая ограниченных движений. В одном из них координата λ в процессе движения остается заключенной между двумя границами, а во втором случае λ постоянна.

Исследуем квадратуру, определяющую μ . Здесь можно выделить четыре случая: а) $\delta > 1$, б) $0 < \delta < 1$, в) $\delta = 1$ и г) $\delta = 0$. В случае а) координата μ изменяется от -1 до $+1$. В случае б) μ изменяется в пределах от $-\delta$ до δ . В случае в) μ изменяется от -1 до $+1$. Здесь также может быть движение при постоянном значении μ . В случае г) μ остается неизменным.

Объединяя эти четыре случая с теми, которые были получены при анализе квадратуры для λ , придем к следующим пяти типам движения.

Тип 1а). Этот случай имеет место, если корни полинома $\varphi(\lambda)$ действительны и различны, а $\delta > 1$. Здесь движение происходит в эллиптическом кольце. В общем случае оно будет почти периодическим и всюду плотно заполняет область возможности движения.

Тип 2а). Движение принадлежит к этому типу, когда корни полинома $\varphi(\lambda)$ равны и $\delta > 1$. К этому типу принадлежат эллиптические орбиты

$$\lambda = -\frac{fM}{2hc^3}, \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (4.17)$$

Тип 1б). В этом случае $\alpha \neq \beta$, а $\delta < 1$. Следовательно, область возможности движения ограничена двумя эллипсами $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \beta$ и двумя ветвями гиперболы $\mu = \delta$. Координаты ИСЗ удовлетворяют неравенствам $-\delta \leq \mu \leq \delta$,

$\beta \leq \lambda \leq \alpha$. Так как $\delta < 1$, то

$$|\alpha| = \left| -\frac{fM}{2h_1c^3} + \sqrt{\left(\frac{fM}{2h_1c^3}\right)^2 - \delta^2} \right| < 1,$$

а поэтому один из эллипсов, ограничивающих область возможности движения, расположен внутри Земли. Следовательно, в процессе движения ИСЗ неминуемо произойдет его соударение с Землей.

Тип 1в). Здесь $-1 \leq \mu \leq 1$, $\beta \leq \lambda \leq \alpha$. И в этом случае также будет иметь место соударение с Землей, так как

$$|\alpha| = \left| -\frac{fM}{2h_1c^3} + \sqrt{\left(\frac{fM}{2h_1c^3}\right)^2 - \delta^2} \right| \leq 1. \quad (4.18)$$

Заметим, что возможны также прямолинейные движения вдоль оси вращения Земли. В самом деле, $\mu = \pm 1$ представляет собой решение уравнения (4.4). Из формул (4.1) находим, что

$$x = 0, \quad z = \pm c\lambda.$$

Тип 1г). Для этого типа движения $\mu = 0$, $\beta \leq \lambda \leq \alpha$. Из соотношений (4.1) видим, что $x = c\sqrt{1 + \lambda^2}$, $z = 0$, т. е. движение происходит вдоль прямой, лежащей в плоскости экватора. Так как $\alpha = 0$, то $c \leq x \leq c\sqrt{1 + \beta^2}$.

Последние три типа движения практического интереса для теории движения ИСЗ не представляют, ибо такие движения приводят к соударению с Землей.

Остановимся несколько подробнее на эллиптических орбитах. Для существования этих орбит необходимо выполнение условия (4.11). Отсюда следует, что постоянные интегрирования должны быть связаны следующей зависимостью:

$$\alpha = \beta = -\delta = -\frac{fM}{2h_1c^3}. \quad (4.19)$$

Как мы видели, координата λ постоянна и ее значение дается формулой

$$\lambda = -\frac{fM}{2h_1c^3}. \quad (4.20)$$

Найдем выражение для второй координаты μ . Для этого преобразуем эллиптический интеграл (4.2) к нормальной

форме

$$\int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}} = m\tau, \quad (4.21)$$

где

$$k = 1/\delta, \quad m = \delta \sqrt{2h_1}. \quad (4.22)$$

Обращая эллиптический интеграл, находим

$$\mu = \operatorname{sn}(m\tau, k). \quad (4.23)$$

Подставляя найденные значения λ и μ в формулы (4.1), получаем

$$x = a \operatorname{cn} m\tau, \quad z = b \operatorname{sn} m\tau, \quad (4.24)$$

где

$$a = c \sqrt{1 + \frac{fM}{2h_1c^3}}, \quad b = \frac{fM}{2h_1c^3} \cdot c. \quad (4.25)$$

Величины a и b представляют собой большую и малую полуоси эллиптической орбиты, а ее эксцентриситет равен e . Модуль эллиптических функций Якоби и эксцентриситет связаны зависимостью

$$k = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (4.26)$$

Так как величина c весьма мала по сравнению с большой полуосью, то и эксцентриситет и модуль k суть величины малые. Следует заметить, что исследуемые эллиптические орбиты при $c = 0$ обращаются в круговые.

Найдем связь между регуляризующей переменной τ и временем t . Из (6.47) и (6.61) гл. III имеем

$$t - t_0 = \lambda^2 \tau + \int_0^{\tau} \mu^2 d\tau, \quad (4.27)$$

где t_0 — начальный момент.

Подставляя в (4.27) значение μ из (4.23), получим

$$t - t_0 = \lambda^2 \tau + \frac{1}{m} \int_0^s \frac{s^2 ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} \quad (4.28)$$

(здесь для удобства мы положили $s = \operatorname{sn} m\tau$). Это

соотношение можно представить в виде

$$t - t_0 = \lambda^2 \tau + \frac{1}{mk^2} \{F(\operatorname{am} m\tau) - E(\operatorname{am} m\tau)\}, \quad (4.29)$$

где F и E — эллиптические интегралы первого и второго рода.

Из (4.21) следует, что движение по эллиптической орбите периодически по τ с периодом $4K(k)/m$. По формуле (4.29) находим период по t :

$$T = \frac{4\lambda^2}{m} K(k) + \frac{1}{mk^2} [K(k) - E(k)]. \quad (4.30)$$

Пользуясь малостью модуля k и эксцентриситета орбиты, разложим выражение (4.30) для периода в ряд по степеням e :

$$T = \frac{2\pi}{n} \left[1 + \frac{9}{8} e^2 + \frac{3}{2} e^4 + \dots \right], \quad (4.31)$$

где

$$n = \sqrt{\frac{fM}{a^3}}. \quad (4.32)$$

Отсюда можно видеть, что период обращения спутника зависит не только от массы Земли, но и от ее сжатия.

Перейдем к изучению второго спутникового случая полярных орбит, для которого $\beta \leq \lambda \leq \alpha$, $-1 \leq \mu \leq 1$. Движение происходит внутри эллиптического кольца. Нетрудно найти, что большая полуось и эксцентриситет внешней эллиптической границы выражаются следующим образом через корень α :

$$a_1 = c \sqrt{1 + \alpha^2}, \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}. \quad (4.33)$$

Соответствующие величины для внутреннего эллипса суть

$$a_2 = c \sqrt{1 + \beta^2}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}}. \quad (4.34)$$

Для координаты μ сохраняется прежнее значение. Координату λ находим из (4.5), обращая соответствующий эллиптический интеграл [136]:

$$\lambda = \frac{A + B \operatorname{cn} [\omega (\tau - \tau_0), \bar{k}]}{C + D \operatorname{cn} [\omega (\tau - \tau_0), \bar{k}]}, \quad (4.35)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} A &= \beta \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha \sqrt{1 + \beta^2}, \quad C = \sqrt{1 + \beta^2} + \sqrt{1 + \alpha^2}, \\ B &= \beta \sqrt{1 + \alpha^2} - \alpha \sqrt{1 + \beta^2}, \quad D = \sqrt{1 + \alpha^2} - \sqrt{1 + \beta^2}, \\ \bar{k}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1 + \alpha\beta}{\sqrt{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)}} \right\}, \\ \omega &= \sqrt[4]{4h_1^2(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Подставляя в (4.1) найденные значения координат μ и λ , получаем

$$x = \frac{2N \operatorname{dn} [\omega (\tau - \tau_0), \bar{k}]}{1 - \gamma \operatorname{cn} [\omega (\tau - \tau_0), \bar{k}]} \operatorname{cn} (m\tau, k), \quad (4.37)$$

$$z = \frac{\sqrt{1 - e_1^2} + \sqrt{1 - e_2^2} - (\sqrt{1 - e_1^2} - \sqrt{1 - e_2^2}) \operatorname{cn} [\omega (\tau - \tau_0), \bar{k}]}{1 - \gamma \operatorname{cn} [\omega (\tau - \tau_0), \bar{k}]} \times \\ \times N \operatorname{sn} (m\tau, k),$$

где

$$\left. \begin{aligned} N &= -\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}, \quad \gamma = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}, \\ m &= \sqrt{\frac{a_1 \sqrt{1 - e_1^2} + a_2 \sqrt{1 - e_2^2}}{2} \cdot \frac{fM}{c^4}}, \\ \omega &= \sqrt{\frac{2a_1 a_2}{a_1 \sqrt{1 - e_1^2} + a_2 \sqrt{1 - e_2^2}} \cdot \frac{fM}{c^4}}, \\ k^2 &= \frac{4e_1^2 e_2^2}{(e_1 \sqrt{1 - e_1^2} + e_2 \sqrt{1 - e_2^2})^2}, \\ \bar{k}^2 &= \frac{1}{2} [1 + e_1 e_2 - \sqrt{(1 - e_1^2)(1 - e_2^2)}]. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Из выражений для k и $\bar{k}$ видим, что и в этом случае модули эллиптических функций Якоби будут малыми величинами. Следовательно, можно воспользоваться разложениями эллиптических функций в ряды по косинусам и синусам кратных $\tau - \tau_0$, где τ_0 — некоторая постоянная. Эти разложения будут получены для общего случая в следующей главе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ОРБИТ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ

§ 1. Обращение квадратур в основном спутниковом случае

Формулы (6.62) — (6.65), выведенные в гл. III, дают общее решение обобщенной задачи двух неподвижных центров. Положим для удобства

$$\xi = c \operatorname{sh} u, \quad \eta = \cos u, \quad (1.1)$$

где сфероидальные координаты ξ, η связаны с прямоугольными координатами x, y, z соотношениями

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{(c^2 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \cos \omega, \\ y &= \sqrt{(c^2 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \sin \omega, \\ z &= \xi \eta, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

которые легко находятся с помощью формул преобразования (6.39) гл. III. Тогда вместо (6.62) — (6.65) для общего решения будем иметь следующие квадратуры:

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^4 - \left(\frac{c_2}{hc^2} + 1\right)\eta^2 + \left(\frac{c_2}{hc^2} + \frac{c_1^2}{2hc^2}\right)}} = \sqrt{-2hc^2}(\tau + c_3), \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^4 - \frac{fM}{h}\xi^3 - \left(\frac{c_2}{h} + c^2\right)\xi^2 - \frac{fMc^2}{h}\xi - c^2\left(\frac{c_2}{h} + \frac{c_1^2}{2h}\right)}} &= \\ &= \sqrt{-2h}(\tau + c_4), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\omega = c_1 \int \frac{(\xi^2 + c^2\eta^2) d\tau}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} + c_5, \quad (1.5)$$

$$t = \int (\xi^2 + c^2\eta^2) d\tau. \quad (1.6)$$

В дальнейшем мы займемся приведением этих квадратур к виду, удобному для практического применения. Можно ограничиться основным спутниковым случаем, который был выявлен в гл. III и характеризуется тем, что многочлен в квадратуре (1.4) имеет два действительных и два комплексных сопряженных корня. Фигурирующие в решении элементы h , c_1 , c_2 не имеют простого геометрического смысла и не являются удобными. Целесообразно ввести вместо них новые постоянные, подобно тому как это было выше сделано нами при решении задачи Баррара (см. §§ 4 и 7 гл. III). Мы воспользуемся элементами, предложенными И. Иззаком [130]. В основном будем следовать работе [134]*).

Два элемента a и e выберем так, чтобы величины $a(1 - e)$ и $a(1 + e)$ представляли бы действительные корни полинома

$$\Phi_2(\xi) = \xi^4 + \frac{fM}{h} \xi^3 + \left(\frac{c_2}{h} + c^2\right) \xi^2 + \frac{fMc^2}{h} \xi + \frac{c^2}{h} \left(c_2 + \frac{c_1^2}{2}\right). \quad (1.7)$$

Заметим, что во все время движения величина ξ будет заключаться между указанными корнями $\xi_1 = a(1 - e)$ и $\xi_2 = a(1 + e)$. Два других корня многочлена (1.7) в исследуемом случае будут комплексно-сопряженными. Представим их в виде

$$\xi_3 = \alpha + i\beta, \quad \xi_4 = \alpha - i\beta. \quad (1.8)$$

Элементы a и e аналогичны большой полуоси и эксцентриситету эллиптической орбиты соответственно, а при $c = 0$ они совпадают с ними. В этом и состоит их главное достоинство.

Очевидно, что элементы a и e со старыми постоянными связаны соотношениями

$$a^4(1 - e)^4 + \frac{fM}{h} a^3(1 - e)^3 + \left(\frac{c_2}{h} + c^2\right) a^2(1 - e)^2 + \\ + \frac{fM}{h} ac^2(1 - e) + c^2 \left(\frac{c_2}{h} + \frac{c_1^2}{2h}\right) = 0, \quad (1.9)$$

*) Впервые квазикеплеровские элементы орбиты были введены Тиле в плоской задаче двух неподвижных центров.

и

$$a^4(1+e)^4 + \frac{fM}{h} a^3(1+e)^3 + \left(\frac{c_2}{h} + c^2\right) a^2(1+e)^2 + \\ + \frac{fM}{h} c^2 a(1+e) + c^2 \left(\frac{c_2}{h} + \frac{c_1^2}{2h}\right) = 0. \quad (1.10)$$

Третий элемент введем, рассматривая второй многочлен, входящий в общее решение задачи:

$$\Phi_1(\eta) = \eta^4 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{c_2}{h} + c^2\right) \eta^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{c_2}{h} + \frac{c_1^2}{2h}\right). \quad (1.11)$$

Пусть корни этого полинома будут $\pm s, \pm \gamma$. Тогда многочлен $\Phi_1(\eta)$ можно представить в виде

$$\Phi_1(\eta) = (\eta^2 - s^2)(\eta^2 - \gamma^2). \quad (1.12)$$

Корни γ и s связаны друг с другом зависимостью

$$\gamma = \sqrt{1 - s^2 + \frac{c_2}{hc^2}}. \quad (1.13)$$

Примем корень s в качестве нового элемента. Под $\pm s$ здесь подразумеваются те корни уравнения, между которыми колеблется в процессе движения координата η . Если c положить равным нулю, то корень s совпадает с синусом наклонности орбиты задачи двух тел.

Одну из прежних постоянных, а именно c_1 , легко исключить из рассмотрения, выразив ее через h, c_2, s :

$$c_1^2 = -2hc^2 \left[s^4 + \frac{c_2}{hc^2} - \frac{hc^2 + c_2}{hc^3} s^2 \right]. \quad (1.14)$$

Так как аппроксимирующий потенциал совпадает с реальным потенциалом с точностью до величин порядка квадрата сжатия, то целесообразно все встречающиеся в решении величины вычислять с точностью до квадрата сжатия. С этой целью мы будем пользоваться разложениями в ряды по степеням малого безразмерного параметра ε , определяемого формулой

$$\varepsilon = \frac{c}{p},$$

где $p = a(1 - e^2)$ представляет собой аналог фокального параметра.

Эта величина не превышает $1/30$, как это следует из критерия реальных движений (1.26) гл. IV. Поэтому можно при разложении необходимых нам величин в ряды по степеням ε ограничиваться членами с ε^4 .

Подставляя теперь в (1.10) значение c_1 из (1.14) и решая получающуюся при этом систему относительно c_2/h и fM/h с точностью до ε^4 включительно, будем иметь

$$\frac{c_2}{h} = p \{ 1 + \varepsilon^2 (3 + e^2) (1 - s^2) + \varepsilon^4 [4(1 - e^2) - 16s^2 + 4(3 + e^2)s^4] \} + \dots, \quad (1.15)$$

$$\frac{fM}{h} = -2a \{ 1 + \varepsilon^2 (1 - e^2) (1 - s^2) + \varepsilon^4 [(1 - e^2)^2 - (5 - e^2)(1 - e^2)s^2 + 4(1 - e^2)s^4] \} + \dots \quad (1.16)$$

Найденные значения для h и c_2 подставим в соотношение (1.14)

$$c_1 = \pm \sqrt{fMp(1 - s^2)} \left\{ 1 + \varepsilon^2 \left[(1 + e^2) - \frac{1}{2}(3 + e^2)s^2 \right] + \varepsilon^4 \left[-2e^2 - \frac{1}{2}(3 + 4e^2 + e^4)s^2 + \left(\frac{11}{8} + \frac{17}{4}e^2 + \frac{3}{8}e^4 \right) s^4 \right] \right\} + \dots \quad (1.17)$$

В этой формуле следует взять знак плюс для орбит прямого движения и знак минус для орбит обратного движения. Иначе говоря, c_1 положительно при наклонности орбиты, меньшей 90° , а для наклонностей, превосходящих 90° , c_1 принимает отрицательные значения.

В последующем будут также необходимы выражения через элементы Иззака для корней ξ_3 , ξ_4 и γ . Для этого подставим выражения для c_1 , c_2 и h в полином (1.8) и, приравняв его нулю, найдем следующие выражения для α и β :

$$\alpha = p \{ \varepsilon^2 (1 - s^2) + \varepsilon^4 [1 - e^2 - (5 - e^2)s^2 + 4s^4] \}, \quad (1.18)$$

$$\beta^2 = p\varepsilon^2 [s^2 - \varepsilon^2 (1 - 6s^2 + 5s^4)]. \quad (1.19)$$

В основном спутниковом случае корни ξ_3 и ξ_4 должны быть комплексными, т. е., как видно из (1.19), должно выполняться условие

$$s^2 - \varepsilon^2 (1 - 6s^2 + 5s^4) > 0 \quad (1.20)$$

или

$$|s| > \varepsilon (1 - 3\varepsilon^2). \quad (1.21)$$

Но $\varepsilon \leq 1/30$, поэтому для существования комплексных корней достаточно, чтобы $|s| > 0,033$. Так как s характеризует наклонность орбиты, то последнее неравенство означает, что надлежит исключить из рассмотрения орбиты, близкие к экваториальным. Этот случай требует особого исследования.

Принимая во внимание соотношение (1.15), разложим (1.13) в ряд по степеням ε

$$\gamma = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{1 - e^2}} \{1 + 2\varepsilon^2 (1 - s^2) - 2\varepsilon^4 [e^2 + 2s^2 - (2 + e^2) s^4]\} + \dots \quad (1.22)$$

Теперь интеграл (1.3) представим в форме

$$\int \frac{d\left(\frac{\eta}{s}\right)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\eta}{s}\right)^2\right]\left[1 - k^2 \left(\frac{\eta}{s}\right)^2\right]}} = \sigma(\tau + c_3), \quad (1.23)$$

где введены обозначения

$$\sigma = c\gamma \sqrt{-2h}, \quad (1.24)$$

$$k = \frac{s}{\gamma}. \quad (1.25)$$

Обращая эллиптическую квадратуру (1.23), находим

$$\eta = s \operatorname{sn} [\sigma(\tau + c_3), k]. \quad (1.26)$$

С помощью формул (1.15), (1.16) и (1.22) величины k и σ можно представить в виде рядов по степеням ε .

Как и ранее, ограничимся их первыми членами

$$k^2 = \varepsilon^2 (1 - e^2) s^2 [1 - 4\varepsilon^2 (1 - s^2)] + \dots, \quad (1.27)$$

$$\sigma = \sqrt{fMp} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (3 + e^2) (1 - s^2) - \varepsilon^4 \left[\frac{1}{8} (9 + 6e^2 + e^4) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} (1 + 14e^2 + e^4) s^2 - \frac{1}{8} (11 + 34e^2 + 3e^4) s^4 \right] \right\} + \dots \quad (1.28)$$

Как видно из (1.27), модуль k имеет тот же порядок, что и ε .

Не представляет труда обращение второй квадратуры (1.4), которая записывается следующим образом:

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_1)[(\xi - \alpha)^2 + \beta^2]}} = \sqrt{-2h}(\tau + c_4). \quad (1.29)$$

С помощью таблиц [141] находим

$$\xi = \frac{\bar{p} \{1 + \kappa \operatorname{cn} [\sigma_1(\tau + c_4), k_1]\}}{1 + \bar{e} \operatorname{cn} [\sigma_1(\tau + c_4), k_1]}, \quad (1.30)$$

где

$$\bar{p} = \frac{a [\bar{\alpha}(1 - e) + \bar{\beta}(1 + e)]}{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}, \quad (1.31)$$

$$\kappa = \frac{\bar{\alpha}(1 - e) - \bar{\beta}(1 + e)}{\bar{\alpha}(1 - e) + \bar{\beta}(1 + e)}, \quad (1.32)$$

$$\bar{e} = \frac{\bar{\alpha} - \bar{\beta}}{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}, \quad (1.33)$$

причем

$$\bar{\alpha} = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha a(1 + e) + a^2(1 + e)^2, \quad (1.34)$$

$$\bar{\beta} = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha a(1 - e) + a^2(1 - e)^2. \quad (1.35)$$

Постоянная σ_1 и модуль эллиптической функции Якоби k_1 определяются соотношениями

$$\sigma_1 = \sqrt{-2h\alpha\bar{\beta}}, \quad (1.36)$$

$$k_1 = \frac{a^2 [4e^2 - (\bar{\alpha} - \bar{\beta})^2]}{4\bar{\alpha}\bar{\beta}}. \quad (1.37)$$

Коэффициенты и вспомогательные постоянные, введенные в формулах (1.30) — (1.37), также можно представить в виде рядов

$$\bar{e} = e \{1 + \varepsilon^2(1 - e^2)(1 - 2s^2) + \varepsilon^4(1 - e^2)[(3 - 16s^2 + 14s^4) - 2e^2(1 - s^2)^2]\} + \dots, \quad (1.38)$$

$$\kappa = e\varepsilon^2 \{(1 - 2s^2) + \varepsilon^2[(3 - 16s^2 + 14s^4) - e^2(1 - 2s^4)]\} + \dots, \quad (1.39)$$

$$\bar{p} = a(1 - e\bar{e}), \quad (1.40)$$

и

$$k_1^2 = e^2 \varepsilon^2 [s^2 - \varepsilon^2 (1 - 10s^2 + 11s^4 + e^2 s^4)] + \dots, \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sqrt{fMp} \left\{ 1 - \varepsilon^2 \left(\frac{3 - e^2}{2} - 2s^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{e^4}{8} [(9 + 2e^2 + e^4) - (72 + 40e^2)s^2 + \right. \\ \left. + (64 + 48e^2)s^4] \right\} + \dots \quad (1.42) \end{aligned}$$

Как видно из формулы (1.41), модуль эллиптической функции в (1.30) весьма мал, ибо он пропорционален ε .

Из формул (3.22) гл. I и (1.1) этого параграфа следует, что при $\xi = \text{const}$ спутник должен находиться на эллипсоиде

$$\frac{x^2 + y^2}{\xi^2 + c^2} + \frac{z^2}{\xi^2} = 1. \quad (1.43)$$

Но согласно формуле (1.30)

$$a(1 - e) \leq \xi \leq a(1 + e).$$

Итак, движение спутника происходит внутри эллипсоидального слоя. Большая и малая полуоси внешнего граничного эллипсоида соответственно равны $\sqrt{a^2(1 + e)^2 + c^2}$ и $a(1 + e)$, для внутреннего эллипсоида соответствующие величины равны $\sqrt{a^2(1 - e)^2 + c^2}$ и $a(1 - e)$. Эксцентриситеты внутреннего и внешнего граничных эллипсоидов имеют значения $\varepsilon(1 + e)^2 [1 + \varepsilon^2(1 + e)^2]^{-\frac{1}{2}}$, $\varepsilon(1 - e)^2 [1 + \varepsilon^2(1 - e)^2]^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда видно, что при увеличении больших полуосей эллипсоидов их эксцентриситеты убывают. Наибольшее различие между большой и малой полуосями граничных эллипсоидов составляет 4 км.

Другой граничной поверхностью области возможности движения является однополостный гиперболоид вращения $\eta = s$, который вырезает из эллипсоидального слоя тороидальное тело, внутри которого происходит движение. Полуоси гиперболоида и его эксцентриситет соответственно равны

$$c \sqrt{1 - s^2}, \quad cs, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}.$$

§ 2. Разложение координат спутника в ряды

Формулы (1.26) и (1.30) дают представление эллипсоидальных координат через эллиптические функции Якоби. На практике в ряде случаев, в частности при построении точной аналитической теории возмущенного движения спутников [137—139], удобнее пользоваться разложениями координат в ряды по степеням малых модулей эллиптических интегралов (1.3) и (1.4). Такие разложения можно получить различными способами. Первые члены разложений весьма просто вычисляются с помощью преобразования Ландена [140, 141], приводящего к быстрому уменьшению модулей эллиптических интегралов (см. § 3). Хорошие результаты могут дать разложения координат в ряды по тэта-функциям. Можно также воспользоваться тригонометрическими рядами для эллиптических функций. Последний способ был применен И. Иззаком [130] и Е. П. Аксеновым [134]. Следуя этим авторам, введем вспомогательные переменные φ и v по формулам

$$\varphi = \operatorname{am} \sigma (\tau + c_3), \quad (2.1)$$

$$v = \operatorname{am} \sigma_1 (\tau + c_4). \quad (2.2)$$

Разлагая эти функции в ряды по степеням модулей k и k_1 ,

$$\begin{aligned} \sigma(\tau + c_3) = \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9}{64} k^4\right) \varphi - \frac{k^2}{8} \left(1 + \frac{3}{4} k^2\right) \sin 2\varphi + \\ + \frac{3}{256} k^4 \sin 4\varphi + \dots, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(\tau + c_4) = \left(1 + \frac{1}{4} k_1^2 + \frac{9}{64} k_1^4\right) v - \\ - \frac{k_1^2}{8} \left(1 + \frac{3}{4} k_1^2\right) \sin 2v + \frac{3}{256} k_1^4 \sin 4v + \omega + \dots, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где ω — новая постоянная, связанная с c_3 и c_4 зависимостью

$$\omega = \sigma_1 (c_3 - c_4). \quad (2.5)$$

Исключая из уравнений (2.3) и (2.4) регуляризованное время τ , приходим к зависимости между величинами

v и φ :

$$\varphi - \left(\frac{k^2}{8} + \frac{k^4}{16} \right) \sin 2\varphi + \frac{3}{256} k^4 \sin 4\varphi = \omega + (1 + v) \left[v - \frac{1}{16} (2k_1^2 + k_1^4) \sin 2v + \frac{3}{256} k_1^2 \sin 4v \right] + \dots, \quad (2.6)$$

причем v определяется по формуле

$$v = -1 + \frac{64 + 16k_1^2 + 9k_1^4}{64 + 16k^2 + 9k^4}. \quad (2.7)$$

С помощью (1.27) и (1.41) отсюда получаем

$$v = \frac{\varepsilon^2}{4} (12 - 15s^2) + \frac{\varepsilon^4}{64} [(288 - 1296s^2 + 1035s^4) - e^2(144 + 288s^2 - 510s^4)] + \dots \quad (2.8)$$

Разрешая теперь уравнение (2.6) относительно переменной φ , будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi = u + & \left[-\frac{1}{8} \varepsilon^2 e^2 s^2 + \frac{1}{8} \varepsilon^4 e^2 \left(1 - 13s^2 + \frac{59}{4} s^4 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} e^2 s^4 \right) \right] \sin 2v + \left\{ \frac{\varepsilon^2}{8} (1 - e^2) s^2 - \frac{\varepsilon^2}{16} s^2 [(8 - 9s^2) - \right. \\ & \left. - e^2(8 - 10s^2) - e^4 s^2] \right\} \sin 2u + \frac{3}{256} \varepsilon^4 e^4 s^4 \sin 4v + \\ & + \frac{1}{256} \varepsilon^4 (1 - e^2)^2 s^4 \sin 4u + \frac{\varepsilon^4}{64} e^2 (1 - e^2) s^4 \sin 2(u - v) - \\ & - \frac{\varepsilon^4}{64} e^2 (1 - e^2) s^4 \sin 2(u + v) + \dots, \quad (2.9) \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$u = (1 + v) v + \omega. \quad (2.10)$$

Перейдем к разложению в тригонометрический ряд геоцентрического радиуса-вектора спутника, для которого из формул (1.2) имеем

$$r = \sqrt{(c^2 + \xi^2)(1 - \eta^2) + \xi^2 \eta^2}. \quad (2.11)$$

Разложение правой части этой формулы в ряд по степеням c/ξ (с точностью до четвертой степени этой величины) записывается в виде

$$r = \xi \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\xi} \right)^2 (1 - \eta^2) - \frac{1}{8} \left(\frac{c}{\xi} \right)^4 (1 - \eta^2)^2 \right]. \quad (2.12)$$

Принимая во внимание формулы (2.1) и (2.2), соотношения

(1.26) и (1.30) представим в форме

$$\eta = s_{\pm}^2 \sin \varphi, \quad (2.13)$$

$$\xi = \frac{\bar{p}(1 + \kappa \cos v)}{1 + \bar{e} \cos v}. \quad (2.14)$$

Подставляя эти выражения в (2.12) и сохраняя только члены определенного порядка по ε , будем иметь

$$\begin{aligned} r = \frac{\bar{p}}{1 + \bar{e} \cos v} \{ & p_{0,0} + p_{0,1} \cos v + p_{0,2} \cos 2v + p_{0,3} \cos 3v + \\ & + p_{2,0} \cos 2\varphi + p_{2,-1} \cos (2\varphi - v) + p_{2,1} \cos (2\varphi + v) + \\ & + p_{2,2} \cos (2\varphi + 2v) + p_{2,-2} \cos (2\varphi - 2v) \}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p_{0,0} &= 1 + \frac{\varepsilon^2}{8} [(4 - 2s^2) + e^2(2 - s^2)] - \\ &- \frac{1}{8} \varepsilon^4 \left[\left(1 - s^2 + \frac{3}{8} s^4 \right) - e^2 \left(5 - 17s^2 + \frac{55}{8} s^4 \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^4 \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{8} s^2 + \frac{9}{64} s^4 \right) \right], \\ p_{0,1} &= e \left\{ \left(2 - \frac{5}{2} s^2 \right) \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^4}{8} \left[\left(24 - 134s^2 + \frac{229}{2} s^4 \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^2 \left(6 + \frac{19}{2} s^2 - \frac{159}{8} s^4 \right) \right] \right\}, \\ p_{0,2} &= e^2 \left\{ \frac{\varepsilon^2}{8} (2 - s^2) - \frac{\varepsilon^4}{8} \left[\left(3 - 3s^2 + \frac{9}{8} s^4 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} s^2 + \frac{3}{16} s^4 \right) \right] \right\}, \\ p_{0,3} &= -\frac{\varepsilon^4}{8} e^3 \left(2 - \frac{7}{2} s^2 + \frac{11}{8} s^4 \right), \\ p_{2,0} &= \frac{\varepsilon^2}{8} (2 + e^2) s^2 - \frac{\varepsilon^4}{8} \left[\left(s^2 - \frac{1}{2} s^4 \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^2 \left(s^2 - \frac{13}{2} s^4 \right) + e^4 \left(\frac{3}{8} s^2 - \frac{3}{16} s^4 \right) \right], \\ p_{2,-1} &= p_{2,1} = e s^2 \left\{ \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^4}{16} \left[2(1 + s^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2} s^2 \right) \right] \right\}, \\ p_{2,2} &= p_{2,-2} = e^2 s^2 \left\{ \frac{\varepsilon^2}{16} - \frac{\varepsilon^4}{16} \left[\left(3 - \frac{3}{2} s^2 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} s^2 \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Аналогичным образом находится разложение для z :

$$z = \frac{\bar{p}s}{1 - \frac{e}{\epsilon} \cos v} [\sin \varphi + q_{1,-1} \sin(\varphi - v) + q_{1,1} \sin(\varphi + v)], \quad (2.17)$$

в котором

$$q_{1,1} = q_{1,-1} = \frac{e\epsilon^2}{2} \{(1 - 2s^2) + \epsilon^2 [(3 - 16s^2 + 14s^4) - e^2(1 - 2s^4)]\}. \quad (2.18)$$

Представление долготы w через переменные φ и v можно найти из формулы (1.5). Разлагая подынтегральную функцию в (1.5) в ряд по степеням c/ξ , получаем

$$w = c_1 \int \left[\frac{1}{1 - \eta^2} - \left(\frac{c}{\xi} \right)^2 + \left(\frac{c}{\xi} \right)^4 \right] d\tau + c_5. \quad (2.19)$$

Первый из интегралов (2.19) с помощью (2.1) преобразуем к виду

$$\int \frac{d\varphi}{\sigma(1 - s^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (2.20)$$

Если выполнить разложение в степенной ряд подынтегральной функции в (2.20), то найдем

$$\int \frac{d\tau}{1 - \eta^2} = \frac{1}{\sigma} \left[\int \frac{d\tau}{1 - s^2 \sin^2 \varphi} + \frac{k^2}{2} \int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{1 - s^2 \sin^2 \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{3}{8} k^4 \int \frac{\sin^4 \varphi d\varphi}{1 - s^2 \sin^2 \varphi} \right]. \quad (2.21)$$

Выполняя интегрирование, будем иметь

$$\int \frac{d\tau}{1 - \eta^2} = \frac{1}{\sigma \sqrt{1 - s^2}} \left\{ \left(1 + \frac{k^2}{2s^2} + \frac{3k^4}{8s^4} \right) \operatorname{arctg} (\sqrt{1 - s^2} \operatorname{tg} \varphi) - \right. \\ \left. - \left[\frac{k^2}{2s^2} + \frac{3k^4}{16s^4} (2 + s^2) \right] \sqrt{1 - s^2} \varphi + \frac{3k^4}{32s^2} \sqrt{1 - s^2} \sin 2\varphi \right\}. \quad (2.22)$$

Второй интеграл (2.19) вычисляется с помощью подстановки

$$d\tau = \frac{dv}{\sigma_1 \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 v}}. \quad (2.23)$$

Подставив найденные значения интегралов в (2.19), окончательно будем иметь

$$\omega = \pm [\arctg (\sqrt{1-s^2} \operatorname{tg} \varphi) + c_0 \varphi + c_2 \sin 2\varphi + \bar{c}_0 v + \bar{c}_1 \sin v + \bar{c}_2 \sin 2v + \bar{c}_3 \sin 3v + c_5, \quad (2.24)$$

где коэффициенты c_i , $\bar{c}_i$ определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= -\frac{e^2}{2} (1-e^2) \sqrt{1-s^2} \times \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{e^2}{8} [(30-35s^2) + (2+3s^2)e^2] \right\}, \\ c_2 &= \frac{3}{32} e^4 (1-e^2)^2 s^2 \sqrt{1-s^2}, \\ \bar{c}_0 &= -\frac{e^2}{2} (2+e^2) \left\{ 1 + \frac{e^2}{8(2+e^2)} [(24-56s^2) - \right. \\ &\quad \left. - e^2(4+64s^2) - e^4(2+3s^2)] \right\} \sqrt{1-s^2}, \\ \bar{c}_1 &= -2e^2 \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [(4-28s^2) - \right. \\ &\quad \left. - (6+7s^2)e^2] \right\} e \sqrt{1-s^2}, \\ \bar{c}_3 &= \frac{e^4 e^3}{4} \sqrt{1-s^2} (2-s^2), \\ \bar{c}_2 &= -\frac{e^2 e^2}{4} \sqrt{1-s^2} \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} [11 + e^2(1+s^2)] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

В формуле (2.24) при $i < 90^\circ$ следует брать знак «+», а при $i > 90^\circ$ — знак «-». Иначе говоря, знак «+» соответствует орбитам с наклонностью, меньшей 90° , а знак «-» — орбитам с наклонностью, превышающей 90° .

Можно получить и другие представления координат. Так, например, более удобны разложения, в которых вместо переменной φ введена переменная u , определяемая соотношением (2.10). Эти разложения имеют вид

$$\begin{aligned} r &= \frac{\bar{p}}{1 + \bar{e} \cos v} \{ a_{0,0} + a_{0,1} \cos v + a_{0,2} \cos 2v + a_{0,3} \cos 3v + \\ &\quad + a_{2,0} \cos 2u + a_{2,1} \cos (2u + v) + a_{2,-1} \cos (2u - v) + \\ &\quad + a_{2,-2} \cos (2u - 2v) + a_{2,2} \cos (2u + 2v) \}, \quad (2.26) \end{aligned}$$

$$z = \frac{\bar{p}s}{1 + \bar{e} \cos v} \{ b_{1,0} \sin u + b_{3,0} \sin 3u + \\ + b_{1,-1} \sin(u-v) + b_{1,1} \sin(u+v) + \\ + b_{1,-2} \sin(u-2v) + b_{1,2} \sin(u+2v) + \dots \}, \quad (2.27)$$

$$w = \pm [\bar{w} + \mu u + c_{0,1} \sin v + c_{0,2} \sin 2v + \\ + c_{0,3} \sin 3v + c_{2,0} \sin 2u] + \Omega, \quad (2.28)$$

причем коэффициенты разложений (2.26) — (2.28) вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} a_{0,0} &= 1 + \frac{e^2}{8} [(4 - 2s^2) + e^2(2 - s^2)] - \\ &- \frac{e^4}{8} \left[\left(1 - s^2 + \frac{5}{8} s^4 \right) - e^2(5 - 17s^2 + 7s^4) + \right. \\ &\quad \left. + e^4 \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{8} s^2 + \frac{1}{64} s^4 \right) \right], \\ a_{0,1} &= e \left\{ e^2 \left(2 - \frac{5}{2} s^2 \right) + \frac{e^4}{8} \left[(24 - 134s^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 114s^4) - e^2 \left(6 + \frac{19}{2} s^2 - \frac{163}{8} s^4 \right) \right] \right\}, \\ a_{0,2} &= e^2 \left\{ \frac{e^2}{8} (2 - s^2) - \frac{e^4}{8} \left[\left(3 - 3s^2 + \frac{5}{4} s^4 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{16} s^4 \right) \right] \right\}, \\ a_{0,3} &= -\frac{e^4 e^3}{8} \left(2 - \frac{7}{2} s^2 + \frac{11}{8} s^4 \right), \\ a_{2,0} &= s^2 \left\{ \frac{e^2}{8} (2 + e^2) - \frac{e^4}{8} \left[\left(1 - \frac{1}{2} s^2 \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^2 \left(1 - \frac{13}{2} s^2 \right) + e^4 \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{16} s^2 \right) \right] \right\}, \\ a_{2,-1} &= e s^2 e^2 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{e^2}{16} \left[2(1 + s^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^2 \left(\frac{1}{2} + 3s^2 \right) \right] \right\}, \\ a_{2,1} &= e s^2 e^2 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{e^2}{16} \left[2(1 + s^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^2 \left(\frac{1}{2} + 4s^2 \right) \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

$$a_{2,-2} = e^2 s^2 e^2 \left\{ \frac{1}{16} - \frac{e^2}{16} \left[(3 - 2s^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} s^2 \right) \right] \right\}, \quad (2.29)$$

$$a_{2,2} = e^2 s^2 e^2 \left\{ \frac{1}{16} - \frac{e^2}{16} \left[(3 - s^2) + \frac{1}{2} e^2 \right] \right\};$$

$$b_{1,0} = 1 + \frac{e^2}{16} (1 - e^2) s^2 - \frac{e^4 s^2}{256} [(64 - 71s^2) - \\ - e^2 (64 - 78s^2) - 6e^4 s^2],$$

$$b_{3,0} = s^2 e^2 \left\{ \frac{1}{16} (1 - e^2) - \frac{e^2}{32} [(8 - 9s^2) - \\ - e^2 (8 - 10s^2) - e^4 s^2] \right\},$$

$$b_{1,-1} = \frac{e^2 e}{2} (1 - 2s^2) + \frac{e^4 e}{32} [(48 - 255s^2 + 222s^4) - \\ - e^2 (16 - 32s^4)],$$

$$b_{1,1} = \frac{e^2 e}{2} (1 - 2s^2) + \frac{e^4 e}{32} [(48 - 255s^2 + 222s^4) - \\ - e^2 (16 + 2s^2 - 36s^4)], \quad (2.30)$$

$$b_{1,2} = -b_{1,-2} = -\frac{e^2 e^2 s^2}{16} + \\ + \frac{e^4 e^2}{16} \left(1 - 13s^2 + \frac{235}{16} s^4 + \frac{9}{16} e^2 s^4 \right);$$

$$\mu = \left\{ -\frac{3}{2} + \frac{e^2}{16} [(54 - 39s^2) + 72e^2 s^2] \right\} \times \\ \times \sqrt{1 - s^2} e^2,$$

$$c_{0,1} = -\left\{ 2 + \frac{e^2}{4} [(4 - 28s^2) - (6 + 7s^2) e^2] \right\} \times \\ \times e \sqrt{1 - s^2} e^2,$$

$$c_{0,2} = -\left\{ \frac{1}{4} - \frac{e^2}{16} [(22 + s^2) + (2 + s^2) e^2] \right\} \times \\ \times e^2 \sqrt{1 - s^2} e^2, \quad (2.31)$$

$$c_{0,3} = \frac{e^4}{4} (2 - s^2) e^3 \sqrt{1 - s^2},$$

$$c_{2,0} = \frac{e^4}{32} (1 - e^2)^2 s^2 \sqrt{1 - s^2},$$

$$\text{tg } \bar{\omega} = \sqrt{1 - s^2} \text{tg } \varphi,$$

где вместо φ необходимо поставить его значение из (2.9).

§ 3. Второй способ приближенного представления координат

Рассмотрим эллиптический интеграл

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi}} = u, \quad (3.1)$$

обращение которого дает

$$\psi = \operatorname{am}(u, \kappa). \quad (3.2)$$

В нашей задаче, как было показано, модули эллиптических интегралов суть величины порядка $\varepsilon \approx 0,03$. Для практических нужд в рабочих формулах достаточно сохранять члены, имеющие порядок не выше ε^4 . Имея это в виду, преобразуем интеграл (3.1) и его обращение, полагая

$$\sin(2\psi - \psi_1) = \kappa_1 \sin \psi_1, \quad (3.3)$$

где

$$\kappa_1 = \frac{\kappa^2}{(1 + \kappa'^2)}, \quad (3.4)$$

причем

$$\kappa'^2 = 1 - \kappa^2. \quad (3.5)$$

Вместо (3.1) получаем

$$u = \frac{1 + \kappa_1}{2} \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi_1}{\sqrt{1 - \kappa_1^2 \sin^2 \psi_1}}. \quad (3.6)$$

В задаче о движении ИСЗ κ_1 будет иметь порядок ε^2 . Произведем еще раз преобразование Ландена

$$\sin(2\psi_1 - \psi_2) = \kappa_2 \sin \psi_2, \quad (3.7)$$

где

$$\kappa_2 = \frac{\kappa_1^2}{(1 + \kappa_1'^2)}, \quad (3.8)$$

а $\kappa_1'^2 = 1 - \kappa_1^2$. Тогда

$$u = \frac{(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)}{4} \int_0^{\psi_2} \frac{d\psi_2}{\sqrt{1 - \kappa_2^2 \sin^2 \psi_2}}. \quad (3.9)$$

Но κ_2 имеет порядок ε^4 , поэтому величиной κ_2^2 можно пренебречь. Тогда (3.9) дает

$$\psi_2 = \frac{4u}{(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)}. \quad (3.10)$$

Из соотношений (3.1), (3.3) и (3.7) можно получить следующее разложение ψ в ряд по степеням κ_1 и κ_2 :

$$\psi = \frac{1}{4} \psi_2 + \frac{\kappa_1}{2} \sin \frac{\psi_2}{2} + \frac{\kappa_2}{4} \sin \psi_2, \quad (3.11)$$

в котором удержаны члены до четвертой степени включительно относительно ε .

Полагая

$$\bar{\psi} = \frac{\psi_2}{4} \quad (3.12)$$

и рассматривая функции $\sin \psi$ и $\cos \psi$:

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi &= \sin \operatorname{am} u = \operatorname{sn} u, \\ \cos \psi &= \cos \operatorname{am} u = \operatorname{cn} u, \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

подставим в последние формулы вместо ψ разложение (3.11). Ограничиваясь членами порядка не выше ε^4 , найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \left(1 + \frac{\kappa_1}{4} - \frac{\kappa_1^2}{16}\right) \sin \bar{\psi} + \left(\frac{\kappa_1}{4} + \frac{\kappa_2}{8} - \frac{\kappa_1^3}{32}\right) \sin 3\bar{\psi} + \\ &+ \left(\frac{\kappa_2}{8} + \frac{\kappa_1^3}{32}\right) \sin 5\bar{\psi} + \dots, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cn} u &= \left(1 - \frac{\kappa_1}{4} - \frac{\kappa_1^2}{16}\right) \cos \bar{\psi} + \left(\frac{\kappa_1}{4} + \frac{\kappa_1^3}{32} - \frac{\kappa_2}{8}\right) \cos 3\bar{\psi} + \\ &+ \left(\frac{\kappa_2}{8} + \frac{\kappa_1^3}{32}\right) \cos 5\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Перейдем теперь к обращению квадратуры (1.23). Вводя

обозначение

$$u_1 = \frac{\sigma(\tau + c_3)}{(1 + k^{(1)})(1 + k^{(2)})} \quad (3.16)$$

и принимая во внимание формулу (3.14), получим

$$\eta = s \left\{ \left(1 + \frac{k^{(1)}}{4} - \frac{k^{(1)^2}}{16} \right) \sin u_1 + \left(\frac{k^{(1)}}{4} + \frac{k^{(2)}}{8} - \frac{k^{(1)^2}}{32} \right) \sin 3u_1 + \right. \\ \left. + \left(\frac{k^{(2)}}{8} + \frac{k^{(1)^2}}{32} \right) \sin 5u_1 \right\} + \dots, \quad (3.17)$$

где $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$ определяются формулами (3.4) и (3.8), если в последние подставить k .

Аналогичным образом из (1.30) и (2.15) получим первые члены ряда, представляющего ξ :

$$\xi = \frac{p\kappa}{\bar{e}} + \frac{\bar{e} - \kappa}{\bar{e}} \cdot \frac{1}{1 + \bar{e} \cos u_2} \left\{ 1 - \frac{a^{(1)} \cos 3u_2 + a^{(2)} \cos 5u_2}{1 + \bar{e} \cos u_2} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{e}^2 k_1 (1 + \cos 6u_2)}{32 (1 + \bar{e} \cos u_2)^2} \right\}, \quad (3.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{e} &= \bar{e} \left(1 - \frac{1}{4} k_1 - \frac{1}{16} k_1^2 \right), \quad u_2 = \frac{\sigma_1(\tau + c_4)}{(1 + k_1^{(1)})(1 + k_1^{(2)})}, \\ a^{(1)} &= \frac{k_1^{(1)}}{4} + \frac{k_1^{(1)^2}}{32} - \frac{k_1^{(2)}}{8}, \quad a^{(2)} = \frac{k_1^{(1)^2}}{32} + \frac{k_1^{(2)}}{8}. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

§ 4. Уравнение времени

Связь между регуляризированным временем τ и временем t дается формулой (1.6), которую можно записать в виде

$$t - \bar{t}_0 = c^2 \left[\int \left(\frac{\xi}{c} \right)^2 d\tau + \int \eta^2 d\tau \right]. \quad (4.1)$$

Подобно предыдущему второй из интегралов в (4.1) вычисляется посредством разложения в ряды и введения новой независимой переменной ϕ . Этот интеграл с точностью

до величин порядка ε^4 равен

$$\int c^2 \eta^2 d\tau = D_0 \varphi + D_2 \sin 2\varphi + D_4 \sin 4\varphi + \dots, \quad (4.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \varepsilon^2 s^2 \sqrt{\frac{a^3 (1-e^2)^3}{fM}} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{16} [(12-15s^2) + (4-s^2)e^2] \right\}, \\ D_2 &= -\varepsilon^2 s^2 \sqrt{\frac{a^3 (1-e^2)^3}{fM}} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^2}{8} [(3-4s^2) + e^2] \right\}, \\ D_4 &= \frac{\varepsilon^4 s^4}{64} \sqrt{\frac{a^3 (1-e^2)^3}{fM}} (1-e^2). \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Приближенное вычисление первого интеграла дает

$$\begin{aligned} \int \xi^2 d\tau &= \frac{\bar{p}^2}{\sigma_1} \left\{ \frac{2}{(1-\bar{e}^2)^{3/2}} [A_0 + (1-\bar{e}^2) A_1] \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\bar{e}}{1+\bar{e}}} \times \right. \\ &\times \left. \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{A_0 \bar{e}}{1-\bar{e}^2} \cdot \frac{\sin v}{1+\bar{e} \cos v} + B_0 v + B_1 \sin v + B_2 \sin 2v \right\}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 1 + \varepsilon^2 \left[-\left(2 - \frac{7}{2} s^2\right) + \frac{1}{2} e^2 s^2 \right] - \varepsilon^4 \left[\left(\frac{5}{2} - 17s^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{113}{8} s^4\right) + \left(\frac{1}{2} - 11s^2 + \frac{55}{4} s^4\right) e^2 + \frac{1}{8} e^4 s^4 \right], \\ A_1 &= \varepsilon^2 (2-3s^2) + \varepsilon^4 \left[\left(1-11s^2 + \frac{19}{2} s^4\right) - \right. \\ &\quad \left. - e^2 \left(5s^2 - \frac{13}{2} s^4\right) \right], \\ B_0 &= -\frac{1}{2} \varepsilon^2 s^2 + \varepsilon^4 \left[\left(\frac{3}{2} - 6s^2 + \frac{37}{8} s^4\right) - e^2 \left(s^2 - \frac{31}{16} s^4\right) \right], \\ B_1 &= -\frac{\varepsilon^4}{4} (4-5s^2) e s^2, \\ B_2 &= -\frac{3\varepsilon^4}{32} e^2 s^4. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Подставляя найденные значения интегралов в (4.1), получаем уравнение времени

$$\begin{aligned} \bar{n}(t - \bar{t}_0) = & 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \bar{e}}{1 + \bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right) - \\ & - e^* \sqrt{1 - \bar{e}^2} \frac{\sin v}{1 + \bar{e} \cos v} + \gamma_{0,0} v + \gamma_{0,1} \sin v + \gamma_{0,2} \sin 2v + \\ & + \bar{\gamma}_{0,0} \varphi + \bar{\gamma}_{2,0} \sin 2\varphi + \bar{\gamma}_{4,0} \sin 4\varphi, \quad (4.6) \end{aligned}$$

в котором

$$\begin{aligned} \bar{n} = & \sqrt{\frac{\bar{f}M}{a^3}} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 (1 - e^2) (1 - s^2) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{8} \varepsilon^4 (1 - e^2) (1 - s^2) [(1 + 11s^2) - (1 - 5s^2) e^2] \right\}, \quad (4.7) \\ e^* = & e \{ 1 - \varepsilon^2 (1 - e^2) (1 - s^2) + \varepsilon^4 (1 - e^2) (1 - s^2) (3 + e^2) s^2 \}, \quad (4.8) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{0,0} = & - (1 - e^2)^{3/2} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^2 s^2 - \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon^4}{16} [(24 - 96s^2 + 78s^4) - (8 - 11s^2) s^2 e^2] \right\}, \\ \gamma_{0,1} = & - \frac{\varepsilon^4}{4} (1 - e^2)^{3/2} (4 - 5s^2) s^2 e, \\ \gamma_{0,2} = & \frac{3}{32} \varepsilon^4 (1 - e^2)^{3/2} s^4 e^2, \\ \bar{\gamma}_{0,0} = & s^2 (1 - e^2)^{3/2} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{16} [(24 - 27s^2) - (8 - 11s^2) e^2] \right\}, \\ \bar{\gamma}_{2,0} = & - s^2 (1 - e^2)^{3/2} \left\{ \frac{1}{4} \varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{8} [(6 - 7s^2) - (2 - 3s^2) e^2] \right\} \\ \bar{\gamma}_{4,0} = & \frac{\varepsilon^4 s^4}{64} (1 - e^2)^{3/2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Уравнение времени можно также представить в форме

$$\begin{aligned} \bar{n}(t - \bar{t}_0) = & 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \bar{e}}{1 + \bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right) - \frac{e^* \sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin v}{1 + \bar{e} \cos v} - \\ & - \lambda v + \lambda_{0,1} \sin v + \lambda_{0,2} \sin 2v + \lambda_{2,0} \sin 2u + \\ & + \lambda_{4,0} \sin 4u + \lambda_{2,-2} \sin (2u - 2v) + \lambda_{2,2} \sin (2u + 2v), \quad (4.10) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -\frac{\varepsilon^4}{16} (1 - e^2)^{3/2} (24 - 96s^2 + 75s^4), \\ \lambda_{0,1} &= -\frac{\varepsilon^4}{4} (1 - e^2)^{3/2} (4 - 5s^2) e s^2, \\ \lambda_{0,2} &= \frac{\varepsilon^4}{32} (1 - e^2)^{3/2} s^4 e^2, \\ \lambda_{2,0} &= -\frac{\varepsilon^2}{4} s^2 (1 - e^2)^{3/2} + \\ &+ \frac{\varepsilon^4}{16} s^2 [(12 - 13s^2) - e^2 (4 - 5s^2)] (1 - e^2)^{3/2}, \\ \lambda_{2,-2} &= -\frac{\varepsilon^4}{32} s^4 e^2 (1 - e^2)^{3/2}, \\ \lambda_{2,2} &= \frac{\varepsilon^4}{32} s^4 e^2 (1 - e^2)^{3/2}, \\ \lambda_{4,0} &= -\frac{\varepsilon^4}{64} s^4 (1 - e^2)^{5/2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Эта форма уравнения при $\varepsilon = 0$ переходит в обычное уравнение центра задачи двух тел.

Методы решения уравнений (4.6) и (4.10) могут быть различны. Удобны, например, итерационные методы. Представим уравнение (4.6) в виде

$$f_0(v) + \varepsilon^2 f_2(v) + \varepsilon^4 f_4(v) = \bar{M}, \quad (4.12)$$

где

$$\bar{M} = \bar{n}(t - \bar{t}_0),$$

$$\begin{aligned} f_0(v) &= 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \bar{e}}{1 + \bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right) - \\ &- e \sqrt{1 - \bar{e}^2} \frac{\sin v}{1 + \bar{e} \cos v} - \lambda v, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$f_2(v) = \bar{\lambda}_{2,0} \sin 2v, \quad (4.14)$$

а через $f_4(v)$ обозначены остальные члены из (4.6). Решение этого уравнения будем строить в виде рядов по степеням ε . Полагая в этом уравнении явно входящее ε равным нулю,

приходим к уравнению

$$2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\bar{e}}{1+\bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \right) - \\ - e^* \sqrt{1-\bar{e}^2} \frac{\sin v_0}{1+\bar{e} \cos v_0} - \lambda v_0 = \bar{M}. \quad (4.15)$$

Если теперь ввести вспомогательную переменную (типа эксцентрической аномалии в задаче двух тел)

$$\operatorname{tg} \frac{v_0}{2} = \sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (4.16)$$

то вместо (4.15) получим

$$E - e^* \sin E - 2\lambda \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right) = \bar{M}. \quad (4.17)$$

Это уравнение при $\varepsilon = 0$ совпадает с уравнением Кеплера. Его можно решать методом итерации. Сходимость процесса последовательных приближений легко устанавливается с помощью принципа сжатых отображений. Если ввести обозначение

$$\Phi(E) = e^* \sin E + 2\lambda \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right), \quad (4.18)$$

то для доказательства сходимости достаточно показать, что

$$|\Phi'_E(E)| < 1.$$

Из (4.18) следует

$$\Phi'_E(E) = e^* \cos E + \lambda \sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} \frac{1-\bar{e}}{1-\bar{e} \cos E}.$$

Принимая во внимание, что $\bar{e} \geq 0$, находим

$$|\Phi'_E(E)| \leq e^* + |\lambda| \sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} = K.$$

Но для Земли $\varepsilon < \frac{1}{30}$, поэтому

$$K \leq e.$$

Уравнение (4.15) можно решать и другим способом, опираясь на формулу, аналогичную формуле Лагранжа, используемой при решении уравнения Кеплера.

Единственность решения (4.15) без труда доказывается с помощью известной теоремы о числе корней уравнений [141]

$$F(z) = 0, \quad F(z) + \Phi(z) = 0. \quad (4.19)$$

Если функции $F(z)$ и $\Phi(z)$, аналитические в области, ограниченной замкнутым контуром C , непрерывны на нем и удовлетворяют на C неравенству $|\Phi(z)| < |F(z)|$, то в этой области оба уравнения (4.19) имеют одинаковое число корней.

В нашей задаче, полагая

$$F(E) = E - e^* \sin E - \bar{M},$$

$$\Phi(z) = -2\lambda \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right)$$

и принимая во внимание малость λ , обнаруживаем, что уравнение (4.19) имеет единственное решение. Это решение можно представить в виде сходящегося ряда, по степеням e^* и λ .

Сначала рассмотрим уравнение

$$z - a - \alpha F(z) - \beta \Phi(z) = 0, \quad (4.20)$$

в котором функции $F(z)$ и $\Phi(z)$ аналитичны в некоторой окрестности точки $z = a$. Рассмотрим область, ограниченную окружностью C с центром в точке a такого радиуса r , что

$$|\alpha F(z) + \beta \Phi(z)| < r.$$

С помощью интеграла Коши нетрудно показать справедливость следующей формулы:

$$\Psi(z_0) = \Psi(a) + \sum_{\substack{m=0 \\ |m|+|n| \neq 0}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^m \beta^n}{m!n!} \frac{d^{m+n-1}}{da^{m+n-1}} \times \\ \times \{\Psi''(a)[F(a)]^m [\Phi(a)]^n\}, \quad (4.21)$$

где $\Psi(z)$ — аналитическая функция от корня z_0 уравнения (4.20). Ряд (4.21) обобщает формулу Лагранжа, используемую при решении уравнения Кеплера.

Полагая теперь

$$\Psi(E) = E, \alpha = e^*, \beta = \lambda,$$

$$F(E) = \sin E, \quad \Phi(E) = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right)$$

и применяя формулу (4.21), находим

$$E = \bar{M} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{*m+1}}{(m+1)!} \frac{d^m}{d\bar{M}^m} (\sin^{m+1} \bar{M}) + \\ + 2\lambda \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{\bar{M}}{2} \right).$$

Мы ограничиваемся здесь членом с первой степенью λ , так как для ИСЗ параметр λ имеет порядок 10^{-6} . Второе слагаемое в (4.22) соответствует решению обычного уравнения Кеплера.

§ 5. Определение элементов орбиты спутника

Определение элементов орбиты ИСЗ по начальным значениям координат и скоростей рассматривалось в статьях Е. П. Аксенова, Е. А. Гребеникова и автора [87], а также в статьях Е. И. Тимошковой [142] и Е. П. Аксенова [143]. В. Н. Лаврик [144] дает решение краевой задачи, исходя из общего интеграла обобщенной задачи двух неподвижных центров в форме М. Д. Кислика. Эта работа весьма интересна тем, что она опирается на метод Гаусса определения орбит в задаче двух тел [145].

Пусть в начальный момент $t = t_0$ известны значения координат x_0, y_0, z_0 и их производных по времени $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. Из формул (1.2) находим

$$\left. \begin{aligned} \xi^2 &= \frac{1}{2}(r^2 - c^2) \{1 + [1 + 4c^2 z^2 (r^2 - c^2)^{-2}]^{1/2}\}, \\ \eta &= \frac{z}{\xi}, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Эти формулы позволяют найти значения координат ξ, η, ω в начальный момент. Дифференцируя по времени

формулы (5.1), получим

$$\dot{\xi} = \frac{\xi^2 \dot{r} + c^2 z \dot{z}}{\xi^2 + c^2 \eta^2}, \quad \dot{\eta} = \frac{\xi \dot{z} - z \dot{\xi}}{\xi^2}, \quad \dot{\omega} = \frac{x \dot{y} - y \dot{x}}{r^2 - z^2}, \quad (5.2)$$

откуда находим начальные значения скоростей $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$, $\dot{\omega}_0$.

Вместо (1.3) — (1.5) можно записать

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= (\dot{\xi}^2 + c^2)(1 - \eta^2) \dot{\omega}, \\ 2h &= J \left(\frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} + \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 + c^2} \right) + (\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2) \dot{\omega}^2 - \frac{2fM}{J}, \\ 2c_2 &= (1 - \eta^2)^{-1} [2hc^2\eta^2(1 - \eta^2) - c_1^2 - J^2\eta^2] \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

(здесь для получения производных от координат по времени t использовано соотношение (1.6)). Подставляя в правые части зависимостей (5.3) начальные значения координат и их производных, находим значения произвольных постоянных c_1 , c_2 и h .

Затем следует перейти к вычислению элементов a , e , s , что можно сделать при помощи формул (1.10) и (1.14). Эти формулы можно также преобразовать к виду

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{fM}{2h} [1 - \varepsilon^2(1 - e^2)(1 - s^2) + \\ &\quad + \varepsilon^4(1 - e^2)(3 + e^2)s^2(1 - s^2)], \\ 1 - e^2 &= \frac{4c_2h}{f^2M^2} \{1 - \varepsilon^2(1 + 3e^2)(1 - s^2) + 2\varepsilon^4[1 + 4e^2 + \\ &\quad + 3e^4 - (1 + 2e^2 + 5e^4)s^2 - 2e^2(1 - e^2)s^4]\}, \\ 1 - s^2 &= -\frac{c_1^2}{2c_2} \{1 + \varepsilon^2(1 - e^2)s^2 - \\ &\quad - \varepsilon^4[(3 - 2e^2 - e^4)s^2 - 4(1 - e^2)s^4]\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Определение a , e , s без труда выполняется методом последовательных приближений. Полагая в (5.4) $\varepsilon = 0$, находим приближенные значения a , e , s , которые принимаем в качестве первого приближения. Очевидно, что второе приближение будет в пределах принятой точности достаточным.

Далее следует перейти к определению угловых элементов ω , Ω , $\bar{t}_0$. Предварительно заметим, что эти элементы

при $\varepsilon = 0$ обращаются в соответствующие кеплеровские элементы. Так как вспомогательные переменные φ и v , определенные формулами (2.1) и (2.2), при $\varepsilon = 0$ совпадают соответственно с аргументом широты и истинной аномалией кеплеровского движения, то при $\varepsilon = 0$ угловой элемент ω обращается в аргумент перицентра. Угловой элемент Ω при $\varepsilon = 0$ дает долготу восходящего узла кеплеровской орбиты, ибо он представляет собой планетоцентрическую долготу (в случае ИСЗ прямое восхождение спутника) в момент прохождения через экваториальную плоскость планеты. Из уравнения времени без труда находим смысл постоянной t_0 . Она с точностью до членов порядка ε^2 дает момент прохождения спутника через перицентр орбиты. Наконец, элемент s при $\varepsilon = 0$ совпадает с синусом наклонности i орбиты спутника. Следовательно, можно положить $s = \sin i$, и тогда будем иметь $\sqrt{1-s^2} = \cos i$.

Определив a , e , s , предварительно вычислим вспомогательную постоянную v с помощью формулы (2.8) или (2.7). Так как координаты r и z при $t = t_0$ нам известны, то из разложений (2.26) и (2.27) методом последовательных приближений можно найти значения угловых переменных u и v . В качестве нулевого приближения можно принять их значения для случая кеплеровского движения, т. е. при $\varepsilon = 0$. Из формул (2.29) и (2.30) видим, что при $\varepsilon = 0$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j = 0, \\ 0 & \text{при } i \neq 0, j \neq 0, \end{cases} \quad b_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 0, \\ 0 & \text{при } i \neq 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Поэтому из (2.26) и (2.27), полагая $\varepsilon = 0$, находим

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + \bar{e} \cos v}, \\ z &= \frac{\bar{p}s \sin u}{1 + \bar{e} \cos u}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Получающиеся отсюда числовые значения v и u примем за нулевое приближение.

Процесс последовательных приближений будет сходящимся, что можно доказать, воспользовавшись, как и ранее, принципом сжатых отображений.

После определения величин u и v по формуле (2.10) вычислим элемент ω , а формула (2.28) даст значение элемента Ω .

Затем по формуле (4.10) можно найти элемент $\bar{t}_0$, положив предварительно $t = t_0$.

Вместо элемента $\bar{t}_0$, как и в задаче двух тел, можно ввести иной, являющийся аналогом средней аномалии в эпоху. Формулу (4.12) можно преобразовать к виду

$$\bar{M} = \bar{n}(t - t_0) + \bar{n}(t_0 - \bar{t}_0). \quad (5.7)$$

Полагая теперь

$$\bar{M}_0 = \bar{n}(t_0 - \bar{t}_0), \quad (5.8)$$

вместо (5.7) будем иметь

$$\bar{M} = \bar{n}(t - t_0) + \bar{M}_0. \quad (5.9)$$

Элемент $\bar{M}_0$ более удобен, если иметь в виду дальнейшее уточнение аналитической теории движения спутника при учете других возмущающих факторов.

Вместо величин u и v можно использовать φ и ψ . В этом случае вычисление элементов выполняется по формулам (2.6), (2.9), (2.10) и (2.15), которые дадут значение ω . Затем из формулы (2.24) находится долгота восходящего узла Ω .

Еще один способ вычисления элементов указывается в статье Е. П. Аксенова [143].

Таким образом, задача об определении элементов орбиты полностью решена.

Заканчивая изложение теории движения ИСЗ, основанной на обобщенной задаче двух неподвижных центров, сделаем некоторые заключительные замечания. Полученное решение в отличие от решений, получаемых на основе классических методов теории возмущений, содержит в себе возмущения всех порядков от второй и частично четвертой зональных гармоник. В случае $\delta \neq 0$ решение будет содержать неравенства любого порядка от асимметрии земного поля относительно экватора. Если вычислять теперь возмущения от Луны, Солнца и сопротивления атмосферы

в движении ИСЗ, то уже в возмущениях первого порядка (при использовании обобщенной задачи двух центров в качестве промежуточной) автоматически получаются неравенства за счет нелинейной суперпозиции различных возмущающих факторов. В этом состоит одно из достоинств изложенного метода построения теории движения ИСЗ. Кроме того, как уже отмечалось, в полученном решении вместо вековых членов классической теории возмущений присутствуют лишь долгопериодические возмущения, которые как раз и порождают вековые неравенства при использовании приближенных методов. Таким образом, это решение позволило преодолеть основную трудность теории возмущений, связанную с малыми знаменателями.

ГЛАВА VI

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПОЧТИ
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ
ИСКУССТВЕННЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ**

§ 1. Метод Пуанкаре. Критерии периодичности

В этой главе кратко излагается сущность метода малого параметра А. Пуанкаре и результаты его применения к задачам небесной баллистики при построении периодических и условно-периодических решений дифференциальных уравнений движения.

Свой метод А. Пуанкаре первоначально разработал в связи с исследованиями классической проблемы трех тел. Подробное изложение метода дано в знаменитом сочинении Пуанкаре «*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*» [146]. Метод Пуанкаре нашел широкое применение не только в небесной механике, но и в динамике твердого тела. Он приобрел особенную гибкость в результате исследований П. Пенлеве [147], который, отказавшись от выбора в качестве малого параметра какой-либо физической величины, предложил искусственное введение малого параметра при помощи преобразования переменных, зависящих от параметра. В задачах небесной механики нетрадиционный подход к методу малого параметра мы находим в работах Е. Гопфа [148], О. Перрона [149], А. А. Орлова [150].

В некоторых случаях метод малого параметра дает возможность строить не только периодические, но и почти периодические решения. В частности, методом Пуанкаре можно получить двухчастотные условно-периодические решения в ограниченной круговой задаче трех тел и в задаче о движении материальной точки в гравитационном поле вращающейся «трехосной» планеты.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

где μ — малый параметр, а правые части уравнений суть голоморфные функции всех переменных x_i, t и параметра μ в

некоторой области их значений $|x_i| \leq a$ и при достаточно малых по модулю значениях $|\mu| < p$.

Предположим, что известно либо общее, либо частное решение системы (1.1) при $\mu = 0$:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n, 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.2)$$

которую будем называть упрощенной*). Решения системы (1.2) назовем порождающими (в небесной механике порождающее решение определяет промежуточную орбиту). Пусть

$$X_{i0} = X_i(t, x_1, \dots, x_n, 0), \quad (1.3)$$

а известное решение упрощенной системы обозначим следующим образом:

$$x_i = x_{i0}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.4)$$

причем будем предполагать, что оно соответствует начальным условиям

$$x_i = x_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{при } t = t_0. \quad (1.5)$$

В своих исследованиях А. Пуанкаре применил метод Коши мажорантных (усиливающих) функций**), который используется при доказательстве основной теоремы дифференциальных уравнений о существовании и единственности решений. Результат А. Пуанкаре можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а П у а н к а р е. Если правые части системы (1.1) суть голоморфные функции своих переменных в некоторой области их изменения $|x_i| \leq a$ в окрестности $\mu = 0$, а упрощенная система (1.2) допускает голоморфное вдоль линии L на комплексной плоскости t решение, тогда система (1.1) имеет решение, которое может быть представлено в виде ряда

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_{ik}(t), \quad (1.6)$$

*) Термин «упрощенные уравнения» (équations simplifiées) ввел П. Пенлеве.

**) Коши назвал свой метод сравнения «исчислением пределов».

расположенного по возрастающим степеням μ , абсолютно и равномерно сходящегося на той же линии L при достаточно малом по модулю значении μ .

При выбранном значении μ ряд (1.6) будет сходиться к голоморфной функции для всех t , удовлетворяющих условию

$$t_0 \leq t \leq T, \quad (1.7)$$

где величина T зависит от μ . В общем случае чем меньше по модулю μ , тем большей оказывается величина T . Доказательство этого результата методом Коши можно найти в [151, 152]. Иным методом доказывает эту теорему Е. Пикар [153].

Следует заметить, что на комплексной плоскости t результат Пуанкаре заметно расширяет область существования решения по сравнению с кругом сходимости, определяемым теоремой Коши, так как здесь мажорирование можно выполнять вдоль линии L , которая может не содержать особых точек и вне упомянутого круга сходимости.

Способ построения рядов (1.6) состоит в следующем. Разложим правые части уравнений (1.1) в ряды по степеням μ :

$$X_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k X_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.8)$$

Подставляя затем ряды (1.6) в уравнения (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в правых и левых частях уравнений, получим следующие системы уравнений для последовательного определения функций x_{ik} .

Для $k = 0$:

$$\frac{dx_{i0}}{dt} = X_{i0}(t, x_1, \dots, x_n, 0), \quad (1.9)$$

Для $k = 1$:

$$\frac{dx_{i1}}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_0 x_{j1} + \mu X_{i1}(t, x_{10}, \dots, x_{n0}, 0). \quad (1.10)$$

(Здесь и далее через $\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_0$ обозначены значения производных $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, взятые при $x_i = x_{i0}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).)

Нетрудно установить, что и при любом значении k уравнения для определения x_{ik} сохраняют тот же вид, что и уравнения (1.10):

$$\frac{dx_{ik}}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_0 x_{jk} + \Phi_{ik}(t, x_{i0}, \dots, x_{i, k-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.11)$$

где функции Φ_{ik} зависят только от x_{ik} , определенных из предыдущих систем уравнений.

Итак, любое из приближений (члены порядка μ^k составляют k -е приближение) определяется из системы линейных неоднородных уравнений, в общем случае содержащих в явном виде время. Следовательно, задача построения рядов сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_0 y_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.12)$$

которые называются уравнениями в вариациях.

Интегрирование уравнений в вариациях при явной зависимости от времени коэффициентов $\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_0$, вообще говоря, достаточно сложно. Однако если известно общее решение упрощенной системы (1.2), то и общее решение уравнений в вариациях (1.12) находится просто. Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а. Если известно общее решение

$$x_i = x_i(t, C_1, \dots, C_n) \quad (1.13)$$

упрощенной системы (1.2), в котором C_i — постоянные интегрирования, то общее решение уравнений в вариациях (1.12) может быть найдено посредством дифференцирования (1.13) по величинам C_i и выражается в виде

$$y_i = \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{\partial x_i}{\partial C_j} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.14)$$

где β_j — произвольные постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя в (1.2) общее решение (1.13), приходим к следующей системе тождественных соотношений:

$$\frac{dx_i(t, C_1, \dots, C_n)}{dt} \equiv X_i(t, x_1(t, C), \dots, x_n(t, C), 0). \quad (1.15)$$

Дифференцируя затем обе части тождеств (1.15) по произвольным постоянным C_i , получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial C_j} \right) \equiv \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right)_0 \frac{\partial x_k}{\partial C_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (1.16)$$

а это и показывает, что функции

$$y_{kj} = \frac{\partial x_k}{\partial C_j} \quad (1.17)$$

являются частными решениями системы уравнений в вариациях. Так как (1.14) дает общее решение системы (1.2), то

$$\det \left| \frac{\partial x_k}{\partial C_j} \right| \neq 0 \quad (1.18)$$

и, стало быть, функции (1.17) образуют фундаментальную систему решений уравнений (1.12). Тогда общее решение уравнений в вариациях действительно будет иметь вид (1.14).

Возвращаясь к системе (1.11), замечаем, что ее общее решение после определения общего интеграла уравнений в вариациях легко находится посредством квадратур методом вариации произвольных постоянных.

З а м е ч а н и е. Иногда оказывается достаточным знать лишь некоторое семейство интегральных кривых уравнений (1.12), зависящее от меньшего, чем n , числа произвольных постоянных.

Пусть, например, правые части уравнений (1.2) не зависят явно от времени, т. е.

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n, \mu), \quad (1.19)$$

и пусть

$$x_i = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.20)$$

представляет собой частное решение системы (1.19) при $\mu = 0$. Тогда

$$x_i = \varphi_i(t + C) \quad (1.21)$$

также будет решением системы (1.19) при $\mu = 0$. Но из доказательства предыдущей теоремы ясно, что

$$y_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial C} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.22)$$

будет решением соответствующей системы уравнений в вариациях. А вместо (1.22) можно записать

$$y_i = \dot{\varphi}_i. \quad (1.23)$$

Если $n = 2$, то с помощью (1.23) можно найти общее решение уравнений в вариациях. Наконец, если при произвольном n система (1.12) распадается на n независимых уравнений, то решение (1.23) также позволяет проинтегрировать уравнения в вариациях.

Теорема Пуанкаре, о которой говорилось в начале параграфа, была им положена в основу метода построения периодических орбит. Сущность этого метода состоит в следующем.

Пусть система (1.1) удовлетворяет условиям теоремы Пуанкаре и такова, что правые части уравнений являются периодическими функциями времени с периодом T . Пусть, далее, эта система при $\mu = 0$ допускает периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.24)$$

которое соответствует начальным условиям

$$t = t_0, \quad x_i = \varphi_i(t_0) \quad (1.25)$$

и называется порождающим.

Обозначим период этого решения через T , так что

$$\varphi_i(t + T) \equiv \varphi_i(t). \quad (1.26)$$

Возникает вопрос, существует ли периодическое решение системы (1.1) при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, обращающееся в решение (1.24) при $\mu = 0$?

Рассмотрим решение системы (1.1)

$$x_i = \varphi_i(t, \mu). \quad (1.27)$$

Здесь φ_i таковы, что

$$\varphi_i(t, 0) \equiv \varphi_i(t). \quad (1.28)$$

Решение (1.27) соответствует начальным условиям

$$t = t_0, \quad x_i = \varphi_i(t_0, \mu). \quad (1.29)$$

Положим

$$\beta_i = \varphi_i(t_0, \mu) - \varphi_i(t_0). \quad (1.30)$$

В соответствии с теоремой Пуанкаре решение (1.27) можно представить с помощью рядов

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(t, \beta_1, \dots, \beta_n, \mu) = \\ &= \varphi_i(t) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu} \right)_0 \mu + \dots, \end{aligned} \quad (1.31)$$

которые будут сходиться абсолютно и равномерно для всех t , подчиненных условию $t \leq \tau(\mu)$, причем μ должно оставаться достаточно малым*). Очевидно, если решение (1.27) будет обладать периодом $T \leq \tau(\mu)$, то ряды (1.31) будут сходиться при всех значениях t .

Итак, нужно найти такие начальные условия, или, что то же самое, такие значения величин β_i , при которых переменные x_i в момент $T \leq \tau(\mu)$ принимают свои начальные значения (1.29). Необходимые и достаточные условия периодичности функций (1.27) записываются в виде

$$x_i(t_0 + T) - x_i(t_0) = 0, \quad (1.32)$$

или в соответствии с (1.27) и (1.29)

$$\psi_i = \varphi_i(t_0 + T, \mu) - \varphi_i(t_0, \mu) = 0. \quad (1.33)$$

Из (1.31) видим, что функции ψ_i зависят от начальных отклонений β_i и параметра μ .

Если из системы уравнений (1.33) величины β_i можно определить как голоморфные функции μ , уничтожающиеся при $\mu = 0$, то этим будет доказано существование периодических решений системы (1.1) требуемого вида. Как следует из теоремы о существовании неявных функций,

*) Индекс «0» означает, что взяты значения рассматриваемых величин при $\beta_i = \mu = 0$.

величины β_i можно найти, если якобиан

$$\left[\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{D(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \right]_0 \neq 0, \quad (1.34)$$

причем начальные отклонения β_i будут представлять собой простые решения системы уравнений (1.33).

Для того чтобы вычислить якобиан (1.34) при $\beta_i = \mu = 0$, необязательно знать общее решение уравнений (1.1). Достаточно найти только линейные относительно β_i и μ члены разложений переменных x_i в ряды.

З а м е ч а н и е 1. В задачах динамики весьма часто встречается случай, в котором исходная система (1.1) допускает первые интегралы. Очевидно, что существование первых интегралов влечет за собой тождественное равенство нулю якобиана (1.34). В самом деле, пусть уравнения (1.1) обладают первым интегралом

$$\Phi(t, x_1, \dots, x_n, \mu) = C, \quad (1.35)$$

периодическим по t (с периодом T). Тогда в силу (1.27)

$$\begin{aligned} \Phi(t_0 + T, \varphi_1(t_0 + T, \mu), \dots, \varphi_n(t_0 + T, \mu), \mu) &\equiv \\ &\equiv \Phi(t_0, \varphi_1(t_0, \mu), \dots, \varphi_n(t_0, \mu), \mu) = C, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Phi(t_0 + T, \varphi_1(t_0 + T, \mu), \dots, \varphi_n(t_0 + T, \mu), \mu) - \\ - \Phi(t_0, \varphi_1(t_0, \mu), \dots, \varphi_n(t_0, \mu), \mu) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Наконец, учитывая (1.33), будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(t_0 + T, \varphi_1(t_0, \mu) + \psi_1, \dots, \varphi_n(t_0, \mu) + \psi_n, \mu) - \\ - \Phi(t_0, \varphi_1(t_0, \mu), \dots, \varphi_n(t_0, \mu), \mu) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Разложив левую часть соотношения (1.37) в ряд по степеням ψ_i , находим, что при $\psi_i = 0$ левая часть (1.37) обращается в нуль. Следовательно, уравнения (1.33) при наличии первого интеграла (1.35) будут зависимыми и из рассмотрения надлежит исключить одно из уравнений, например $\psi_n = 0$. Тогда решение вопроса о существовании периодических решений сводится к доказательству существования простого решения системы уравнений

$$\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_{n-1} = 0 \quad (1.38)$$

относительно $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$. Для этого достаточно потребовать, чтобы якобиан

$$\left[\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})} \right]_0 \quad (1.39)$$

был отличен от нуля. Значение одной из величин β_i можно взять произвольным образом.

З а м е ч а н и е 2. Если система (1.1) автономна, т. е.

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu), \quad (1.40)$$

то возможно искать периодические решения с произвольным периодом. Более того, периоды порождающего решения и решения системы (1.40) отнюдь не обязаны быть равными. Это вытекает из следующих рассуждений.

Преобразуем систему (1.40) к новой независимой переменной τ :

$$\tau = \frac{t}{T + \alpha(\mu)}, \quad (1.41)$$

где $\alpha(\mu)$ — произвольная голоморфная функция, которую можно представить в виде

$$\alpha(\mu) = T \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu^k \quad (1.42)$$

(здесь коэффициенты α_k пока неопределенные).

Тогда система (1.40) преобразуется к виду

$$\frac{dx_i}{d\tau} = X_i \cdot (T + \alpha(\mu)), \quad (1.43)$$

и задача сводится к определению периодического решения системы (1.43).

Выше мы видели, что в доказательстве существования периодических решений основную роль играет исследование якобиана. Для динамических систем этот якобиан в подавляющем большинстве случаев равен тождественно нулю. Естественно поэтому при исследованиях использовать специфические свойства рассматриваемых конкретных систем. Сам Пуанкаре и большинство его последователей использовали в этих случаях интегралы точных дифферен-

циальных уравнений. Однако количество интегралов в некоторых задачах оказывается недостаточным, и вопрос о существовании периодических решений тогда либо требует рассмотрения второго и более высоких приближений, либо остается вообще открытым.

Возьмем другие приемы, упрощающие исследование. Так, например, несложно установить, допускает ли данная система дифференциальных уравнений симметричные решения. Факт существования симметричных орбит был использован Г. Хиллом [154] при построении промежуточной орбиты Луны (вариационной кривой). Весьма широко это свойство использовалось Ф. Р. Мультоном [155] при построении периодических орбит методом Пуанкаре.

Т е о р е м а с и м м е т р и и. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\ddot{q}_i = F_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.44)$$

правые части которых таковы, что система (1.44) инвариантна относительно подстановки

$$q_i \rightarrow q_i, \quad \dot{q}_i \rightarrow -\dot{q}_i, \quad t \rightarrow -t \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (1.45)$$

$$q_i \rightarrow -q_i, \quad \dot{q}_i \rightarrow \dot{q}_i \quad (i = s + 1, \dots, n). \quad (1.46)$$

Тогда условия периодичности решения запишутся в виде

$$\dot{q}_i(0) = 0, \quad \dot{q}_i\left(\frac{T}{2}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (1.47)$$

$$q_i(0) = 0, \quad q_i\left(\frac{T}{2}\right) = 0 \quad (i = s + 1, \dots, n), \quad (1.48)$$

где T — период решения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$q_i = q_i(t) \quad (1.49)$$

— решение системы (1.44). Оно будет периодично, если выполнены условия

$$q_i\left(\frac{T}{2}\right) = q_i\left(-\frac{T}{2}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.50)$$

Не уменьшая общности, мы здесь принимаем момент $t = 0$ в качестве начального.

Пусть решение (1.49) соответствует начальным условиям

$$q_i(0) = q_i^{(0)}, \quad \dot{q}_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (1.51)$$

$$q_i(0) = 0, \quad \dot{q}_i(0) = \dot{q}_i^{(0)} \quad (i = s + 1, \dots, n). \quad (1.52)$$

По условию теоремы уравнения (1.44) инвариантны относительно подстановки (1.45) — (1.46). Стало быть, решение (1.49) при подстановке переходит само в себя. Поэтому из (1.45) — (1.46) следует, что

$$q_i\left(\frac{T}{2}\right) = q_i\left(-\frac{T}{2}\right), \quad \dot{q}_i\left(\frac{T}{2}\right) = -\dot{q}_i\left(-\frac{T}{2}\right) \quad (1.53)$$

$$(i = 1, 2, \dots, s),$$

$$q_i\left(\frac{T}{2}\right) = -q_i\left(-\frac{T}{2}\right), \quad \dot{q}_i\left(\frac{T}{2}\right) = \dot{q}_i\left(-\frac{T}{2}\right) \quad (1.54)$$

$$(i = s + 1, \dots, n).$$

Сравнивая (1.50) с (1.53) и (1.54) находим, что условия периодичности преобразуются к виду (1.47) — (1.48).

§ 2. Применение метода Пуанкаре к квазилиувиллевым динамическим системам

Предварительно остановимся на некоторых особенностях применения метода малого параметра Пуанкаре к тем задачам небесной механики и небесной баллистики, для которых упрощенная система уравнений движения удовлетворяет условиям теоремы Лиувилля (см. § 5 гл. I). Динамические системы будем называть лиувиллевыми, если их общее решение в конечном виде может быть найдено с помощью теоремы Лиувилля. Заметим, что эта теорема применима к задаче двух тел, а также к классической и обобщенной задаче двух неподвижных центров.

Динамическую систему с n степенями свободы назовем квазилиувиллевой, если она определяется следующими формулами для кинетической энергии T и силовой функции U :

$$T = \frac{1}{2} A \sum_{i=1}^n B_i(Q_i) \dot{Q}_i^2, \quad (2.1)$$

$$U = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n C_i(Q_i) + \mu W, \quad (2.2)$$

где

$$A = \sum_{i=1}^n A_i(Q_i). \quad (2.3)$$

В соотношении (2.2) μ — численно достаточно малый параметр, W — голоморфная функция обобщенных координат и малого параметра μ в некоторой области их изменения. Голоморфными функциями соответствующих переменных являются также и величины A_i, B_i, C_i .

При $\mu = 0$ теорема Лиувилля позволяет получить общее решение упрощенной системы уравнений. Добавление в потенциал пертурбационной функции μW при отсутствии каких-либо специальных предположений о структуре функции W в общем случае лишает возможности получить решение в конечном виде. Непосредственное применение метода Пуанкаре приводит к сложным выкладкам, так как в силу консервативности системы якобиан (1.33) тождественно равен нулю. Кроме того, решение системы уравнений в вариациях с помощью второй теоремы § 1 имеет сложный вид. Если предварительно выполнить ряд преобразований уравнений движения, то построение решений методом Пуанкаре значительно упрощается. Ниже излагается способ, предложенный в работе [156].

Перейдем от обобщенных координат Q_i к новым обобщенным координатам q_i с помощью соотношений

$$q_i = \int \sqrt{B_i(Q_i)} dQ_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.4)$$

Тогда вместо (2.1) и (2.2) будем иметь

$$T = \frac{a}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2, \quad (2.5)$$

$$U = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n c_i(q_i) + \mu w(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \mu), \quad (2.6)$$

причем a определяется формулой

$$a = \sum_{i=1}^n a_i(q_i). \quad (2.7)$$

Уравнения Лагранжа второго рода преобразуются к виду

$$\frac{d}{dt}(a\dot{q}_i) - \frac{1}{2} \frac{da_i}{dq_i} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.8)$$

Они допускают интеграл живых сил

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 = \frac{2}{a} (U + h). \quad (2.9)$$

Заменим сумму квадратов обобщенных скоростей в (2.8) ее выражением из (2.9) и тогда вместо (2.8) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a\dot{q}_i) &= \frac{1}{a} \frac{da_i}{dq_i} (U + h) + \frac{\partial U}{\partial q_i} \\ (i &= 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Введя новую независимую переменную τ с помощью соотношения

$$a \tau = t, \quad (2.11)$$

приведем (2.10) к системе уравнений

$$q_i'' = \frac{\partial}{\partial q_i} [a(U + h)] \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.12)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по τ . Отсюда в явном виде получаем

$$q_i'' = \frac{dc_i}{dq_i} + h \frac{da_i}{dq_i} + \mu \frac{\partial}{\partial q_i} (aW) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.13)$$

При $\mu = 0$ уравнения (2.13) принимают вид

$$q_i'' = \frac{dc_i}{dq_i} + h \frac{da_i}{dq_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.14)$$

и могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Пусть

$$q_i = q_{i0}(\tau) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.15)$$

— некоторое частное решение системы (2.14). Принимая его

за порождающее, будем искать решение системы (2.13) методом малого параметра Пуанкаре в виде рядов

$$q_i = q_{i0}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k q_{ik}(\tau). \quad (2.16)$$

Для определения функций q_{ik} можно получить следующие дифференциальные уравнения:

$$q''_{ik} - \left(\frac{d^2 c_i}{dq_i^2} + h \frac{d^2 a_i}{dq_i^2} \right) q_{ik} = f_{ik} \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n; \\ k = 1, 2, \dots \end{matrix} \right), \quad (2.17)$$

где функции f_{ik} будут зависеть от $q_{i0}, q_{i1}, \dots, q_{i,k-1}$. Индекс «0» везде означает, что вместо q_i нужно подставить q_{i0} . Преобразуем уравнения (2.17) к новым переменным z_i :

$$q_{ik} = q'_{i0} z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.18)$$

Тогда вместо (2.17) будем иметь

$$z''_i q'_{i0} + 2z'_i q'_{i0} = f_{ik}. \quad (2.19)$$

Умножая (2.19) на q'_{i0} и интегрируя, получим

$$q'^2_{i0} z'_i = \int f_{ik} q'_{i0} d\tau + \alpha_{ik}, \quad (2.20)$$

где через α_{ik} обозначены произвольные постоянные.

Из (2.20) для z_i находим

$$z_i = \left[\int f_{ik} q'_{i0} d\tau + \alpha_{ik} \right] \frac{d\tau}{q'^2_{i0}} + \beta_{ik}, \quad (2.21)$$

где β_{ik} — постоянные интегрирования.

Из (2.18) и (2.21) имеем

$$q_{ik} = q'_{i0} \left\{ \int \frac{1}{q'^2_{i0}} \left[\int f_{ik} q'_{i0} d\tau + \alpha_{ik} \right] d\tau + \beta_{ik} \right\}. \quad (2.22)$$

Таким образом, любая из функций q_{ik} находится посредством квадратур.

§ 3. О периодических движениях спутника в поле тяготения медленно вращающейся планеты

Пусть спутник, принимаемый за материальную точку, движется в поле тяготения планеты, медленно вращающейся вокруг одной из своих главных осей инерции с постоянной угловой скоростью. Предположим, что планета обладает динамической симметрией относительно плоскости, проходящей через центр масс и перпендикулярной оси ее вращения.

Выберем прямоугольную систему координат с началом в центре инерции планеты, направив координатные оси вдоль главных осей инерции. Тогда гравитационный потенциал планеты на внешнюю точку выразится при помощи формулы (см. § 3 гл. II)

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{d}{r} \right)^k Q_k(x, y, z) \right\}, \quad (3.1)$$

где M — масса планеты, d — радиус-вектор наиболее удаленной ее точки, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а $Q_k(x, y, z)$ суть однородные гармонические многочлены k -й степени относительно x, y, z . Эти полиномы легко получаются при переходе в формулах (3.15) гл. II от сферических координат к прямоугольным. Так, например, в соответствии с (3.20) гл. II для $Q_2(x, y, z)$ имеем

$$Q_2 = \frac{1}{2M} \{ (C + B - 2A)x^2 + (A + C - 2B)y^2 + \\ + (B + A - 2C)z^2 \}. \quad (3.2)$$

Предположим для определенности, что планета вращается вокруг оси аппликат с угловой скоростью n . Тогда уравнения движения согласно (1.24) гл. I запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Так как планета динамически симметрична относительно плоскости Oxy , то потенциал U будет четной функцией координаты z , и поэтому уравнения движения (3.3) допускают плоские движения спутника в экваториальной плоскости $z = 0$. Рассмотрим эти движения, следуя работе [157].

Перейдем к безразмерным переменным ξ и η по формулам

$$x = b\xi, \quad y = b\eta,$$

в которых b — неопределенная постоянная величина. Уравнения для безразмерных переменных запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} - n^2\xi &= \frac{\partial V}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} - n^2\eta &= \frac{\partial V}{\partial \eta}, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

причем для силовой функции получим

$$V = \frac{k^2}{\rho} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{d}{b} \right)^n \frac{\bar{Q}_n(\xi, \eta)}{\rho^{2n}} \right],$$

где введены обозначения

$$k^2 = \frac{fM}{b^3}, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

а $\bar{Q}_n$ суть многочлены, аналогичные Q_n .

Введем в уравнения движения малый параметр μ , полагая

$$n = \nu\mu, \quad \left(\frac{d}{b} \right)^n = \gamma\mu^{n-1},$$

где ν и γ — некоторые постоянные. Тогда система (3.4) преобразуется к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\mu\nu\dot{\eta} - \mu^2\nu^2\xi &= \frac{\partial \bar{V}}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2\mu\nu\dot{\xi} - \mu^2\nu^2\eta &= \frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta}, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

где

$$\bar{V} = \frac{k^2}{\rho} \left[1 + \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \mu^{n-1} \frac{\bar{Q}_n(\xi, \eta)}{\rho^{2n}} \right]. \quad (3.6)$$

Введем затем эллиптические координаты u, v , определяемые формулами

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \operatorname{ch} v \cos u - 1, \\ \eta &= -\operatorname{sh} v \sin u, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

и новую независимую переменную τ :

$$dt = (\operatorname{ch}^2 v - \cos^2 u) \tau. \quad (3.8)$$

Тогда вместо системы (3.5) приходим к следующей:

$$\left. \begin{aligned} u'' &= 2\mu v J v' + W'_u, \\ v'' &= -2\mu v J u' + W'_v, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

где силовая функция W определяется соотношением

$$\begin{aligned} W &= k^2 (\operatorname{ch} v + \cos u) + \frac{h}{2} (\operatorname{ch} 2v - \cos 2u) + \\ &+ \frac{\mu^2 v^2}{2} (\operatorname{ch} v - \cos u)^2 + J \overline{W}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В формулах (3.9) — (3.10) использованы обозначения:

$$J = \operatorname{ch}^2 v - \cos^2 u, \quad \rho = \operatorname{ch} v - \cos u,$$

$$\overline{W} = k^2 \sum_{n=2}^{\infty} \mu^{n-1} \frac{Q_{2n}(u, v)}{\rho^{2n+1}},$$

а h — постоянная интеграла Якоби, который допускает система (3.3).

При $\mu = 0$ система (3.10) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} u''_0 &= -k^2 \sin u_0 + h \sin 2u_0, \\ v''_0 &= k^2 \operatorname{sh} v_0 + h \operatorname{sh} 2v_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Эти уравнения образуют упрощенную систему, которая допускает семейство решений

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \operatorname{const}, \\ u_0 &= 2 \arctg \left(\operatorname{cth} \frac{v_0}{2} \operatorname{tg} \sigma \tau \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

где v_0 — корень уравнения

$$\operatorname{ch} v_0 = -\frac{k^2}{2h}, \quad (3.13)$$

а σ определяется формулой

$$\sigma^2 = \frac{k^2 \operatorname{sh}^2 v_0}{4 \operatorname{ch} v_0}.$$

Согласно (3.31) гл. I уравнение $v_0 = \text{const}$ определяет эллипс. Следовательно, решению (3.12) соответствует движение спутника по эллиптической орбите, большая полуось которой равна $\operatorname{ch} v_0$, а эксцентриситет — $1/\operatorname{ch} v_0$. Из (3.11) нетрудно найти:

$$\left. \begin{aligned} \cos u_0 &= \frac{\operatorname{ch} v_0 \cos 2\sigma\tau - 1}{\operatorname{ch} v_0 - \cos 2\sigma\tau}, \\ \sin u_0 &= \frac{\operatorname{sh} v_0 \sin 2\sigma\tau}{\operatorname{ch} v_0 - \cos 2\sigma\tau}, \\ u'_0 &= \frac{2\sigma \operatorname{sh} v_0}{\operatorname{ch} v_0 - \cos 2\sigma\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Положим теперь

$$u = u_0 + \bar{u}, \quad v = v_0 + \bar{v}. \quad (3.15)$$

В результате преобразования (3.15) получим дифференциальные уравнения для $\bar{u}$ и $\bar{v}$ (см. § 1 этой главы)

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}'' &= f(\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}', \bar{v}', \tau, \mu), \\ \bar{v}'' &= g(\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}', \bar{v}', \tau, \mu), \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

которые, очевидно, будут удовлетворять всем условиям теоремы Пуанкаре. Правые части уравнений (3.16) периодичны по τ с периодом $T = \pi/\sigma$. Поэтому к системе (3.16) можно применить теоремы Пуанкаре о построении решений в виде рядов по степеням малого параметра μ .

Итак, будем искать решение в виде рядов

$$\bar{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k(\tau), \quad \bar{v} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k v_k(\tau). \quad (3.17)$$

Переменные $\bar{u}$ и $\bar{v}$ необходимо подчинить условиям периодичности

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}(T) - \bar{v}(0) &= 0, & \bar{u}(T) - \bar{u}(0) &= 0, \\ \bar{v}'(T) - \bar{v}'(0) &= 0, & \bar{u}'(T) - \bar{u}'(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Если из системы (3.18) можно определить произвольные постоянные общего решения уравнений (3.16) как

однозначные функции параметра μ , то ряды (3.17) будут представлять периодическое решение системы (3.10).

Так как уравнения движения допускают интеграл Якоби, то в силу замечания 1 § 1 уравнения (3.18) будут зависимыми. Тогда достаточно рассмотреть только три каких-либо уравнения (3.18), выбрав одну из постоянных интегрирования произвольным образом. Условие периодичности согласно (1.38) — (1.39) сводится к неравенству нулю якобиана, составленного из правых частей трех из уравнений (3.18) относительно трех произвольных постоянных и вычисленного при нулевых значениях μ и этих произвольных постоянных.

Для составления якобиана необходимо найти общее решение уравнений первого приближения

$$\left. \begin{aligned} u_1'' &= -k^2 \left(\frac{\cos 2u_0}{\operatorname{ch} v_0} + \cos u_0 \right) u_1 + \left(\frac{\partial \bar{W}_1}{\partial u} \right)_0, \\ v_1'' &= -k^2 \frac{\operatorname{sh}^2 v_0}{\operatorname{ch} v_0} v_1 - 2v (\operatorname{ch}^2 v_0 - \cos^2 u_0) u_0' + \left(\frac{\partial \bar{W}_1}{\partial v} \right)_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Общее решение системы (3.19) дается формулами (2.22), так как упрощенная система (3.11) удовлетворяет условиям теоремы Лиувилля:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \beta_1 \cos \omega \tau + \beta_2 \sin \omega \tau + \Phi_1(\tau), \\ u_1 &= u_0' \int \left[u_0' \left(\frac{\partial \bar{W}_1}{\partial u} \right)_0 d\tau + \beta_3 \right] \frac{d\tau}{u_0'^2} + u_0' \beta_4, \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ — постоянные интегрирования, а

$$\omega^2 = \frac{k^2 \operatorname{sh}^2 v_0}{\operatorname{ch} v_0}. \quad (3.21)$$

Принимая во внимание (3.12) — (3.13), найдем

$$u_1 = u_0' \frac{1 + 2\operatorname{ch}^2 v_0}{8\sigma^2 \operatorname{sh}^2 v_0} \beta_3 \tau + \Phi_2(\tau). \quad (3.22)$$

В соотношениях (3.20) и (3.22), как нетрудно показать, Φ_1 и Φ_2 суть периодические функции τ с периодом T .

Запишем условия периодичности (3.18) в явном виде:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\pi(1 + 2\text{ch}^2 v_0)}{\sigma^2 \text{sh } v_0 (\text{ch } v_0 - 1)} \beta_3 + \dots = 0, \\ \psi_2 &= \left(\cos \frac{\pi\omega}{\sigma} - 1 \right) \beta_1 + \sin \frac{\pi\omega}{\sigma} \cdot \beta_2 + \dots = 0, \\ \psi_3 &= -\omega \sin \frac{\pi\omega}{\sigma} \beta_1 + \omega \left(\cos \frac{\pi\omega}{\sigma} - 1 \right) \beta_2 + \dots = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Опущенное в (3.23) условие $\psi_4 = u'_1(\tau) - u'(0) = 0$ выполняется в первом приближении тождественно. Поэтому из (3.19) — (3.23) следует существование периодических решений только в первом приближении. Если, однако, потребовать нечетности потенциала по y и четности по x , с учетом инвариантности уравнений относительно подстановки $x(t) \rightarrow x(-t)$, $y(t) \rightarrow -y(-t)$, $t \rightarrow -t$, с помощью (1.53) — (1.54) и интеграла Якоби получим новые условия периодичности

$$\psi_i^*(\beta_2, \beta_3, \beta_4) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.24)$$

для которых якобиан равен

$$\frac{D(\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*)}{D(\beta_2, \beta_3, \beta_4)} = 2\pi\sigma\omega. \quad (3.25)$$

Как видим из (3.25), для любых порождающих эллиптических орбит, за исключением счетного множества, существуют периодические решения точных уравнений движения. Таким образом, в рассматриваемом случае в силу соотношения (3.25) система (3.9) допускает периодические решения с периодом

$$T = \frac{2 \sqrt{\text{ch } v_0}}{k \text{ sh } v_0}. \quad (3.26)$$

Эти решения зависят от двух произвольных постоянных b и t_0 , где t_0 — моменты прохождения спутника через ось абсцисс. Размеры орбит характеризуют величины b и v_0 (v_0 также характеризует форму орбиты). При достаточно больших значениях b построенные ряды будут сходящимися в соответствии с теоремой Пуанкаре.

Отметим, что найденные движения относительно вращающейся системы координат будут почти периодическими, так как зависимость между независимой переменной τ и

временем t дается формулой

$$\tau = \lambda (t - t_0) + F(\tau), \quad (3.27)$$

где λ — некоторая постоянная, а $F(\tau)$ — периодическая функция τ с периодом, который, вообще говоря, несоизмерим с величиной $2\pi/\lambda$. Переход к системе координат с фиксированными направлениями координатных осей приводит к возникновению в формулах для координат спутника тригонометрических членов с периодом $2\pi/n$. Поэтому в общем случае спутниковые движения будут почти периодическими, зависящими от трех периодов.

Т е о р е м а. Почти всем (в смысле меры) порождающим периодическим орбитам, элементы которых удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} a = b \operatorname{ch} v_0 > a_0, \quad 0 < e_0 < e = \frac{1}{\operatorname{ch} v_0} < 1, \quad i = 0, \\ \omega = \pi s/2 \quad (s = 0, 1, 2, \dots), \quad -\infty < t_0 < +\infty, \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

где a — большая полуось, e — эксцентриситет, ω — угловое расстояние перицентра, i — наклонность орбиты к экваториальной плоскости, t_0 — момент прохождения через перицентр, a_0, e_0 — некоторые постоянные, соответствуют почти периодические орбиты с двумя периодами.

С л е д с т в и е. В экваториальной плоскости планеты, обладающей динамической симметрией относительно оси вращения и перпендикулярной к ней плоскости, проходящей через центр инерции, почти все движения являются почти эллиптическими, за исключением, быть может, движений, происходящих в достаточно близкой к телу области. В самом деле, вследствие того, что уравнения движения инвариантны относительно преобразования поворота вокруг оси планеты на постоянный угол, угловое расстояние перицентра произвольно.

З а м е ч а н и е. Так как уравнения ограниченной круговой задачи трех тел имеют такой же вид, как и уравнения (3.3) (см. (1.25) — (1.26)), то полученные результаты можно распространить и на орбиты круговой задачи трех тел.

§ 4. Почти круговые орбиты спутника

Так как построение периодических орбит с учетом всех оказывающих заметное влияние возмущающих факторов затруднительно, то решение задачи может быть разделено на две части. Сначала строится периодическая орбита в уп-

рошенной задаче, уравнения которой содержат все основные возмущающие факторы, и эта орбита принимается за промежуточную. Затем находятся неравенства, обусловленные не учтенными в упрощенной задаче возмущающими силами [158]).

Рассмотрим движение ИСЗ под действием сил притяжения к Земле, Луне и Солнцу. Задачу будем решать в предположении, что Луна и Солнце движутся относительно Земли по круговым орбитам в плоскости эклиптики с постоянными угловыми скоростями. Пусть m_1, m_2, m_3 — массы Земли, Луны и Солнца, R, a_1, a_2 — геоцентрические расстояния ИСЗ, Луны и Солнца. Тогда в геоцентрической прямоугольной системе координат с фиксированными направлениями осей, за основную плоскость которой принята плоскость эклиптики, уравнения движения ИСЗ будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} &= -\frac{fm}{R^3} X + \frac{\partial}{\partial X} (V_1 + V_2), \\ \ddot{Y} &= -\frac{fm}{R^3} Y + \frac{\partial}{\partial Y} (V_1 + V_2), \\ \ddot{Z} &= -\frac{fm}{R^3} Z + \frac{\partial}{\partial Z} (V_1 + V_2), \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где V_1 и V_2 — пертурбационные функции, характеризующие возмущающее действие Луны и Солнца:

$$V_1 = fm_1 \left(\frac{1}{\Delta_1} - \frac{XX_1 + YY_1}{a_1^3} \right), \quad (4.2)$$

$$V_2 = fm_2 \left(\frac{1}{\Delta_2} - \frac{XX_2 + YY_2}{a_2^3} \right). \quad (4.3)$$

В (4.2) и (4.3) X_1, Y_1 — координаты Луны, X_2, Y_2 — координаты Солнца. Если за начало отсчета времени принять момент соединения Луны и Солнца, то для координат Луны и Солнца получим

$$X_1 = a_1 \cos n_1 t, \quad Y_1 = a_1 \sin n_1 t, \quad (4.4)$$

$$X_2 = a_2 \cos n_2 t, \quad Y_2 = a_2 \sin n_2 t \quad (4.5)$$

и для расстояний Δ_i будем иметь

$$\Delta_i^2 = a_i^2 - 2a_i(X \cos n_i t + Y \sin n_i t) + R^2 \quad (i = 1, 2). \quad (4.6)$$

Отнесем теперь движение ИСЗ к новой геоцентрической системе координат ξ, η, ζ , вращающейся с постоянной угловой скоростью n_0 вокруг оси Z в направлении движения Луны и Солнца. В качестве n_0 можно принять, в частности, либо n_1 , либо n_2 . Кроме того, за единицу длины выберем радиус невозмущенной круговой орбиты a спутника. Формулы преобразования координат запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} X &= a(\xi \cos n_0 t - \eta \sin n_0 t), \\ Y &= a(\xi \sin n_0 t + \eta \cos n_0 t), \\ Z &= a\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Система уравнений движения преобразуется к виду

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2n_0\dot{\eta} - n_0^2\xi &= -\frac{fm\xi}{a^3\rho^3} + \frac{\partial}{\partial\xi}(\bar{V}_1 + \bar{V}_2), \\ \ddot{\eta} + 2n_0\dot{\xi} - n_0^2\eta &= -\frac{fm\eta}{a^3\rho^3} + \frac{\partial}{\partial\eta}(\bar{V}_1 + \bar{V}_2), \\ \ddot{\zeta} &= -\frac{fm\zeta}{a^3\rho^3} + \frac{\partial}{\partial\zeta}(\bar{V}_1 + \bar{V}_2), \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

где

$$\rho = \frac{R}{a}, \quad \bar{V}_i = \frac{1}{a^2} V_i \quad (i = 1, 2).$$

В новой системе координат вместо (4.6) будем иметь

$$\Delta_i^2 = a_i^2 - 2aa_i [\xi \cos(n_i - n_0)t + \eta \sin(n_i - n_0)t] + a^2\rho^2. \quad (4.9)$$

Так как $a < a_i$, то возмущающие функции $\bar{V}_i$ можно разложить в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды по полиномам Лежандра. Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \mu\alpha_i &= \frac{a}{a_i}, \\ \cos\varphi_i &= \frac{1}{\rho} [\xi \cos(n_i - n_0)t + \eta \sin(n_i - n_0)t], \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

представим Δ_i в виде

$$\Delta_i^2 = a_i^2 [1 - 2\mu\alpha_i\rho \cos \varphi_i + \mu^2\alpha_i^2\rho^2]. \quad (4.11)$$

Принимая во внимание (4.10) — (4.11), для величин, обратных по отношению к Δ_i , будем иметь

$$\frac{1}{\Delta_i} = \frac{1}{a_i} \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \alpha_i^s \rho^s P_s(\cos \varphi_i). \quad (4.12)$$

Тогда искомые разложения примут вид

$$\bar{V}_i = \frac{fm_i\alpha_i}{a_i^2} \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s \alpha_i^s \rho^{s+1} P_{s+1}(\cos \varphi_i). \quad (4.13)$$

Выполним еще одно преобразование, введя новую независимую переменную

$$\tau = (n - n_0) t, \quad (4.14)$$

где n — сидерическое среднее невозмущенное движение спутника. Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{n_0}{n - n_0}, \\ k &= \frac{fm}{a^3(n - n_0)^3}, \\ k_i &= \frac{fm_i\alpha_i}{a_i^2(n - n_0)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

то система уравнений движения (4.8) преобразуется к виду

$$\left. \begin{aligned} \xi'' - 2v\eta' - v^2\xi &= -\frac{k\xi}{\rho^3} + \frac{\partial W}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2v\xi' - v^2\eta &= -\frac{k\eta}{\rho^3} + \frac{\partial W}{\partial \eta}, \\ \ddot{\xi} &= -\frac{k\xi}{\rho^3} + \frac{\partial W}{\partial \xi}, \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

где возмущающая функция W определяется равенством

$$W = \sum_{s=1}^{\infty} [k_1 \alpha_1^s P_{s+1}(\cos \varphi_1) + k_2 \alpha_2^s P_{s+1}(\cos \varphi_2)] \rho^{s+1} \mu^s. \quad (4.17)$$

Наконец, применим преобразование

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (1+x) \cos \tau - y \sin \tau, \\ \eta &= (1+x) \sin \tau + y \cos \tau, \\ \zeta &= z. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

В новых переменных вместо (4.16) имеем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2(1+\nu)y' - (1+\nu)^2(1+x) &= -\frac{k(1+x)}{\rho^3} + \frac{\partial W}{\partial x}, \\ y'' + 2(1+\nu)x' - (1+\nu)^2y &= -\frac{ky}{\rho^3} + \frac{\partial W}{\partial y}, \\ z'' &= -\frac{kz}{\rho^3} + \frac{\partial W}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

причем теперь $\rho^2 = (1+x)^2 + y^2 + z^2$.

Преобразуем к новым переменным $\cos \varphi_i$, входящие в W :

$$\cos \varphi_i = \frac{1}{\rho} \left[(1+x) \cos \frac{n_i - n}{n - n_0} \tau + y \sin \frac{n_i - n}{n - n_0} \tau \right].$$

Полученная система (4.19) имеет периодические по τ правые части, если величины $n_1 - n$ и $n_2 - n$ соизмеримы, т. е. при

$$n = \frac{pn_2 - qn_1}{p - q} \quad (p \neq q), \quad (4.20)$$

где p и q — любые взаимно простые числа.

Если n выбрано в соответствии с условием (4.20), то для отыскания периодических решений системы (4.19) можно применить метод Пуанкаре. В качестве малого параметра возьмем величину μ . Упрощенная система, получающаяся из

(4.19) при $\mu = 0$:

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2(1 + \nu)y' - (1 + \nu)^2(1 + x) &= -\frac{k(1 + x)}{\rho^3}, \\ y'' + 2(1 + \nu)x' - (1 + \nu)^2y &= -\frac{ky}{\rho^3}, \\ z'' &= -\frac{kz}{\rho^3}. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Она допускает тривиальное решение, если выполняется условие

$$n^2 = \frac{fm}{a^3}, \quad (4.22)$$

которое удовлетворяется при соответствующем выборе a .

В переменных ξ, η, ζ рассматриваемое тривиальное решение имеет вид

$$\xi = \cos \tau, \quad \eta = \sin \tau, \quad \zeta = 0. \quad (4.23)$$

Отсюда видим, что порождающим решениям соответствуют кеплеровские круговые орбиты радиуса a .

Принимая это решение за порождающее, будем искать периодические решения системы (4.19) с периодом T , равным периоду правых частей уравнений. Рассмотрение обычных условий периодичности (1.33) оставляет вопрос о существовании периодических решений открытым, так как соответствующий якобиан обращается в нуль, в то время как система (4.19) никаких первых интегралов не допускает. Но рассматриваемая система уравнений (4.19) инвариантна относительно подстановки

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow z, \quad \tau \rightarrow -\tau, \quad (4.24)$$

поэтому в силу теоремы симметрии (см. (1.44) — (1.48)) условия периодичности приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 = x' \left(\frac{T}{2} \right) &= 0, \quad \psi_3 = y \left(\frac{T}{2} \right) = 0, \quad \psi_5 = z' \left(\frac{T}{2} \right) = 0, \\ \psi_2 = x'(0) &= 0, \quad \psi_4 = y(0) = 0, \quad \psi_6 = z'(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Рассмотрим уравнения первого приближения

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2(1+\nu)y' - 3(1+\nu)^2x &= \\ &= b_1 + c_1 \cos 2\frac{n_1-n}{n-n_0}\tau + d_1 \cos \frac{n_2-n}{n-n_0}\tau, \\ y'' + 2(1+\nu)x' &= c_2 \sin 2\frac{n_1-n}{n-n_0}\tau + d_2 \sin 2\frac{n_2-n}{n-n_0}\tau, \\ z'' + (1+\nu)^2z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Общее решение этой системы будет

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{b_1+\beta_1}{(1+\nu)^2} + \beta_2 \cos(1+\nu)\tau + \beta_3 \sin(1+\nu)\tau + \\ &\quad + \bar{c}_1 \cos 2\frac{n_1-n}{n-n_0}\tau + \bar{d}_1 \cos 2\frac{n_2-n}{n-n_0}\tau, \\ y &= -2\frac{b_1+\beta_1}{1+\nu}\tau - 2\beta_2 \sin(1+\nu)\tau + 2\beta_3 \cos(1+\nu)\tau + \\ &\quad + \beta_4 + \bar{c}_2 \sin 2\frac{n_1-n}{n-n_0}\tau + \bar{d}_2 \sin 2\frac{n_2-n}{n-n_0}\tau, \\ z &= \beta_5 \cos(1+\nu)\tau + \beta_6 \sin(1+\nu)\tau, \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

где β_i — постоянные интегрирования.

Коэффициенты уравнений (4.27) и (4.26) легко выразить через известные величины. Из (4.25) — (4.27) получим условия периодичности

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= -\beta_2(1+\nu) \sin \frac{1+\nu}{2}T + \beta_3(1+\nu) \cos \frac{1+\nu}{2}T - \\ &- 2\bar{c}_1 \frac{n_1-n}{n-n_0} \sin \frac{n_1-n}{n-n_0}T - 2\bar{d}_1 \frac{n_2-n}{n-n_0} \sin \frac{n_2-n}{n-n_0}T + \\ &\quad + \dots = 0, \\ \psi_2 &= (1+\nu)\beta_3 + \dots = 0, \\ \psi_3 &= -\frac{b_1+\beta_1}{1+\nu}T - 2\beta_2 \sin \frac{1+\nu}{2}T + 2\beta_3 \cos \frac{1+\nu}{2}T + \\ &\quad + \beta_4 + \bar{c}_2 \sin \frac{n_1-n}{n-n_0}T + \bar{d}_2 \sin \frac{n_2-n}{n-n_0}T + \dots = 0, \\ \psi_4 &= 2\beta_3 + \beta_4 + \dots = 0, \\ \psi_5 &= -\beta_5(1+\nu) \sin \frac{1+\nu}{2}T + \beta_6(1+\nu) \cos \frac{1+\nu}{2}T + \\ &\quad + \dots = 0, \\ \psi_6 &= \beta_6(1+\nu) + \dots = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Якобиан этих уравнений относительно произвольных постоянных β_i равен

$$\left[\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_6)}{D(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6)} \right]_0 = -(1 + \nu)^3 T \sin^2 \frac{1 + \nu}{2} T. \quad (4.29)$$

Очевидно, он отличен от нуля, если

$$(1 + \nu) T \neq 2\pi s,$$

где s — любое целое число.

Отсюда заключаем, что действительно при соответствующем выборе начальных условий можно построить такую орбиту ИСЗ, которая была бы периодической в выбранной нами вращающейся системе координат. Ряды, представляющие периодическое решение, будут сходящимися при достаточно малых по модулю μ , т. е. для порождающих орбит, радиусы которых достаточно малы по сравнению с расстояниями от Земли до Луны и Солнца.

З а м е ч а н и е. Рассуждения остаются справедливыми и в том случае, когда к возмущающим силам добавляются возмущающие члены, обусловленные фигурой Земли, если последнюю считать сфероидом.

§ 5. Периодические орбиты искусственного спутника Луны

Рассмотрим движение искусственного спутника Луны под действием притяжения к Луне и Земле. При этом, как и в работе Е. П. Аксенова и В. Г. Демина [159], сделаем следующее предположение.

1. Центры масс Земли и Луны движутся по круговым кеплеровским орбитам вокруг общего центра инерции с угловой скоростью n' , определяемой формулой

$$n'^2 = \frac{f(M + M_1)}{c^3}. \quad (5.1)$$

2. Искусственный спутник Луны представляет собой пассивно гравитирующую материальную точку.

3. Земля является шаром со сферическим распределением плотности, притягивающим по закону Ньютона.

4. Луна представляет собой абсолютно твердое тело, вращающееся вокруг оси, перпендикулярной к плоскости

лунной орбиты, и обладающее симметрией относительно плоскости лунной орбиты *).

Введем селеноцентрическую систему прямоугольных координат, за основную плоскость которой принята плоскость лунной орбиты. Системе координат сообщим равномерное вращение вокруг оси аппликат с угловой скоростью n' в направлении обращения Земли, а ось абсцисс проведем через центр Земли. Уравнение движения спутника Луны запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2n'\dot{y} - n'^2 \left(x - \frac{M_1 c}{M + M_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (U + V), \\ \ddot{y} + 2n'\dot{x} - n'^2 y &= \frac{\partial}{\partial y} (U + V), \\ \ddot{z} &= \frac{\partial}{\partial z} (U + V), \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

где V и U — потенциалы тяготения Земли и Луны. Эти потенциалы можно разложить в ряды по полиномам Лежандра (см. § 4 гл. VI и § 3 гл. II)

$$V = \frac{fM_1}{c^2} x + \frac{fM_1}{2c^3} (2x^2 - y^2 - z^2) + \frac{fM_1}{c} \sum_{s=3}^{\infty} \left(\frac{r}{c} \right)^s P_s \left(\frac{x}{r} \right), \quad (5.3)$$

где r — селеноцентрическое расстояние спутника, $P_s \left(\frac{x}{r} \right)$ — полином Лежандра s -го порядка,

$$U = \frac{fM}{r} + f \sum_{s=2}^{\infty} \frac{Q_s(x, y, z)}{r^{2s+1}}, \quad (5.4)$$

где $Q_s(x, y, z)$ — гармонические полиномы относительно x, y, z степени s , коэффициенты которых суть линейные комбинации моментов инерции s -го порядка.

Введем обозначения:

$$U_1 = f \sum_{s=2}^{\infty} \frac{Q_s}{r^{2s+1}}, \quad (5.5)$$

$$V_1 = \frac{fM_1}{c} \sum_{s=3}^{\infty} \left(\frac{r}{c} \right)^s P_s \left(\frac{x}{r} \right). \quad (5.6)$$

*) Допущение 4 весьма близко к действительности, так как наклон оси вращения Луны к плоскости лунной орбиты составляет $89^\circ 59'$.

Введем новую независимую переменную τ , связанную с t равенством

$$\tau = (n - n') t, \quad (5.7)$$

в котором n — среднее сидерическое движение спутника. Вводя обозначения

$$m = \frac{n'}{n - n'}, \quad \sigma = \frac{M_1}{M + M_1}, \quad k = \frac{fM}{(n - n')^2} \quad (5.8)$$

вместо системы (5.2) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2my' - m^2(1 + 2\sigma)x + \frac{kx}{r^3} &= \frac{1}{(n - n')^2} \frac{\partial}{\partial x} (U_1 + V_1), \\ y'' + 2mx' - m^2(1 - \sigma)y + \frac{ky}{r^3} &= \frac{1}{(n - n')^2} \frac{\partial}{\partial y} (U_1 + V_1), \\ z'' + m^2\sigma z + \frac{kz}{r^3} &= \frac{1}{(n - n')^2} \frac{\partial}{\partial z} (U_1 + V_1). \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Рассмотрим вместо системы (5.9) следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2my' - \frac{3}{2}m^2x + \frac{kx}{r^3} &= -\frac{1}{2}\mu\nu(1 - 4\sigma)x + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U}_1 + \bar{V}_1), \\ y'' + 2mx' - \frac{3}{2}m^2y + \frac{ky}{r^3} &= -\frac{1}{2}\mu\nu(1 + 2\sigma)y + \mu \frac{\partial}{\partial y} (\bar{U}_1 + \bar{V}_1), \\ z'' + \sigma m^2z + \frac{kz}{r^3} &= \mu \frac{\partial}{\partial z} (\bar{U}_1 + \bar{V}_1), \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

где использованы обозначения

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1 &= \frac{f}{(n - n')^2} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{\bar{Q}_s}{r^{2s+1}}, \\ \bar{V}_1 &= \sigma r^2 \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c} \right)^s P_{s+2} \left(\frac{x}{r} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

причем $\bar{Q}_s$ представляют собой полиномы, которые получаются из Q_s при подстановке в них вместо моментов инерции J_s следующих величин:

$$\bar{J}_s = J_s \mu^{-1}.$$

Исходная система получается из (5.10) при $\mu = m^2/\nu$. Система уравнений (5.10) при $\mu = 0$ имеет частное решение

$$x = a \cos \tau, \quad y = a \sin \tau, \quad \dot{z} = 0, \quad (5.12)$$

где a — корень уравнения

$$ka^{-3} = 1 + 2m + \frac{3}{2}m^2 = l. \quad (5.13)$$

Круговое движение (5.12) не будет кеплеровским, но при малых значениях m незначительно отличается от последнего.

Выполняя преобразование

$$\left. \begin{aligned} x &= a(1 + \xi) \cos \tau - a\eta \sin \tau, \\ y &= a(1 + \xi) \sin \tau + a\eta \cos \tau, \\ z &= a\xi. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

представим систему (5.10) в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi'' - 2(1+m)\eta' - l(1+\xi) + \frac{l(1+\xi)}{\rho^3} = \\ = -\frac{1}{2}\mu\nu[(1-\sigma)(1+\xi) - 3\sigma(1+\xi)\cos 2\tau + \\ + 3\sigma\eta\sin 2\tau] + \mu\frac{\partial}{\partial\xi}(\bar{U}_1 + \bar{V}_1), \\ \eta'' + 2(1+m)\xi' - l\eta + \frac{l\eta}{\rho^3} = -\frac{1}{2}\mu\nu[3\sigma(1+ \\ + \xi)\sin 2\tau + (1-\sigma)\eta + 3\sigma\eta\cos 2\tau] + \\ + \mu\frac{\partial}{\partial\eta}(\bar{V}_1 + \bar{U}_1), \\ \ddot{\xi} + m^2\sigma\xi + \frac{l\xi}{\rho^3} = \mu\frac{\partial}{\partial\xi}(\bar{U}_1 + \bar{V}_1), \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

где

$$\rho^2 = (1 + \xi)^2 + \eta^2 + \xi^2.$$

Решению (5.12) при $\mu = 0$ соответствует тривиальное решение системы (5.15). Примем его за порождающее и, опираясь на метод Пуанкаре, будем искать решения системы (5.15), обладающие по τ периодом 2π . С этой целью

рассмотрим уравнения первого приближения

$$\left. \begin{aligned} \xi'' - 2(1+m)\eta' - 3l\xi &= -\frac{1}{2}\nu[(1-\sigma - 3\sigma \cos 2\tau] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \xi}(\bar{U}_{11} + \bar{V}_{11}), \\ \eta'' + 2(1+m)\xi' &= -\frac{3}{2}\nu\sigma \sin 2\tau + \frac{\partial}{\partial \eta}(\bar{U}_{11} + \bar{V}_{11}), \\ \xi'' + (l + m^2\sigma)\xi &= \frac{\partial}{\partial \xi}(\bar{U}_{11} + \bar{V}_{11}), \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

где через $\bar{U}_{11}$ и $\bar{V}_{11}$ обозначены совокупности тех членов разложений (5.11), которые зависят от ξ , η , ξ линейным образом. Общее решение системы (5.16) записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \beta_1 \cos g\tau + \beta_2 \sin g\tau + \frac{1}{g^2}[b + 2(1+m)\beta_5] + F_1(\tau), \\ \eta &= -\frac{2(1+m)\beta_1}{g} \sin g\tau + \frac{2(1+m)\beta_2}{g} \cos g\tau - \\ &\quad - [3l\beta_5 + 2(1+m)b] \frac{\tau}{g^2} + \beta_6 + F_2(\tau), \\ \xi &= \beta_3 \cos \omega\tau + \beta_4 \sin \omega\tau + F_3(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

где b — величина, зависящая от σ , ν , c и постоянных, характеризующих фигуру Луны; функции $F_i(\tau)$ являются периодическими по τ с периодом 2π . Величины g и ω определяются соотношениями

$$\omega^2 = l + m^2\sigma, \quad g^2 = 1 + 2m - \frac{m^2}{2}, \quad (5.18)$$

а $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6$ — постоянные интегрирования.

Условия периодичности (1.33) в нашем случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \beta_1(\cos 2\pi g - 1) + \beta_2 \sin 2\pi g + \dots = 0, \\ \psi_2 &= -\beta_1 g \sin 2\pi g + \beta_2 g(\cos 2\pi g - 1) + \dots = 0, \\ \psi_3 &= \beta_3(\cos 2\pi\omega - 1) + \beta_4 \sin 2\pi\omega + \dots = 0, \\ \psi_4 &= -\beta_3\omega \sin 2\pi\omega + \beta_4\omega(\cos 2\pi\omega - 1) + \dots = 0, \\ \psi_5 &= -\frac{2(1+m)\beta_1}{g} \sin 2\pi g + \frac{2(1+m)\beta_2}{g} (\cos 2\pi g - \\ &\quad - 1) + \dots = 0, \\ \psi_6 &= -2(1+m)\beta_1(\cos 2\pi g - 1) + \\ &\quad + 2(1+m)\beta_2 \sin 2\pi g + \dots = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Якобиан системы (5.19) относительно величин β_i

$$\left[\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_6)}{D(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6)} \right]_0$$

тождественно равен нулю, но так как система (5.2) допускает интеграл Якоби, то одно из уравнений (5.19) является следствием остальных. Поэтому согласно (1.38) — (1.39) вопрос о существовании периодических решений решается рассмотрением каких-либо пяти уравнений (5.19). Нетрудно найти, что якобиан первых пяти уравнений будет

$$\left[\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_5)}{D(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_5)} \right]_0 = \frac{96l\omega}{g} \sin^2 \pi\omega \sin^2 \pi g, \quad (5.20)$$

откуда видим, что он обращается в нуль только при условии, что по меньшей мере одна из величин g или ω является целым числом. Это означает, что лишь для счетного множества решений, принадлежащих к двухпараметрическому семейству порождающих периодических решений, вопрос о периодических решениях системы (5.2) остается невыясненным. Для ∞^2 порождающих периодических решений существуют близкие к ним периодические решения того же периода системы (5.2).

§ 6. Периодические решения ограниченной круговой задачи трех тел

Свой метод построения периодических решений Пуанкаре применил к ограниченной круговой задаче трех тел, приняв в качестве порождающих орбиты задачи двух тел. Пуанкаре и его последователи открыли ряд классов периодических орбит в этой задаче. Мы остановимся на одном из классов, для которого порождающими орбитами являются орбиты задачи двух неподвижных центров.

Заметим, что рассуждения этого параграфа справедливы не только по отношению к круговой задаче трех тел, но и по отношению к задаче о движении спутника медленно вращающейся «трехосной» планеты, как это легко заключить, сравнив уравнения движения этих двух задач (см. формулы (1.24) — (1.26) гл. I).

Уравнения движения плоской круговой задачи трех тел в соответствии с (1.24) — (1.26) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2n\dot{y} + U'_x, \\ \ddot{y} &= -2n\dot{x} + U'_y, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

где силовая функция U определяется равенством

$$U = \frac{n^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{fm_1}{r_1} + \frac{fm_2}{r_2}. \quad (6.2)$$

Система (6.1) допускает первый интеграл (интеграл Якоби)

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(U + h). \quad (6.3)$$

Выполним регуляризирующее преобразование

$$\left. \begin{aligned} x &= c \left(\operatorname{ch} v \cos u - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right), \\ y &= -c \operatorname{sh} v \sin u, \\ dt &= n' (\operatorname{ch}^2 v - \cos^2 u) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

в котором c — половина расстояния между притягивающими точками, а n' — среднее движение пассивно гравитирующей точки по невозмущенной (кеплеровской) орбите. Будем рассматривать только такие движения, для которых величина

$$\mu = \frac{n}{n'}$$

достаточно мала.

В результате преобразования (6.4) получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} u'' &= 2\mu (\operatorname{ch}^2 v - \cos^2 u) v' + W'_u, \\ v'' &= -2\mu (\operatorname{ch}^2 v - \cos^2 u) u' + W'_v, \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

где силовая функция W имеет вид

$$\begin{aligned} W &= \frac{f(m_1 + m_2)}{n'^2 c^3} \operatorname{ch} v + \frac{f(m_1 - m_2)}{n'^2 c^3} \cos u + \\ &+ \frac{h}{2n'^2 c^3} (\operatorname{ch} 2v - \cos 2u) + \frac{\mu^2}{16c^2} (\operatorname{ch} 4v - \cos 4u) - \\ &- \frac{\mu^2 (m_1 - m_2)}{4c^2 (m_1 + m_2)} (\cos u \operatorname{ch} 3v - \cos 3u \operatorname{ch} v). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Интеграл Якоби в новых переменных записывается в форме

$$u'^2 + v'^2 - 2W = 0. \quad (6.7)$$

При $\mu = 0$ уравнения (6.5) представляют собой уравнения движения задачи двух неподвижных центров (см. формулы (2.24) — (2.25) гл. III) и интегрируются в квадратурах. Эти решения мы примем за порождающие.

С помощью метода Пуанкаре будем искать периодические решения системы (6.5) в виде рядов по степеням параметра μ :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k, \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k v_k. \quad (6.8)$$

Ради простоты будем считать, что движущаяся точка пересекает линию центров в момент $\tau = 0$, причём в этот момент точка находится в перигентре или апоцентре порождающей орбиты.

Система (6.5) инвариантна относительно подстановки

$$v \rightarrow v, \quad u \rightarrow -u, \quad \tau \rightarrow -\tau. \quad (6.9)$$

Поэтому в силу теоремы симметрии условия периодичности решения с начальными условиями

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = u_0' \quad (6.10)$$

можно преобразовать к форме

$$u(0) = 0, \quad u\left(\frac{T}{2}\right) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v'\left(\frac{T}{2}\right) = 0. \quad (6.11)$$

Из (6.4), (6.9) и (6.10) видно, что условия периодичности (6.11) позволяют установить существование периодических орбит, симметричных относительно оси x и пересекающих эту ось под прямым углом *).

*) Уравнения движения инвариантны также и относительно подстановки $u \rightarrow u, v \rightarrow -v, \tau \rightarrow -\tau$. Отсюда следует, что условия периодичности можно записать в форме $u'(0) = 0, u'\left(\frac{T}{2}\right) = 0, v(0) = 0, v\left(\frac{T}{2}\right) = 0$. С помощью этих условий периодичности возможно найти периодические орбиты как прямого, так и обратного синодического движений.

Обозначая через $u_0(\tau)$, $v_0(\tau)$ решение упрощенной системы, запишем систему уравнений первого приближения

$$u_1'' + \left[\frac{f(m_1 - m_2)}{n'^2 c^3} \cos u_0 - \frac{h}{2n'^2 c^3} \cos 2u_0 \right] u_1 = \\ = 2(\operatorname{ch}^2 v_0 - \cos^2 u_0) v_0', \quad (6.12)$$

$$v_1'' + \left[\frac{f(m_1 + m_2)}{n'^2 c^3} \operatorname{ch} v_0 + \frac{h}{2n'^2 c^3} \operatorname{ch} 2v_0 \right] v_1 = \\ = -2(\operatorname{ch}^2 v_0 - \cos^2 u_0) u_0'. \quad (6.13)$$

Формулы (2.22), определяющие решение уравнений в вариациях для квазилиувиллевых систем, дают общее решение уравнений (6.12) и (6.13) в виде

$$u_1 = u_0' \left\{ \beta_1 \int \frac{d\tau}{u_0'^2} + \beta_2 + \int \left[\int (\operatorname{ch} 2v_0 - \cos 2u_0) u_0' v_0' d\tau \right] \frac{d\tau}{u_0'^2} \right\}, \quad (6.14)$$

$$v_1 = v_0' \left\{ \beta_3 \int \frac{d\tau}{v_0'^2} + \beta_4 + \int \left[\int (\operatorname{ch} 2v_0 - \cos 2u_0) u_0' v_0' d\tau \right] \frac{d\tau}{v_0'^2} \right\}. \quad (6.15)$$

Рассмотрим упрощенную систему уравнений

$$u_0'' = -\frac{f(m_1 - m_2)}{n'^2 c^3} \sin u_0 + \frac{h}{n'^2 c^2} \sin 2u_0, \quad (6.16)$$

$$v_0'' = \frac{f(m_1 + m_2)}{n'^2 c^3} \operatorname{sh} v_0 + \frac{h}{n'^2 c^2} \operatorname{sh} 2v_0 \quad (6.17)$$

и предположим, что начальные условия соответствуют типу движения, рассмотренному в § 2 гл. III. Тогда порождающее решение определяется формулами (2.47) и (2.56) упомянутого параграфа

$$\cos u_0 = \frac{\operatorname{cn}^2 [\sigma_1(\tau - \tau_1), k_1] - \beta^2}{\operatorname{cn}^2 [\sigma_1(\tau - \tau_1), k_1] + \beta^2}, \quad (6.18)$$

$$\operatorname{ch} v_0 = \frac{1 + a^2 \operatorname{cn}^2(\sigma\tau, k)}{1 - a^2 \operatorname{cn}^2(\sigma\tau, k)}, \quad (6.19)$$

где

$$\tau_1 = -K(k_1)/\sigma_1.$$

Так как выбирается периодическое порождающее решение, то

$$\sigma_1 K(k) = s\sigma K(k_1), \quad (6.20)$$

где s — произвольное целое число, а $K(k)$ и $K(k_1)$ суть полные эллиптические интегралы первого рода. Период порождающего решения можно представить в форме

$$T = \frac{2pK(k_1)}{\sigma} = \frac{2qK(k)}{\sigma_1}, \quad (6.21)$$

где p и q — взаимно простые целые числа.

Из (6.18) и (6.19) находим

$$u'_0 = \frac{2\beta\sigma_1 \operatorname{sn} \sigma_1(\tau - \tau_1) \operatorname{dn} \sigma_1(\tau - \tau_1)}{\operatorname{cn}^2 \sigma_1(\tau - \tau_1) + \beta^2}, \quad (6.22)$$

$$v'_0 = -\frac{2a\sigma \operatorname{sn} \sigma\tau \operatorname{dn} \sigma\tau}{1 - a^2 \operatorname{cn}^2 \sigma\tau}. \quad (6.23)$$

Вычислим интеграл

$$I = 4\beta^2\sigma_1^2 \int \frac{d\tau}{u'^2_0}. \quad (6.24)$$

Из (6.22) и (6.24) находим

$$I = \int \frac{\beta^2 + \operatorname{cn}^2 \sigma_1(\tau - \tau_1)}{\operatorname{sn}^2 \sigma_1(\tau - \tau_1) \operatorname{dn}^2 \sigma_1(\tau - \tau_1)} d\tau. \quad (6.25)$$

При помощи основных тождеств, связывающих эллиптические функции Якоби, преобразуем (6.25) к виду

$$I = -\frac{1}{k_1^2} \int d\tau + (1 + \beta^2)^2 \int \frac{d\tau}{\operatorname{sn}^2 \sigma_1(\tau - \tau_1)} + \frac{g_1}{k_1^2} \int \frac{d\tau}{\operatorname{dn}^2 \sigma_1(\tau - \tau_1)}, \quad (6.26)$$

где $q_1 = (1 + \beta^2) k_1^2 - 1$. Используя рекуррентные

соотношения

$$\int \operatorname{sn}^m z \, dz = \frac{1}{m+1} \left[\operatorname{sn}^{m+1} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z + (m+2)(1 + k^2) \int \operatorname{sn}^{m+2} z \, dz - (m+3)k^2 \int \operatorname{sn}^{m+4} z \, dz \right], \quad (6.27)$$

$$\int \operatorname{dn}^m z \, dz = \frac{1}{(m+1)k'^2} \left[k^2 \operatorname{dn}^{m+1} z \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z + (m+2)(2 - k^2) \int \operatorname{dn}^{m+2} z \, dz - (m+3) \int \operatorname{dn}^{m+4} z \, dz \right], \quad (6.28)$$

вместо (6.26) можно получить

$$\begin{aligned} I = & -\frac{\tau}{k_1^2} - \frac{(1 + \beta^2) \operatorname{cn} \sigma_1(\tau - \tau_1) \operatorname{dn} \sigma_1(\tau - \tau_1)}{\sigma_1 \operatorname{sn} \sigma_1(\tau - \tau_1)} + \\ & + \frac{g_1^2 \operatorname{sn} \sigma_1(\tau - \tau_1) \operatorname{cn} \sigma_1(\tau - \tau_1)}{\operatorname{dn} \sigma_1(\tau - \tau_1)} + \frac{k_1^2 (1 + \beta^2)^2}{\sigma_1} \int \operatorname{sn}^2 \sigma_1(\tau - \tau_1) d(\sigma_1 \tau) + \\ & + \frac{g_1^2}{\sigma_1 k_1^2 k_1'^2} \int \operatorname{dn}^2 \sigma_1(\tau - \tau_1) d(\sigma_1 \tau). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Но так как

$$\int \operatorname{sn}^2 z \, dz = \frac{1}{k^2} [z - \mathbf{E}(\operatorname{am} z, k)], \quad (6.30)$$

$$\int \operatorname{dn}^2 z \, dz = \mathbf{E}(\operatorname{am} z, k), \quad (6.31)$$

где $\mathbf{E}$ — эллиптический интеграл второго рода, то вместо (6.29) окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} I = & f_1 \tau - \frac{(1 + \beta^2)^2 \operatorname{cn} \sigma_1(\tau - \tau_1) \operatorname{dn} \sigma_1(\tau - \tau_1)}{\sigma_1 \operatorname{sn} \sigma_1(\tau - \tau_1)} - \\ & - \frac{g_1^2 \operatorname{sn} \sigma_1(\tau - \tau_1) \operatorname{cn} \sigma_1(\tau - \tau_1)}{\sigma_1 \operatorname{dn} \sigma_1(\tau - \tau_1)} + f_2 \mathbf{E}[\operatorname{am} \sigma_1(\tau - \tau_1), k_1], \end{aligned} \quad (6.32)$$

причем

$$f_1 = \frac{g_1}{k_1^2}, \quad (6.33)$$

$$f_2 = \frac{1}{\sigma_1} \left[\frac{g_1^2}{k_1^2 k_1'^2} - (1 + \beta^2)^2 \right]. \quad (6.34)$$

Первый член в (6.18) в силу (6.32) будет конечным и непрерывным. Соответствующие исследования можно провести и для второго интеграла в формуле (6.18).

Итак,

$$\begin{aligned}
 u_1 = & \frac{\beta_1}{2\beta\sigma_1} \left\{ \left[f_1\tau - \frac{g_1^2 \operatorname{sn} \sigma_1(\tau - \tau_1) \operatorname{cn} \sigma_1(\tau - \tau_1)}{\sigma_1 k_1'^2 \operatorname{dn} \sigma_1(\tau - \tau_1)} + \right. \right. \\
 & + f_2 E(\operatorname{am} \sigma_1(\tau - \tau_1), k_1) \left. \right] \frac{\operatorname{sn} \sigma_1(\tau - \tau_1) \operatorname{dn} \sigma_1(\tau - \tau_1)}{\operatorname{cn}^2 \sigma_1(\tau - \tau_1) + \beta^2} - \\
 & - \frac{(1 + \beta^2)^2 \operatorname{cn} \sigma_1(\tau - \tau_1) \operatorname{dn} \sigma_1(\tau - \tau_1)}{\operatorname{cn}^2 \sigma_1(\tau - \tau_1) + \beta^2} \left. \right\} + \\
 & + \frac{2\beta\beta_2\sigma_1 \operatorname{sn} \sigma_1(\tau - \tau_1) \operatorname{dn} \sigma_1(\tau - \tau_1)}{\operatorname{cn}^2 \sigma_1(\tau - \tau_1) + \beta^2} + \\
 & + u_0' \int \left[\int (\operatorname{ch} 2v_0 - \cos 2u_0) u_0' v_0' d\tau \right] \frac{d\tau}{u_0'^2}. \quad (6.35)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим два первых условия периодичности (6.11). Пусть сначала p — нечетное число. Тогда эти условия запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned}
 u_1\left(\frac{T}{2}\right) &= -\frac{1 + \beta^2}{2\beta\sigma_1^2} \beta_1 + \dots = 0, \\
 u_1(0) &= \frac{k_1'\beta_1}{2\beta\sigma_1} \left[\frac{f_1}{\sigma_1} K(k_1) + f_2 E(k_1) \right] + \frac{2\sigma_1 k_1'}{\beta} \beta_2 + \dots = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

Из (6.36) видим, что якобиан

$$\left[\frac{D \left[u_1(0), u_1\left(\frac{T}{2}\right) \right]}{D(\beta_1, \beta_2)} \right]_0 = \pm \frac{(1 + \beta^2) k_1'}{\sigma_1 \beta^2} \quad (6.37)$$

всегда отличен от нуля. Если p — четное число, то первое из уравнений (6.36) должно быть заменено следующим:

$$\begin{aligned}
 u_1\left(\frac{T}{2}\right) &= \pm \frac{k_1'}{\sigma_1 \beta^3} \left[\frac{q}{k_1^2} (p + 1) K(k_1) + \sigma_1 f_2 q E(k_1) \right] \beta_1 \pm \\
 &\pm \frac{2\sigma_1 k_1'}{\beta} \beta_2 + \dots = 0. \quad (6.38)
 \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что соответствующий якобиан не равен нулю. Стало быть, при начальных условиях, удовлетворяю-

щих (6.20), периодические решения существуют. В проведенном анализе не учитывался второй из интегралов, входящих в (6.12). Легко показать, что он может дать вековой член, который соответствующим выбором β_1 уничтожается, и тогда решение для u будет периодическим.

Обратимся теперь к уравнению (6.13). Преобразованиями, аналогичными предыдущим, с помощью рекуррентных формул (6.27) и (6.28) для v_1 получим выражение

$$\begin{aligned} v_1 = & - \frac{\beta_3}{2a\sigma^2(1-a^2\operatorname{cn}\sigma\tau)} \left\{ \left[(1-a^2)^2 - \frac{\sigma^4}{k^4} \right] \sigma\tau \operatorname{sn}\sigma\tau \operatorname{dn}\sigma\tau - \right. \\ & - (1-a^2)^2 \operatorname{dn}^2\sigma\tau \operatorname{cn}\sigma\tau - \frac{(k^2 + k'^2a^2)^2}{k'^2} \operatorname{sn}^2\sigma\tau \operatorname{cn}\sigma\tau + \\ & + \frac{(k^2 + a^2k'^2)^2 - (1-a^2)k^2k'^2}{k^2k'^2} \mathbf{E}(\operatorname{am}\sigma\tau, k) \cdot \operatorname{sn}^2\sigma\tau \operatorname{dn}\sigma\tau \Big\} - \\ & - \beta_4 \frac{2a\sigma \operatorname{sn}\sigma\tau \operatorname{dn}\sigma\tau}{1-a^2\operatorname{cn}^2\sigma\tau} + \dots \quad (6.39) \end{aligned}$$

Теперь после дифференцирования по τ (6.39) можно записать третье и четвертое из условий периодичности (6.11) в явной форме. Третье условие запишется в виде

$$v_1'(0) = - \frac{2a\sigma^3}{1-a^2} \beta_4 + \dots = 0. \quad (6.40)$$

Последнее условие при нечетном q будет

$$v_1'\left(\frac{T}{2}\right) = \pm \frac{\beta_3}{2a\sigma k'} + \dots = 0. \quad (6.41)$$

Из (6.40) и (6.41) получим, что якобиан

$$\left[\frac{D\left(v_1'(0), v_1'\left(\frac{T}{2}\right)\right)}{D(\beta_3, \beta_4)} \right]_0 = \pm \frac{\sigma}{k'(1-a^2)} \quad (6.42)$$

всегда отличен от нуля. Если q — четное, то вместо (6.41) должно быть взято уравнение

$$\begin{aligned} v_1'\left(\frac{T}{2}\right) = & \pm \frac{q\beta_3}{4a\sigma(1-a^2)} \left\{ 2 \left[-\frac{a^4}{k^2} + (1-a^2)^2 \right] \mathbf{K} + \right. \\ & + \left[\frac{(k^2 + a^2k'^2)^2}{k^2k'^2} - (1-a^2)^2 \mathbf{E} \right] \Big\} \pm \frac{2a\sigma^2}{1-a^2} \beta_4 + \dots = 0. \quad (6.43) \end{aligned}$$

Коэффициент при β_3 в (6.43) отличен от нуля, а тогда и во втором случае соответствующий якобиан не равен нулю.

Итак, мы показали существование периодических решений исходных уравнений, соответствующих порождающим решениям (6.18), (6.19). Найденные решения будут периодическими на вращающейся плоскости, причем они замыкаются после нескольких (многих) оборотов. На неподвижной плоскости эти решения будут почти периодическими.

§ 7. Метод Уиттекера. Почти периодические орбиты спутника сфероидальной планеты

Рассмотрим движение спутника в гравитационном поле сфероидальной планеты. Возьмем планетоцентрическую систему координат $Oxyz$, основная плоскость которой совпадает с экваториальной плоскостью планеты, а ось аппликат совпадает с осью вращения планеты. Силовая функция рассматриваемой проблемы запишется в виде

$$U = \frac{fm}{r} + \mu R(\rho, z, \mu), \quad (7.1)$$

где

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad r^2 = \rho^2 + z^2.$$

В формуле (7.1) использованы следующие обозначения: m — масса планеты, μ — малый параметр, имеющий порядок сжатия планеты. Относительно функции R предположим, что она дифференцируема и обладает непрерывными частными производными первого порядка. Будем предполагать также, что разложение функции R в ряд по полиномам Лежандра начинается с членов, пропорциональных кубу обратного расстояния (см. гл. II).

Дифференциальные уравнения задачи запишутся в виде (см. (3.13) гл. I)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho \dot{\lambda}^2 &= \frac{\partial U}{\partial \rho}, \\ \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\lambda}) &= 0, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

В системе (7.2) через λ обозначена планетоцентрическая долгота спутника. С помощью интеграла площадей

$$\rho^2 \dot{\lambda} = c, \quad (7.3)$$

в котором c — произвольная постоянная, исключим из системы (7.2) циклическую координату λ :

$$\ddot{\rho} = \frac{\partial W}{\partial \rho}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (7.4)$$

где

$$W = -\frac{c^2}{2\rho^2} + U. \quad (7.5)$$

Система (7.4) допускает интеграл энергии

$$\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = 2(W + h). \quad (7.6)$$

Докажем существование периодических решений системы (7.4), применяя к ней критерий Уиттекера*) [160]. Для этого нужно показать, что в плоскости ρ, z существует такая кольцевая область, ограниченная двумя замкнутыми кривыми, во всех точках внутренней границы которой выражение

$$D = 2k(W + h) + \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \cos \gamma + \frac{\partial W}{\partial z} \sin \gamma \right) \quad (7.7)$$

отрицательно, а во всех точках внешней границы — положительно. В выражении (7.7) k — кривизна соответствующей границы кольцевой области, а γ — угол между внешней нормалью к граничному контуру и осью ρ .

Выражение (7.7) имеет вид

$$D = 2kh - \frac{c^2}{\rho^2} \left(k - \frac{\cos \gamma}{\rho} \right) + \frac{im}{r} \left(2k - \frac{\rho}{r^2} \cos \gamma - \frac{z}{r^2} \sin \gamma \right) + \\ + \mu \left(2kR + \frac{\partial R}{\partial \rho} \cos \gamma + \frac{\partial R}{\partial z} \sin \gamma \right). \quad (7.8)$$

Рассмотрим кольцевую область, ограниченную концентрическими окружностями:

$$r = r_1, \quad r = r_2 \quad (r_1 < r_2). \quad (7.9)$$

Тогда система уравнений (7.4) допускает периодические решения, если возможно выбрать такие r_1 и r_2 , что

$$D(r_1) < 0, \quad D(r_2) > 0. \quad (7.10)$$

*) См. также Бирхгофа [161]. Излагаемые результаты получены автором [162].

Из (7.8) и (7.9) находим

$$D(r_i) = \frac{2h}{r_i} + \frac{fm}{r_i^2} + \mu \left(\frac{2}{r_i} R + \frac{\rho}{r_i} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{z}{r_i} \frac{\partial R}{\partial z} \right) \quad (i = 1, 2). \quad (7.11)$$

В уравнениях (7.11) ρ и z соответственно удовлетворяют уравнениям

$$\rho^2 + z^2 = r_i^2 \quad (i = 1, 2). \quad (7.12)$$

Исследуя методом Хилла (см. § 9 гл. III) интеграл (7.6), можно показать, что представляющие практический интерес траектории будут иметь место только при $h < 0$. Именно этот случай мы и рассмотрим.

При $\mu = 0$ для любого фиксированного значения h найдутся такие r_1 и r_2 , что условия (7.10) будут выполняться. Тогда в силу непрерывности силовой функции и ее производных по μ при любых значениях h для достаточно малых значений параметра μ также можно найти такие r_1 и r_2 , для которых неравенства (7.10) имеют место, т. е. для сфероидальной планеты с достаточно малым сжатием среди решений любого изоэнергетического семейства всегда найдется по крайней мере одно периодическое.

Существование периодических решений можно доказать для любых сфероидальных тел, если принять во внимание характеристические свойства гравитационного потенциала, которыми должна обладать возмущающая функция R . Однако в этом случае удастся доказать лишь существование периодических орбит, достаточно удаленных от притягивающего сфероидального тела.

Интересно отметить, что периодическим решениям системы (7.4) могут соответствовать почти периодические движения, определяемые системой уравнений (7.2). Действительно, пусть

$$\rho = \rho(t), \quad z = z(t) \quad (7.13)$$

— некоторое решение с периодом T .

Из интеграла (7.3) имеем

$$\dot{\lambda} = \frac{c}{\rho^2(t)}, \quad (7.14)$$

откуда

$$\lambda = \lambda_0 + c \int \frac{dt}{\rho^2(t)}. \quad (7.15)$$

Периодическую функцию $1/\rho^2(t)$ можно представить в виде

$$\frac{1}{\rho^2} = a + \varphi(t), \quad (7.16)$$

где a — некоторая постоянная, а φ — периодическая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^T \varphi(t) dt = 0. \quad (7.17)$$

Из (7.15) и (7.16) находим

$$\lambda = \lambda_0 + act + \Phi(t), \quad (7.18)$$

где $\Phi(t)$ — функция, имеющая период T .

При изменении времени t на величину T координаты ρ и z примут свои первоначальные значения, а λ получит приращение acT , которое, вообще говоря, не будет кратным 2π , ибо период T и постоянная a не зависят от постоянной площадей c . Поэтому движение исследуемой точки в общем случае почти периодическое. Движения будут периодическими для счетного множества значений c , для которых величина acT кратна 2π .

Для данного изоэнергетического семейства траекторий будет существовать ∞^3 почти периодических движений, из которых ∞^2 будут периодическими (здесь принята во внимание произвольная постоянная λ_0 , входящая в уравнение (7.18)).

Локализация почти периодических траекторий спутника может быть выполнена способом, предложенным Н. Д. Моисеевым [163], а определение периода решения — с помощью результатов, полученных Н. Ф. Рейн [164]. Соответствующий итерационный процесс может быть выполнен на ЭВМ.

УСТОЙЧИВОСТЬ СПУТНИКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ

§ 1. Задача об устойчивости по отношению к части переменных. Теорема В. В. Румянцева

При рациональном выборе орбит искусственных небесных тел необходимо принимать во внимание не только энергетические характеристики, но и «степень чувствительности» траектории как к начальным отклонениям в обобщенных координатах и скоростях, так и к малым, постоянно действующим возмущающим силам. Насколько существен последний фактор, можно судить из примера: малое возмущающее воздействие Луны на движение американского спутника «Эксплорер-6» сократило срок жизни этого спутника с 20 до 2 лет.

Таким образом, в задачах небесной баллистики выбираемые решения дифференциальных уравнений движения космического аппарата в том или ином смысле должны обладать свойством устойчивости. В большинстве случаев наиболее важно исследовать устойчивость решений в смысле А. М. Ляпунова, в некоторых случаях достаточно устойчивость траектории по Лагранжу [165]. Известный интерес представляет также исследование устойчивости решений в смысле В. И. Арнольда [166—168].

Мы придаем принципиальное значение задаче об исследовании устойчивости по отношению к части переменных. В такой постановке задача об устойчивости долгое время не привлекала внимание механиков, и лишь сравнительно недавно она стала успешно развиваться В. В. Румянцевым и нашла широкие приложения в ряде важных задач механики [169, 170, 171].

Свойство устойчивости движения по крайней мере в интегрируемых проблемах динамики присуще в той или иной мере любому решению. Это очевидно из следующих элементарных рассуждений.

Пусть для описания движения в интегрируемой проблеме динамики с n степенями свободы в качестве канонических переменных приняты переменные «действие — угол» (см. § 10 гл. I). В этих переменных гамильтонова система дифференциальных уравнений движения будет иметь вид

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

где гамильтониан H зависит только от переменных действия p_i . Тогда общее решение системы (1.1) запишется следующим образом:

$$p_i = a_i, \quad q_i = \omega_i t + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.2)$$

причем здесь a_i и b_i суть произвольные постоянные, а

$$\omega_i = \frac{\partial H(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_i}.$$

Из (1.2) видно, что какими бы малыми ни были начальные возмущения постоянных a_i , канонические переменные типа «угол» через конечный промежуток времени будут разниться от их невозмущенных значений на сколь угодно большую величину. Это означает, что по отношению к переменным типа «угол» свойство устойчивости места не имеет. Что же касается канонических переменных типа «действие», то они, напротив, в любой момент времени будут отличаться сколь угодно мало от своих невозмущенных значений, если только начальные возмущения будут достаточно малы. Это означает, что любое решение системы (1.1) устойчиво по отношению к части переменных, а именно по отношению к величинам p_i . В терминах § 10 гл. I можно сказать, что для интегрируемых гамильтоновых систем в $2n$ -мерном фазовом пространстве q_i , p_i возмущенное движение будет происходить по n -мерным торам $p_i = \text{const}$, которые при любом t будут достаточно близки к невозмущенному тору $p_i = a_i$, если начальные возмущения достаточно малы. В частном случае, для задачи двух тел подобное утверждение было сделано Г. Н. Дубошиным [172].

Однако необходимо также отметить, что в задачах динамики, как правило, нельзя ожидать устойчивости по отношению ко всем переменным, как это видно из вышепри-

веденного примера, если исключить из рассмотрения равновесные (в широком смысле) решения. Поэтому принципиально более верной является постановка задачи об устойчивости по отношению к части переменных. Такая постановка задачи об устойчивости автоматически снимает оставшийся открытым у Ляпунова вопрос о том, всегда ли возможно составить дифференциальные уравнения возмущенного движения, если число выбранных величин, по отношению к которым исследуется устойчивость, менее числа степеней свободы.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3)$$

и предположим, что любое решение этой системы неограниченно продолжаемо, т. е. существует при любом $t \geq t_0$, где t_0 — начальный момент. Пусть

$$y_i = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4)$$

представляет собой частное решение системы (1.3), удовлетворяющее определенным начальным условиям:

$$t = t_0, y_i = y_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.5)$$

Решение (1.4) назовем невозмущенным, а всякое иное решение будем называть возмущенным. Для возмущенного решения вместо (1.5) имеют место следующие начальные условия:

$$t = t_0, y_i = y_i^{(0)} + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.6)$$

где ε_i суть некоторые действительные постоянные, которые называются начальными возмущениями.

Для любого $t \geq t_0$ разности $y_i - f_i(t)$ назовем последующими возмущениями или просто возмущениями. Если все $\varepsilon_i = 0$, то все разности $y_i - f_i(t) \equiv 0$.

Пусть Φ_i ($i = 1, 2, \dots, k \leq n$) суть заданные непрерывные функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ и времени t . Функции Φ_i при подстановке вместо y_i их значений из (1.5) обращаются в известные функции времени:

$$\Phi_i(t, f_1(t), \dots, f_n(t)) = \Phi_i^{(0)}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Рассмотрим разности возмущенных и невозмущенных значений функций Φ_i :

$$x_i = \Phi_i(t, y_1, \dots, y_n) - \Phi_i^{(0)}(t). \quad (1.7)$$

Очевидно, что когда все ε_i суть нули, то для всякого значения t будут нулями и величины x_i . Если же начальные возмущения $x_i^{(0)} = x_i(t_0)$ отличны от нуля и принимают любые значения, численно достаточно малые по абсолютной величине, то возмущения функций Φ_i могут либо всегда оставаться численно достаточно малыми, либо превысят через конечный промежуток времени t назначенные малые пределы. Решение этого вопроса зависит как от характера правых частей системы (1.3), так и от выбора величин Φ_i .

Исследование этого вопроса как раз и составляет основную задачу теории устойчивости.

О п р е д е л е н и е. Невозмущенное решение называется устойчивым в смысле Ляпунова по отношению к величинам $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при любых действительных значениях $x_i^{(0)}$, удовлетворяющих условию

$$|x_i^{(0)}| \leq \delta \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (1.8)$$

для всякого $t \geq t_0$ выполняются неравенства

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (1.9)$$

Условия (1.9) для устойчивых решений должно выполняться при любых начальных возмущениях, совместимых с (1.8). Если найдется хотя бы одна система начальных возмущений, приводящая при каком-либо $t > t_0$ по крайней мере к одному из равенств вида

$$|x_i(t)| = \varepsilon,$$

то движение будет неустойчивым.

Иногда рассматривают не любые начальные возмущения; а только те, которые подчиняются некоторым дополнительным условиям вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1.10)$$

или

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0. \quad (1.11)$$

Тогда, если неравенства (1.9) выполняются при всех начальных возмущениях, удовлетворяющих условиям (1.8) и (1.10) (или (1.11)), то рассматриваемое невозмущенное решение называют условно-устойчивым. Устойчивость решения в смысле основного определения мы будем иногда именовать безусловной.

Если возмущения величин Φ_i , удовлетворяя данному определению, кроме того, при неограниченном возрастании времени t стремятся к нулю, то говорят, что невозмущенное движение асимптотически устойчиво по отношению к величинам $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$. В дальнейшем мы не будем формулировать критериев асимптотической устойчивости, так как ограничимся изучением движения механической системы в потенциальных полях. Как следует из теоремы Лиувилля [173], в этом случае фазовый объем оказывается несжимаемым, и, следовательно, при определенных ограничениях, наложенных на потенциал, асимптотическая устойчивость места не имеет.

Перейдем к составлению дифференциальных уравнений возмущенного движения. Запишем (1.7) в виде

$$\psi_i = \Phi_i(t, y_1, \dots, y_n) - \Phi_i^{(0)}(t) - x_i = 0 \quad (1.12)$$

и предположим, что функциональный определитель

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)}{D(y_1, y_2, \dots, y_k)}$$

отличен от нуля. Положим, кроме того,

$$x_i = y_i - f_i(t) \quad (i = k+1, \dots, n) \quad (1.13)$$

и выполним преобразование системы уравнений (1.3) к переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, определяемым формулами (1.7) и (1.13). Из этих формул дифференцированием по времени получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j} \dot{y}_j + \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} - \frac{d\Phi_i^{(0)}}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ \frac{dx_i}{dt} &= \frac{dy_i}{dt} - \dot{f}_i(t) \quad (i = k+1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

В правые части уравнений (1.14) вместо $\dot{y}_i$ подставим их

выражения из (1.3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j} Y_j + \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} - \frac{d\Phi_i^{(0)}}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ \frac{dx_i}{dt} &= Y_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad (i = k+1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Из формул (1.7) и (1.13) находим $y_1, y_2, \dots, y_n$, что возможно вследствие неравенства нулю якобиана преобразования, и подставим найденные значения в правые части уравнений (1.15). Обозначая результат подстановки через

$$X_i = X_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.16)$$

вместо (1.15) получим следующую систему уравнений возмущенного движения:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.17)$$

Из (1.16) нетрудно обнаружить, что функции $X_1, X_2, \dots, X_n$ тождественно равны нулю, если все x_i положить равными нулю:

$$X_i(t, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0. \quad (1.18)$$

Следовательно, система (1.17) допускает тривиальное решение

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,$$

которое соответствует решению (1.4) системы (1.3). Задача об устойчивости решения системы (1.3) по отношению к величинам Φ_i эквивалентна задаче об устойчивости тривиального решения системы (1.17) по отношению к x_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Если $k < n$, то исследуется устойчивость по отношению к части переменных. Если $k = n$, то рассматриваемая задача совпадает с ляпуновской постановкой.

При исследовании устойчивости тривиального решения системы (1.17) будем всегда предполагать, что правые части уравнений (1.17) суть голоморфные функции относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ в некоторой комплексной области их изменения

$$|x_i| < A_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.19)$$

при любых действительных значениях $t \geq t_0$. Кроме того, предположим, что все X_i являются непрерывными функциями времени t при $t \geq t_0$.

Так как в основном мы будем пользоваться второй методой А. М. Ляпунова, то введем еще понятие функции Ляпунова. Рассмотрим функцию $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенную в области (1.19) при $t \geq t_0$. Пусть функция V является дифференцируемой функцией. Тогда ее полная производная по времени определится формулой

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial t},$$

которую в силу уравнений (1.17) можно записать в виде

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (1.20)$$

Величину (1.20) называют производной от функции V в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения.

О п р е д е л е н и е. Если функция $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ и ее производная $\dot{V}$ в силу дифференциальных уравнений непрерывны и однозначны в области (1.19) при любых $t \geq t_0$ и если, сверх того, как V , так и $\dot{V}$ тождественно равны нулю при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ и при любом $t \geq t_0$, то эту функцию называют функцией Ляпунова.

Если функция Ляпунова кроме равных нулю значений может получать значения только одного знака, то она называется знакопостоянной. В противном случае функция является знакопеременной.

О п р е д е л е н и е. Если знакопостоянная не зависящая от времени функция Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в области $|x_i| < A_i$, $i = 1, \dots, k$, $k < n$, а $x_{k+1}, \dots, x_n$ — произвольны, уничтожается лишь тогда, когда переменные $x_1, x_2, \dots, x_k$ обращаются в нули, то такая функция называется знакоопределенной по отношению к переменным $x_1, x_2, \dots, x_k$.

О п р е д е л е н и е. Функция Ляпунова V , явно зависящая от времени t , называется знакоопределенной по отношению к переменным $x_1, x_2, \dots, x_k$, если возможно найти такую определенно положительную и не зависящую от времени функцию $W(x_1, x_2, \dots, x_k)$, чтобы либо разность $V - W$, либо $-W - V$ была бы положительной функцией.

Если в приведенных определениях $k = n$, то функции V будут знакоопределенными в обычном ляпуновском понимании.

А. М. Ляпуновым даны критерии устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости, содержащиеся в его основных теоремах второй metody. Модификация этих теорем дана В. В. Румянцевым для исследования устойчивости по отношению к части переменных. Докажем теорему об устойчивости по отношению к части переменных, воспроизводя без существенных изменений доказательство В. В. Румянцева [169, 170].

Т е о р е м а В. В. Р у м я н ц е в а. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную по отношению к переменным $x_1, x_2, \dots, x_k$ функцию V , производная которой в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного с V знака или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво по отношению к переменным $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $V(t, x_1, \dots, x_n)$ — определено положительная по отношению к $x_1, x_2, \dots, x_k$ функция, и пусть производная по времени в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения (1.17) от этой функции V знакопостоянно отрицательна или тождественно равна нулю. Тогда, согласно определению зависящей от времени знакоопределенной функции, можно найти такую определено положительную функцию $W(x_1, \dots, x_k)$, что $V - W \geq 0$.

Возьмем произвольно малое число A , меньшее $\min(A_1, A_2, \dots, A_n)$. Обозначим через $l > 0$ точный нижний предел функции W на сфере

$$\sum_{i=1}^k x_i^2 = A.$$

Функция $V_0 = V(t_0, x_1, \dots, x_n)$ не зависит явно от времени, и поэтому она допускает бесконечно малый высший предел. (По терминологии Ляпунова ограниченная функция $V(x_1, \dots, x_n, t)$ допускает бесконечно малый высший предел, если для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $h > 0$, при котором для всех значений переменных,

удовлетворяющих неравенствам

$$t \geq t_0, \quad |x_i| \leq h,$$

будет выполняться условие $|V| \leq \varepsilon$.)

Для значения l можно найти такое $\lambda > 0$, что при значениях x_i , подчиняющихся условию $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \lambda$, будет выполняться неравенство

$$V_0 < l. \quad (1.21)$$

Если начальные возмущения $x_i^{(0)}$ величин x_i удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^n x_i^{(0)2} \leq \lambda,$$

то из равенства

$$V - V_0 = \int_{t_0}^t \dot{V} dt$$

в силу (1.21) и условия теоремы $\dot{V} \leq 0$ заключаем, что значения переменных $x_1, \dots, x_n$, определяемых уравнениями возмущенного движения (1.17), должны всегда удовлетворять условиям

$$W \leq V \leq V_0 < l.$$

Но так как l представляет собой точный низший предел функции W на сфере радиуса A , то будет выполнено и неравенство

$$\sum_{i=1}^k x_i^2 < A,$$

что и доказывает справедливость теоремы.

З а м е ч а н и е. Если число величин x_i , по отношению к которым исследуется устойчивость, равно n , то получаем основную теорему Ляпунова об устойчивости движения.

В ряде случаев можно установить не только достаточные условия устойчивости, даваемые доказанной теоремой, но и необходимые условия. Для этой цели можно исполь-

зовать некоторые теоремы Ляпунова об уравнениях первого приближения.

Голоморфность правых частей уравнений (1.17) дает возможность представить систему (1.17) в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j + X_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad (1.22)$$

где все p_{ij} суть либо вещественные постоянные, либо известные функции времени, а X_i являются голоморфными функциями величин $x_1, \dots, x_n$, разложения которых по степеням x_i начинаются с членов не ниже второго порядка.

Пусть уравнения (1.22) таковы, что все коэффициенты p_{ij} постоянны. В этом случае говорят о движении, установившемся в первом приближении. Если в уравнениях (1.22) отбросить функции X_i , то в результате получим систему уравнений первого приближения, исследование которой можно выполнить известным из теории дифференциальных уравнений способом [174]. Поведение решения уравнений первого приближения зависит от корней κ определяющего (характеристического) уравнения

$$D(\kappa) = \det(\|p_{ij}\| - \kappa E) = 0, \quad (1.23)$$

в котором $\|p_{ij}\|$ — матрица коэффициентов, а E — единичная матрица.

Ляпунов доказал ряд теорем [174], с помощью которых из рассмотрения уравнений первого приближения можно судить об устойчивости тривиального решения системы (1.22). Формулировки этих теорем мы приведем без доказательства.

Т е о р е м а 1. Если определяющее уравнение имеет корни только с отрицательными действительными частями, то невозмущенное решение системы (1.22) устойчиво и притом асимптотически, каковы бы ни были функции X_i в этих уравнениях.

Т е о р е м а 2. Если между корнями определяющего уравнения находятся такие, действительные части которых положительны, то невозмущенное решение системы (1.22) неустойчиво, каковы бы ни были функции X_i в этих уравнениях.

Т е о р е м а 3. Если среди корней определяющего уравнения нет корней с положительными действительными частями, но имеются корни, действительные части которых равны нулю, то функции X_i всегда можно подобрать так, чтобы невозмущенное решение системы (1.22) было устойчивым или неустойчивым.

§ 2. Способ Н. Г. Четаева.

Устойчивость при постоянно действующих возмущениях

Раус [175], а позднее Ляпунов [174] указали способ исследования устойчивости решения в случае существования знакоопределенного первого интеграла уравнений возмущенного движения. Если знакоопределенная функция является первым интегралом уравнений возмущенного движения, то производная от этой функции в силу уравнений движения тождественно равна нулю, и тогда согласно основной теореме предыдущего параграфа можно утверждать, что нулевое решение уравнений (1.17) будет устойчивым по отношению к тем переменным, относительно которых знакоопределенна левая часть первого интеграла.

В настоящее время нашел широкое распространение способ построения функции Ляпунова, предложенный Н. Г. Четаевым [176]. Суть способа состоит в следующем. Пусть система (1.17) допускает s первых интегралов, каждый из которых не является знакоопределенной функцией

$$V_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2.1)$$

Рассматривается функция

$$V = f(V_1, V_2, \dots, V_s, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad (2.2)$$

зависящая от нескольких неопределенных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, подбираемых так, чтобы функция V была бы знакоопределенной. Это будет всякий раз, когда разложение функции V в ряд по возрастающим степеням x_i будет начинаться с однородной знакоопределенной формы четного порядка относительно интересующих переменных. Обычно функция (2.1) представляет собой линейную связку первых интегралов. Если построенная функция будет знакоопределенной, то исследуемое решение будет устойчивым, в силу основной теоремы предыдущего параграфа, так как $\dot{V} \equiv 0$.

Эффективно использование первых интегралов и в другом направлении, на которое обратил внимание Раус [175]. Рассмотрим голономную механическую систему с n степенями свободы, определяемую функцией Лагранжа $L(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$. Пусть обобщенные координаты

$q_{k+1}, \dots, q_n$ являются циклическими, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = k+1, \dots, n). \quad (2.3)$$

Лагранжевы уравнения движения этой механической системы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

допускают $n - k$ первых интегралов, соответствующих циклическим координатам

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \beta_i \quad (i = k+1, \dots, n). \quad (2.5)$$

Для простоты предположим, что в качестве обобщенных координат приняты возмущения (это не ограничивает общности рассмотрения). Говоря иными словами, система (2.4) имеет нулевое решение. Игнорируя циклические координаты и вводя функцию Рауса R (см. § 2 гл. I)

$$R = L - \sum_{i=k+1}^n \beta_i \dot{q}_i, \quad (2.6)$$

в которой циклические координаты надлежит заменить их значениями из первых интегралов (2.5), получим уравнения движения в форме Рауса

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0. \quad (2.7)$$

Если функция Рауса не зависит явно от времени, то система (2.7) допускает первый интеграл типа интеграла живых сил

$$V = \sum_{i=1}^k \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - R = h. \quad (2.8)$$

Теорема Рауса утверждает, что если функция V знакоопределенна по отношению к переменным $q_1, q_2, \dots, q_k$, то нулевое решение устойчиво в предположении, что постоянные β_i циклических интегралов не возмущаются. Так

формулирует теорему Рауса Н. Г. Четаев [177]. Справедливость этой теоремы очевидна: так как $\dot{V} \equiv 0$, то устойчивость непосредственно следует из основной теоремы § 1.

Нетрудно показать, что теорема Рауса может быть сформулирована в более общем виде. Во-первых, в качестве функции Ляпунова может служить связка первых интегралов, а не обобщенный интеграл энергии, во-вторых, нет необходимости требовать знакоопределенности этой связки по отношению ко всем переменным. Наконец, простой прием позволяет освободиться от условия неизменности величин β_i и доказать безусловную устойчивость по отношению к части переменных. Доказательство основывается на приеме, использованном автором в статьях [178, 179] (см. также [17] и [180]).

Т е о р е м а. Если лагранжевы уравнения (2.4) обладают $n - k$ циклическими интегралами (2.5) и при определенных значениях постоянных $\beta_i = \beta_i^{(0)}$ допускают нулевое решение $q_1 = q_2 = \dots = q_m = 0$ и если, кроме того, при фиксированных значениях β_i возможно построить знакоопределенную по отношению к переменным $q_1, q_2, \dots, q_m$ ($m \leq k$) функцию Ляпунова $V(q_1, \dots, q_m, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n)$, производная от которой в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения тождественно равна нулю, то нулевое решение устойчиво по отношению к величинам $q_1, \dots, q_m, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n$ и притом безусловно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть при значениях $\beta_i = \beta_i^{(0)}$ произвольных постоянных циклических интегралов (2.5) система уравнений (2.4) допускает тривиальное решение

$$q_1 = q_2 = \dots = q_m = 0,$$

и пусть существует функция Ляпунова

$$V = V(q_1, \dots, q_m, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n), \quad (2.9)$$

знакоопределенная по отношению к $q_1, \dots, q_m$ при $\beta_i = \beta_i^{(0)}$, производная от которой удовлетворяет условиям теоремы (при значениях $\beta_i \neq \beta_i^{(0)}$ функция V может и не быть, вообще говоря, знакоопределенной в указанном смысле).

Положим

$$\begin{aligned} q_i &= x_i \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ \beta_i - \beta_i^{(0)} &= x_i \quad (i = k + 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Тогда согласно (2.6) и (2.7) возмущенное движение можно описать следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial x_i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ \frac{dx_i}{dt} &= 0 \quad (i = k + 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Разлагая функцию (2.9) в ряд по степеням возмущений $x_i = \beta_i - \beta_i^{(0)}$, будем иметь

$$V = V(x_1, \dots, x_k, \beta_{k+1}^{(0)}, \dots, \beta_n^{(0)}) + \sum_{i=k+1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial \beta_i} \right)_{\beta_i = \beta_i^{(0)}} \cdot x_i + \dots \quad (2.11)$$

По условию функции (2.11) знакоопределенна по отношению к $x_1, x_2, \dots, x_m$ при $\beta_i = \beta_i^{(0)}$.

Отказываясь от предположения, что начальные возмущения подчинены условиям

$$\beta_i = \beta_i^{(0)},$$

рассмотрим систему уравнений (2.10). Построим новую функцию Ляпунова $\bar{V}$ в виде

$$\bar{V} = V(x_1, \dots, x_k, \beta_{k+1}^{(0)}, \dots, \beta_n^{(0)}) + \sum_{i, j=k+1}^n A_{ij} x_i x_j, \quad (2.12)$$

где A_{ij} — постоянные величины, которые надлежит выбрать таким образом, чтобы функция $\bar{V}$ была бы знакоопределенной не только по отношению к $x_1, x_2, \dots, x_m$, но также и по отношению к $x_{k+1}, \dots, x_n$.

Для знакоопределенности функции (2.12) достаточно, чтобы была знакоопределенной положительной по отношению к $x_{k+1}, \dots, x_n$ квадратичная форма $\sum A_{ij} x_i x_j$. Это всегда можно достигнуть выбором постоянных A_{ij} . Итак, при соответствующем выборе A_{ij} функция (2.12) определена положительно по отношению к $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{k+1}, \dots, x_n$. Очевидно, что для производной от функции $\bar{V}$ в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения будем

иметь

$$\dot{\bar{V}} = \dot{V} \equiv 0.$$

В соответствии с теоремой В. В. Румянцева заключаем, что исследуемое нулевое решение устойчиво по отношению к величинам $x_1, x_2, \dots, x_m$ и $x_{k+1}, \dots, x_n$ при любых начальных возмущениях.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости при постоянно действующих возмущениях. При составлении дифференциальных уравнений движения изучаемого объекта мы исходим всегда из некоторой упрощенной схемы, которая не учитывает малых сил. Молчаливо предполагается, что отбрасываемые силы вследствие их малости не оказывают заметного влияния. В некоторых случаях нам известна структура этих малых возмущающих сил, в других случаях она остается неизвестной. Поэтому из ляпуновской устойчивости решения рассматриваемой системы дифференциальных уравнений еще нельзя в строгом смысле заключать об устойчивости реального движения, ибо теория дифференциальных уравнений дает нам немало примеров, когда малые возмущающие члены в правых частях дифференциальных уравнений качественно изменяют свойства интегральных кривых.

Возникает задача об исследовании устойчивости решений дифференциальных уравнений движения при наличии постоянно действующих возмущающих сил. Чаще всего при постановке этой задачи делается лишь одно предположение о характере возмущающих сил, а именно, предполагается, что они по абсолютной величине не превосходят некоторых назначенных пределов. Установленные для такой постановки задачи критерии устойчивости накладывают жесткие требования на свойства упрощенной системы дифференциальных уравнений, т. е. системы, которая не содержит постоянно действующих возмущений. Оказывается [181], что для устойчивости при постоянно действующих возмущениях достаточно, чтобы нулевое решение упрощенной системы уравнений было бы равномерно асимптотически устойчиво. Это требование никогда не выполняется для механических систем, движущихся в потенциальных силовых полях в силу существования интегрального инварианта. Поэтому указанный достаточный крите-

рий устойчивости при постоянно действующих возмущениях часто оказывается бесполезным для задач динамики.

Однако во многих случаях постановку задачи об устойчивости при постоянно действующих возмущениях можно изменить, если наложить на возмущающие силы дополнительные ограничения. Пример такой постановки мы находим в работе Г. Н. Дубошина [182], где возмущающие силы предполагаются или постоянными, или линейными функциями возмущений. Возможна и иная постановка задачи. Будем предполагать, что нам известна функциональная структура возмущающих сил, однако недостаточно точно известны числовые значения параметров, входящих в аналитические выражения сил. Такой случай встречается нам при изучении движения спутника в нецентральной поле тяготения, когда известно, что гравитационный потенциал представляется в виде ряда по сферическим функциям, однако коэффициенты рядов или определены с большой ошибкой, или вообще не определены, а лишь оценен их порядок.

Можно наложить на возмущающие силы и более слабое ограничение, потребовав только, чтобы для дифференциальных уравнений движения, записанных с учетом возмущающих сил, сохранялось определенное количество первых интегралов (в неизменном или несколько измененном виде). В этом случае часто оказывается эффективным способ Н. Г. Четаева построения функции Ляпунова (см. работы автора [178, 179]).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.13)$$

которая обладает s первыми интегралами:

$$F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2.14)$$

Будем предполагать, что функции X_i и F_i голоморфны относительно $x_1, x_2, \dots, x_n, \mu$ в некоторой окрестности точки $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \mu = 0$ при всех значениях $t \geq t_0$. Для удобства, не ограничивая общности рассуждения, будем считать, что $\mu \geq 0$.

Пусть, далее, разложения в ряды по степеням параметра μ правых частей уравнений (2.13)

$$X_i = \sum_{j=0}^{\infty} X_{ij}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \mu^j \quad (2.15)$$

таковы, что

$$X_{i0}(t, 0, \dots, 0) \equiv 0. \quad (2.16)$$

Что же касается функций X_{ij} при $j \neq 0$, то они этим свойством в общем случае не обладают.

При $\mu = 0$ из (2.15) получаем упрощенную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_{i0}. \quad (2.17)$$

Система (2.15) в силу свойства (2.16) имеет нулевое решение

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0. \quad (2.18)$$

Нулевое решение (2.18) примем в качестве невозмущенного и будем исследовать его устойчивость, предполагая, что имеют место как начальные возмущения, так и постоянно действующие. Последние, очевидно, определяются разностями

$$X_i - X_{i0} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j X_{ij}.$$

Эти разности могут быть произвольными функциями, удовлетворяющими лишь единственному требованию — условиям существования с первых интегралов (2.14).

Предположим, также что решение (2.18) устойчиво по отношению к части переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($k \leq n$), причем свойство устойчивости обнаруживается при помощи связки первых интегралов (в общем случае нелинейной)

$$V = V(F_{10}, F_{20}, \dots, F_{s0}). \quad (2.19)$$

Здесь V — знакоопределенная функция по отношению к переменным $x_1, x_2, \dots, x_k$, а $F_{i0} = F_i(t, x_1, \dots, x_n, 0)$.

Рассмотрим теперь следующую систему дифференциальных уравнений движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= X_i(t, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Эта система допускает нулевое решение, соответствующее нулевому решению системы (2.17). Исследуем устойчивость этого решения по отношению к величинам $x_1, \dots, x_k, x_{n+1}$. Если это решение окажется устойчивым, то отсюда можно сделать вывод об устойчивости нулевого решения упрощенной системы (2.17) при наличии постоянно действующих возмущений вида (2.18) (т. е. об устойчивости при возмущающих силах определенной структуры).

Для исследования устойчивости построим функцию Ляпунова в виде

$$\bar{V} = V(F_1, F_2, \dots, F_s) + \gamma x_{n+1}^2, \quad (2.21)$$

где γ — подлежащая выбору постоянная величина. Разлагая $\bar{V}$ в ряд по степеням малого параметра μ или, что то же, величины x_{n+1} , получим

$$\bar{V} = V(F_{10}, \dots, F_{s0}) + [\gamma + (V'_\mu)_0] x_{n+1}^2 + \dots \quad (2.22)$$

Если дополнительно предположить, что производная $(V'_\mu)_0$ ограничена, то всегда можно выбрать величину γ таким образом, чтобы знаки первых двух слагаемых совпадали. Тогда при достаточно малых по модулю значениях величин $x_1, \dots, x_k, x_{n+1}$ знак функции $\bar{V}$ будет совпадать со знаком двух первых слагаемых и, стало быть, функция $\bar{V}$ будет знакоопределенной по отношению к величинам $x_1, \dots, x_k, x_{n+1}$ *).

Так как, кроме того, производная от $\bar{V}$ в силу уравнений (2.20) тождественно равна нулю, то отсюда следует вывод об устойчивости решения (2.18) по отношению к части переменных $x_1, \dots, x_k, x_{n+1}$ при наличии постоянно действующих возмущений $X_i - X_{i0}$.

*) Здесь и далее в подобных исследованиях мы опускаем несложные рассуждения, связанные с доказательством знакоопределенности функции Ляпунова, зависящей явно от времени.

§ 3. Устойчивость круговых орбит спутника

Критерий устойчивости круговых орбит в астрономических задачах при рассмотрении движения материальной точки в осесимметричных гравитационных полях приводится у Г. Н. Дубошина [183], С. Чандрасекара [184], Н. Г. Четаева [177]. Однако в отмеченных работах он устанавливается лишь для возмущений, подчиненных либо условию неизменяемости полной механической энергии, либо условию неизменяемости секторной скорости. Иначе говоря, устанавливается лишь условная устойчивость круговых орбит. В работе [185] получены необходимые и достаточные условия устойчивости круговых орбит точки, движущейся в осесимметричном потенциальном поле сил. В этом параграфе вывод условий устойчивости круговых орбит в общем случае будет выполнен в соответствии с процедурой, изложенной в § 2.

Приложение этих результатов к проблемам небесной баллистики было дано в работах автора [89] и позднее развито В. Г. Дегтяревым [186] и А. Л. Куницыным [18].

Рассмотрим движение материальной точки в осесимметричном силовом поле. Систему координат выберем так, чтобы ось аппликат совпала с осью симметрии поля, а в качестве основной координатной плоскости примем плоскость невозмущенной орбиты точки. Предположим, что силовая функция задачи в цилиндрических координатах имеет вид $U = U(\rho, z)$ и является голоморфной функцией ρ и z в некоторой области их изменения, причем $U(\rho, 0) \equiv 0$ в силу выбора основной координатной плоскости. Предположим также, что условие

$$\left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^3 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) \right]_0 \neq 0 \quad (3.1)$$

выполняется по крайней мере для подлежащих рассмотрению круговых орбит (здесь и далее индекс «0» обозначает, что взято значение функции в точке $\rho = \rho_0, z = 0$).

Дифференциальные уравнения движения запишутся в виде

$$\ddot{\rho} = \frac{4\sigma^2}{\rho^3} + \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \dot{\sigma} = 0, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (3.2)$$

где σ — секторная скорость.

Система уравнений (3.2) допускает частное решение

$$\rho = \rho_0, \dot{\rho} = 0, \sigma = \sigma_0, z = 0, \dot{z} = 0, \quad (3.3)$$

которому соответствует некоторое круговое движение. Решение (3.3) существует, если силовая функция задачи удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_0 < 0. \quad (3.4)$$

Значение секторной скорости должно удовлетворять уравнению

$$\frac{4\sigma_0^2}{\rho_0^3} + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_0 = 0. \quad (3.5)$$

Исследуем устойчивость частного решения (3.3). Вводя для возмущений обычные обозначения

$$x_1 = \rho - \rho_0, x_2 = \dot{\rho}, x_3 = \sigma - \sigma_0, x_4 = z, x_5 = \dot{z},$$

запишем дифференциальные уравнения возмущенного движения в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= 4(\sigma_0 + x_3)^2(\rho_0 + x_1)^{-3} + \frac{\partial U}{\partial x_1}, \\ \dot{x}_3 &= 0, \\ \dot{x}_4 &= x_5, \\ \dot{x}_5 &= \frac{\partial U}{\partial x_4}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Система (3.6) обладает двумя интегралами:

$$V_1 = x_3 = c', \quad (3.7)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} [x_2^2 + 4(\sigma_0 + x_3)^2(\rho_0 + x_1)^{-2} + x_5^2] - U(\rho_0 + x_1, x_4) = h. \quad (3.8)$$

Для получения необходимых условий устойчивости решения (3.3) по отношению к величинам $\rho, \dot{\rho}, z, \dot{z}$ рассмотрим

уравнения первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right)_0 x_1 + \frac{4}{\rho_0^2} \sqrt{(-\rho U'_\rho)_0} x_3 + (U''_{\rho z})_0 x_4, \\ \dot{x}_3 &= 0, \\ \dot{x}_4 &= x_5, \\ \dot{x}_5 &= (U''_{\rho z})_0 x_1 + (U''_{zz})_0 x_4. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Характеристическое уравнение системы (3.9) имеет вид

$$\lambda^4 - \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho + U''_{zz} \right)_0 \lambda^2 + \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho - U''_{\rho z}{}^2 \right)_0 = 0. \quad (3.10)$$

Из приведенной в § 1 теоремы Ляпунова следует, что необходимое условие устойчивости состоит в отсутствии среди корней характеристического уравнения корней с положительными действительными частями. В нашем случае это будет иметь место, если выполняются неравенства

$$\left. \begin{aligned} \left(U''_{zz} + U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right)_0 &< 0, \\ \left[U''_{zz} \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right) - U''_{\rho z}{}^2 \right]_0 &> 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

или одна из двух следующих, эквивалентных им систем:

$$\left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right)_0 < 0, \quad \left[U''_{zz} \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right) - U''_{\rho z}{}^2 \right]_0 > 0; \quad (3.12)$$

$$(U''_{zz})_0 < 0, \quad \left[U''_{zz} \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right) - U''_{\rho z}{}^2 \right]_0 > 0. \quad (3.13)$$

Необходимые условия устойчивости приобретают особенно простой вид в задаче о движении точки в силовом поле, обладающем симметрией относительно основной координатной плоскости. Здесь $(U''_{\rho z})_0 = 0$, и поэтому вместо (3.11) получаем следующие необходимые условия устойчивости:

$$\left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right)_0 < 0, \quad (U''_{zz})_0 < 0. \quad (3.14)$$

Заметим, что при выполнении необходимых условий исследуемое невозмущенное движение будет устойчивым по отношению к ρ , $\dot{\rho}$, σ , z , $\dot{z}$ в первом приближении.

Перейдем теперь к выводу достаточных условий устойчивости. Для этого, пользуясь способом Н. Г. Четаева (см. § 2), возьмем в качестве функции Ляпунова связку интегралов (3.7) и (3.8)

$$V = V_2 + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_1^2, \quad (3.15)$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные числа, которые следует выбрать так, чтобы функция (3.15) была бы знакоопределенной. Производная от функции V в силу уравнений возмущенного движения (3.6) будет тождественно равна нулю. Поэтому при знакоопределенности функции V решение (3.3) будет устойчивым.

Разложим V в ряд Тейлора в окрестности точки $x_1 = x_2 = \dots = x_5 = 0$:

$$\begin{aligned} V = & -\frac{1}{2} \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right)_0 x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \left(\frac{2}{\rho_0^2} + \lambda_2 \right) x_3^2 + \\ & + \frac{1}{2} x_5^2 - \frac{1}{2} (U''_{zz})_0 x_4^2 - \frac{4}{\rho_0^2} V(-\rho U'_\rho)_0 x_1 x_3 - \\ & - (U''_{zz})_0 x_1 x_4 + \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Прежде всего, выбирая $\lambda_1 = -\frac{2}{\rho_0} V(-\rho U'_\rho)_0$, уничтожим в разложении (3.15) линейный член. Функция будет знакоопределенной, если квадратичная форма, стоящая в разложении (3.16), будет определено положительной. А последнее имеет место, если определитель

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right)_0, & 0, & -\frac{2}{\rho_0^2} V(-\rho U'_\rho)_0, & \frac{1}{2} (U''_{\rho z})_0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0 \\ -\frac{2}{\rho_0^2} V(-\rho U'_\rho)_0, & 0, & \lambda_2 + \frac{2}{\rho_0^2}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{2} (U''_{\rho z})_0, & 0, & 0, & -\frac{1}{2} (U''_{zz})_0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

и его главные диагональные миноры положительны, т. е. выполняются неравенства

$$\left. \begin{aligned} & \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right)_0 < 0, \\ & -\frac{1}{4} \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right)_0 \left(\lambda_2 + \frac{2}{\rho_0^2} \right) + \frac{2}{\rho_0^3} (U'_\rho)_0 > 0, \\ & \frac{1}{4} \left(\lambda_2 + \frac{2}{\rho_0^2} \right) \left[U''_{zz} \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right) - U''_{\rho z} \right]_0 - \\ & - \frac{2}{\rho_0^3} (U''_{zz} U'_\rho)_0 > 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Нетрудно проверить, что при выполнении условий (3.12) при соответствующем выборе λ_2 неравенства (3.17) также имеют место. Стало быть, рассматриваемое движение будет устойчивым, а условия (3.12) будут достаточными.

Условия устойчивости (3.12) приобретают более простой вид в случае, когда рассматривается движение точки в гравитационном поле. Воспользовавшись уравнением Лапласа (или Пуассона), записанным в цилиндрических координатах (см. § 1 гл. II)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0$$

(здесь предполагается, что гравитационное поле обладает осевой симметрией), можно выразить производную U''_{zz} через производные по ρ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho}. \quad (3.18)$$

Ограничиваясь для простоты случаем гравитационного поля с симметрией относительно основной плоскости, преобразуем условия устойчивости (3.14) к виду

$$\left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right)_0 < 0, \quad \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right)_0 > \left(\frac{2}{\rho} U'_\rho \right)_0, \quad (3.19)$$

или после несложных преобразований будем иметь

$$\left(2\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_0 < \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^3 U'_\rho) \right]_0 < 0. \quad (3.20)$$

Отсюда, предполагая дополнительно, что гравитационное поле сферически симметрично, из (3.14) и (3.18) получаем

$$(U''_{zz})_0 = \left(\frac{1}{\rho} U'_r \right)_0 < 0,$$

где $r^2 = \rho^2 + z^2$. Эти неравенства выполняются всегда, если имеет место условие (3.4), т. е. приходим к результату, что все существующие круговые орбиты устойчивы.

Применим теперь полученные критерии устойчивости круговых движений к задаче о движении ИСЗ в нормальном гравитационном поле, потенциал которого определяется формулой (см. § 6 гл. III)

$$U = \frac{fM}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - ci)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z + ci)^2}} \right]. \quad (3.21)$$

Так как силовая функция (3.21) четная относительно z , то могут иметь место круговые движения ИСЗ в экваториальной плоскости Земли $z = 0$. Для этого должно быть выполнено условие (3.4), т. е.

$$(U'_\rho)_0 = - \left(\frac{fM\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} \right)_0 < 0. \quad (3.22)$$

Неравенство (3.22) справедливо при любых ρ_0 , следовательно, в экваториальной плоскости Земли существуют круговые орбиты произвольного радиуса.

Рассмотрим условия устойчивости в форме (3.20). Дифференцированием находим, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^3 U'_\rho) \right]_0 = - \frac{fM\rho_0^3 (\rho_0^2 - 4c^2)}{\sqrt{(\rho_0^2 - c^2)^5}},$$

и поэтому условие (3.20) сводится к следующему:

$$\frac{2fM\rho_0^3}{(\rho_0^2 - c^2)^{5/2}} > \frac{fM\rho_0^3 (\rho_0^2 - 4c^2)}{(\rho_0^2 - c^2)^{5/2}} > 0. \quad (3.23)$$

Если $\rho_0^2 - 4c^2 > 0$, то будет выполнено первое неравенство. Находим, что оно справедливо при

$$\rho_0 > 2c \approx 420 \text{ км}, \quad (3.24)$$

т. е. для всех реальных спутниковых движений. Левое неравенство после простых преобразований принимает вид

$$\rho_0^2 + 2c^2 > 0 \quad (3.25)$$

и, очевидно, всегда удовлетворяется.

Из (3.24) и (3.25) следует устойчивость в смысле Ляпунова всех круговых орбит, лежащих в экваториальной плоскости Земли, по отношению к величинам ρ , $\dot{\rho}$, σ , z , $\dot{z}$.

Теперь естественно поставить вопрос, могут ли нарушить устойчивость круговых экваториальных орбит ИСЗ малые возмущающие силы, обусловленные действием неучтенных в потенциале (3.21) членов, зависящих от зональных гармоник высшего порядка. Эти возмущения будут определяться следующей пертурбационной функцией:

$$R = \mu \Phi(\rho, z, \mu), \quad (3.26)$$

где μ — малый параметр порядка 10^{-6} , а Φ — ограниченная, голоморфная функция своих переменных.

Так как при добавлении пертурбационной функции (3.26) дифференциальные уравнения движения по-прежнему будут обладать интегралом живых сил и интегралом площадей, то в соответствии с результатами § 2 можно утверждать, что исследуемые круговые движения ИСЗ будут устойчивыми и при постоянно действующих возмущениях вида (3.26), при достаточно малых по модулю значениях μ .

В частности, устойчивость не нарушается членами, обусловленными асимметрией Земли относительно экваториальной плоскости. Теоремы § 2 не позволяют распространить полученные результаты на возмущения от тессеральных и секториальных гармоник, т. е. на возмущения от долготных членов. Этот вопрос будет изучен иным способом в одном из следующих параграфов.

Рассмотрим круговые орбиты предельного варианта задачи двух неподвижных центров, в котором один из притягивающих центров удален на бесконечность (см. § 8 гл. III). Как уже отмечалось, орбиты этой задачи могут быть использованы в качестве промежуточных при исследовании влияния возмущающего действия Солнца, при изучении движения космического аппарата в центральном ньютоновском поле сил с постоянным вектором реактивного ускорения,

а также при изучении эффекта светового давления солнечной радиации в движении ИСЗ. Мы приведем результаты, полученные в этой задаче А. Л. Куницыным [18].

В цилиндрической системе координат с полюсом в притягивающей массе, ось аппликат которой направлена вдоль оси симметрии поля, потенциал примет вид

$$U = \frac{fm}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{fM}{c^2} z. \quad (3.27)$$

Круговые орбиты

$$\rho = \rho_0, \quad z = z_0, \quad \sigma = \sigma_0 \quad (3.28)$$

существуют при условии, что

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 = 0, \quad (3.29)$$

разрешая которое относительно z_0 , найдем

$$z_0 = \frac{M\rho_0^3}{mc^2}, \quad (3.30)$$

где c — постоянная площадей.

В полярных координатах ($r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ и $\vartheta = \arcsin \frac{\rho}{r}$) вместо (3.30) будем иметь

$$r_0^2 = \frac{mc^2}{M} \cos \vartheta_0. \quad (3.31)$$

Полученное уравнение представляет огибающую семейства круговых орбит и определяет зависимость между радиусом круговой орбиты и смещением ее плоскости относительно центра притяжения. Из условия неотрицательности его правой части получим границы области существования таких круговых движений:

$$-\frac{\pi}{2} < \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, круговые движения могут существовать лишь в области $z > 0$, так что

$$0 < z_0 < c \sqrt{\frac{m}{M}}. \quad (3.32)$$

Как следует из (3.31), радиус ρ_0 принимает максимальное значение при

$$\vartheta_{\max} = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (3.33)$$

Обращаясь теперь к уравнению (3.5), определим из него скорость v_0 движения по круговой орбите. После несложных преобразований получим

$$\rho_0^2 v_0^2 = fm \left[r_0 - 2 \left(\frac{M}{mc^2} \right)^4 r_0^5 + \left(\frac{M}{mc^2} \right)^4 r_0^9 \right],$$

где $v_0 = \rho_0 \dot{\varphi}_0$. Отсюда находим

$$v_0^2 = \frac{fm}{r_0} \left[1 - \frac{M}{m} \left(\frac{r_0}{c} \right)^4 + \dots \right].$$

Исследуем устойчивость найденных движений. Очевидно, что в этом случае $z_0 \neq 0$, и необходимые и достаточные условия (3.11) можно преобразовать к виду

$$\left[\left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right) U''_{zz} - (U''_{\rho z})^2 \right]_0 < 0, \quad (U''_{zz})_0 < 0. \quad (3.34)$$

Принимая во внимание уравнение Лапласа, получим вместо (3.34)

$$\left(\frac{2}{\rho} U'_\rho \right)_0 < (U''_{zz})_0 < 0. \quad (3.35)$$

Это условие будет выполнено, если z_0 удовлетворяет неравенству

$$0 < z_0 < \frac{\sqrt[4]{3} c}{9 \sqrt{M/m}}. \quad (3.36)$$

В этом случае имеет место устойчивость круговых движений по отношению к ρ , z , $\dot{\rho}$, $\dot{z}$, σ .

Из (3.33) и (3.36) находим, что круговые орбиты, для которых

$$\frac{c \sqrt[4]{3}}{9 \sqrt{M/m}} < z_0 < \frac{c}{\sqrt{M/m}}, \quad (3.37)$$

устойчивы,

§ 4. Устойчивость сфероидальных и гиперболоидальных орбит

В практическом отношении весьма важны орбиты ИСЗ с малым эксцентриситетом. Их исследование обычными методами классической теории возмущений наталкивается на некоторые трудности. На этом пути наиболее общие результаты исследования почти круговых орбит были получены Страблом [189] и Г. В. Самойловичем [190, 191]. Изучение орбит ИСЗ этого класса намного облегчается, если исходить не из классической теории возмущений, а воспользоваться для этой цели решениями обобщенной задачи двух неподвижных центров. В этом параграфе мы исследуем устойчивость эллипсоидальных орбит, которые при малых значениях эксцентриситета эллипсоида вращения как раз и соответствуют почти круговым орбитам [89].

Дифференциальные уравнения движения ИСЗ в нормальном поле тяготения согласно § 6 гл. III имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v}{d\tau^2} &= \frac{fM}{c^3} \operatorname{ch} v - h \operatorname{sh} 2v - \frac{c_1^2 \operatorname{sh} v}{\operatorname{ch}^3 v}, \\ \frac{d^2 u}{d\tau^2} &= h \sin 2u + \frac{c_1^2 \cos u}{\sin^3 u}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где h и c_1 суть произвольные постоянные интегрирования, а независимая переменная τ (регуляризованное время) определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 v + \cos^2 u}. \quad (4.2)$$

При исследовании устойчивости некоторых классов орбит ИСЗ уравнения движения в форме (4.1) весьма удобны, так как система распадается на два независимых уравнения. Переход к регуляризованному времени в задаче об устойчивости оказывается возможным в связи с тем, что, как видно из уравнения (4.2), регуляризирующая переменная τ монотонно и неограниченно возрастает вместе с t . Поэтому решения уравнений (4.1) неограниченно продолжаемы, и переменная τ может играть при исследовании устойчивости такую же роль, как и время t .

В систему (4.1) входят произвольные постоянные h , c_1 . Если при исследовании устойчивости эти постоянные

считать неизменными, то может быть установлена только условная устойчивость, так как начальные и последующие возмущения должны удовлетворять условию неизменяемости полной механической энергии и постоянства секторной скорости. Для доказательства безусловной устойчивости воспользуемся первой теоремой § 2. При доказательстве мы не будем дополнять систему (4.1) уравнениями для h и c_1 . Более подробное исследование дано в уже упоминавшейся статье автора [89], а также в работе В. Г. Дегтярева [186].

Уравнения (4.1) допускают частные решения вида

$$v = v_0, \quad v' = 0, \quad h = h_0, \quad c_1 = c_{10}, \quad (4.3)$$

если v_0 является корнем уравнения

$$\frac{fM}{c^3} \operatorname{ch} v_0 - h_0 \operatorname{sh} 2v_0 - \frac{c_{10}^2 \operatorname{sh} v_0}{\operatorname{ch}^3 v_0} = 0. \quad (4.4)$$

Решениям (4.3) соответствуют орбиты, лежащие на сжатом сфероиде, ось симметрии которого совпадает с осью вращения Земли. Большая полуось этого сфероида равна $c \operatorname{sh} v_0$, малая — $c \operatorname{ch} v_0$, а его эксцентриситет — $1/\operatorname{ch} v_0$. Если $c_{10} \neq 0$, то траектория навивается на эллипсоид, оставаясь расположенной в некоторой полосе, симметричной относительно экватора. Эти орбиты могут быть либо периодическими, замыкаясь после многих оборотов, либо условно периодическими, заполняющими всюду плотно указанную полосу. Ширина полосы определяется величиной корня второго из уравнений (4.1). Этот корень определяет гиперboloид вращения, который пересекается с эллипсоидом по двум симметричным малым кругам, представляющим собой границу области возможности движения. Если u близко к $\frac{\pi}{2}$, то орбита располагается в окрестности экваториальной плоскости Земли.

При $c_{10} = 0$ орбиты ИСЗ располагаются в меридиональных плоскостях и представляют собой эллипсы, линии апсид которых лежат в экваториальной плоскости Земли (см. § 4 гл. IV).

Вводя для возмущений обозначения

$$v - v_0 = x_1, \quad v' = x_2, \quad (4.5)$$

запишем дифференциальные уравнения возмущенного

движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{fM}{c^3} \operatorname{ch}(v_0 + x_1) - h_0 \operatorname{sh} 2(v_0 + x_1) - \frac{c_{10}^2 \operatorname{sh}(v_0 + x_1)}{\operatorname{ch}^3(v_0 + x_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Уравнения первого приближения имеют вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \left(\frac{4c_{10}^2}{\operatorname{ch}^4 v_0} - \frac{fM \operatorname{ch}^2 v_0}{c^3 \operatorname{sh} v_0} \right) x_1. \quad (4.7)$$

Корни характеристического уравнения системы (4.7) запишутся следующим образом:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{4c_{10}^2}{\operatorname{ch}^4 v_0} - \frac{fM \operatorname{ch}^2 v_0}{c^3 \operatorname{sh} v_0}}. \quad (4.8)$$

Если

$$\frac{4c_{10}^2}{\operatorname{ch}^4 v_0} - \frac{fM \operatorname{ch}^2 v_0}{c^3 \operatorname{sh} v_0} \leq 0, \quad (4.9)$$

то эллипсоидальные орбиты устойчивы по первому приближению.

Достаточные условия устойчивости найдем с помощью первого интеграла системы (4.6)

$$V_1 = x_2^2 - \frac{2fM}{c^3} [\operatorname{sh}(v_0 + x_1) - \operatorname{sh} v_0] + 2h_0 [\operatorname{sh}^2(v_0 + x_1) - \operatorname{sh}^2 v_0] - c_{10}^2 \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2(v_0 + x_1)} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 v_0} \right]. \quad (4.10)$$

Разложим функцию V_1 в ряд Маклорена

$$V_1 = x_2^2 - \left(\frac{4c_{10}^2}{\operatorname{ch}^4 v_0} - \frac{fM \operatorname{ch}^2 v_0}{c^3 \operatorname{sh} v_0} \right) x_1^2 + \dots \quad (4.11)$$

Условием ее положительной определенности является неравенство (4.9). Следовательно, условие (4.9) будет необходимым и достаточным для устойчивости орбит рассматриваемого класса.

Очевидно, что для меридиональных (полярных) орбит при $c_{10} = 0$ условие устойчивости (4.9) выполнено. Пользуясь малостью c , можно показать, что оно будет выполняться для всех реальных орбит. Подробности анализа читатель найдет в работе [186].

В соответствии с результатами § 2 можно показать, что исследуемые орбиты будут устойчивыми и при постоянно действующих возмущениях вида

$$R = \mu F \left(\frac{\alpha r^2 + \beta z^2 + \gamma}{r^2 + z^2} \right), \quad (4.12)$$

где F — ограниченная голоморфная функция, α , β , γ — произвольные постоянные величины, μ — достаточно малый параметр.

Из доказанного следует, что эллипсоидальные орбиты будут устойчивыми по отношению к большой полуоси и эксцентриситету эллипсоида, по которому движется ИСЗ. Если, кроме того, вспомнить, что согласно формулам (7.9) и (7.10) гл. III постоянному значению v с точностью до величин порядка c соответствует и постоянное значение радиус-вектора ИСЗ, то доказанное приближенно означает устойчивость орбит по отношению к r и r' .

Перейдем теперь к рассмотрению гиперболоидальных орбит. Второе из уравнений (4.1) допускает частные решения вида

$$u = u_0, \quad h = h_0, \quad c_1 = c_{10}. \quad (4.13)$$

Из формул преобразования (6.39) гл. III следует, что при $u = u_0$ движущаяся материальная точка во все время движения будет находиться на гиперboloиде вращения

$$\frac{r^2}{c^2 \sin^2 u_0} - \frac{z^2}{c^2 \cos^2 u_0} = 1. \quad (4.14)$$

Такого рода движения назовем гиперболоидальными. Легко видеть, что при $c_{10} = 0$ движение будет происходить по гиперболе, лежащей в какой-либо меридиональной плоскости (гиперболическое движение). Как гиперболоидальные, так и гиперболические движения, вообще говоря, не являются спутниковыми, так как в процессе движения материальная частица удаляется на бесконечность. Тем не менее рассмотрение орбит этого класса может представить интерес для теории движения межпланетных кораблей в сфере действия Земли.

Решения вида (4.13) существуют в том случае, если u_0 является корнем следующего уравнения *):

$$\sin^4 u_0 = - \frac{c_{10}^2}{2h_0}, \quad (4.15)$$

*) Мы исключаем из рассмотрения случай $u_0 = 0$, которому соответствует прямолинейное движение вдоль оси вращения Земли, и случай $u_0 = \frac{\pi}{2}$, которому соответствует прямолинейное движение в плоскости экватора.

т. е. при $h_0 > 0$ (в случае, когда полная механическая энергия положительна).

Уравнения возмущенного движения запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= z_2, \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= (h_0 + z_3) \sin 2(u_0 + z_1) + \frac{(c_{10}^2 + z_4) \cos(u_0 + z_1)}{\sin^3(u_0 + z_1)}, \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

где $u - u_0 = z_1$, $u' = z_2$, $h - h_0 = z_3$, $c_1^2 - c_{10}^2 = z_4$.

Система (4.16) обладает интегралом.

$$V_1 = z_2^2 + (h_0 + z_3) \cos 2(u_0 + z_1) + \frac{c_{10}^2 + z_4}{\sin^2(u_0 + z_1)}. \quad (4.17)$$

Для доказательства устойчивости в смысле Ляпунова гиперболоидальных орбит возьмем в качестве функции Ляпунова комбинацию интеграла (4.17) и интегралов $V_2 = z_3$, $V_3 = z_4$:

$$V = \frac{4c_{10}^2 \cos^2 u_0}{\sin^4 u_0} z_1^2 + z_2^2 - 2 \sin 2u_0 \cdot z_1 z_3 - \\ - \frac{2 \cos u_0}{\sin^3 u_0} z_1 z_4 + \dots + B_1 z_3^2 + B_2 z_4^2 + \dots \quad (4.18)$$

Для знакоопределенности этой функции при достаточно малых значениях z_i должно выполняться неравенство *)

$$\frac{4c_{10}^2 \cos^2 u_0}{\sin^4 u_0} > 0. \quad (4.19)$$

Очевидно, что оно выполняется для любых гиперболоидальных орбит. Следовательно, рассматриваемые орбиты будут устойчивыми в смысле Ляпунова по отношению к величинам u , u' , h , c_1 . Отсюда, в частности, следует устойчивость этих орбит по отношению к полуосям гиперболоида, на котором происходит движение, и к его эксцентриситету.

§ 5. Устойчивость орбит искусственных небесных тел по отношению к каноническим элементам при постоянно действующих возмущениях

Для описания возмущенного (в небесномеханическом смысле) движения космического аппарата, принимаемого за материальную точку, воспользуемся одной из систем канонических элементов. Для этой цели пригодны как

*) Предполагается, что B_i выбраны надлежащим образом.

канонические элементы Делоне, так и первая или вторая система элементов Пуанкаре [191]. Мы воспользуемся первой системой Пуанкаре:

$$\left. \begin{aligned} L &= \sqrt{f(m_0 + m)a}, \quad \rho_1 = \sqrt{f(m_0 + m)a} (1 - \sqrt{1 - e^2}), \\ \rho_2 &= \sqrt{f(m_0 + m)a} (1 - e^2) (1 - \cos i), \\ \lambda &= nt + \varepsilon, \quad \omega_1 = -\pi, \quad \omega_2 = -\Omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

В формулах (5.1) использованы следующие обозначения: m_0 и m — массы взаимно притягивающихся точек, a — большая полуось оскулирующей эллиптической орбиты, e — ее эксцентриситет, i — наклонность, n — среднее движение, Ω_0 — долгота восходящего узла, π — долгота перигентра, ε — средняя долгота эпохи. Принимая во внимание малость массы космического аппарата m по сравнению с массой притягивающего центра, величиной m в формулах (5.1) можно пренебречь.

В соответствии с [191] будем иметь следующие дифференциальные уравнения возмущенного движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}, & \frac{d\rho_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \omega_i}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial L}, & \frac{d\omega_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \rho_i} \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

причем гамильтониан H определяется равенством

$$H = \frac{f^2(m_0 + m)^2}{2L^3} + \mu R(L, \rho_1, \rho_2, \lambda, \omega_1, \omega_2). \quad (5.3)$$

Второе слагаемое в соотношении (5.3) представляет собой пертурбационную (возмущающую) функцию, в которой через μ обозначен малый параметр. Если положить $\mu = 0$, то уравнения (5.2) определяют невозмущенную эллиптическую орбиту.

Вследствие консервативности возмущающих сил уравнения (5.2) допускают обобщенный интеграл энергии

$$H = \text{const.} \quad (5.4)$$

Если возмущающая функция удовлетворяет условию

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} = \frac{\partial R}{\partial \omega_1} + \frac{\partial R}{\partial \omega_2}, \quad (5.5)$$

то уравнения (5.2) обладают еще одним интегралом

$$L - \rho_1 - \rho_2 = \text{const.} \quad (5.6)$$

Условие (5.5) означает, что возмущающее силовое поле обладает симметрией относительно некоторой оси, а интеграл (5.6) представляет собой интеграл площадей, выраженный через элементы Пуанкаре [191].

Заметим, что дифференциальные уравнения (5.2) пригодны для описания движения в любой ограниченной задаче. Ими при исследовании устойчивости целесообразно пользоваться в задаче о движении искусственного спутника сфероидальной планеты, в пространственной круговой задаче трех тел (в случае движения тела пассивно гравитирующего в окрестности одной из притягивающих масс), в задаче о движении спутника в гравитационном поле медленно вращающегося твердого тела, центральный эллипсоид инерции которого близок к сфере и т. д.

Исследуя систему уравнений (5.2), мы не будем делать никаких конкретных предположений о физической природе возмущающих сил. На пертурбационную функцию μR мы наложим лишь одно ограничение, предположив, что она в некоторой окрестности невозмущенных значений элементов Пуанкаре является ограниченной функцией.

При $\mu = 0$ система уравнений (5.2) определяет некоторое невозмущенное кеплеровское движение. Рассмотрим задачу об устойчивости этого движения по отношению к части переменных при наличии постоянно действующих возмущающих сил, заданных с помощью пертурбационной функции μR .

Сначала изучим случай, когда уравнения (5.2) допускают только один интеграл (5.4). Покажем, что в этом случае движение будет устойчивым при заданных возмущающих силах по отношению к элементу L , если параметр μ по модулю достаточно мал.

Дополним систему (5.2) уравнением

$$\dot{\mu} = 0. \quad (5.7)$$

Расширенная система (5.2) и (5.7) имеет частное решение

$$\left. \begin{aligned} L &= L_0, \quad \rho_1 = \rho_{10}, \quad \rho_2 = \rho_{20}, \quad \lambda = \lambda_0(t), \\ \omega_1 &= \omega_{10}, \quad \omega_2 = \omega_{20}, \quad \mu = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

устойчивость которого по отношению к величинам L и μ необходимо исследовать. С этой целью введем для возмущений переменных следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= L - L_0, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \rho_1 - \rho_{10}, \\ x_4 &= \rho_2 - \rho_{20}, \quad x_5 = \lambda - \lambda_0(t), \quad x_6 = \omega_1 - \omega_{10}, \quad x_7 = \omega_2 - \omega_{20}. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Тогда для дифференциальных уравнений возмущенного движения, которые мы не будем здесь выписывать в новых переменных, можно указать следующие два первых интеграла:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{f^2(m+m_0)^2}{2} \left[\frac{1}{(L_0+x_1)^2} - \frac{1}{L_0^2} \right] + x_2 R, \\ V_2 &= x_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Для доказательства устойчивости построим функцию Ляпунова V в виде связи интегралов (5.10)

$$V = V_1^2 + A V_2^2, \quad (5.11)$$

где A — произвольная постоянная величина. Разлагая правую часть формулы (5.11) в ряд по степеням возмущений x_1 и x_2 , получим

$$V = \frac{f^4(m_0+m)^2}{L_0^6} x_1^2 - \frac{2f^2(m_0+m)}{L_0^3} R_0 x_1 x_2 + (R_0^2 + A) x_2^2 + \dots \quad (5.12)$$

Так как функция R , по предположению, ограничена, то всегда можно для постоянной A выбрать такое числовое значение, что квадратичная форма в разложении (5.12) будет определено положительной. В самом деле, условие знакоопределенности этой формы записывается в виде

$$R_0^2 + A > 0, \quad \frac{f^4(m_0+m)^2}{L_0^6} > 0. \quad (5.13)$$

Последние неравенства выполняются, если A выбирать из условия

$$A > \sup R_0^2.$$

При этом функция (5.11) также будет знакоопределенной по отношению к величинам x_1 и x_2 . Отсюда в силу последней теоремы § 2 заключаем, что исследуемое движение устойчиво при постоянно действующих возмущениях по отношению к элементу L . Но из формул (5.1) видно, что движение будет также устойчивым и по отношению к большой полуоси орбиты. А это в свою очередь означает устойчивость исследуемого движения по Лагранжу *).

Рассмотрим другой случай. Пусть возмущающая функция такова, что выполнено условие (5.5). Тогда наряду с интегралом энергии существует еще интеграл площадей (5.6), который в переменных x_i записывается в виде

$$V_3 = x_1 - x_3 - x_4. \quad (5.14)$$

Строя функцию Ляпунова в виде связки интегралов (5.10) и (5.14)

$$V = V_1^2 + A_1 V_1^2 + A_2 V_2^2, \quad (5.15)$$

где A_1 и A_2 соответствующим образом выбранные постоянные, из рассуждений, аналогичных предыдущим, обнаруживаем, что невозмущенное решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях, удовлетворяющих условию (5.5), по отношению к L и $(\rho_1 + \rho_2)$. Как видно из формул (5.1), исследуемое невозмущенное движение устойчиво по отношению к величинам a и $\sqrt{1 - e^2} \cos i$. Из этого результата, в частности, вытекает, что при $\rho_2 = 0$ ($i = 0$) траектория заключена внутри кругового кольца, границы которого мало деформируются, если возмущения типа (5.5) достаточно малы по абсолютной величине. Приведенные результаты рассмотрены в работе [192].

З а м е ч а н и е. Интегрирование дифференциальных уравнений вида (5.2), выполняющееся в небесной механике одним из методов последовательных приближений, обычно осложняется из-за малых делителей, приводящих к появлению в решении вековых членов. Возникает

*) Этот результат можно установить и непосредственно, не привлекая теорем из теории устойчивости, а анализируя первые интегралы. Но подобное заключение оказывается справедливым всякий раз, когда исследование устойчивости проводится с помощью связки интегралов.

вопрос, всегда ли вековые члены обусловлены физической природой проблемы или в некоторых случаях они являются следствием дефектов используемых математических методов? Особый интерес представляет характер изменения со временем большой полуоси. Например, это важно для определения продолжительности существования спутника. Если a во все время движения остается ограниченным, то можно утверждать, что движение устойчиво по Лагранжу *). Из установленной устойчивости по отношению к большой полуоси a следует, что вековые члены в теории движения ИСЗ в нецентральной поле тяготения порождены недостатками используемых методов.

§ 6. Устойчивость орбит центра масс стреловидного спутника

Рассмотрим задачу о поступательно-вращательном движении материального однородного прямолинейного отрезка массы m и длины $2l$ в гравитационном поле шара массы m_0 , обладающего сферическим распределением плотностей. Дифференциальные уравнения движения этой задачи в прямоугольной системе координат, начало которой совпадает с центром масс шара, а оси имеют неизменные направления, были получены Г. Н. Дубошиным [193]. В цилиндрической системе координат они запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho \dot{\lambda}^2 &= - \frac{f(m_0 + m)}{r^3} \rho + \frac{m_0 + m}{m_0} l^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}, \\ \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\lambda}) &= \frac{(m_0 + m)}{m_0} l^2 \frac{\partial U}{\partial \lambda}, \\ \ddot{z} &= - \frac{f(m_0 + m)}{r^3} z + \frac{m_0 + m}{m_0} l^2 \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \ddot{\psi} \sin^2 \vartheta + \dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin 2\vartheta &= 3 \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ \ddot{\vartheta} - \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta &= 3 \frac{\partial U}{\partial \vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

где U определяется равенством

$$U = \frac{f m_0}{r^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{2k}(\nu)}{2k+1} \left(\frac{l}{r} \right)^{2k-2}, \quad (6.2)$$

*) К. В. Холшевников [207, 208] нашел условие устойчивости по Лагранжу, используя формулу Лапласа. См. также работу [209].

причем

$$v = \frac{1}{r} [\rho \sin \vartheta \sin (\psi - \lambda) + z \cos \vartheta]. \quad (6.3)$$

В формулах (6.1) — (6.3) использованы следующие обозначения: ρ , λ , z — цилиндрические координаты центра инерции отрезка, ψ , ϑ — эйлеровы углы, определяющие ориентацию отрезка в выбранной системе координат, f — постоянная тяготения, $P_{2k}(v)$ — полином Лежандра $2k$ -го порядка,

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

Система (6.1) имеет четыре первых интеграла, из которых мы в дальнейшем используем интеграл энергии

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\lambda}^2 + \dot{z}^2 + \frac{m_0 + m}{3m_0} l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \psi^2 \sin^2 \vartheta) - \\ - \frac{2f(m_0 + m)}{r} - \frac{2(m_0 + m)}{m_0} l^2 U = h \end{aligned} \quad (6.4)$$

и один из интегралов момента количества движения

$$\rho^2 \dot{\lambda} + \frac{(m_0 + m) l^2}{m_0} \psi \sin^2 \vartheta = c. \quad (6.5)$$

Задачу об устойчивости мы поставим следующим образом. При $l = 0$ система (6.1) распадается на две независимые подсистемы:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho \dot{\lambda}^2 &= -\frac{f(m_0 + m)}{r^3} \rho, \\ \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\lambda}) &= 0, \\ \ddot{z} &= -\frac{f(m_0 + m)}{r^3} z \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi} \sin^2 \vartheta + \psi \dot{\vartheta} \sin 2\vartheta &= \frac{f m_0}{r^4} \rho \sin \vartheta \cos (\psi - \lambda) \cdot v, \\ \ddot{\vartheta} - \psi^2 \sin \vartheta \cos \vartheta &= \\ &= \frac{f m_0}{r^4} [\rho \cos \vartheta \sin (\psi - \lambda) - z \sin \vartheta] v. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Система (6.6) определяет движение центра инерции отрезка, когда последний стягивается в точку. Уравнения (6.7)

физического смысла не имеют, так как вращательного движения точки не существует. Тем не менее эти уравнения нам будут необходимы по соображениям формально-математического характера. Возникает вопрос, будут ли орбиты, составляемые уравнениями (6.6) и (6.7), устойчивы по отношению к той части переменных, которые характеризуют движение центра масс отрезка, если l отлично от нуля, но достаточно мало. Решение системы (6.1) не совпадает с решениями уравнений (6.6) и (6.7), поэтому исследуется вопрос об устойчивости решений уравнений (6.6) и (6.7) при наличии конкретных постоянно действующих возмущений, обусловленных формой спутника.

Для решения задачи мы прибегаем к приему, изложенному в § 2 этой главы — дополним систему (6.1) уравнением

$$\dot{l} = 0 \quad (6.8)$$

и исследуем устойчивость решений полученной расширенной системы:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0, \quad \dot{\rho} = 0, \quad \lambda = n(t - t_0), \\ \dot{\lambda} &= n = [f(m_0 + m)\rho_0^{-3}]^{1/2}, \quad z = 0, \quad \dot{z} = 0, \\ \psi &= \psi_0(t); \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0(t), \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad l = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

где $\psi_0(t)$ представляет собой любое частное решение уравнения (6.7). Соотношения (6.9) определяют круговые орбиты, лежащие в основной плоскости системы координат. Так как изменение ориентации в пространстве координатной системы не приводит к изменению ни вида уравнений (6.1), ни вида силовой функции (6.2), то наши рассуждения будут справедливы для любых круговых орбит центра масс спутника.

Предварительно рассмотрим систему (6.7) и покажем, что $\psi_0(t)$ ограничено при любых начальных условиях. Первое из уравнений (6.7) дает

$$\ddot{\psi} = \frac{f m_0}{\rho_0^3} \sin(\psi - \lambda) \cos(\psi - \lambda). \quad (6.10)$$

С помощью (6.10) находим

$$(\dot{\psi} - \dot{\lambda})^2 = h^* + \frac{n^2}{2} \sin^2(\psi - \lambda). \quad (6.11)$$

Из (6.11) видно, что

$$h^* \leq (\psi - \dot{\lambda})^2 \leq h^* + \frac{n^2}{2}.$$

Отсюда следует, что $\dot{\psi}(t)$ ограничено.

Введем для возмущений переменных величин следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \rho - \rho_0, & x_2 &= \dot{\rho}, & x_3 &= \lambda - n(t - t_0), \\ x_4 &= \dot{\lambda} - n, & x_5 &= z, & x_6 &= \dot{z}, & x_7 &= \vartheta - \frac{\pi}{2}, \\ x_8 &= \dot{\vartheta}, & x_9 &= \psi - \psi_0, & x_{10} &= \dot{\psi} - \dot{\psi}_0, & x_{11} &= l. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Тогда система дифференциальных уравнений возмущенного движения, которую мы ради краткости опускаем, обладает первыми интегралами:

$$\begin{aligned} F_1 &= (\rho_0 + x_1)^2 (n + x_4)^2 - \rho_0^2 n^2 + x_2^2 + x_6^2 + \\ &\quad + \frac{m_0 + m}{3m_0} x_{11}^2 [x_8^2 + (\psi_0 + x_{10})^2 \cos^2 x_7] - \\ &= - \frac{2f(m_0 + m)}{\sqrt{(\rho_0 + x_1)^2 + x_3^2}} - \frac{2(m_0 + m)}{m_0} x_{11}^2 U + \frac{2f(m_0 + m)}{\rho_0}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$F_2 = (\rho_0 + x_1)^2 (n + x_4) - \rho_0^2 n + \frac{m_0 + m}{m_0} x_{11}^2 (\psi_0 + x_{10}) \cos^2 x_7, \quad (6.14)$$

$$F_3 = x_{11}. \quad (6.15)$$

Рассмотрим устойчивость движения по отношению к части переменных. В качестве последних мы возьмем $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_{11}$. Для исследования устойчивости построим функцию Ляпунова V в виде связки первых интегралов (6.13) — (6.15)

$$V = F_1 - 2nF_2 + PF_2^2 + MF_3^2, \quad (6.16)$$

где M и P — произвольные положительные постоянные, которые позже будут выбраны. Функция V представляет собой интеграл уравнений возмущенного движения, а поэтому производная от нее $\dot{V}$ в силу дифференциальных уравнений тождественно равна нулю. Если функция V окажется знакоопределенной по отношению к выбранным переменным, то тем самым будет доказана устойчивость исследуемых решений.

Разлагая функцию V в ряд по степеням x_i , получим

$$V = n^2 (4P\rho_0^2 - 3) x_1^2 + 4Pn\rho_0^3 x_1 x_4 + (P\rho_0^2 + 1) \rho_0^2 x_4^2 + 2n^2 x_5^2 + x_6^2 + Nx_{11}^2 + \dots, \quad (6.17)$$

где введено обозначение

$$N = M + \frac{m_0 + m}{3m_0} (\dot{\vartheta}_0^2 + \dot{\psi}_0^2) - \frac{2}{3} n^2 P_2(v_0) - 2n\dot{\psi}_0 \frac{m_0 + m}{m_0}. \quad (6.18)$$

При достаточно малых по модулю значениях величин x_i знак функции V будет определяться знаком квадратичной формы, стоящей в разложении (6.17). Но эта форма будет определено положительной по отношению к величинам $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_{11}$, если выполнены неравенства

$$N > \varepsilon > 0, \quad 4P\rho_0^2 > 3 + \varepsilon, \quad P\rho_0^2 > 3 + \varepsilon. \quad (6.19)$$

Выше было показано, что $\dot{\psi}_0(t)$ ограниченная функция времени, а поэтому соответствующим выбором M величина N может быть сделана больше некоторого положительного числа для любых значений t . Если выбрать $P > \frac{3 + \varepsilon}{\rho_0^2}$, то и оставшиеся неравенства (6.19) будут также удовлетворяться. Итак, мы построили определенно положительную функцию, удовлетворяющую теореме В. В. Румянцева. Отсюда следует устойчивость круговых орбит центра масс отрезка в ньютоновском поле сил по отношению к $r, |\dot{r}|, z, |\dot{z}|$ и угловой скорости $\dot{\lambda}$ при наличии постоянно действующих возмущений, обусловленных формой спутника, в предположении, что длина отрезка достаточно мала. Это означает, что при небольших размерах тела в рассмотренном случае вращательное движение не может заметно изменить движение центра инерции.

Стало быть, результаты качественных исследований, в частности изучения устойчивости движения, проведенных в предположении, что спутник представляет собой материальную точку, в достаточной мере надежны. Здесь мы ограничились случаем стреловидного спутника, движущегося по круговой орбите, однако результаты без труда распространяются на спутник достаточно малых размеров с произвольной геометрией масс, движущийся по эллиптической невозмущенной орбите. Для этой цели следует вос-

пользоваться теоремой Рауса и теоремой о канонических преобразованиях раусовых уравнений § 4 гл. I. Тогда можно показать, что движение спутника будет устойчивым по отношению к элементам a, e, i , если только его размеры достаточно малы.

Исследование устойчивости поступательно-вращательного движения содержится в работах Г. Н. Дубошина [193], В. Т. Кондураря [194—196]. Устойчивость вращательного движения тела в ньютоновском поле сил исследовалась многими авторами (см., например, В. В. Белецкий [126], В. В. Румянцев [197], В. А. Сарычев [198—200]).

§ 7. Уравнения возмущенного движения для квазиштеккелевых систем в переменных «действие—угол»

Пусть имеется динамическая система Штеккеля *), определяемая формулами (5.15) — (5.17) гл. I, в которых следует положить

$$\Phi = 0, \quad a_i = 1, \quad b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7.1)$$

Тогда согласно второй теореме § 5 гл. I общее решение задачи записывается в виде (см. (5.18) гл. I).

$$\sum_{i=1}^n \int \frac{\Phi_{i1}(q_i) dq_i}{\sqrt{\Phi_i(q_i)}} = t + \beta_1, \quad (7.2)$$

$$\sum_{i=1}^n \int \frac{\Phi_{ij}(q_i) dq_i}{\sqrt{\Phi_i(q_i)}} = \beta_j \quad (j = 2, \dots, n), \quad (7.3)$$

где

$$\Phi_i(q_i) = 2U_i(q_i) + \sum_{j=1}^n 2\alpha_j \Phi_{ij}(q_i), \quad (7.4)$$

а α_i и β_i — постоянные интегрирования.

Дифференцируя (7.2) и (7.3) по t , получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i1}(q_i) dq_i}{\sqrt{\Phi_i(q_i)}} = dt, \quad (7.5)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{ij}(q_i) dq_i}{\sqrt{\Phi_i(q_i)}} = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, n). \quad (7.6)$$

*) Излагаемая здесь теория условно-периодических движений для штеккелевых систем приводится в монографии К. Шарлье [28].

Предположим далее, что имеет место случай либрации (§ 10 гл. I), характеризующийся простыми действительными корнями $q_i = a_i$ и $q_i = b_i$ ($a_i < b_i$) уравнений

$$\Phi_i(q_i) = (q_i - a_i)(b_i - q_i)\psi_i(q_i) = 0, \quad (7.7)$$

в которых $\psi_i(a_i) \neq 0$, $\psi_i(b_i) \neq 0$.

Положим

$$dw_i = [(q_i - a_i)(b_i - q_i)]^{-\frac{1}{2}} \quad (7.8)$$

и введем обозначение

$$F_{ij}(q_i) = \frac{\Phi_{ij}}{\sqrt{\psi_i(q_i)}}. \quad (7.9)$$

Тогда уравнения (7.5) и (7.6) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^n F_{i1} dw_i = dt, \quad (7.10)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ij} dw_i = 0 \quad (j = 2, \dots, n). \quad (7.11)$$

Определитель этой системы E в силу (7.9) равен

$$E = \det |F_{ij}| = \frac{1}{\sqrt{\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n}}, \quad (7.12)$$

и, стало быть, система (7.10) — (7.11) разрешима относительно dw_i .

Из (7.8) интегрированием получаем

$$q_i = a_i \cos^2 \frac{w_i}{2} + b_i \sin^2 \frac{w_i}{2}. \quad (7.13)$$

Обозначая

$$G_{ij}(q_i) = \int F_{ij}(q_i) dw_i \quad (7.14)$$

и интегрируя затем систему (7.10) — (7.11), будем иметь

$$\sum_{i=1}^n G_{i1}(w_i) = t + A_1, \quad (7.15)$$

$$\sum_{i=1}^n G_{ij}(w_i) = A_j. \quad (7.16)$$

Если в этих уравнениях ω_k увеличить на 2π , то из (7.15) и (7.16) можно найти

$$\sum_{i=1}^n G_{i1}(\omega_i) + G_{k1}(\omega_k + 2\pi) - G_{k1}(\omega_k) = t + A_1 + 2\omega_{k1}, \quad (7.17)$$

$$\sum_{i=1}^n G_{ij}(\omega_i) + G_{kj}(\omega_k + 2\pi) - G_{kj}(\omega_k) = A_j + 2\omega_{jk}, \quad (7.18)$$

где, очевидно,

$$\omega_{jk} = \int_{a_k}^{b_k} \frac{\Phi_{kj}(q_k) dq_k}{\sqrt{(q_k - a_k)(b_k - q_k) \Psi_k(q_k)}}, \quad (7.19)$$

причем $\det |\omega_{jk}| \neq 0$.

Из (7.13), (7.17) — (7.19) следует, что координаты будут условно-периодическими функциями величин $t + A_1, A_2, \dots, A_n$, элементарные периоды которых даются формулами (7.19) (см. § 9 гл. I).

Введем теперь новые переменные u_i с помощью соотношений

$$\sum_{i=1}^n \omega_{i1} u_i = \pi(t + A_1), \quad (7.20)$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_{ij} u_i = \pi A_j \quad (j = 2, \dots, n). \quad (7.21)$$

Так как определитель $|\omega_{ij}|$ отличен от нуля, то последнюю систему можно разрешить относительно переменных u_i , и тогда обобщенные координаты q_i можно представить в виде функций от u_i :

$$q_i = g_i(u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (7.22)$$

В силу (7.20) и (7.21) координаты q_i будут периодическими функциями u_i с периодом 2π :

$$\begin{aligned} g_i(u + 2m_1\pi, u_2 + 2m_2\pi, \dots, u_n + 2m_n\pi) &\equiv \\ &\equiv g_i(u_1, u_2, \dots, u_n), \end{aligned} \quad (7.23)$$

где m_i суть произвольные целые числа.

Перейдем к составлению уравнений возмущенного движения, предполагая, что для возмущенного движения гамильтониан имеет вид

$$H = T - U - \mu R. \quad (7.24)$$

Здесь член $T - U$ удовлетворяет условиям теоремы Штекеля (формулы (7.15) — (7.17) гл. I и формулы (7.1) этой главы). Движение, определяемое гамильтонианом $H_0 = T - U$, примем за невозмущенное (промежуточное). Функция μR будет пертурбационной, или возмущающей, где μ — малый параметр.

Возмущенное движение можно описывать дифференциальными уравнениями (11.8) гл. I, полученными методом вариации произвольных постоянных (или при помощи соответствующего контактного преобразования):

$$\dot{\alpha}_i = \mu \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\mu \frac{\partial R}{\partial \alpha_i}. \quad (7.25)$$

Однако удобнее в качественных исследованиях опираться на дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов, роль которых играют канонические переменные «действие — угол». Переменными типа «угол» будут величины $\eta_i = u_i$, определяемые системой (7.20) — (7.21). Сопряженные с ними канонические переменные действия обозначим через ξ_i . Для них будем иметь

$$\xi_i = \frac{1}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{2\Phi_i(q_i)} dq_i. \quad (7.26)$$

Каноничность указанного преобразования можно легко установить при помощи теоремы Якоби (см. § 4 гл. I) в форме, приданной ей Пуанкаре [191]. Если каноническое преобразование от переменных α_i, β_i к переменным ξ_i, η_i задано производящей функцией $S(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$, то ее полная вариация будет равна

$$\delta S = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i + \frac{\partial V}{\partial \xi_i} \delta \xi_i \right). \quad (7.27)$$

Левую часть этого соотношения с помощью формул (4.11) гл. I можно преобразовать к виду

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i \delta \alpha_i - \eta_i \delta \xi_i). \quad (7.28)$$

Теперь приходим к заключению, что преобразование переменных будет каноническим, если выражение (7.28) представляет собой полный дифференциал от какой-либо функции. Подставляя в выражение (7.28) значения новых переменных ξ_i , η_i , задаваемых формулами (7.20), (7.21) и (7.26), обнаруживаем, что оно в невозмущенном движении будет постоянным и равным полной механической энергии α_1 , взятой с противоположным знаком. Это означает, что производящая функция контактного преобразования S запишется в виде

$$S = -\alpha_1 t, \quad (7.29)$$

где α_1 следует рассматривать как функцию новых переменных.

В результате выполненного преобразования уравнения возмущенного движения будут представлены в виде

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \xi_i}, \quad (7.30)$$

где новый гамильтониан задается формулой

$$K = -\alpha_1 + \mu R. \quad (7.31)$$

Предполагая гамильтониан аналитической функцией от малого параметра μ , его можно разложить в ряд по степеням μ

$$K = K_0 + \mu K_1 + \dots, \quad (7.32)$$

в котором в силу (7.22) и (7.23) функции $K_1, K_2, \dots$ будут периодичны относительно η_i с периодом 2π , а K_0 будет зависеть лишь от ξ_i .

§ 8. Об устойчивости спутниковых орбит при постоянно действующих консервативных возмущениях

Рассуждения этого параграфа будут опираться на теорему Колмогорова — Арнольда, которая может быть сформулирована следующим образом.

Пусть движение консервативной механической системы определяется гамильтонианом

$$H = H_0(p_1, \dots, p_n) + \mu H_1(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, \mu), \quad (8.1)$$

в котором μ — малый параметр, а функция $H_1(p, q, \mu)$ имеет по $q_1, \dots, q_n$ период 2π и аналитична в некоторой области $G: |\operatorname{Im} q| < \rho$, $p \in P$, и пусть в этой области выполнено условие невырожденности

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j} \right| \neq 0, \quad (8.2)$$

а

$$|\mu H_1| < M. \quad (8.3)$$

Тогда при достаточно малых значениях M точки области G , исключая множество малой меры, движутся условно-периодически по n -мерным торам, близким к торам

$$p = \text{const.}$$

Сформулированная теорема была доказана В. И. Арнольдом [166, 168] модифицированным методом последовательных приближений Ньютона. Им же была доказана и более общая теорема, в которой на систему гамильтоновых уравнений не накладывается требование о невырожденности (8.2). Эта общая теорема в равной мере применима как к невырожденным системам, так и к системам с предельным или собственным вырождением (см. § 10 гл. I). В подавляющем большинстве случаев в небесной механике и небесной баллистике теорема Колмогорова—Арнольда неприменима, так как имеет место предельное или собственное вырождение.

Последнюю трудность можно обойти, если вместо кеплеровских невозмущенных орбит принимать другие промежуточные орбиты, для которых было бы выполненным условие (8.2). Такими будут орбиты классической или обобщенной задачи двух неподвижных центров и её предельных ва-

риантов. Здесь ради простоты мы будем исходить из предельного варианта обобщенной задачи двух неподвижных центров, совпадающего с задачей Баррара (см. § 4 гл. III).

Движение спутника, принимаемого за материальную точку, будем изучать в системе координат с фиксированными направлениями осей, за ось аппликат примем ось вращения планеты, а начало координат поместим в одной из шаровых точек инерции, которыми будет обладать планета, если пренебречь ее экваториальным сжатием.

В выбранной системе координат потенциал притяжения планеты выражается формулой* (см. § 4 гл. III)

$$U = \frac{fM}{r} + \frac{fMz_c \sin \varphi}{r^3} + \mu R(r, \varphi, \lambda, \mu). \quad (8.4)$$

Здесь r, φ, λ — сферические координаты во введенной системе отсчета, μ — малый параметр, а μR — пертурбационная функция. Заметим, что для дальнейших исследований природа возмущающих сил несущественна. Поэтому функция R может включать в себя как возмущающее действие фигуры планеты, не учтенное первыми двумя членами потенциала (8.4), так и иные возмущающие факторы.

Выбирая в качестве обобщенных координат величины

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \sin \lambda, \quad (8.5)$$

для полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби в рассматриваемой невозмущенной задаче, определяемой первыми двумя членами потенциала (8.4), согласно (7.12) гл. III будем иметь

$$\begin{aligned} V = & -\alpha_1 t + \sqrt{2\alpha_3} \arcsin q_3 + \\ & + \sqrt{2} \int \sqrt{\alpha_1 q_1^2 + f m q_1 + \alpha_2} \frac{dq_1}{q_1} + \\ & + \sqrt{2} \int \sqrt{(\alpha_2 + f m z_c \sin q_2) \cos^2 q_2 - \alpha_3} \frac{dq_2}{\cos q_2}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — постоянные интегрирования.

Преобразуем уравнения движения, которые мы здесь не выписываем, к виду (7.30). С этой целью для взятой невозмущенной задачи введем канонические переменные «действие—угол». Так как мы имеем частный случай штеккелевой

системы, то движение спутника будет условно-периодическим, а переменные «действие — угол» выразятся через элементарные периоды, определяемые формулой (7.19),

$$\left. \begin{aligned} \omega_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{q_1 dq_1}{\sqrt{P_1(q_1)}}, & \omega_{12} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{dq_1}{q_1 \sqrt{P_1(q_1)}}, \\ \omega_{13} &= 0, \\ \omega_{21} &= 0, & \omega_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\cos q_2 dq_2}{\sqrt{P_2(q_2)}}, \\ \omega_{23} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{a_2}^{b_2} \frac{dq_2}{\cos q_2 \sqrt{P_2(q_2)}}, \\ \omega_{31} &= 0, & \omega_{32} &= 0, & \omega_{33} &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha_3}} \int_{-1}^1 \frac{dq_3}{\sqrt{1-q_3^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

В формулах (8.7) a_1 и b_1 — корни уравнения

$$P_1(q_1) = \alpha_1 q_1^2 + f m q_1 - \alpha_2 = 0, \quad (8.8)$$

между которыми в процессе движения заключена координата q_1 , а a_2 и b_2 — аналогичные корни уравнения

$$P_2(q_2) = \cos^2 q_2 (f m z_c \sin q_2 + \alpha_2) - \alpha_3 = 0. \quad (8.9)$$

Как следует из (7.20) и (7.21), канонические переменные η_i связаны с элементарными периодами ω_{ij} соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\pi}{\omega_{11}} (\beta_1 - t), \\ \eta_2 &= \frac{\pi}{\omega_{22}} \left[\beta_2 - \frac{\omega_{12}}{\omega_{11}} (\beta_1 - t) \right], \\ \eta_3 &= \frac{\pi}{\omega_{33}} \left\{ \beta_3 - \frac{\omega_{23}}{\omega_{22}} \left[\beta_2 - \frac{\omega_{12}}{\omega_{11}} (\beta_1 - t) \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

где через β_i обозначены канонические элементы, сопряженные с α_i (см. формулу (4.19) гл. I). Переменные действия ξ_i в соответствии с (7.26) в рассматриваемой задаче будут

выражаться через α_i по формулам

$$\xi_i = \frac{1}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{2P_i} dq_i \quad (i = 1, 2), \quad \xi_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{2\alpha_3} d\lambda. \quad (8.11)$$

Если из уравнения (8.11) найти α_1 как функцию от ξ_i , то интересующее нас контактное преобразование будет задаваться производящей функцией

$$S = -\alpha_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)t, \quad (8.12)$$

и канонические уравнения возмущенного движения примут вид (7.30), причем новая характеристическая функция K определится равенством

$$K = \mu R + \frac{\partial S}{\partial t} = \mu R - \alpha_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (8.13)$$

В этих переменных уравнения невозмущенного (в указанном выше смысле) движения примут вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_i} = \omega_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (8.14)$$

Из (8.10) и (8.13) видно, что

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\omega_{11}}, \quad \omega_2 = \frac{\pi\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22}}, \quad \omega_3 = -\frac{\pi\omega_{12}\omega_{23}}{\omega_{11}\omega_{22}\omega_{33}}. \quad (8.15)$$

Для применимости теоремы Колмогорова — Арнольда необходимо показать, что определитель Гесса (8.2) не равен тождественно нулю. Как следует из (8.2) и (8.14), задача сводится к вычислению значения якобиана

$$\det \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_j} \right|. \quad (8.16)$$

Его вычисление можно значительно упростить, если канонические переменные ξ_i выразить через оскулирующие элементы *) a, p, i , определяемые формулами (7.17), (7.18) и

*) Эти оскулирующие элементы отнюдь не являются кеплеровскими, ибо невозмущенными орбитами здесь являются орбиты предельного варианта обобщенной задачи двух неподвижных центров, а не траектории задачи двух тел.

(7.20) гл. III. Имеем

$$\alpha_1 = -\frac{fm}{2a}, \quad \alpha_2 = \frac{fmp}{2}, \quad \alpha_3^2 = \frac{fm}{2} (p + 2z_c \sin i) \cos^2 i. \quad (8.17)$$

Так как выполненное преобразование неособое, то

$$\frac{D(a, p, i)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \neq 0, \quad (8.18)$$

а якобиан (8.16) представляется в виде

$$\det \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_j} \right| = \frac{D(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{D(a, p, i)} \cdot \frac{D(a, p, i)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}. \quad (8.19)$$

Тогда условие невырожденности запишется следующим образом:

$$\frac{D(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{D(a, p, i)} \neq 0. \quad (8.20)$$

При помощи формул (8.7) и (8.17) нетрудно получить

$$\left. \begin{aligned} \omega_{11} &= \frac{\pi}{n}, \quad \omega_{12} = \frac{\pi}{\sqrt{fmp}}, \quad \omega_{22} = \sqrt{\frac{2}{f m z_c (\lambda_1 - \lambda_3)}} K(k), \\ \omega_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2 f m z_c (\lambda_1 - \lambda_3)}} \left\{ \frac{1}{1 - \lambda_1} \Pi(n', k) + \frac{1}{1 + \lambda_1} \Pi(n'', k) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $\Pi(n', k)$, $\Pi(n'', k)$ — полные эллиптические интегралы третьего рода, причем для модуля и параметров этих интегралов будем иметь

$$k^2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3}, \quad n' = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1}, \quad n'' = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1}. \quad (8.22)$$

В формулах (8.22) через λ_1 , λ_2 , λ_3 обозначены корни уравнения (8.9), преобразованного с помощью соотношений (8.17) к виду

$$2z_c \lambda^3 + p \lambda^2 - 2z_c \lambda - (p \sin i - 2z_c \cos^2 i) \sin i = 0. \quad (8.23)$$

Из (8.15) и (8.21) видно, что ω_1 не зависит от p и i , поэтому условие (8.20) можно представить в виде

$$\frac{D(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{D(a, p, i)} = \frac{\partial \omega_1}{\partial a} \cdot \frac{D(\omega_2, \omega_3)}{D(p, i)} \neq 0, \quad (8.24)$$

или, принимая во внимание, что $\omega_1 = \pi/n$, а $\frac{\partial \omega_1}{\partial i} \neq 0$,

$$\frac{D(\omega_2, \omega_3)}{D(p, i)} \neq 0. \quad (8.25)$$

Так как для близких искусственных спутников отношение z_c/p имеет порядок $3 \cdot 10^{-3}$ (см. § 6 гл. III) и уменьшается при возрастании большой полуоси орбиты, то частоты ω_2 и ω_3 можно разложить в ряды Тейлора по степеням величины z_c/p :

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 &= n \left[1 + \left(\frac{z_c}{p} \right)^2 \left(1 - \frac{7}{4} \sin^2 i \right) \right] + \dots, \\ \omega_3 &= -n \left(1 - \frac{z_c}{p} \sin i \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.26)$$

Тогда условие невырожденности (8.25) запишется следующим образом:

$$\frac{D(\omega_2, \omega_3)}{D(p, i)} = \frac{2n^2 \cos i}{p} \left(\frac{z_c}{p} \right)^3 + \dots \quad (8.27)$$

Оно будет выполняться при $i \neq \frac{\pi}{2}$.

Тогда в соответствии с теоремой Колмогорова — Арнольда при достаточно малой по модулю возмущающей функции μR можно утверждать, что возмущенное движение спутника будет условно-периодическим и устойчивым по отношению к переменным действия ξ_i для большинства начальных условий. Возмущенное движение спутника планеты будет происходить по торам, близким к невозмущенным торам:

$$\xi_i = \text{const}. \quad (8.28)$$

Это утверждение справедливо лишь для тех орбит, для которых частоты ω_i не удовлетворяют никакому соотношению вида

$$\sum_{i=1}^3 k_i \omega_i = 0, \quad (8.29)$$

где k_i — не равные одновременно нулю целые коэффициенты.

Хотя в рассматриваемой задаче определитель Гесса при использовании канонических переменных «действие — угол»

и не равен нулю, тем не менее при некоторых начальных условиях частоты могут удовлетворять соотношению (8.29), т. е. не исключено случайное вырождение. Этот случай, например, будет иметь место для начальных условий, соответствующих периодическим движениям, для которых частоты ω_i пропорциональны. Для спутниковых орбит с такими начальными условиями теорема Колмогорова — Арнольда оказывается неприменимой, и требуются более тонкие исследования.

Если ограничиться более узким классом возмущающих сил, то методом Арнольда можно получить и более сильный результат. Пусть, например, в потенциале (8.4) пертурбационная функция μR не зависит от долготы λ , т. е. как в невозмущенной, так и в возмущенной задачах силовое поле осесимметрично. Такой случай будет иметь место в задаче о движении спутника сфероидальной планеты. Координата λ здесь является циклической, поэтому ее можно игнорировать. После несложных преобразований получим измененный гамильтониан вида

$$H = \frac{1}{2} \left(p_1^2 + \frac{1}{q_1^2} p_2^2 \right) - \frac{\alpha_3^2}{2q_1^2 \cos^2 q_2} - \frac{f m z_c \sin q_2}{q_1^2} - \mu R(q_1, q_2, \mu), \quad (8.30)$$

в котором α_3 — постоянная циклического интеграла (интеграла площадей). В результате понижения порядка системы уравнений движения будем иметь

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2), \quad (8.31)$$

где

$$K = \mu R + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (8.32)$$

причем через S обозначена производящая функция канонического преобразования. Заметим, что при всех преобразованиях постоянная α_3 не варьируется. Переменные η_i , как и выше, определяются формулами (8.10), а ξ_i — формулами (8.11).

Уравнения (8.31) имеют форму, необходимую для применения теоремы Колмогорова — Арнольда. Действительно, полагая в (8.31) $\mu = 0$, получим следующие уравнения

движения:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = \omega_i \quad (i = 1, 2), \quad (8.33)$$

где частоты ω_i определяются формулами (8.15). Эти уравнения в фазовом пространстве ξ_i, η_i определяют движение по двумерному тору $\xi_i = \text{const}$ ($i = 1, 2$).

Здесь условие невырожденности (8.2) можно представить в виде

$$\frac{D(\omega_1, \omega_2)}{D(\xi_1, \xi_2)} \neq 0. \quad (8.34)$$

Так как ω_{22} не зависит от α_2 , а ω_{11} от α_1 , то вместо (8.24) получаем

$$\frac{\partial \omega_{11}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{12}} \right) \neq 0. \quad (8.35)$$

Как и выше, можно показать, что это условие выполняется при всех начальных условиях. Отсюда заключаем, что исследуемое движение будет устойчивым по Арнольду при условии, что циклическая постоянная α_3 не возмущается.

Однако последнее ограничение нетрудно снять. Для этого представим постоянную α_3 до игнорирования циклической координаты в виде степенного ряда относительно малого параметра

$$\alpha_3 = \alpha_3^{(0)} + \mu \alpha_3^{(1)} + \dots, \quad (8.36)$$

приняв $\alpha_3^{(0)}$ за невозмущенное значение постоянной площадей. Остальные члены ряда включим в пертурбационную функцию. Все последующие рассуждения остаются неизменными.

Следуя В. И. Арнольду, можно утверждать, что в данном случае трехмерное инвариантное многообразие $H = h$, где h фиксированно, разделяется двумерными торами $\xi_1 = \text{const}$ на узкие тороидальные слои, и траектория не может покинуть тот слой, в котором она находилась в начальный момент. Стало быть, движение будет устойчивым по Лагранжу. Этот результат справедлив только для возмущений, задаваемых достаточно малой по модулю пертурбационной функцией вида $\mu R(r, \varphi, \mu)$.

З а м е ч а н и е. Теорема Колмогорова — Арнольда в определенном смысле дополняет теорему Пуанкаре о несуще-

ствовании однозначных аналитических интегралов гамильтоновых систем, отличных от классических первых интегралов (или следующих из них [201]). Теорема Пуанкаре утверждает, что если определитель Гесса канонических уравнений вида (7.30) — (7.31) не равен нулю, то последние не имеют, вообще говоря, другого однозначного аналитического интеграла, кроме интеграла Якоби (или равносильного ему).

При некоторых дополнительных ограничениях на гамильтонову функцию можно утверждать, что задача о движении спутника осесимметричной «Земли» не имеет никаких первых однозначных, аналитических относительно малого параметра μ интегралов помимо интеграла живых сил и интеграла площадей, если только μ достаточно мало.

В самом деле, если в качестве упрощенной системы уравнений движения принять уравнения задачи Баррара и игнорировать циклическую постоянную, то уравнения движения будут иметь вид (8.31). Эти уравнения допускают один первый интеграл — интеграл живых сил, а определитель Гесса этой системы отличен от нуля. Поэтому основное условие теоремы Пуанкаре выполнено.

Дополнительное ограничение, упомянутое выше, состоит в том, что во всякой сколь угодно малой части области существует бесчисленное множество отношений k_1/k_2 , где k_1 и k_2 — целые, для которых не все коэффициенты $\int_0^{2\pi} R \, d\eta_i$ обращаются в нуль, если последние становятся вековыми. Мы ограничимся здесь сделанным замечанием, не приводя соответствующего доказательства.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что выводы, вытекающие из теоремы Пуанкаре, и в небесной механике и в небесной баллистике представляют прежде всего формально-математический интерес, так как теорема Пуанкаре имеет локальный характер. Оказывается весьма существенной степень малости параметра μ . Это видно из следующего примера. В проблеме движения ИСЗ мы указали два интегрируемых случая (см. гл. III): случай Баррара и обобщенную задачу двух неподвижных центров. Хотя в механическом смысле они являются родственными, в формально-математическом плане они представляют собой две самостоятельные и различные задачи. Обе задачи ин-

тегрируются в замкнутом виде, в квадратурах. Если за упрощенную задачу взять задачу Баррара, то уравнения возмущенного движения для канонических переменных «угол — действие» при достаточно малых μ не должны допускать никаких новых интегралов, кроме интегралов энергии и площадей. Несмотря на это, обобщенная задача двух неподвижных центров интегрируется, хотя ее потенциал разнится от потенциала Баррара на величину порядка 10^{-6} . Следовательно, в данном случае параметр, имеющий порядок 10^{-6} , нельзя считать малым. Поэтому в практическом плане вопрос о существовании первых интегралов, отличных от классических, в задачах небесной механики и небесной баллистики следует считать открытым.

Исследования В. И. Арнольда открывают определенные возможности в двух направлениях. Во-первых, они позволяют выявлять качественные свойства движения. С другой стороны, модифицированный метод Ньютона, примененный В. И. Арнольдом, можно использовать для построения решений, имея при этом в виду его быструю сходимость. Какая же из отмеченных возможностей метода Арнольда наиболее плодотворна и ценна?

Хотя в любой из задач, описываемых каноническими уравнениями, с помощью результатов В. И. Арнольда можно установить устойчивость по отношению к некоторой группе переменных действия, это все-таки не означает, что исследования устойчивости по Арнольду в конкретных задачах не представляют интереса. Здесь нужно иметь в виду, что подобные исследования позволяют выявить те величины, характеризующие движение, которые и в возмущенном движении остаются близкими к своим невозмущенным значениям. Если при изучении одной и той же механической задачи невозмущенную часть гамильтониана выделять различным образом, то можно получить ряд разных комбинаций параметров движения, мало изменяющихся при консервативных возмущениях.

Что же касается вопроса о целесообразности применения метода, развитого В. И. Арнольдом, для вычислительных целей, то он остается открытым, и, следовательно практическая пригодность метода неясна.

Выше была исследована устойчивость спутниковых движений в нецентральной поле тяготения на основе задачи Баррара. Аналогичные

исследования можно было бы выполнить, исходя из обобщенной задачи двух неподвижных центров. Приведенные в этом параграфе результаты частично были опубликованы автором в [202]. Аналогичные свойства движения ИСЗ можно установить иным способом, применяя теоремы Дж. Мозера [43], что было выполнено В. Т. Кинером [203].

§ 9. Об устойчивости движения в ограниченной круговой задаче трех тел *)

Ранее уже отмечалось значение круговой задачи трех тел в небесной баллистике. В этом параграфе будет рассмотрена устойчивость в смысле Арнольда орбит этой задачи. При этом главное внимание мы сосредоточим на особенностях применения способа Арнольда, не вдаваясь в технические подробности. Впервые эта задача по Арнольду была изучена А. М. Леонтовичем [204], исследовавшим устойчивость треугольных точек либрации [201]. Как и в предыдущем параграфе, невозмущенное движение будет выбрано так, чтобы определитель Гесса гамильтоновых уравнений невозмущенного движения был бы отличен от нуля. Невозмущенную часть гамильтониана можно выбрать по меньшей мере двояким образом, что позволяет изучить два важных для приложения типа движения.

Предположим сначала, что активно гравитирующие массы (см. § 1 гл. I) m_1 и m_2 удовлетворяют условию $m_1 \gg m_2$. Это, в частности, имеет место в задаче «Земля — Луна — космический аппарат», а также в астрономической задаче «Солнце — Юпитер — астероид». Нас будет интересовать только тот случай, когда постоянная якобиева интеграла (формула (6.3) гл. VI) h отрицательна, т. е. когда энергия относительного движения пассивно гравитирующей точки отрицательна. Тогда из рассмотрения кривой нулевой скорости (см. (9.2) гл. III) следует, что движение возможно либо в ограниченной окрестности тела малой массы (случай «Земля — Луна — искусственный спутник Луны»), либо в области, охватывающей большую массу (случай «Солнце — Юпитер — внутренняя планета») **).

*) Результаты этого параграфа были доложены автором на конференции по небесной механике в г. Киеве в январе 1965 г.

**) Мы предполагаем здесь, что h имеет соответствующее выделенным типам числовое значение. Прочие типы движения будут оставлены без рассмотрения.

Если рассматривать спутник малой массы с достаточно большим средним движением (например, близкий искусственный спутник Луны), то в качестве малого параметра возможно принять отношение среднего движения притягивающих масс к среднему движению спутника. Тогда к возмущающей части гамильтониана целесообразно отнести члены, пропорциональные угловой скорости обращения притягивающих масс. Гамильтонова функция невозмущенной задачи во вращающейся системе координат, жестко связанной с притягивающими массами (см. (6.1) гл. VI), будет совпадать с гамильтонианом классической задачи двух неподвижных центров.

Во втором типе движение происходит в окрестности большей массы. В этом случае в качестве невозмущенной возьмем задачу двух тел во вращающейся системе осей. Возмущающая часть гамильтониана будет содержать члены, пропорциональные меньшей из активно гравитирующих масс m_2 . Введение вращающихся осей при анализе плоского движения устраняет собственное вырождение (см. § 10 гл. I), ибо в результате общее решение невозмущенной задачи будет зависеть не от одной «частоты», равной среднему движению, а от двух частот (вторая частота будет определяться угловой скоростью вращения координатной системы). Уравнения движения (6.1) гл. VI можно преобразовать к каноническому виду

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad (9.1)$$

где гамильтониан H равен

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + n(\dot{x}y - \dot{y}x) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}. \quad (9.2)$$

В (9.1) и (9.2) систему единиц для простоты выбираем так, чтобы $fm_1 = 1 - \mu$, $fm_2 = \mu$.

Выполним последовательно два контактных преобразования. Преобразование от переменных $x, \dot{x}, y, \dot{y}$ к новым каноническим переменным $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ зададим производящей функцией

$$S = \xi_1 (\dot{x} \cos \xi_2 + \dot{y} \sin \xi_2). \quad (9.3)$$

Второе каноническое преобразование к переменным q_1, q_2, p_1, p_2 определим производящей функцией

$$W = p_2 \xi_2 + \int_{p_1(p_1 - \sqrt{p_1^2 - p_2^2})}^{\xi_1} \sqrt{-\frac{p_2^2}{\tau} + \frac{2}{\tau} - \frac{1}{p_1^2}} d\tau. \quad (9.4)$$

Заметим, что q_1 представляет собой среднюю аномалию точки, движущейся по эллипсу, который она описывала бы вокруг точки большей массы, помещенной в центре инерции притягивающих тел при неизменных начальных условиях; q_2 — долгота линии апсид, отсчитываемая от оси абсцисс, $p_1 = \sqrt{a}$, $p_2 = \sqrt{a(1 - e^2)}$, где a и e соответственно большая полуось и эксцентриситет указанного эллипса.

В этих переменных вместо системы (9.1) будем иметь

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (9.5)$$

причем функция Гамильтона H получается из (9.2) при выполнении указанных преобразований и разлагается в ряд по степеням μ :

$$H = H_0 + \mu H_1 + \dots, \quad (9.6)$$

в котором все H_i суть функции, периодические относительно q_i с периодом 2π . Таким образом, введенные переменные p_i и q_i будут каноническими переменными «действие — угол».

В формуле (9.6) первое слагаемое определяется соотношением

$$H_0 = -\frac{1}{2p_1^2} - np_2 \quad (9.7)$$

и по сделанному выше предположению является гамильтонианом невозмущенной задачи. Пертурбационная функция равна

$$R = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i H_i. \quad (9.8)$$

Из (9.7) видно, что определитель Гесса тождественно равен нулю, и, следовательно, теорема Колмогорова — Арнольда непосредственно применена быть не может. Поэтому систему (9.5) подвергнем предварительно еще одному преобразованию. Положим, что

$$V = V(H), \quad (9.9)$$

где V — произвольная голоморфная относительно H функция. Тогда вместо системы (9.5) получим

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{1}{V'(h)} \frac{\partial V}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{V'(h)} \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (9.10)$$

Здесь в процессе преобразования был использован интеграл Якоби системы (9.5) $\dot{H} = h$.

В силу предположения о голоморфности функции V имеем

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k V_k. \quad (9.11)$$

Очевидно, что

$$V_0 = V(H_0(p_1, p_2)). \quad (9.12)$$

Уравнения (9.10) допускают обобщенный интеграл энергии

$$V/V' = h'. \quad (9.13)$$

Заметим, что решения системы (9.10), вообще говоря, не являются решениями уравнений (9.5). Из решений системы (9.10) первоначальной системе дифференциальных уравнений движения удовлетворяют только те из них, для которых выполняется соотношение

$$V(h) - h'V'(h) = 0. \quad (9.14)$$

Однако это не препятствует исследованию устойчивости движения, ибо, если решения системы (9.10) будут устойчивыми, то этим свойством будут обладать и решения исходной системы.

Для того, чтобы не ограничивать исследование устойчивости только семейством изоэнергетических траекторий, можно поступить следующим образом. Пусть h' выбирается из условия (9.14), а постоянную h представим в виде

ряда

$$h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \mu^k. \quad (9.15)$$

Тогда, рассматривая только те из решений (9.10), которые одновременно являются и решениями системы (9.5), включим члены вида $h_k \mu^k$ в возмущающую часть гамильтониана. Это позволит при исследовании решений учитывать все решения, близкие к невозмущенным по величине энергии.

При $\mu = 0$ из (9.10) получаем дифференциальные уравнения невозмущенного движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{1}{V'(h)} \frac{\partial V_0}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{V'(h)} \frac{\partial V_0}{\partial q_i}. \quad (9.16)$$

Так как $\frac{\partial V_0}{\partial q_i} \equiv 0$, то из (9.16) находим

$$p_i = \beta_i = \text{const}. \quad (9.17)$$

Тогда из первой группы уравнений (9.16) получим

$$q_i = \frac{1}{V'(h)} \frac{\partial V_0}{\partial \beta_i} t + \alpha_i. \quad (9.18)$$

Из (9.17) — (9.18) следует, что в фазовом пространстве p_i, q_i движение происходит по двумерным торам $p_i = \beta_i$ и является условно-периодическим.

Используя теорему Колмогорова — Арнольда, покажем, что движение, определяемое гамильтонианом H_0 , также будет условно-периодическим и будет происходить по торам, близким к торам $p_i = \beta_i$. Для этого нужно установить невырожденность задачи, т. е. выполнение условия (8.2).

С помощью (9.7) и (9.9) находим

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial p_1^2} = V_0'' \cdot \frac{1}{p_1^6} - V_0' \cdot \frac{3}{p_1^4}, \quad \frac{\partial^2 V_0}{\partial p_2^2} = n^2 V_0'', \quad \frac{\partial^2 V_0}{\partial p_1 \partial p_2} = -\frac{n}{p_1^3} V_0'',$$

откуда

$$\det \left| \frac{\partial^2 V_0}{\partial p_i \partial p_j} \right| = -\frac{3n^2}{p_1^4} V_0' V_0''. \quad (9.19)$$

Из (9.19) видно, что всегда возможно функцию $V_0(H)$ выбрать так, чтобы

$$\det \left| \frac{\partial^2 V_0}{\partial p_i \partial p_j} \right| \neq 0.$$

Итак, изучаемая задача не допускает собственного и предельного вырождения, и поэтому движение будет устойчивым по Арнольду по отношению к величинам p_1, p_2 .

Ограничение на величину возмущающей массы может быть снято, если рассматривать класс движений, для которых невозмущенные орбиты охватывают обе притягивающие массы. Для этого типа движений предварительно необходимо преобразовать уравнения движения (6.1) гл. VI.

Обозначим через r барицентрический радиус-вектор пассивно гравитирующей точки и, разлагая потенциал в ряд по полиномам Лежандра, получим

$$U = \frac{1}{r} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_k}{r^{k+1}} P_k \left(\frac{x}{r} \right). \quad (9.20)$$

В формуле (9.20) коэффициенты γ_k определяются равенствами

$$\gamma_k = \mu (1 - \mu) [\mu^{k-1} - (-1)^{k-1} (1 - \mu)^{k-1}]. \quad (9.21)$$

Разложение (9.21) сходится абсолютно и равномерно для всех

$$r > \max \{ \mu; 1 - \mu \}.$$

Перейдем от переменных x, y, t к новым переменным ξ, η, τ с помощью соотношений

$$\xi = \varepsilon x, \eta = \varepsilon y, \tau = \sqrt{\varepsilon^3} t, \quad (9.22)$$

где ε — параметр. Тогда вместо системы (6.1) гл. VI будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} - 2\nu \frac{d\eta}{d\tau} - \nu^2 \xi + \frac{\xi}{\rho^3} &= \frac{\partial R}{\partial \xi}, \\ \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + 2\nu \frac{d\xi}{d\tau} - \nu^2 \eta + \frac{\eta}{\rho^3} &= \frac{\partial R}{\partial \eta}, \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

где использованы обозначения

$$\nu = \frac{n}{\sqrt{\varepsilon^3}}, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \quad (9.24)$$

Принимая затем величину ε за малый параметр, можно почти дословно повторить предыдущие рассуждения и в соответствии с теоремой Колмогорова — Арнольда заключить, что и в этом случае при достаточно малых значениях

параметра ε движение будет условно-периодическим и устойчивым по Арнольду по отношению к переменным действия $\sqrt{a}$, $\sqrt{p}$. Никаких ограничений на величины притягивающих масс не накладывается. Требование малости параметра ε означает, что движение будет устойчивым и условно-периодическим для тех орбит, охватывающих обе притягивающие массы, радиусы которых достаточно велики.

Изложим теперь второй способ изучения устойчивости в смысле Арнольда орбит круговой задачи трех тел. Здесь также никаких ограничений на величину притягивающих масс накладывать не будем.

Рассмотрим пространственный вариант круговой задачи трех тел, дифференциальные уравнения которой имеют вид

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = U'_x, \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = U'_y, \quad \ddot{z} = U'_z, \quad (9.25)$$

где силовую функцию согласно (1.25) и (1.26) гл. I можно записать следующим образом:

$$U = \frac{fm_1}{r_1} + \frac{fm_2}{r_2}.$$

Расстояние между притягивающими массами обозначим через $2c$.

При $n = 0$ уравнения (9.25) определяют движение в задаче двух неподвижных центров (см. § 2 гл. III). Так как в этой задаче существует большое число типов движения, то мы выберем тот тип, в котором пассивно гравитирующая точка движется в окрестности одной из притягивающих масс (например, вблизи массы m_2). Таким образом рассматривается случай спутникового движения. Если движущаяся точка достаточно близка к массе m_2 , то ее средняя угловая скорость обращения n_0 будет велика по сравнению с n , и тогда можно в качестве малого параметра принять величину $\varepsilon = n/n_0$. Уравнения (9.25) преобразуем к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\varepsilon \frac{dy}{d\tau} - x &= \frac{1}{n_0^2} U'_x, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\varepsilon \frac{dx}{d\tau} - y &= \frac{1}{n_0^2} U'_y, \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} &= \frac{1}{n_0^2} U'_z, \end{aligned} \right\} \quad (9.26)$$

где $\tau = n_0 t$.

Исследуем упрощенную систему уравнений, получающуюся из (9.26) при $\varepsilon = 0$. Введем сфероидальные координаты u, v, ω , определяемые формулами (3.29) гл. I. В этих переменных кинетическая энергия и силовая функция задачи будут соответственно равны (см. (2.5) гл. III и (3.36) гл. I)

$$T = \frac{c^2}{2} [(ch^2 v - \cos^2 u)(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + sh^2 v \sin^2 u \cdot \dot{\omega}^2], \quad (9.27)$$

$$U = \frac{1}{c(ch^2 v - \cos^2 u)} [f(m_1 + m_2) \operatorname{ch} v + f(m_2 - m_1) \cos u]. \quad (9.28)$$

Интегрирование задачи двух неподвижных центров можно выполнить при помощи теоремы Штеккеля. В результате придем к следующей форме полного интеграла Гамильтона — Якоби:

$$\begin{aligned} W = & \int \sqrt{2f(m_1 + m_2) c \operatorname{ch} v + 2\left(\alpha_1 c^2 \operatorname{ch}^2 v + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{sh^2 v}\right)} dv + \\ & + \int \sqrt{-2f(m_1 - m_2) c \cos u + 2\left(-\alpha_1 c^2 \cos^2 u - \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{\sin^2 u}\right)} du + \\ & + \sqrt{-2\alpha_3 \omega}, \end{aligned} \quad (9.29)$$

в которой α_i — произвольные постоянные.

Для элементарных периодов в соответствии с формулой (7.19) этой главы имеем

$$\left. \begin{aligned} \omega_{11} &= c^2 \int_{v_1}^{v_2} \frac{ch^2 v \, dv}{\sqrt{F_1(v)}}, \quad \omega_{12} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{\sqrt{F_1(v)}}, \quad \omega_{13} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{sh^2 v \sqrt{F_1(v)}}; \\ \omega_{21} &= -c^2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{\cos^2 u \, du}{\sqrt{F_2(u)}}, \quad \omega_{22} = -\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{F_2(u)}}, \quad \omega_{23} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sin^2 u \sqrt{F_2(u)}}, \\ \omega_{31} &= 0, \quad \omega_{32} = 0, \quad \omega_{33} = \frac{2\pi}{\sqrt{-2\alpha_3}}, \end{aligned} \right\} \quad (9.30)$$

где через v_1 и v_2 обозначены корни уравнения

$$F_1(v) = 2f(m_1 + m_2) c \operatorname{ch} v + 2\left(\alpha_1 c^2 \operatorname{ch}^2 v + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{sh^2 v}\right) = 0, \quad (9.31)$$

а через u_1 и u_2 — корни уравнения

$$F_2(u) = -2fc(m_1 - m_2) \cos u + 2 \left(-\alpha_1 c^2 \cos^2 u - \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{\sin^2 u} \right) = 0. \quad (9.32)$$

Частоты, соответствующие каноническим переменным типа «угол», будут равны

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\omega_{11}}, \quad \omega_2 = \frac{\pi \omega_{12}}{\omega_{11} \omega_{22}}, \quad \omega_3 = \frac{\pi \omega_{12} \omega_{23}}{\omega_{11} \omega_{22} \omega_{33}}, \quad (9.33)$$

а переменные действия задаются соотношениями

$$\eta_1 = \frac{1}{\pi} \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{F_1(v)} dv, \quad \eta_2 = \frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{F_2(u)} du, \quad \eta_3 = 2\sqrt{-2\alpha_3}. \quad (9.34)$$

Величины η_i в фазовом пространстве переменных «действие — угол» определяют те торы, на которых происходит невозмущенное движение.

Можно показать, что в рассматриваемой задаче условия теоремы Колмогорова — Арнольда выполнены. В частности, будет отличен от нуля якобиан

$$\frac{D(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{D(\eta_1, \eta_2, \eta_3)}. \quad (9.35)$$

Следовательно, при достаточно малых ε возмущенное движение будет условно-периодическим и устойчивым по Арнольду по отношению к переменным η_i . Отсюда, в частности, заключаем, что использование задачи двух неподвижных центров в качестве невозмущенной при решении круговой задачи трех тел следует считать обоснованным.

З а м е ч а н и е. Так как дифференциальные уравнения движения спутника «трехосной» планеты, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг одной из главных центральных осей инерции, имеют такую же математическую структуру, как и дифференциальные уравнения круговой задачи трех тел, отличаясь друг от друга лишь возмущающими членами в силовой функции, то полученные в этом параграфе результаты в равной мере относятся к обеим задачам. При этом следует предполагать, что «трехосность» планеты достаточно мала. Качественные свойства орбит круговой задачи трех тел, охватывающих обе притягивающие массы, будут такими же, как и соответствующие свойства экваториальных орбит искусственных спутников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mayer A., Ueber den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materialler Punkte, welcher sich aus dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergibt, Math. Ann., Bd. 13, S. 20, Leipzig, 1878.
2. Mayer A., Ber. d. Säch. Ges. d. Wis., Math.-Phys., Bd. 40, 1896.
3. Helmgoltz H., Ueber die physikalische Bedeutung des Princip der kleinsten Wirkung, Journ. für die reine und angew. Math., Bd. 100, s. 137, Berlin, 1887.
4. Hirsch A., Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials, Math. Ann., Bd. 50, S. 429, 1896.
5. Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, ч. 2, Главная редакция физ.-матем. лит-ры изд-ва «Наука», 1966.
6. Егоров В. А., О некоторых задачах динамики полета к Луне, Успехи физич. наук, т. 63, вып. 1а, 1957.
7. Егоров В. А. Пространственная задача достижения Луны, Главная редакция физ.-матем. лит-ры изд-ва «Наука», 1965.
8. Татевский В. М., О некоторых формах уравнений динамики и их приложениях, Журнал эксперим. и теоретич. физики, т. 17, вып. 6, стр. 520, 1947.
9. Татевский В. М., Характеристические функции и уравнения динамики, Вестник МГУ, вып. 5, стр. 83, 1947.
10. Raitzin C. M. A., Sobre una forma de las ecuaciones de la dinamica, Ann. de la Sociedad Scient. Argent., t. 171, №3—4, p. 50, 1961.
11. Raitzin C. M. A., Ann. de la Sociedad Scient. Argent., t. 176, №1—6, p. 62, 1963.
12. Routh E. J., The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, London, 1930.
13. Демин В. Г., Об одной форме уравнений динамики, Труды Ун-та Дружбы Народов им. П. Лумумбы, т. 17, сер. теор. механика, вып. 4, стр. 3, 1966.
14. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли, Сб. Искусств. спутники Земли, вып. 8, стр. 64, 1961.
15. Демин В. Г., Об орбитах задачи двух неподвижных центров, Астрономич. журнал, т. 37, вып. 6, стр. 1068, 1960.
16. Белецкий В. В., О траекториях космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения, Космические исследов., т. 2, вып. 3, 1964.

17. Куницын А. Л., Качественное исследование движения в одном предельном варианте задачи двух неподвижных центров, Труды Унта Дружбы Народов им. П. Лумумбы, т. 17, сер. теор. механика, вып. 4, стр. 32, 1966.
18. Куницын А. Л., О движении ракеты в центральном поле с постоянным вектором реактивного ускорения, Космические исследования, т. 6, вып. 2, стр. 324, 1966.
19. Имшенецкий В. Г., Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными 1-го и 2-го порядка, Изд-во Москов. матем. о-ва, М., 1916.
20. Liouville R., Journ. de Math., vol. 14, № 1, 1849.
21. Stäckel P., Über die Bewegung eines Punktes in einer n -fachen Mannigfaltigkeit, Math. Ann., Bd. 42, S. 537, 1893.
22. Morgera G., Separazioni d. variabili nelle equazioni del moto d'uno punto su una superf., Atti della Rend. Accad. di Torino vol. 20, p. 10, 1885.
23. Dall'Aqua F. A., Sulla integrazione delle equazioni di variabili, Math. Ann., Bd. 66, S. 398, 1909.
24. Pirro G., Sull'integrali primi quadratici delle equazioni della meccanica, Ann. di Math., vol. 24, p. 315, 1896.
25. Painleve P., Sur les petits mouvements periodiques des systemes, Comptes rendus, t. 124, p. 1222, 1897.
26. Мультон Ф. Р., Введение в небесную механику, ОНТИ, 1935.
27. Демин В. Г., Об одном частном случае интегрируемости уравнения Гамильтона—Якоби, Вестник МГУ, сер. физ., астр., № 1, стр. 80, 1960.
28. Шарлье К. Л., Небесная механика, Главная редакция физ.-матем. лит-ры изд-ва «Наука», 1966.
29. Яров-Яровой М. С., Об интегрировании уравнения Гамильтона—Якоби методом разделения переменных, ПММ, т. 27, вып. 6, стр. 973, 1963.
30. Арнольд В. И., Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики, Сибирский матем. журн., т. 7, вып. 2, 1963.
31. Алексеев В. М., Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров. Классификация движений. Бюлл. Института теорет. астрономии, т. 10, вып. № 4 (117), стр. 241, 1965.
32. Darboux G., Comptes rendus, t. 108, p. 449, 1889.
33. Garfinkel B., On the motion of a satellite of an oblate planet, Astron. Journ., vol. 64, № 7, 1959.
34. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937.
35. Лурье А. И., Об одной форме уравнений движения материальной точки в поле тяготения Земли, Космические исследов., т. 3, вып. 6, стр. 351, 1965.
36. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1963.
37. Varga R. B., Some remarks on the motion of a satellite of an oblate planet, Astron. Journ., vol. 66, № 1, 1961.
38. Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, ОНТИ, 1936.
39. Борн М., Лекции по атомной механике, т. 1, ГНТИ Украины, Харьков — Киев, 1934.

40. Vinti J. P., Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy, Journ. Res. Nat. Bur. Standards, vol. 63B, № 3, p. 105, 1959.
41. Vinti J. P., Mean motions in conditionally periodic separable systems, Journ. Res. Nat. Bur. Standards, vol. 65B, № 2, p. 131, 1961.
42. Арнольд В. И., Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике, сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», стр. 7, 1963.
43. Мозер, Ю., Новый метод построения решений нелинейных дифференциальных уравнений, сб. переводов «Математика», т. 6, вып. 4, стр. 3, 1962.
44. Gauss K. F., Allgemeine Lehrsätze, Bd. 5, 1840.
45. Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, М.—Л., 1946.
46. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 3, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
47. Кислик М. Д., Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли, сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4, 1960.
48. Гобсон Е., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М., 1952.
49. Lense J., Die Kugelfunktionen, Leipzig, 1950.
50. Жонголо́вич И. Д., Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним, Труды Ин-та теор. астрономии, т. 3, 1952.
51. Heiskanen W. A., The columbus Geoid, Trans. Amer. Geophys. Union, vol. 38, 1957.
52. Uotilla U. A., Determination of the shape of the geoid, Publ. Inst. Geod. Photogram., Cartogr., vol. 7, Ohio Univ., 1957.
53. Грушинский Н. П., Теория фигуры Земли, Физматгиз, 1963.
54. Delaunay C., Théorie du mouvement de la Lune, 1, 1860.
55. Жонголо́вич И. Д., Опыт определения некоторых параметров гравитационного поля Земли из результатов наблюдения спутников 1957, 1958, 1959 гг., Бюлл., станций оптич. наблюд. ИСЗ, т. 1, № 2, 1960.
56. Kozai Y., The gravitational field of the Earth derived from the motions of three satellites, Astron. Journ., vol. 65, 1960.
57. King-Hele D. G., Determination of air density and the Earth's gravitational field from the orbits of artificial satellites, Proc. 10th Int. Ast. Cong., Springer Verlag, Vienna, 1959.
58. Jacchia L. G., The Earth's gravitational potential as gravitational potential as derived from satellites, Smith.Astr. Obs., Sp. rep., № 19, 1958.
59. Buchar E., Determination of some parameters of the Earth from the rotation of the nodal line of artificial satellites, Paper circulated at LUGG Assamly, Helsinki, 1960.
60. O'Keefe J. A., Eckels A., Squires R. K., The gravitational field of the Earth, Astron. Journ., vol. 64, 1959.
61. Kozai Y., The potential of the earth derived from satellite motions, Dynamics Satellite, Sympos., Paris, 1962, p. 65; Berlin, 1963.

62. Загребин Д. В., Уровненный трехосный эллипсоид и сила тяжести на его поверхности, Изд-во АН СССР, 1948.
63. Загребин Д. В., Теория регуляризированного геоида, Труды ин-та теор. астрономии, т. 1, 1952.
64. Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, Физматгиз, М., 1963.
65. Woolard E. W., The secular perturbations of the satellites of Mars, *Astron. Journ.*, vol. 51, № 2, p. 33, 1944.
66. de Sitter W., Jupiter's Gallilean satellites, *Month. Not. of the Roy. Astr. Soc.*, vol. 61, № 7, p. 706, 1931.
67. Sampson R. A., Theory of four satellites of Jupiter, *Mem. of the Roy. Astr. Soc.*, vol. 63, p. 1, 1921.
68. Tisserand F., *Traité de mécanique céleste*, t. 2, 1891.
69. Jeffreys H., Second-order terms in the figure of Saturn, *Month. Not. of the Roy. Astr. Soc.*, vol. 114, № 4, p. 433, 1954.
70. Goudas C. L. The selenodetic control system of the Aeronautical chart and Information Center of the U. S. Air Force, *Icarus*, vol. 4, № 5—6, p. 528, 1965.
71. Аким Э. Л., Определение поля тяготения Луны по движению искусственного спутника Луны «Луна-10», *Космические исследов.*, т. 4, вып. 4, стр. 823, 1966.
72. Охотимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. П., Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты, *Успехи физич. наук*, т. 63, вып. 1а, стр. 33, 1957.
73. Brower D., Solution of the problem of artificial satellite theory without drag, *Astron. Journ.*, vol. 64, p. 378, 1959.
74. Brower D., Hori G. I., Theoretical evaluation of atmospheric drag effects in the motion of an artificial satellite, *Astr. Journ.*, vol. 66, p. 193, 1961.
75. Козай И., Движение близких искусственных спутников, сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», Изд-во АН СССР, 1963.
76. Kozai Y., Second-order solution of artificial satellite theory without air drag, *Astr. Journ.*, vol. 64, № 7, 1959.
77. Орлов А. А., Влияние сфероидальности планеты на движение ее спутника, *Сообщения ГАИШ*, № 112, стр. 3, 1961.
78. Орлов А. А., Влияние третьей и пятой гармоник в разложении силовой функции притяжения планеты на движение ее спутника, *Вестник МГУ*, сер. 3, вып. 6, стр. 80, 1964.
79. Hill G. W., Researches in the lunar theory, *Journ. of Math. pure and appl.*, vol. 1, 1878.
80. Samter H., Das Zweizentrenproblem in der Störungstheorie, *Astron. Nachr.*, Bd. 217, № 5193—94, S. 129, 1923.
81. Демин В. Г., Об орбитах задачи двух неподвижных центров, *Астроном. журн.*, т. 37, № 6, 1960.
82. Демин В. Г., Об одном классе периодических орбит в ограниченной круговой задаче трех тел, *Бюлл. Ин-та теор. астрономии*, т. 7, вып. № 10 (93), 1960.
83. Newton R., Motion of a satellite around an unsymmetrical central body, *Journ. Appl. phys.*, vol. 30, № 2, 1959.

84. Демин В. Г., Новые классы периодических решений ограниченной круговой задачи трех тел, дисс., МГУ, 1961.
85. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли, *Астроном. журнал*, т. 40, вып. 2, стр. 363, 1963.
86. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Применение обобщенной задачи двух неподвижных центров в теории движения искусственных спутников Земли, сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», стр. 92, Изд-во АН СССР, 1963.
87. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Качественный анализ форм движения в задаче о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли, сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, стр. 173, 1963.
88. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Классификация ограниченных движений искусственных небесных тел, сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», стр. 99, Изд-во АН СССР, 1963.
89. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Об устойчивости некоторых классов орбит искусственных спутников Земли, сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, стр. 163, 1963.
90. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., О полярных орбитах, искусственных спутников Земли, *Вестник МГУ, сер. физ., астр.*, № 5, стр. 81, 1962.
91. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Траектории параболического класса в задаче о движении материальной частицы в нормальном поле притяжения Земли, *Сообщения ГАИШ*, № 123, стр. 22, 1962.
92. Демин В. Г., Об эллиптических орбитах задачи двух неподвижных центров, *Сообщения ГАИШ*, № 115, 1960.
93. Дегтярев В. Г., Об устойчивости движения в обобщенной задаче двух неподвижных центров, *ПММ*, т. 26, вып. 6, 1962.
94. Дегтярев В. Г., О полярных орбитах искусственных спутников Земли, *ПММ*, т. 27, вып. 6, 1963.
95. Дегтярев В. Г., Евдокимова Л. С., Анализ устойчивости круговых орбит в задаче двух неподвижных центров, *Бюлл. Ин-та теор. астрономии*, т. 10, вып. 8 (121), стр. 516, 1966.
96. Euler L., De motu corporis ad duo centra viricum fixa attracti, *Novi Comment. Acad. Scient. Imperial. Petropolit.*, vol. 10, p. 207, 1764, v. 11, p. 152, 1765.
97. Lagrange J. L., Recherches sur le mouvement d'un corps qui est attiré par deux centres fixes, *Oeuvres de Lagrange*, t. 2, p. 67.
98. Якоби К., Лекции по динамике, ОНТИ, 1936.
99. Бадалян Г., О проблеме двух неподвижных центров, *Астрономич. журн.*, т. 11, № 4, 1934.
100. Бадалян Г., Об упрощении уравнений траектории в проблеме двух неподвижных центров, *ДАН АН СССР*, т. 24, № 2, 1939.
101. Badalian G., Zum problem von zwei festen Zentren, *Soc. Scient. Fennicae Comment., Phys.-Math.*, t. 8, № 2, 1939.

102. Tallqvist H., Über die Bewegung eines Punktes, welcher von zwei festen Zentren nach dem Newtonischen Besetze angezogen wird, Acta Soc. Scient. Fennicae, Nova ser., Bd. 1, № 1, 1927.
103. Tallqvist H., Zum Zweizentrenproblem beim Vorhandensein auch abstossender Kräfte, Acta Soc. Scient. Fennicae, Nova ser., Bd. 1, № 1, S. 1, 1927.
104. Thiele T. H., Astr. Nachr., Bd. 138, № 3289, 1895.
105. Чоудхари Р. К., Сравнение решений проблемы двух неподвижных центров в квадратурах и рядах, Вестник МГУ, сер. физ., астр., № 2, 1967.
106. Steffensen J. E., On the restricted problem of three bodies, Kgl. danske Videnskabs selskab., Math.-fys. medd., v. 30, № 18, 1956.
107. Штерн Т. Е., Введение в небесную механику, «Мир», 1964.
108. Демин В. Г., Приближенное решение задачи о движении искусственного спутника Земли, Сообщения ГАИШ, № 125, стр. 3, 1962.
109. Мак-Миллан В. Д., Динамика твердого тела, ИЛ, 1961.
110. Брауер Д., Клеменс Дж., Методы небесной механики, изд-во «Мир», 1964.
111. Демин В. Г., Об одном способе исследования движения космического аппарата в сфере действия планеты, Тр. Ун-та Дружбы народов им. П. Лумумбы, т. 17, сер. теор. механ., вып. 4, стр. 13, 1966.
112. Куницын А. Л., Об одном предельном варианте задачи двух неподвижных центров и его приложениях, Дисс., МГУ, 1966.
113. Nitt M. M., Über die Bewegung der Rakete in einen Zentralkraftfeld, Rev. de mech. appl., t. 6, № 2, 1961.
114. Saint-Germain M. A., Mouvement d'un point pesant attiré par un point fixe suivant la loi de Newton, Ann. de Math., ser. 3, t. 11, 1891.
115. Чеботарев Г. А., Методы небесной механики, изд-во «Наука», М.—Л., 1965.
116. Кислик М. Д., Сферы влияния больших планет и Луны, Космические исследов., т. 2, вып. 6, 1964.
117. Jones H. M., Shapiro I. I., Zadunaisky P. E., Solar radiation pressure effects, gas leakage rates and air densities inferred from the orbit of Echo I, Space Res., vol. 2, Amsterdam, p. 339, 1961.
118. Hadamard J., Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique, Journ. de Math. pures et appl., t. 3, № 5, p. 331, 1897.
119. Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
120. Hill G. W., Collected Works, Carnegie inst., vol. 1—4, 1902—1907.
121. Bohl K., Über die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme, Acta Math., Bd. 10, S. 109, 1887.
122. Darwin G., Periodic orbits, Acta Math., Bd. 21, S. 99, 1897.
123. Моисеев Н. Д., О некоторых общих методах качественного изучения форм движения в проблемах небесной механики, Труды ГАИШ, т. 7, вып. 1, стр. 3, 1936.
124. Иванов Ю. И., Новый подход к качественному анализу пространственной задачи двух неподвижных центров, Труды Астрофизического ин-та АН Каз. ССР, т. 7, стр. 32, 1966.

125. Ф а м В а н Ч и, Качественный анализ движений гиперболического класса в задаче о движении искусственного спутника Земли, Дипл. работа, МГУ, 1962.
126. Б е л е ц к и й В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс, Главная редакция физ.-матем. лит.-ры изд-ва «Наука», 1965.
127. Б е л е ц к и й В. В., Некоторые вопросы движения искусственных спутников относительно центра масс, сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», стр. 218, Изд-во АН СССР, 1963.
128. С у ш к е в и ч А. К., Основы высшей алгебры, 1941.
129. Р е з н и к о в с к и й П. Т., Разложение пертурбационных функций простейших осредненных вариантов плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел, Труды ГАИШ, т. 21, стр. 159, 1952.
130. J z s a k J. G., A theory of satellite motion about an oblate planet, I, A second-order solution of Vinti's dynamical problem, Smithsonian Inst., Astrophys. Obs., Spec. Rep., № 52, p. 54, 1960.
131. А к с е н о в Е. П., Промежуточные орбиты искусственных спутников Земли с малым эксцентриситетом, Космические исследов., т. 2, вып. 1, стр. 14, 1964.
132. А к с е н о в Е. П., О промежуточных орбитах искусственных спутников Земли, Вестник МГУ, сер. физ., астр., № 3, стр. 36, 1965.
133. А к с е н о в Е. П., Движение искусственных спутников в нормальном поле притяжения Земли, Сообщ. ГАИШ, №137, стр. 3, 1965.
134. A k s e n o v E. P., Motion of an artificial satellite in the earth's gravitational field, Proceed. of the XIV-th Intern. Astronaut. Congr., Paris, 1963.
135. Н о ù e l, Cours de calcul infinitesimal, vol. 4, Paris, 1881.
136. Ж у р а в с к и й А. М., Справочник по эллиптическим функциям., АН СССР, 1940.
137. А к с е н о в Е. П., Влияние тессеральных и секториальных гармоник земного потенциала на движение искусственных спутников, Труды ГАИШ, т. 35, стр. 75, 1966.
138. А к с е н о в Е. П., Лунно-солнечные возмущения в движении искусственных спутников Земли, Труды ГАИШ, т. 35, стр. 93, 1966.
139. А к с е н о в Е. П., Один вид дифференциальных уравнений движения спутника, Труды ГАИШ, т. 35, стр. 44, 1966.
140. С и к о р с к и й Ю. С., Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, ОНТИ, 1936.
141. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
142. Т и м о ш к о в а Е. И., Об определении постоянных интегрирования в обобщенной задаче двух неподвижных центров, Вестник ЛГУ, т. 13, вып. 3, 1966.
143. А к с е н о в Е. П., Определение элементов орбиты ИСЗ по начальным данным, Труды ГАИШ, т. 35, стр. 36, 1966.
144. Л а в р и к В. Н., Об одном способе определения осциллирующей орбиты ИСЗ, Космические исследования, т. 5, вып. 2, 1967.
145. С у б б о т и н М. Ф., Курс небесной механики, т. I, Гостехиздат, 1947.
146. P o i n c a r e H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 1—3, Paris, 1892—1899.

147. Painlevé P., Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, Stockholm, 1895.
148. Hopf E., Über die geschlossenen Bahnen in der Mondtheorie, Sitzungsber. d. Preuss. Akad., d. Wiss., Bd. 23, 1929.
149. Poincaré O., Neuer Existenzbeweis für periodische Bahnen in eingeschränkten Dreikörperproblem, Monatshefte für Math. und Phys., Bd. 43, 1936.
150. Орлов А. А., О пространственных периодических решениях в ограниченной задаче трех тел, Труды ГАИШ, т. 15, вып. 2, 1950.
151. Голубев В. В., Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, Гостехиздат, М., 1953.
152. Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
153. Poincaré H., Traite d'analyse, t. 3, Paris, 1908.
154. Hill G. W., Illustration of periodic solutions in the problem of three bodies, Astron. Journ., vol. 22, 93, 1902.
155. Moulton F. R., Periodic orbits, Washington, 1920.
156. Демин В. Г., Новые классы периодических решений в ограниченной задаче трех тел, Астроном. журн., т. 38, вып. I, 1961.
157. Демин В. Г., Аксенов Е. П., О периодических движениях частицы в поле тяготения медленно вращающегося тела, Вестник МГУ, сер. III, № 6, стр. 87, 1960.
158. Демин В. Г., О почти круговых орбитах искусственных спутников Земли, сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, 1961.
159. Аксенов Е. П., Демин В. Г., О периодических орбитах искусственного спутника Луны, Бюлл. ИТА АН СССР, т. 7, № 10 (93), 1960.
160. Whittaker E. T., On periodic orbits, Moth. Not. of the Roy. Astr. Soc., vol. 62, p. 186, 1902.
161. Бирхгоф Дж. Д., Динамические системы, Гостехиздат, 1941.
162. Демин В. Г., Один класс ограниченных движений спутника сфероидальной планеты, Труды Ун-та Дружбы Народов им. П. Лумумбы, т. 17, сер. теор. механика, вып. 4, стр. 18, 1966.
163. Моисеев Н. Д., О некоторых общих методах качественного изучения форм движения в проблемах небесной механики, 2, Труды ГАИШ, т. 9, вып. 2, 1940.
164. Рейн Н. Ф., О методе оценки периода решения ограниченной задачи трех тел, связанном с интегралом Виттекера, ДАН СССР, нов. сер., т. 16, № 6, стр. 303, 1937.
165. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1947.
166. Арнольд В. И., Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, № 1, 1961.
167. Арнольд В. И., Малые знаменатели. II. Доказательство теоремы Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, Успехи матем. наук, т. 18, вып. 5 (113), стр. 13, 1963.
168. Арнольд В. И., Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, Успехи матем. наук, т. 18, вып. 6 (114), стр. 91, 1963.

169. Румянцев В. В., Об устойчивости движения по отношению к части переменных, Вестник МГУ, № 4, 1957.
170. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В., Динамика тела с полостями, содержащими жидкость, Главная редакция физ.-матем. лит-ры изд-ва «Наука», 1965.
171. Румянцев В. В., Одна теорема об устойчивости, ПММ, т. 24, вып. 1, 1960.
172. Дубошин Г. Н., Об устойчивости в смысле Ляпунова кеплеровского движения, Труды ГАИШ, т. 21, стр. 19, 1952.
173. Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, Главная редакция физ.-матем. лит-ры изд-ва «Наука», 1966.
174. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Собр. соч., т. 2, Изд-во АН СССР, 1956.
175. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, М., 1954.
176. Четаев Н. Г., Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа, ПММ, т. 18, вып. 1, стр. 123, 1954.
177. Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, Изд-во АН СССР, 1962.
178. Демин В. Г., Об устойчивости перманентного вращения тяжелого твердого тела, мало отличающегося от гироскопа Ковалевской, Труды Ун-та Дружбы Народов им. П. Лумумбы, т. 4, сер. теор. механика, вып. 2, 1963.
179. Демин В. Г., Об устойчивости поступательно-вращательного движения стреловидного спутника планеты, Труды Ун-та Дружбы Народов им. П. Лумумбы, т. 17, сер. теор. механика, вып. 4, стр. 8, 1966.
180. Пожарицкий Г. К., О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения, ПММ, т. 22, вып. 2, 1958.
181. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
182. Дубошин Г. Н., К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений, Труды ГАИШ, т. 14, вып. 1, стр. 153, 1940.
183. Дубошин Г. Н., О периодических движениях в системе спутников Сатурна, Труды ГАИШ, т. 15, вып. 1, 1945.
184. Чандрасекар С., Принципы звездной динамики, ИЛ, 1948.
185. Демин В. Г., Об устойчивости круговых орбит, Вестник МГУ, сер. физ., астр., № 4, стр. 76, 1960.
186. Дегтярев В. Г., Об устойчивости круговых движений в задаче двух неподвижных центров, ПММ, т. 26, вып. 4, 1962.
187. Дегтярев В. Г., Об устойчивости круговых орбит искусственных спутников Земли, Инженерный журн., т. 3, вып. 3, 1963.
188. J z s a k I., On satellite orbits with very small eccentricities, *Astroph. Journ.*, vol. 66, p. 129, 1961.
189. Самойлович Г. В., Движение искусственного спутника не-сферической Земли, сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, 1963.
190. Самойлович Г. В., Эволюция орбиты кругового спутника, Космические исслед., т. 2, вып. 2, 1964.

191. Пуанкаре А., Лекции по небесной механике, Главная редакция физ.-матем. лит-ры изд-ва «Наука», 1965.
192. Демин В. Г., Применение теоремы В. В. Румянцева об устойчивости по отношению к части переменных в задачах небесной механики, Космические исследов., т. 2, вып. 5, 1965, стр. 716.
193. Дубошин Г. Н., Об устойчивости регулярных движений искусственных небесных тел, Астроном. журн., т. 31, вып. 4, стр. 723, 1959.
194. Кондурарь В. Т., Проблема двух эллипсоидов под действием взаимного тяготения, Астроном. журн., т. 13, вып. 6, стр. 563, 1936.
195. Кондурарь В. Т., Проблема движения двух эллипсоидов под действием взаимного тяготения, Сообщения ГАИШ, № 115, стр. 3, 1960.
196. Кондурарь В. Т., Движения прямолинейные, круговые и близкие к ним в задаче о поступательно-вращательном движении простейших тел под действием притяжения Земли, Бюлл. ИТА АН СССР, т. 10, стр. 582, 1966.
197. Румянцев В. В., Об устойчивости стационарных движений спутника с ротором и полостью, содержащей жидкость, Космические исследов., т. 5, вып. 2, стр. 163, 1967.
198. Сарычев В. А., Исследование динамики системы гравитационной стабилизации, сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, стр. 10, 1963.
199. Сарычев В. А., Влияние сопротивления атмосферы на систему гравитационной стабилизации ИСЗ, Космические исследов., т. 2, вып. 1, стр. 23, 1964.
200. Сарычев В. А., Асимптотически устойчивые стационарные вращения спутника, Космические исследов., т. 3, вып. 5, 1965.
201. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Аналитические и качественные методы, Главная редакция физ.-матем. лит-ры изд-ва «Наука», 1964.
202. Демин В. Г., Об устойчивости спутниковых орбит при постоянно действующих возмущениях, Космические исследов., т. 2, вып. 5, стр. 719, 1964.
203. Купег W. T., Qualitive properties of orbits about an oblate planet, Comm. on pure and appl. math., vol. 17, № 2, p. 227, 1964.
204. Леонтович А. М., Об устойчивости лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трех тел, ДАН СССР, т. 143, № 3, стр. 525, 1962.
205. Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.
206. Холшевников К. В., О величине коэффициентов разложения потенциала, Вестник Ленингр. ун-та, № 13, стр. 155, 1965.
207. Холшевников К. В., Необходимое условие устойчивости орбитального движения спутника в поле тяготения несферической планеты, Бюлл. Ин-та теор. астрономии, т. 10, № 5 (118), стр. 92, 1965.
208. Холшевников К. В., Устойчивость орбитального движения спутника в поле тяготения несферической планеты, Вестник Ленингр. ун-та, № 1, сер. матем., мех. и астр., вып. 1, стр. 172, 1966.
209. P o r i t s k y H., Motion of a satellite around an oblate earth, Astronom. Journ., vol. 67, № 4, 1962.

